Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Пухликов, Бирационально жесткие расслоения
Фано. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, вы-
пуск 4, 175–204

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8273>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 17:36:01

УДК 512.7

А. В. Пухликов

Бирационально жесткие расслоения Фано. II

Доказана бирациональная жесткость больших классов расслоений Фано–Мори над базой произвольной размерности, ограниченной сверху константой, зависящей только от размерности слоя. Для этого сначала установлено, что если каждый слой расслоения Фано–Мори удовлетворяет некоторым естественным условиям, то любое бирациональное отображение на другое расслоение Фано–Мори является послойным. Затем построены большие классы расслоений (на двойные пространства Фано индекса один и на гиперповерхности Фано индекса один), удовлетворяющих этим условиям.

Библиография: 35 наименований.

Ключевые слова: расслоение Фано–Мори, бирациональная жесткость, максимальная особенность, гиперкасательный дивизор, логканоническая особенность, линейная система, канонический класс.

DOI: 10.4213/im8273

§ 1. Введение

1.1. Бирационально жесткие расслоения Фано–Мори. В настоящей работе изучается вопрос о бирациональной жесткости расслоений Фано–Мори $\pi: V \rightarrow S$. Предполагаем, что база S неособа, многообразие V имеет, самое большее, факториальные терминальные особенности, антиканонический класс $(-K_V)$ относительно обилен и

$$\mathrm{Pic} V = \mathbb{Z}K_V \oplus \pi^* \mathrm{Pic} S.$$

Пусть $\pi': V' \rightarrow S'$ – произвольное рационально связное расслоение, т. е. морфизм проективных алгебраических многообразий, где база S' и слой общего положения $(\pi')^{-1}(s')$, $s' \in S'$, рационально связны, и $\dim V = \dim V'$. Рассмотрим бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ (если таковые существуют). Для описания свойств отображения χ решающее значение имеет ответ на вопрос: является ли χ послойным, т. е. переводит ли χ слои проекции π в слои проекции π' ? Ожидается (и подтверждено всеми известными до сих пор примерами, см. п. 1.5), что ответ утвердительный, если расслоение π “достаточно закручено по базе”. Рассматривая эту задачу, можно выбирать различные классы расслоений Фано–Мори и по-разному интерпретировать свойство “закрученности по базе”. В настоящей работе доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что расслоение Фано–Мори $\pi: V \rightarrow S$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *каждый слой $F_s = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, есть факториальное многообразие Фано с терминальными особенностями и группой Пикара $\mathrm{Pic} F_s = \mathbb{Z}K_{F_s}$;*

(ii) для любого эффективного дивизора $D \in |-nK_{F_s}|$ на произвольном слое F_s пара $(F_s, \frac{1}{n}D)$ логканонична, а для любой подвижной линейной системы $\Sigma_s \subset |-nK_{F_s}|$ пара $(F_s, \frac{1}{n}D)$ канонична для общего дивизора $D \in \Sigma_s$;

(iii) для любого подвижного семейства $\bar{C}$ кривых на базе S , заметающего S , и общей кривой $\bar{C} \in \bar{C}$ класс алгебраического цикла

$$-N(K_V \cdot \pi^{-1}(\bar{C})) - F$$

размерности $\dim F$ для любого положительного $N \geq 1$ (где F – слой проекции π) не является эффективным, т. е. рационально не эквивалентен эффективному циклу размерности $\dim F$.

Тогда любое бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ на тотальное пространство рационально связного расслоения V'/S' является послойным, т. е. существует рациональное доминантное отображение $\beta: S \dashrightarrow S'$ такое, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\chi} & V' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ S & \xrightarrow{\beta} & S' \end{array}$$

Теперь перечислим стандартные факты, немедленно вытекающие из теоремы 1.1, а затем обсудим вопрос о том, насколько ограничительны условия (i)–(iii).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. В предположениях теоремы 1.1 на многообразии V нет структур рационально связного расслоения над базой размерности, строго большей, чем $\dim S$. В частности, многообразие V нерационально. Любой бирациональный автоморфизм многообразия V является послойным и индуцирует бирациональный автоморфизм базы S , так что имеется естественный гомоморфизм групп $\rho: \text{Bir } V \rightarrow \text{Bir } S$, ядро которого $\text{Ker } \rho$ есть группа $\text{Bir } F_\eta = \text{Bir}(V/S)$ бирациональных автоморфизмов общего слоя F_η (над общей незамкнутой точкой η базы S), а группа $\text{Bir } V$ является расширением нормальной подгруппы $\text{Bir } F_\eta$ с помощью группы $\Gamma = \rho(\text{Bir } V) \subset \text{Bir } S$:

$$1 \rightarrow \text{Bir } F_\eta \rightarrow \text{Bir } V \rightarrow \Gamma \rightarrow 1.$$

Возникает вопрос: насколько ограничительны условия (i)–(iii)? Условие (iii) принадлежит тому же классу требований, что и хорошо известные K^2 -условие, K -условие для расслоений над $\mathbb{P}^1$ (см., например, [1, ч. 4]) и условие Саркисова для расслоений на коники (см. [2], [3]). Условие (iii) характеризует “степень закрученности” расслоения V/S по базе S . Далее мы иллюстрируем этот смысл условия (iii) конкретными примерами. Будет видно, что это условие не является слишком ограничительным: при фиксированном способе построения расслоения V/S и фиксированном “объемлющем” расслоении X/S условию (iii) удовлетворяют “почти все” семейства расслоений V/S .

В терминах численной геометрии многообразий V и S условие (iii) может быть выражено следующим образом. Пусть

$$A^*(V) = \bigoplus_{i=0}^{\dim V} A^i(V)$$

– численное кольцо Чжоу многообразия V , градуированное коразмерностью. Положим

$$A_i(V) = A^{\dim V - i}(V) \otimes \mathbb{R}$$

и обозначим через $A_i^{\text{mov}}(V)$ замкнутый конус в $A_i(V)$, порожденный классами подвижных циклов, семейства которых закрывают V , а через $A_i^+(V)$ – псевдоэффективный конус в $A_i(V)$, порожденный классами эффективных циклов. Далее, через $A_{i, \leq j}(V)$ обозначим линейное подпространство в $A_i(V)$, порожденное классами подмногообразий размерности i , образ которых на S имеет размерность не выше j . В вещественном пространстве $A_{i, \leq j}(V)$ рассмотрим замкнутые конусы $A_{i, \leq j}^{\text{mov}}(V)$ подвижных и $A_{i, \leq j}^+(V)$ псевдоэффективных классов. Аналогичным образом определим вещественное линейное пространство $A_i(S)$ и замкнутые конусы $A_i^{\text{mov}}(S)$ и $A_i^+(S)$. Если $\delta = \dim F$ – размерность слоя проекции π , то операция взятия прообраза порождает линейное отображение

$$\pi^*: A_i(S) \rightarrow A_{\delta+i, \leq i}(V),$$

причем $\pi^*(A_i^+(S)) \subset A_{\delta+i, \leq i}^+(V)$ и $\pi^*(A_i^{\text{mov}}(S)) \subset A_{\delta+i, \leq i}^{\text{mov}}(V)$. Рассмотрим теперь линейное отображение

$$\gamma: A_1(S) \rightarrow A_{\delta, \leq 1}(V),$$

определенное формулой

$$z \mapsto -(K_V \cdot \pi^* z).$$

Смысл условия (iii) состоит в том, что образ конуса $\gamma(A_1^{\text{mov}}(S))$ содержится в границе псевдоэффективного конуса $A_{\delta, \leq 1}^+(V)$, т. е.

$$\gamma(A_1^{\text{mov}}(S)) \cap \text{Int } A_{\delta, \leq 1}^+(V) = \emptyset.$$

Точнее, для любого класса $z \in A_1^{\text{mov}}(S)$ пересечение замкнутого луча

$$\{\gamma(z) - t[F] \mid t \in \mathbb{R}_+\},$$

где $[F] \in \text{Int } A_{\delta, \leq 1}^+(V)$ – класс слоя проекции π , с конусом $A_{\delta, \leq 1}^+(V)$ или пусто, или состоит из единственной точки $\gamma(z)$.

Можно предположить, что условие (iii) близко к критериальному (“тогда и только тогда”), т. е. его нарушение (или существенное отклонение от него) означает существование другой структуры расслоения Фано–Мори на многообразии V .

Следующее замечание дает очевидный способ проверки условия (iii).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Предположим, что на многообразии V имеется численно эффективный дивизориальный класс L такой, что $(L^\delta \cdot F) > 0$ и линейная функция $(\cdot L^\delta)$ неположительна на конусе $\gamma(A_1^{\text{mov}}(S))$, т. е. для любой подвижной кривой $\overline{C}$ на S справедливо неравенство

$$(L^\delta \cdot K_V \cdot \pi^{-1}(\overline{C})) \geq 0. \quad (1.1)$$

Тогда условие (iii) очевидным образом выполнено.

Условия (i) и (ii), однако, намного более ограничительны. Они означают, что все слои проекции π являются многообразиями достаточно общего положения в своем семействе. Отсюда следует, что размерность базы при фиксированном

семействе слоев ограничена сверху (константой, зависящей от конкретного семейства, которому принадлежат слои). В примерах, рассмотренных в настоящей работе, для достаточно большой размерности слоя $\delta = \dim F$ размерность базы ограничена сверху числом порядка $\frac{1}{2}\delta^2$. Те же соображения можно выразить и “двойственным” образом, фиксируя размерность базы $\dim S = w$: при таком подходе размерность слоя ограничена *снизу* константой порядка $\sqrt{2w}$. В частности, для расслоений с маломерным слоем (например, для расслоений на коники или поверхности дель Пеццо) теорема 1.1 ничего не дает, однако ее смысл как раз в описании бирациональной геометрии расслоений Фано–Мори, имеющих и слой, и базу большой размерности. Напомним, что до сих пор не было известно ни одного примера расслоения на многомерные многообразия Фано над базой размерности два и выше, имеющего только одну структуру рационально связного расслоения (краткий исторический обзор см. в п. 1.5).

1.2. Расслоения на двойные пространства индекса один. Через $\mathbb{P}$ обозначим проективное пространство $\mathbb{P}^M$, $M \geq 5$. Пусть

$$\mathcal{W} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(2M)))$$

– пространство гиперповерхностей степени $2M$ в $\mathbb{P}$. Имеет место следующий факт.

ТЕОРЕМА 1.2. *Существует открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ такое, что для любой гиперповерхности $W \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ двойное накрытие $\sigma: F \rightarrow \mathbb{P}$, разветвленное над W , удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1.1, причем справедлива оценка*

$$\text{codim}((\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\text{reg}}) \subset \mathcal{W}) \geq \frac{(M-4)(M-1)}{2}.$$

Явное описание множества $\mathcal{W}_{\text{reg}}$ и доказательство теоремы 1.2 приведены в § 2. Зафиксируем число $M \geq 5$ и неособое рационально связное многообразие S размерности $\dim S < \frac{1}{2}(M-4)(M-1)$. Пусть $\mathcal{L}$ – локально свободный пучок ранга $M+1$ на S и $X = \mathbb{P}(\mathcal{L}) = \mathbf{Proj} \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^{\otimes i}$ – соответствующее $\mathbb{P}^M$ -расслоение. Можно считать, что $\mathcal{L}$ порождается своими сечениями, так что пучок $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(1)$ также порождается сечениями. Пусть $L \in \text{Pic } X$ – класс этого пучка, так что

$$\text{Pic } X = \mathbb{Z}L \oplus \pi_X^* \text{Pic } S,$$

где $\pi_X: X \rightarrow S$ – естественная проекция. Рассмотрим общий дивизор

$$U \in |2(ML + \pi_X^* R)|,$$

где $R \in \text{Pic } S$ – некоторый класс. Если эта система достаточно подвижна, то в силу предположения о размерности базы S и теоремы 1.2 можно считать, что для любой точки $s \in S$ гиперповерхность $U_s = U \cap \pi_X^{-1}(s)$ принадлежит $\mathcal{W}_{\text{reg}}$, а потому двойное пространство, разветвленное над U_s , удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1.1. Пусть $\sigma: V \rightarrow X$ – двулистное накрытие с ветвлением в U . Положим $\pi = \pi_X \circ \sigma: V \rightarrow S$, так что V есть расслоение на двойные пространства Фано индекса один над S . Напомним, что дивизор $U \in |2(ML + \pi_X^* R)|$ предполагается достаточно общим.

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что дивизориальный класс $(K_S + R)$ псевдоэффективен. Тогда для расслоения $\pi: V \rightarrow S$ справедливы утверждения теоремы 1.1 и следствия 1.1. В частности,*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

– циклическая группа порядка 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку условия (i) и (ii) теоремы 1.1 выполнены по построению многообразия V , осталось проверить условие (iii). Воспользуемся замечанием 1.1. Элементарные вычисления показывают, что неравенство (1.1) с точностью до положительного множителя есть неравенство

$$((K_S + R) \cdot \overline{C}) \geq 0.$$

Поскольку кривая $\overline{C}$ принадлежит подвижному семейству, заметающему базу S , последнее неравенство выполнено, если класс $(K_S + R)$ псевдоэффективен. Теорема доказана.

ПРИМЕР 1.1. Пусть $S = \mathbb{P}^m$, где $m < \frac{1}{2}(M-4)(M-1)$, $X = \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^m$ и W_X – общая гиперповерхность бистепени $(2M, 2l)$, где $l \geq m+1$. Тогда для двойного накрытия $\sigma: V \rightarrow X$, разветвленного над W_X , справедливы утверждения теоремы 1.1 и следствия 1.1. Отметим, что при $l \leq m$ на двойном накрытии V имеется другая структура расслоения Фано: она дается проекцией $\pi_1: V \rightarrow \mathbb{P}^M$. Таким образом, условие (iii) теоремы 1.1 и его реализация в теореме 1.3 оказываются точными.

1.3. Расслоения на гиперповерхности Фано индекса один. Через $\mathbb{P}$ продолжаем обозначать проективное пространство $\mathbb{P}^M$, $M \geq 10$. Зафиксируем M . Пусть $\mathcal{F} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(M)))$ – пространство гиперповерхностей степени M в $\mathbb{P}$. Имеет место следующий факт.

ТЕОРЕМА 1.4. *Существует открытое по Зарисскому подмножество $\mathcal{F}_{\mathrm{reg}} \subset \mathcal{F}$ такое, что любая гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1.1, причем справедлива оценка*

$$\mathrm{codim}((\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\mathrm{reg}}) \subset \mathcal{F}) \geq \frac{(M-7)(M-6)}{2} - 5. \quad (1.2)$$

Явное описание подмножества $\mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$ и доказательство теоремы 1.4 приведены в § 2, 3. Зафиксируем неособое рационально связанное многообразие S размерности $\dim S < \frac{1}{2}(M-7)(M-6) - 5$. Как и в п. 1.2, пусть $\mathcal{L}$ – локально свободный пучок ранга $M+1$ на S и $X = \mathbb{P}(\mathcal{L}) = \mathbf{Proj} \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^{\otimes i}$ – соответствующее $\mathbb{P}^M$ -расслоение в смысле Гротендика; считаем, что $\mathcal{L}$ порождается глобальными сечениями. Пусть $\pi_X: X \rightarrow S$ – проекция, $L \in \mathrm{Pic} X$ – класс пучка $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L})}(1)$. Рассмотрим общий дивизор

$$V \in |ML + \pi_X^* R|,$$

где $R \in \mathrm{Pic} S$ – некоторый дивизор на базе. В силу сделанного выше предположения о размерности базы и теоремы 1.4 будем считать, что расслоение Фано $\pi: V \rightarrow S$, где $\pi = \pi_X|_V$, удовлетворяет условиям (i) и (ii) теоремы 1.1.

ТЕОРЕМА 1.5. *Предположим, что дивизориальный класс $(K_S + (1 - \frac{1}{M})R)$ псевдоэффективен. Тогда для расслоения Фано $\pi: V \rightarrow S$ справедливы утверждения теоремы 1.1 и следствия 1.1. В частности, группа*

$$\mathrm{Bir} V = \mathrm{Aut} V$$

тривиальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия (i) и (ii) теоремы 1.1 выполнены в силу общности дивизора V . Неравенство (1.1) с точностью до положительного множества совпадает с неравенством

$$((MK_S + (M - 1)R) \cdot \bar{C}) \geq 0.$$

Поэтому согласно замечанию 1.1 условие (iii) теоремы 1.1 также выполнено. Теорема доказана.

ПРИМЕР 1.2. Пусть $S = \mathbb{P}^m$, где $m \leq \frac{1}{2}(M - 7)(M - 6) - 6$, $X = \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^m$ и $V \subset X$ – достаточно общая гиперповерхность бистепени (M, l) , где l удовлетворяет неравенству

$$l \geq \frac{M}{M - 1}(m + 1).$$

Тогда расслоение Фано $V/\mathbb{P}^m$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 1.1 и для него справедливо утверждение этой теоремы, а также утверждения следствия 1.1. Отметим, что при $l \leq m$ на многообразии V имеется другая структура расслоения Фано, задаваемая проекцией $V \rightarrow \mathbb{P}^M$. Отметим также, что если зафиксировать размерность базы m , то при $M \geq m$ условие теоремы 1.5 близко к оптимальному: оно выполнено при $l \geq m + 2$, так что единственным значением целочисленного параметра l , для которого вопрос о бирациональной жесткости расслоения $V/\mathbb{P}^m$ остается открытым, является $l = m + 1$. В этом случае проекция $V \rightarrow \mathbb{P}^M$ есть K -тривиальное расслоение.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Естественно ожидать, что теорема 1.1 применима и к другим классам расслоений Мори–Фано, например к расслоениям, слой которых – полное пересечение Фано индекса 1 во (взвешенном) проективном пространстве, т. е. теоремы, аналогичные теоремам 1.2, 1.3 или теоремам 1.4, 1.5, справедливы и для них. Основная трудность заключается в проверке условий (i) и (ii) для полных пересечений Фано, общность которых можно эффективно контролировать; другими словами, необходимы эффективные оценки для ко-размерности дополнения к открытому множеству полных пересечений Фано, все элементы которого удовлетворяют условиям (i) и (ii). Эта задача весьма нетривиальна и тем сложнее, чем выше степень полного пересечения (при фиксированной его размерности).

1.4. Структура работы. Настоящая статья построена следующим образом. В § 2 доказана теорема 1.1. Далее, § 3 посвящен условиям общности положения, которым должен удовлетворять каждый слой расслоения V/S для того, чтобы выполнялись условия (i) и (ii) теоремы 1.1. Условия общности положения (регулярности) приведены для двойных пространств Фано индекса один и гиперповерхностей Фано индекса один. Это позволяет определить множества $\mathcal{W}_{\mathrm{reg}}$ и $\mathcal{F}_{\mathrm{reg}}$, доказать теорему 1.2 и провести подготовительную работу

к доказательству теоремы 1.4 – основного технического факта настоящей статьи, из которого теорема 1.5 (геометрически наиболее впечатляющий результат настоящей статьи) следует тривиальным образом.

В § 4 доказана теорема 1.4, точнее справедливость условия (ii) теоремы 1.1 для регулярной гиперповерхности Фано $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$. Доказательство использует сочетание техники гиперкасательных дивизоров и обращения присоединения. Отметим, что все построения настоящей статьи соответствуют линейному методу доказательства бирациональной жесткости (см. [1, ч. 7]; техника квадратичного метода (прежде всего, техника подсчета кратностей) не используется.

Предположение о неособости базы S расслоения V/S в теореме 1.1 является, по-видимому, излишним и может быть заменено на условие, состоящее в том, что S имеет не более чем терминальные ($\mathbb{Q}$ -)факториальные особенности.

1.5. Исторические замечания и благодарности. Исходным моментом изучения бирациональной геометрии рационально связных расслоений следует, по-видимому, считать использование преобразований Жонкьера (см., например, [4]). На современном этапе алгебраической геометрии систематическое изучение объектов этого типа началось с работ В. А. Исковских и М. Х. Гизатуллина о пучках рациональных кривых [5]–[7] над незамкнутыми полями, последовавших за изучением “абсолютного” случая в работах Ю. И. Манина [8]–[10]. Укажем также на статью И. В. Долгачева [11], которая положила начало (на современном этапе) изучению K -тривиальных расслоений.

После прорыва в трехмерной бирациональной геометрии, осуществленного в классической работе В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартирке [12], на повестку дня вышли задачи “относительной” трехмерной бирациональной геометрии – описание бирациональных отображений трехмерных алгебраических многообразий, расслоенных на коники над рациональной поверхностью или на поверхности дель Педро над $\mathbb{P}^1$. Знаменитая теорема Саркисова почти полностью решила вопрос о бирациональной жесткости для расслоений на коники [2], [3]. Аналогичный вопрос для пучков поверхностей дель Педро оставался открытым до 1996 г. [13] (о причинах этих трудностей см. введение к последней работе; конструкция пробного класса оказалась непригодной для изучения многообразий этого типа).

Метод доказательства бирациональной жесткости, реализованный в [13], хорошо обобщался в произвольную размерность – для многообразий, расслоенных над $\mathbb{P}^1$ на многообразия Фано. В большой серии работ [14]–[21] была доказана бирациональная жесткость для многих классов расслоений Фано над $\mathbb{P}^1$. Параллельно изучалась бирациональная геометрия оставшихся семейств трехмерных многообразий с пучком поверхностей дель Педро степени 1 и 2 [22]–[25]; в этом направлении были получены результаты, близкие к окончательным. Однако база изучаемых расслоений оставалась одномерной и даже расслоения Фано над поверхностями казались недоступными.

Единственным исключением в этом ряду была теорема о прямых произведениях Фано [26] и последовавшие за ней работы о прямых произведениях [27], [28]. В этих работах рассматривались расслоения Фано с базой и слоем произвольной размерности. Однако сами расслоения были очень специфическими (прямые произведения) и не могли претендовать на то, чтобы быть *типичными* расслоениями Фано.

Настоящая работа дает, наконец, многочисленные примеры типичных бирационально жестких расслоений Фано, имеющих базу и слой высокой размерности (для фиксированной размерности слоя δ размерность базы ограничена константой порядка $\sim \frac{1}{2}\delta^2$). Теорему 1.1 можно рассматривать как реализацию хорошо известного принципа: “достаточная закрученность” расслоения по базе влечет бирациональную жесткость. Этот принцип нашел многочисленные подтверждения в классе расслоений над $\mathbb{P}^1$ и теперь распространен на класс расслоений с базой произвольной размерности.

Основным объектом изучения в данной работе являются расслоения на гиперповерхности Фано индекса один, так что она есть продолжение статьи [14]. С технической точки зрения предшественниками настоящей статьи являются [27], [29], где был предложен *линейный* метод доказательства бирациональной жесткости. Возможно, однако, что и квадратичная техника найдет применение в классе расслоений Фано над базой произвольной размерности.

Различные технические моменты, связанные с построениями в данной работе, обсуждались автором в докладах, сделанных в 2009–2014 гг. в Математическом институте им. В. А. Стеклова. Автор благодарен сотрудникам отделов алгебраической геометрии и алгебры и теории чисел за интерес к его работе. Автор также благодарит коллег по группе алгебраической геометрии в Ливерпульском университете за творческую атмосферу и общую поддержку.

§ 2. Бирационально жесткие расслоения

В этом параграфе доказана теорема 1.1. Это сделано в три шага: сначала в предположении, что бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ не является послойным, доказано существование максимальной особенности отображения χ , накрывающей базу S' (п. 2.1). Затем строится такая последовательность раздутий базы $S^+ \rightarrow S$, что образ любой максимальной особенности на S есть простой дивизор (п. 2.2). Наконец, используя очень подвижное семейство кривых, стягиваемых проекцией π' , мы получаем противоречие с условием (iii) теоремы 1.1 (п. 2.3). Отсюда следует, что отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ является послойным, что и завершает доказательство теоремы 1.1.

Мы пользуемся только общеупотребительными понятиями и обозначениями (по поводу деталей см. [1, ч. 2, 4]).

2.1. Максимальные особенности бирациональных отображений.

В обозначениях теоремы 1.1 зафиксируем бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow V'$ на тотальное пространство V' рационально связного расслоения $\pi': V' \rightarrow S'$. Рассмотрим произвольную очень обильную линейную систему $\overline{\Sigma}'$ на S' . Пусть $\Sigma' = (\pi')^*\overline{\Sigma}'$ – ее подъем на V' , так что дивизоры $D' \in \Sigma'$ составлены из слоев проекции π' , а потому для любой кривой $C \subset V'$, стягиваемой проекцией π' , имеем $(D' \cdot C) = 0$. Линейная система Σ' , очевидно, подвижна. Пусть

$$\Sigma = (\chi^{-1})_*\Sigma' \subset |-nK_V + \pi^*Y|$$

– ее собственный прообраз на V , где $n \in \mathbb{Z}_+$.

ЛЕММА 2.1. *Для любого подвижного семейства кривых $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ на S , замыкающего S , справедливо неравенство $(\overline{C} \cdot Y) \geq 0$, т. е. численный класс дивизора Y неотрицателен на конусе $A_1^{\text{mov}}(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти очевидно. Для общего дивизора $D \in \Sigma$ цикл $(D \circ \pi^{-1}(\bar{C}))$ теоретико-схемного пересечения D и $\pi^{-1}(\bar{C})$ эффе́ктивен. Класс этого цикла есть $-n(K_V \cdot \pi^{-1}(\bar{C})) + (Y \cdot \bar{C})F$, так что в силу условия (iii) теоремы 1.1 утверждение леммы доказано.

Очевидно, что отображение χ является послойным тогда и только тогда, когда $n = 0$. Таким образом, если $n = 0$, то утверждение теоремы 1.1 выполнено. Предположим поэтому, что $n \geq 1$, и приведем это предположение к противоречию.

Линейная система Σ подвижна. Разрешим особенности отображения χ : пусть

$$\varphi: \tilde{V} \rightarrow V$$

– бирациональный морфизм (композиция раздутий с неособыми центрами), где $\tilde{V}$ неособо и композиция $\chi \circ \varphi: \tilde{V} \dashrightarrow V'$ регулярна. Рассмотрим, далее, множество $\mathcal{E}$ простых дивизоров на $\tilde{V}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) любой дивизор $E \in \mathcal{E}$ является φ -исключительным;
- 2) для любого $E \in \mathcal{E}$ замкнутое множество $\chi \circ \varphi(E) \subset V'$ есть простой дивизор на V' ;
- 3) множество $\chi \circ \varphi(E)$ для любого $E \in \mathcal{E}$ покрывает базу: $\pi'[\chi \circ \varphi(E)] = S'$.

Полагая $\tilde{K} = K_{\tilde{V}}$, запишем

$$\tilde{\Sigma} \subset \left| -n\tilde{K} + \left(\pi^*Y - \sum_{E \in \mathcal{E}} \varepsilon(E)E \right) + \Xi \right|,$$

где $\tilde{\Sigma}$, как обычно, собственный прообраз подвижной линейной системы Σ на $\tilde{V}$, $\varepsilon(E) \in \mathbb{Z}$ – некоторый коэффициент и Ξ означает линейную комбинацию φ -исключительных дивизоров, не принадлежащих множеству $\mathcal{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Исключительный дивизор $E \in \mathcal{E}$ называется *максимальной особенностью* отображения χ , если $\varepsilon(E) > 0$.

Очевидно, максимальная особенность удовлетворяет *неравенству Нётера–Фано*

$$\text{ord}_E \varphi^* \Sigma > na(E),$$

где $a(E) = a(E, V)$ – дискрепантность дивизора E относительно V . В данной работе мы несколько модифицируем стандартное понятие максимальной особенности, требуя дополнительно, чтобы она реализовывалась дивизором на V' , покрывающим базу. Пусть $\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$ – множество всех максимальных особенностей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Максимальные особенности существуют: $\mathcal{M} \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. для любого $E \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство $\varepsilon(E) \leq 0$. Пусть $\mathcal{C}'$ – семейство рациональных кривых на V' , удовлетворяющих следующим требованиям:

- 1) кривые $C' \in \mathcal{C}'$ стягиваются проекцией π' ;
- 2) кривые $C' \in \mathcal{C}'$ заматают плотное открытое подмножество в V' ;
- 3) кривые $C' \in \mathcal{C}'$ не пересекают множество неопределенности рационального отображения $(\chi \circ \varphi)^{-1}: V' \dashrightarrow \tilde{V}$.

Кроме того, будем предполагать, что общая кривая $C' \in \mathcal{C}'$ пересекает каждый дивизор $\chi \circ \varphi(E)$, $E \in \mathcal{E}$, трансверсально в точках общего положения. Такое семейство кривых будем называть *очень подвижным*. Очевидно, очень подвижные семейства рациональных кривых существуют.

Пусть $\tilde{C} \cong C'$ – прообраз кривой $C' \in \mathcal{C}'$ на $\tilde{V}$. Поскольку линейная система Σ' поднята с базы, для дивизора $\tilde{D} \in \tilde{\Sigma}$ имеем равенство $(\tilde{C} \cdot \tilde{D}) = 0$. С другой стороны, $(\tilde{C} \cdot \tilde{K}) = (C' \cdot K_{V'}) < 0$ и

$$\left(\tilde{C} \cdot \left(\pi^* Y - \sum_{E \in \mathcal{E}} \varepsilon(E) E \right) \right) \geq 0,$$

так как в силу условия (iii) нашей теоремы $(\tilde{C} \cdot \pi^* Y) \geq 0$ и по предположению $-\varepsilon(E) \in \mathbb{Z}_+$ для всех $E \in \mathcal{E}$. Наконец, дивизор Ξ (не обязательно эффективный) есть линейная комбинация таких φ -исключительных дивизоров $R \subset \tilde{V}$, что $\pi'[\chi \circ \varphi(R)]$ – собственное замкнутое подмножество базы S' . Поэтому имеем равенство $(\tilde{C} \cdot \Xi) = 0$. Отсюда следует, что

$$(\tilde{C} \cdot \tilde{D}) \geq n > 0.$$

Противоречие. Значит, $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Для любой максимальной особенности $E \subset \mathcal{M}$ ее центр

$$\text{centre}(E, V) = \varphi(E)$$

на V не покрывает базу: $\pi(\text{centre}(E, V)) \subset S$ есть собственное замкнутое подмножество многообразия S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное: центр некоторой максимальной особенности $E \in \mathcal{M}$ покрывает базу, т.е. $\pi(\text{centre}(E, V)) = S$. Пусть $F = \pi^{-1}(s)$, $s \in S$, – слой общего положения. В силу сделанного предположения собственный прообраз $\tilde{F}$ слоя F на $\tilde{V}$ имеет непустое пересечение с E , и поэтому любая неприводимая компонента пересечения $\tilde{F} \cap E$ есть максимальная особенность подвижной линейной системы $\Sigma_F = \Sigma|_F \subset |-nK_F|$. Однако в силу условия (ii) теоремы 1.1 на многообразии F нет подвижных линейных систем, обладающих максимальной особенностью. Противоречие. Предложение доказано.

2.2. Бирациональная модификация базы расслоения V/S . Построим теперь некоторую последовательность раздутий базы, композиция которых есть бирациональный морфизм $\sigma_S: S^+ \rightarrow S$, и соответствующую ей последовательность раздутий многообразия V , композиция которых есть бирациональный морфизм $\sigma: V^+ \rightarrow V$, где $V^+ = V \times_S S^+$, так что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V^+ & \xrightarrow{\sigma} & V \\ \pi_+ \downarrow & & \downarrow \pi \\ S^+ & \xrightarrow{\sigma_S} & S \end{array}$$

Бирациональный морфизм σ_S строим индуктивно как композицию элементарных раздутий $\bar{\sigma}_i: S_i \rightarrow S_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, где $S_0 = S$. Предположим, что $\bar{\sigma}_i$ уже

построены для $i \leq k$ (если $k = 0$, то начинаем с раздутия базы S). Положим $V_k = V \times_S S_k$, и пусть $\pi_k: V_k \rightarrow S_k$ – проекция. Рассмотрим неприводимые замкнутые подмножества

$$\pi_k(\text{centre}(E, V_k)) \subset S_k, \quad (2.1)$$

где E пробегает множество $\mathcal{M}$. В силу предложения 2.2 все эти подмножества суть собственные подмножества базы S_k . Если все они – простые дивизоры на S_k , то процесс построения останавливается: полагаем $S^+ = S_k$ и $V^+ = V_k$. В противном случае в качестве $\bar{\sigma}_{k+1}$ возьмем раздутие любого минимального по включению среди $E \in \mathcal{M}$ множества (2.1).

Нетрудно убедиться в том, что последовательность раздутий $\bar{\sigma}$ обрывается. В самом деле, положим

$$\alpha_k = \sum_{E \in \mathcal{M}} a(E, V_k).$$

Поскольку бирациональный морфизм $\sigma_k: V_k \rightarrow V_{k-1}$ является раздутием замкнутого неприводимого подмножества, содержащего центр одного из дивизоров $E \in \mathcal{M}$ на V_{k-1} , имеем неравенство $\alpha_{k+1} < \alpha_k$. Числа α_i по построению неотрицательны, откуда и следует, что последовательность раздутий $\bar{\sigma}_i$ конечна. Таким образом, для любой максимальной особенности $E \in \mathcal{M}$ замкнутое подмножество $\pi_+(\text{centre}(E, V^+)) \subset S^+$ есть простой дивизор.

2.3. Подвижное семейство кривых. Снова рассмотрим очень подвижное семейство кривых $\mathcal{C}'$ на V' и его собственный прообраз $\mathcal{C}^+$ на V^+ . Пусть $C^+ \in \mathcal{C}^+$ – общая кривая и $\bar{C}^+ = \pi_+(C^+)$ – соответствующая ей кривая семейства $\bar{\mathcal{C}}^+$ на S^+ . Пусть, далее, Σ^+ – собственный прообраз линейной системы Σ на V^+ . Для некоторого класса дивизоров Y^+ на S^+ имеем

$$\Sigma^+ \subset |-nK^+ + \pi_+^* Y^+|,$$

где для простоты записи $K^+ = K_{V^+}$. Отметим, что даже если Y – эффективный или подвижный класс на S , в данном случае Y^+ не является его собственным прообразом на S^+ , т. е. мы нарушаем принцип обозначений. Следующее наблюдение является ключевым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Справедливо неравенство $(\bar{C}^+ \cdot Y^+) < 0$. В частности, класс Y^+ не псевдоеффективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное:

$$(C^+ \cdot \pi^* Y^+) = (\bar{C}^+ \cdot Y^+) \geq 0.$$

Можем считать, что разрешение особенностей φ отображения χ пропускается через последовательность раздутий $\sigma: V^+ \rightarrow V$, так что для собственного прообраза $\tilde{\Sigma}$ линейной системы Σ на $\tilde{V}$ имеем

$$\tilde{\Sigma} \subset \left| -n\tilde{K} + \left(\pi_+^* Y^+ - \sum_{E \in \mathcal{E}} \tilde{\varepsilon}(E) E \right) + \tilde{\Xi} \right|,$$

где $\tilde{K} = K_{\tilde{V}}$, $\tilde{\varepsilon}(E) \in \mathbb{Z}$ и $\tilde{\Xi}$ – линейная комбинация исключительных дивизоров бирационального морфизма $\tilde{V} \rightarrow V^+$, не принадлежащих множеству $\mathcal{E}$. Для

собственного прообраза $\tilde{C} \in \tilde{\mathcal{C}}$ кривой $C^+ \in \mathcal{C}^+$ и дивизора $\tilde{D} \in \tilde{\Sigma}$ имеем, как и в доказательстве предложения 2.1, равенство $(\tilde{C} \cdot \tilde{D}) = 0$. По построению дивизора $\tilde{\Xi}$ имеем $(\tilde{C} \cdot \tilde{\Xi}) = 0$. Наконец, $(\tilde{C} \cdot \tilde{K}) < 0$, откуда заключаем, что

$$\left(\tilde{C} \cdot \left(\pi_+^* Y^+ - \sum_{E \in \mathcal{E}} \tilde{\varepsilon}(E) E \right) \right) < 0.$$

В силу сделанного предположения хотя бы для одного дивизора $E \in \mathcal{E}$ имеем неравенство $\tilde{\varepsilon}(E) > 0$. Этот дивизор автоматически является максимальной особенностью $E \in \mathcal{M}$. В силу нашего построения, однако, можно сказать больше: E является максимальной особенностью также и для подвижной линейной системы Σ^+ , т. е. пара $(V^+, \frac{1}{n}\Sigma^+)$ не канонична и E реализует не каноническую особенность этой пары.

Однако $\pi_+(\text{centre}(E, V^+)) = \bar{E} \subset S^+$ – простой дивизор, так что $\pi_+^{-1}(\bar{E}) \subset V^+$ – также простой дивизор. Линейная система Σ^+ не имеет неподвижных компонент, поэтому для общей точки $s \in \bar{E}$ и соответствующего слоя $F = \pi_+^{-1}(s) \subset V^+$ имеем следующее: линейная система $\Sigma_F = \Sigma^+|_F \subset |-nK_F|$ непуста и для $D_F \in \Sigma_F$ пара $(F, \frac{1}{n}D_F)$ не логканонична в силу обращения присоединения (см. [30]). Это противоречит условию (ii) теоремы 1.1. Предложение доказано.

Завершим, наконец, доказательство теоремы 1.1. Распишем явно дивизор $\pi_+^* Y^+$ в терминах частичного разрешения σ . Пусть $\mathcal{E}^+$ – множество всех исключительных дивизоров морфизма σ , образ которых на V' дивизориален и накрывает базу S' . Таким образом, $\mathcal{E}^+$ можно отождествить с подмножеством множества $\mathcal{E}$. В ходе доказательства предложения 2.3 мы установили, что

$$\mathcal{M}^+ = \mathcal{M} \cap \mathcal{E}^+ \neq \emptyset.$$

Теперь запишем

$$\pi_+^* Y^+ = \pi^* Y - \sum_{E \in \mathcal{E}^+} \varepsilon_+(E) E + \Xi^+.$$

Кроме того, имеем

$$K^+ = \sigma^* K_V + \sum_{E \in \mathcal{E}^+} a_+(E) E + \Xi_K,$$

где все коэффициенты $a_+(E)$ положительны, а дивизор Ξ_K эффективен, поднят с базы S^+ и образ каждой его неприводимой компоненты на V' имеет коразмерность не меньше 2, так что общая кривая $C^+ \in \mathcal{C}^+$ не пересекает носителя дивизора Ξ_K . Пусть $C \in \mathcal{C}$ – образ C^+ на исходном многообразии V и $\bar{C} = \pi(C) \in \bar{\mathcal{C}}$ – проекция кривой C на базу S . Для общего дивизора $D \in \Sigma$ и его собственного прообраза $D^+ \in \Sigma^+$ на V^+ корректно определено теоретико-схемное пересечение $(D^+ \circ \pi_+^{-1}(\bar{C}^+))$ – эффективный цикл размерности $\delta = \dim F$ на V^+ . Для его численного класса имеем представление

$$\begin{aligned} (D^+ \circ \pi_+^{-1}(\bar{C}^+)) &\sim -n(\sigma^* K_V \cdot \pi_+^{-1}(\bar{C}^+)) \\ &+ \left(\left[\sum_{E \in \mathcal{E}^+} (-na_+(E) - \varepsilon_+(E)) E \right] \cdot C^+ \right) F. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Поскольку $(\overline{C} \cdot Y) \geq 0$ и $(C^+ \cdot \pi_+^* Y^+) < 0$, имеем

$$\left(- \left[\sum_{E \in \mathcal{E}^+} \varepsilon_+(E) E \right] \cdot C^+ \right) < 0,$$

так что в формуле (2.2) пересечение дивизора, стоящего в квадратных скобках, с C^+ отрицательно. Следовательно,

$$\sigma_*(D^+ \circ \pi_+^{-1}(\overline{C}^+)) \sim -n(K_V \cdot \pi^{-1}(\overline{C})) + bF,$$

где $b < 0$. Поскольку слева стоит эффективный цикл размерности δ на V , получаем противоречие с условием (iii) теоремы 1.1. Доказательство теоремы 1.1 завершено.

§ 3. Многообразие общего положения

В данном параграфе сформулированы явные локальные условия общности положения для двойных пространств (п. 3.1) и гиперповерхностей (п. 3.2), определяющие множества $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ и $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$. В п. 3.1 доказана теорема 1.2. В пп. 3.3–3.5 доказана часть утверждения теоремы 1.4: оценка коразмерности дополнения $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}$; в п. 3.5 рассмотрены также непосредственные геометрические следствия условий общности положения.

3.1. Двойные пространства общего положения. Открытое подмножество $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ гиперповерхностей степени $2M$ в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ определяется локальными условиями, которым гиперповерхность $W \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ должна удовлетворять в каждой точке $o \in W$. Эти условия различны в зависимости от того, является точка $o \in W$ неособой или особой.

Рассмотрим сначала условие общности положения для *неособой точки* $o \in W$. Пусть $(z_1, \dots, z_M)$ – система аффинных координат с центром в точке o и

$$w = q_1 + q_2 + \dots + q_{2M}$$

– аффинное уравнение гиперповерхности ветвления W , где многочлены $q_i(z_*)$ однородны степени $i = 1, \dots, 2M$. В неособой точке $o \in W$ (т.е. $q_1 \not\equiv 0$) гиперповерхность W должна удовлетворять следующему условию:

(W1) ранг квадратичной формы $q_2|_{\{q_1=0\}}$ не меньше 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Нарушение условия (W1) налагает на коэффициенты квадратичной формы q_2 (при фиксированной линейной форме q_1) $\frac{(M-2)(M-1)}{2}$ независимых условий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Теперь рассмотрим условие общности положения для *особой точки* $o \in W$. Пусть

$$w = q_2 + q_3 + \dots + q_{2M}$$

– аффинное уравнение гиперповерхности ветвления W относительно системы аффинных координат $(z_1, \dots, z_M)$ с центром в точке o . В особой точке o гиперповерхность W должна удовлетворять следующему условию:

(W2) ранг квадратичной формы q_2 не меньше 4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Нарушение условия (W2) налагает на коэффициенты квадратичной формы q_2 в точности $\frac{(M-2)(M-1)}{2}$ независимых условий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Определим теперь подмножество $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$, полагая, что $W \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ удовлетворяет условию (W1) в каждой неособой точке и условию (W2) в каждой особой точке. Очевидно, $\mathcal{W}_{\text{reg}} \subset \mathcal{W}$ – открытое по Зарисскому подмножество (возможно, пустое).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Справедлива оценка*

$$\text{codim}((\mathcal{W} \setminus \mathcal{W}_{\text{reg}}) \subset \mathcal{W}) \geq \frac{(M-4)(M-1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводим, используя стандартные рассуждения (см. [1, ч. 3]: рассматривается подмногообразие инцидентности

$$\mathcal{I} = \{(o, W) \mid o \in W\} \subset \mathbb{P} \times \mathcal{W};$$

для фиксированной точки $o \in \mathbb{P}$ коразмерность множества гиперповерхностей $\mathcal{W}_{\text{non-reg}}(o)$, содержащих эту точку и нерегулярных в ней, дается предложениями 3.1, 3.2 (в особом случае добавляются еще M независимых условий, так как $q_1 \equiv 0$). После этого вычисляется размерность замыкания множества

$$\mathcal{I}_{\text{non-reg}} = \bigcup_{o \in \mathbb{P}} \{o\} \times \mathcal{W}_{\text{non-reg}}(o)$$

и рассматривается проекция на $\mathcal{W}$. Предложение доказано.

Очевидно, что для любой гиперповерхности $W \in \mathcal{W}_{\text{reg}}$ двойное накрытие $F \rightarrow \mathbb{P}$, разветвленное над W , есть неприводимое алгебраическое многообразие. Более того, в силу условия (W2) многообразие F принадлежит классу многообразий с квадратичными особенностями ранга не меньше 5 [31]. Напомним, что многообразие $\mathcal{X}$ является многообразием с квадратичными особенностями ранга не меньше r , если в окрестности каждой точки $o \in \mathcal{X}$ многообразие $\mathcal{X}$ реализуется как гиперповерхность в неособом многообразии $\mathcal{Y}$, причем локальное уравнение $\mathcal{X}$ в точке o имеет вид $\beta_1(u_*) + \beta_2(u_*) + \dots = 0$, где (u_*) – система локальных параметров в точке $o \in \mathcal{Y}$, и либо $\beta_1 \neq 0$, либо $\beta_1 \equiv 0$ и $\text{rk } \beta_2 \geq r$. Понятно, что $\text{codim}(\text{Sing } \mathcal{X} \subset \mathcal{X}) \geq r - 1$, так что многообразие F факториально [32].

Далее, несложно показать (см. [31]), что класс квадратичных особенностей ранга не меньше r устойчив относительно раздутий в следующем смысле. Пусть $B \subset \mathcal{X}$ – неприводимое подмногообразие. Тогда существует открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$, обладающее двумя свойствами:

- 1) $\mathcal{U} \cap B \neq \emptyset$, причем $\mathcal{U} \cap B$ – неособое алгебраическое многообразие;
- 2) для его раздутия $\sigma_B: \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathcal{U}$ имеем следующее: $(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})^+ \subset \mathcal{U}^+$ – многообразие с квадратичными особенностями ранга не меньше r .

Чтобы убедиться в последнем, отметим следующий простой факт: если $\mathcal{Z} \ni o$ – неособый дивизор на $\mathcal{Y}$, причем $\mathcal{Z} \neq \mathcal{X}$ и теоретико-схемное ограничение $\mathcal{X}|_{\mathcal{Z}}$ имеет в точке o квадратичную особенность ранга l , то $\mathcal{X}$ имеет в точке o квадратичную особенность ранга не меньше l . Теперь если

$B \not\subset \text{Sing } \mathcal{X}$, то утверждение об устойчивости очевидно. Значит, можно считать, что $B \subset \text{Sing } \mathcal{X}$. Открытое множество $\mathcal{U} \subset \mathcal{Y}$ можно выбрать таким образом, что $B \cap \mathcal{U}$ – неособое подмногообразие и ранг квадратичных точек $o \in B \cap \mathcal{U}$ постоянен и равен $l \geq r$. Однако тогда в исключительном дивизоре $\mathcal{E} = \sigma_B^{-1}(B \cap \mathcal{U})$ дивизор $(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})^+ \cap \mathcal{E}$ есть расслоение на квадратики ранга l , так что $(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})^+ \cap \mathcal{E}$ имеет не более чем квадратичные особенности ранга не меньше l . Следовательно, и $(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})^+ \subset \mathcal{U}^+$ имеет квадратичные особенности ранга не меньше r согласно сделанному выше замечанию. Явное аналитическое доказательство см. в [31].

Из устойчивости относительно раздутий следует, что особенности многообразия F терминальны (для частного случая одного раздутия это очевидно: дискрепантность неприводимого исключительного дивизора $(\mathcal{X} \cap \mathcal{U})^+ \cap \mathcal{E}$ относительно $\mathcal{X}$ положительна; любой исключительный дивизор над $\mathcal{X}$ может быть реализован последовательным раздутием центров). Наконец, F удовлетворяет условию (ii) теоремы 1.1, т.е. условию дивизориальной каноничности (см. [26, доказательство п. (ii) теоремы 2] и [29, теорема 4]). Этим доказательство теоремы 1.2 завершено.

3.2. Гиперповерхности Фано общего положения. Как и в случае двойных пространств, открытое подмножество $\mathcal{F}_{\text{reg}} \subset \mathcal{F}$ гиперповерхностей степени M в $\mathbb{P} = \mathbb{P}^M$ определяется локальными условиями, которым гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ должна удовлетворять в каждой точке $o \in F$. Снова эти условия различны в зависимости от того, является точка $o \in F$ неособой или особой.

Рассмотрим сначала условия общности положения для неособой точки $o \in F$. Пусть $(z_1, \dots, z_M)$ – система аффинных координат с центром в точке o и

$$w = q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_M$$

– аффинное уравнение гиперповерхности F , где многочлены $q_i(z_*)$ однородны степени $i = 1, \dots, M$. Приведем список условий общности положения, которым гиперповерхность F должна удовлетворять в неособой точке o .

(R1.1) Последовательность $q_1, q_2, \dots, q_{M-1}$ регулярна в локальном кольце $\mathcal{O}_{o, \mathbb{P}}$, т.е. система уравнений

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{M-1} = 0$$

задает одномерное подмножество – конечный набор прямых в $\mathbb{P}$, проходящих через точку o . В частности, $q_1 \neq 0$.

Уравнение $q_1 = 0$ задает касательное пространство $T_o F$ (которое мы, в зависимости от потребности, будем рассматривать либо как линейное подпространство в $\mathbb{C}^M$, либо как его замыкание – гиперплоскость в $\mathbb{P}$). Положим теперь $\bar{q}_i = q_i|_{\{q_1=0\}}$ для $i = 2, \dots, M$: это многочлены на линейном пространстве $T_o F \cong \mathbb{C}^{M-1}$. Условие (R1.1) означает регулярность последовательности $\bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_{M-1}$. Такая формулировка удобнее для оценки коразмерности множества гиперповерхностей, которые не удовлетворяют условию регулярности.

(R1.2) Квадратичная форма $\bar{q}_2$ на пространстве $T_o F$ имеет ранг не меньше 6, а линейная оболочка любой неприводимой компоненты замкнутого алгебраического множества $\{q_1 = q_2 = q_3 = 0\}$ в $\mathbb{C}^M$ есть гиперплоскость $\{q_1 = 0\}$, т.е. касательная гиперплоскость $T_o F$.

Эквивалентная формулировка этого условия: любая неприводимая компонента замкнутого множества $\{\bar{q}_2 = \bar{q}_3 = 0\}$ в $\mathbb{P}^{M-2} = \mathbb{P}(\{q_1 = 0\})$ невырождена.

(R1.3) Для любой гиперплоскости $P \subset \mathbb{P}$, $P \ni o$, отличной от касательной гиперплоскости $T_o F \subset \mathbb{P}$, алгебраический цикл теоретико-схемного пересечения гиперплоскостей P , $T_o F$, проективной квадрики $\{\overline{q_2 = 0}\} \subset \mathbb{P}$ и F , т. е. цикл

$$(P \circ \overline{\{q_1 = 0\}} \circ \overline{\{q_2 = 0\}} \circ F),$$

неприводим и приведен. (Черта сверху обозначает замыкание в $\mathbb{P}$, и операция $\circ$ взятия цикла теоретико-схемного пересечения также рассматривается здесь на пространстве $\mathbb{P}$.)

Теперь рассмотрим условия общности положения для *особой точки* $o \in F$. Пусть $(z_1, \dots, z_M)$ – система аффинных координат с центром в точке o и

$$f = q_2 + q_3 + \dots + q_M$$

– аффинное уравнение гиперповерхности F , где многочлены $q_i(z_*)$ однородны степени $i = 2, \dots, M$. Перечислим условия общности положения, которым гиперповерхность F должна удовлетворять в особой точке o .

(R2.1) Для любого линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{C}^M$ коразмерности $c \in \{0, 1, 2\}$ последовательность

$$q_2|_{\Pi}, \dots, q_{M-c}|_{\Pi} \quad (3.1)$$

регулярна в кольце $\mathcal{O}_{o, \Pi}$, т. е. система уравнений

$$q_2|_{\mathbb{P}(\Pi)} = \dots = q_{M-c}|_{\mathbb{P}(\Pi)} = 0$$

задает в пространстве $\mathbb{P}(\Pi) \cong \mathbb{P}^{M-c-1}$ конечное множество точек.

(R2.2) Квадратичная форма $q_2(z_*)$ имеет ранг не менее 8.

(R2.3) Рассматриваем $(z_1, \dots, z_M)$ как однородные координаты $(z_1 : \dots : z_M)$ на $\mathbb{P}^{M-1}$. Дивизор $\{q_3|_{\{q_2=0\}} = 0\}$ на квадрике $\{q_2 = 0\}$ не является суммой трех (не обязательно различных) гиперплоских сечений этой квадрики из одного линейного пучка.

Рассуждая дословно так же, как в п. 3.1, заключаем, что любая гиперповерхность $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ есть неприводимое проективное многообразие с факториальными терминальными особенностями. Очевидно, $K_F = -H_F$ и $\text{Pic } F = \mathbb{Z}H_F$, где H_F – класс гиперплоского сечения $F \subset \mathbb{P}$, т. е. F – многообразие Фано индекса один. Для доказательства теоремы 1.4 необходимо установить два факта: неравенство (1.2) и дивизориальную логканоничность гиперповерхности $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$, т. е. справедливость условия (ii) теоремы 1.1 для многообразия F .

Этим двум задачам посвящены оставшаяся часть данного параграфа и § 4 соответственно.

3.3. Условия общности положения в неособой точке. Пусть $o \in F$ – неособая точка. Зафиксируем произвольную ненулевую линейную форму q_1 и рассмотрим аффинное пространство многочленов

$$q_1 + \mathcal{P}^{\text{sing}} = \{q_1 + q_2 + \dots + q_M\},$$

где $\mathcal{P}^{\text{sing}}$ – пространство многочленов вида $f = q_2 + q_3 + \dots + q_M$. Пусть $\mathcal{P}_i \subset \{q_1 + \mathcal{P}^{\text{sing}}\}$, $i = 1, 2, 3$, – замыкания подмножеств, состоящих из таких

многочленов f , которые не удовлетворяют условию (R1.i) соответственно. Положим

$$c_i = \text{codim}(\mathcal{P}_i \subset \{q_1 + \mathcal{P}^{\text{sing}}\}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *При $M \geq 8$ справедливо равенство*

$$\min\{c_1, c_2, c_3\} = c_2 = \frac{(M-6)(M-5)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко провести элементарными методами. Прежде всего, в силу доказываемой ниже леммы 3.1 (где необходимо заменить M на $(M-1)$) получаем

$$c_1 = \frac{(M-1)(M-2)}{2} + 2.$$

Далее, нарушение условия $\text{rk } \bar{q}_2 \geq 6$ налагает на коэффициенты квадратичной формы q_2

$$\frac{(M-6)(M-5)}{2} < c_1$$

независимых условий. Считая условие $\text{rk } \bar{q}_2 \geq 6$ выполненным, получаем, что квадрака $\{\bar{q}_2 = 0\}$ факториальна. Легко проверить, что приводимость или неприведенность дивизора $q_3|_{\{\bar{q}_2=0\}}$ на этой квадрике дает

$$\frac{M^3 - 6M^2 - 7M + 54}{6} > \frac{(M-6)(M-5)}{2}$$

независимых условий на коэффициенты кубической формы q_3 .

Наконец, рассмотрим гиперплоскость $P \neq T_o F$ и квадратичную гиперповерхность

$$q_2|_{P \cap \{q_1=0\}} = 0.$$

Ранг этой квадрики не меньше 5, так что она все еще факториальна. Оценим снизу количество независимых условий, которые налагают на коэффициенты многочленов $q_3, \dots, q_M$ нарушение условия (R1.3). Определим значения $v(\mu)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, таблицей

μ	0	1	2	3
$v(\mu)$	0	1	M	$\frac{1}{2}M(M+1) - 1$

и положим

$$f(j, \mu) = \binom{j+M-1}{M-1} - \binom{j+M-3}{M-1} - v(\mu) + v(\max(0, \mu-2)).$$

Теперь, используя факториальность квадрики, получаем оценку

$$c_3 \geq f(M, 3) - (M-2) - \max \left[\max_{M-1 \geq j \geq 2} (f(j, 2) + f(M-j, 1)), \max_{M-1 \geq j \geq 3} (f(j, 3) + f(M-j, 0)) \right].$$

Элементарная проверка показывает, что минимум правой части строго больше c_2 (а при $M \rightarrow \infty$ имеет экспоненциальный порядок роста). Предложение доказано.

3.4. Условия общности положения в особой точке. Напомним, что $\mathcal{P}^{\text{sing}}$ – пространство многочленов вида

$$f = q_2 + q_3 + \dots + q_M$$

от переменных $z_* = (z_1, \dots, z_M)$, где $q_i(z_*)$ однородны степени i . Пусть $\mathcal{P}_{\text{reg}}^{\text{sing}} \subset \mathcal{P}^{\text{sing}}$ – подмножество, состоящее из многочленов, удовлетворяющих условиям (R2.1)–(R2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Имеет место оценка*

$$\text{codim}(\overline{(\mathcal{P}^{\text{sing}} \setminus \mathcal{P}_{\text{reg}}^{\text{sing}})}) \subset \mathcal{P}^{\text{sing}} \geq \frac{(M-7)(M-6)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что нарушение каждого из условий (R2.1)–(R2.3) в точке $o = (0, \dots, 0)$ по отдельности налагает на многочлен f не менее $(M-7)(M-6)/2$ независимых условий. Нетрудно убедиться, что нарушение условия (R2.2) налагает на коэффициенты квадратичной формы $q_2(z_*)$ в точности $(M-7)(M-6)/2$ независимых условий. Поэтому, рассматривая условие (R2.3), можно считать, что условие (R2.2) выполнено; в частности, квадрата $\{q_2 = 0\}$ факториальна, и нарушение условия (R2.3) налагает на коэффициенты кубической формы $q_3(z_*)$ (при фиксированном многочлене q_2)

$$M \frac{M^2 + 3M - 16}{6} \geq \frac{(M-7)(M-6)}{2}$$

независимых условий при $M \geq 4$. Осталось рассмотреть случай, когда происходит нарушение условия (R2.1).

ЛЕММА 3.1. *Нарушение условия (R2.1) для одного значения параметра $c = 0$ налагает на коэффициенты многочлена f*

$$\frac{M(M-1)}{2} + 2 \tag{3.2}$$

независимых условий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится стандартными методами [1, ч. 3]. Напомним лишь схему рассуждений. Фиксируем первый момент нарушения регулярности последовательности многочленов $q_2, \dots, q_M$: пусть она впервые нарушается для q_k , т. е. замкнутое множество $\{q_2 = \dots = q_{k-1} = 0\}$ имеет “правильную” коразмерность $k-2$ и q_k обращается в нуль на одной из компонент этого множества. При $k \leq M-1$ применяем метод [33] и получаем, что нарушение регулярности налагает на коэффициенты многочлена f не менее

$$\binom{M+1}{k} \geq \frac{(M+1)M}{2}$$

независимых условий; правая часть последнего неравенства строго больше, чем (3.2), что и требуется показать.

Рассмотрим последнюю возможность:

$$\{q_2 = \dots = q_{M-1} = 0\} \subset \mathbb{P}^{M-1}$$

есть одномерное замкнутое множество и q_M обращается в нуль на одной из его неприводимых компонент, скажем B . Случай, когда $B \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – прямая, является особым: нетрудно проверить, что обращение в нуль на прямой

в $\mathbb{P}^{M-1}$ налагает на многочлены $q_2, \dots, q_M$ в совокупности в точности (3.2) независимых условий. Значит, можно предполагать, что B не является прямой, т.е. $\dim B < \dim \langle B \rangle = k \geq 2$. Теперь применяем метод, предложенный в [34], фиксируя k и линейное подпространство $\langle B \rangle$. Рассмотрим сначала случай $k \leq M-2$. В этом случае найдутся индексы

$$i_1, \dots, i_{k-1} \in \{2, \dots, M-1\}$$

такие, что ограничения $q_{i_1}|_{\langle B \rangle}, \dots, q_{i_{k-1}}|_{\langle B \rangle}$ образуют хорошую последовательность и B — одно из ее ассоциированных подмногообразий (см. [34, §3, предложение 4]), детали этой процедуры описаны в доказательстве этого предложения). Учитывая, что $B \subset \langle B \rangle$ — невырожденная кривая по построению, видим, что разложимые многочлены типа $l_1 \cdots l_a$, где l_i — линейные формы на $\langle B \rangle \cong \mathbb{P}^k$, не могут тождественно обращаться в нуль на B . Это дает $jk+1$ независимых условий для каждого из многочленов q_j при $j \notin \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$, так что в сумме получается не менее

$$\frac{k(M-k)(M-k+1)}{2} + M - 2k - 1$$

независимых условий для этих многочленов (минимум достигается при $i_1 = M-k+1, \dots, i_{k-1} = M-1$). С учетом условия $q_M|_B \equiv 0$ и размерности грассманиана k -мерных подпространств в $\mathbb{P}^{M-1}$ получаем не менее

$$M^2 - kM + k^2 - M + k + 1$$

независимых условий для f . Легко проверить, что последнее число не меньше, чем (3.2).

Наконец, если $k = M-1$, т.е. B — невырожденная кривая в $\mathbb{P}^{M-1}$, то условие $q_M|_B \equiv 0$ дает не менее $M(M-1) + 1$ независимых условий для q_M . Лемма полностью доказана.

Завершим доказательство предложения 3.5.

Для фиксированного линейного подпространства $\Pi \subset \mathbb{C}^M$ коразмерности $c \in \{0, 1, 2\}$ нарушение регулярности последовательности (3.1) налагает на многочлен f не менее $(M-c)(M-c-1)/2 + 2$ независимых условий. Вычитая размерность грассманиана подпространств коразмерности c в $\mathbb{C}^M$, получаем наименьшее значение $(M-3)(M-6)/2$ при $c = 2$. Этим доказательство предложения 3.5 закончено.

3.5. Оценка коразмерности дополнения множества $\mathcal{F}_{\text{reg}}$. Напомним, что $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$ тогда и только тогда, когда в любой неособой точке $o \in F$ выполнены условия (R1.1)–(R1.3), а в любой особой точке $o \in F$ выполнены условия (R2.1)–(R2.3). Из предложений 3.4, 3.5 вытекает следующий факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. *Справедлива оценка*

$$\text{codim}((\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_{\text{reg}}) \subset \mathcal{F}) \geq \frac{(M-7)(M-6)}{2} - 5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству предложения 3.3 и получается из предложений 3.4, 3.5.

Рассмотрим теперь некоторые геометрические факты, непосредственно вытекающие из условий общности положения. Эти факты будут нужны в § 4 для исключения логмаксимальных особенностей. В [26] было доказано, что для любого эффективного дивизора $D \sim nH$ на F (где пишем H вместо H_F для упрощения обозначений) пара $(F, \frac{1}{n}D)$ канонична в неособых точках $o \in F$. Этим фактом будем пользоваться без специальных ссылок. Теперь пусть $D_2 = \{q_2|_F = 0\}$ – первый гиперкасательный дивизор, так что имеем $D_2^+ \in |2H - 3E|$. Напомним, что $E \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – неприводимая квадрака ранга не меньше 8. Очевидно, для дивизора $D_2 \in |2H|$ справедливо равенство

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} D_2 = \frac{3}{M}.$$

Здесь и далее через $\text{mult}_o / \deg$ обозначено отношение кратности в точке o к степени.

ЛЕММА 3.2. Пусть $P \subset F$ – сечение гиперповерхности F произвольным линейным подпространством в $\mathbb{P}$ коразмерности 2, содержащим точку o . Тогда ограничение $D_2|_P$ – неприводимый приведенный дивизор на гиперповерхности $P \subset \mathbb{P}^{M-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие P имеет не более чем квадратичные особенности ранга не меньше 6 и потому факториально. Поэтому приводимость или неприведенность дивизора $D_2|_P$ означает, что имеет место равенство $D_2|_P = H_1 + H_2$, где H_i , возможно, совпадающие гиперплоские сечения P . В силу условия (R2.2) имеют место равенства $\text{mult}_o H_i = 2$. Однако $\text{mult}_o D_2|_P = 6$. Поэтому $D_2|_P$ не может распадаться на два гиперплоских сечения. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пара $(F, \frac{1}{2}D_2)$ не имеет не логканонических особенностей, центр которых на F содержит точку o : $\text{LCS}(F, \frac{1}{2}D_2) \not\ni o$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. В любом случае

$$\text{codim}\left(\text{LCS}\left(F, \frac{1}{2}D_2\right) \subset F\right) \geq 6,$$

так что рассмотрим сечение $P \subset F$ гиперповерхности F общим линейным подпространством размерности 5, содержащим точку o . Тогда пара $(P, \frac{1}{2}D_2|_P)$ имеет точку o изолированным центром не логканонической особенности. Пусть $\sigma_P: P^+ \rightarrow P$ – раздутие невырожденной квадратичной особенности $o \in P$ и $E_P = E \cap P^+$ – неособая исключительная квадрака в $\mathbb{P}^4$. Поскольку

$$\frac{1}{2}(D_2|_P)^+ \sim H_P - \frac{3}{2}E_P, \quad a(E_P, P) = 2 > \frac{3}{2}$$

(где H_P – класс гиперплоского сечения $P \subset \mathbb{P}^5$), пара $(P^+, \frac{1}{2}(D_2|_P)^+)$ не логканонична. Объединение $\text{LCS}(P^+, \frac{1}{2}(D_2|_P)^+)$ всех центров не логканонических особенностей этой пары, пересекающих E_P , есть связанное замкнутое подмножество исключительной квадраки E_P , любая неприводимая компонента S_P которого удовлетворяет неравенству $\text{mult}_{S_P}(D_2|_P)^+ \geq 3$. Возвращаясь к исходной паре $(F, \frac{1}{2}D_2)$, видим, что для некоторого неприводимого подмногообразия

$S \subset E$ справедливо неравенство $\text{mult}_S D_2^+ \geq 3$, причем $S \cap P^+ = S_P$, так что $\text{codim}(S \subset E) \in \{1, 2, 3\}$.

Однако случай $\text{codim}(S \subset E) = 3$ невозможен: в силу принципа связности это равенство означает, что S_P – точка, а тогда $S \subset E$ – линейное подпространство коразмерности 3, что невозможно, если $\text{rk } q_2 \geq 8$ (7-мерная неособая квадрика не содержит линейных подпространств коразмерности 3).

Рассмотрим случай $\text{codim}(S \subset E) = 2$. Пусть $\Pi \subset E$ – общее линейное подпространство максимальной размерности. Тогда $D_2^+|_\Pi$ – кубическая гиперповерхность, имеющая кратность 3 вдоль неприводимого подмногообразия $S_\Pi = S \cap \Pi$ коразмерности 2. Следовательно, $D_2^+|_\Pi$ – сумма трех (не обязательно различных) гиперплоскостей в Π , содержащих линейное подпространство $S_\Pi \subset \Pi$ коразмерности 2, а потому и $D_2^+|_E$ – сумма трех (не обязательно различных) гиперплоских сечений из одного линейного пучка, а S – пересечение квадрики E и линейного пространства коразмерности 2. Однако это невозможно в силу условия (R2.3).

Наконец, если $\text{codim}(S \subset E) = 1$, то $D_2^+|_E = 3S$ – 3-кратное гиперплоское сечение квадрики E , что невозможно в силу условия (R2.3). Этим предложение доказано.

Вот еще один факт, который будет полезен в дальнейшем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Для любого гиперплоского сечения $\Delta \ni o$ гиперповерхности F пара (F, Δ) логканонична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из хорошо известного факта (см., например, [29], [35]): если $(\tilde{p} \in X)$ – росток невырожденной квадратичной трехмерной особенности, $\sigma: \tilde{X} \rightarrow X$ – его разрешение с исключительной квадрикой $E_X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и D_X – росток эффе́ктивного дивизора такой, что $o \in D_X$ и $D_X \sim -\beta E_X$, то пара $(X, \frac{1}{\beta} D_X)$ канонична в точке o . Предложение доказано.

§ 4. Исключение максимальных особенностей

В данном параграфе завершено доказательство теоремы 1.4. Через F обозначена фиксированная гиперповерхность степени M в $\mathbb{P}$, удовлетворяющая условиям регулярности: $F \in \mathcal{F}_{\text{reg}}$. Как упоминалось в § 3, в [26] доказано, что пара $(F, \frac{1}{n} D)$ не имеет максимальных особенностей, центр которых не содержится в замкнутом множестве $\text{Sing } F$, для любого эффе́ктивного дивизора $D \sim nH$. В [31] показано, что для любой подвижной линейной системы $\Sigma \subset |nH|$ пара $(F, \frac{1}{n} D)$ канонична для общего дивизора $D \in \Sigma$, т. е. Σ не имеет максимальных особенностей. Следовательно, для завершения доказательства теоремы 1.4 достаточно установить, что для любого эффе́ктивного дивизора $D \sim nH$ пара $(F, \frac{1}{n} D)$ логканонична, причем можно рассматривать только такие логмаксимальные особенности, центр которых содержится в $\text{Sing } F$.

В п. 4.1 проведена подготовительная работа: с помощью техники гиперкасательных дивизоров получены оценки для отношения $\text{mult}_o / \deg$ некоторых классов неприводимых подмногообразий гиперповерхности F . После этого мы фиксируем пару $(F, \frac{1}{n} D)$ и предполагаем, что она не логканонична. Цель состоит в приведении этого предположения к противоречию. Пусть $B^* \subset \text{Sing } F$ –

центр логмаксимальной особенности дивизора D , $o \in B^*$ – точка общего положения, $F^+ \rightarrow F$ – ее раздутие, D^+ – собственный прообраз дивизора D . В п. 4.2 изучаются свойства пары $(F^+, \frac{1}{n}D^+)$: показано, что эта пара имеет не логканоническую особенность, центр которой – подмногообразие исключительного дивизора раздутия точки o . Затем в пп. 4.2, 4.3 доказано, что этого не может быть, что и завершает доказательство теоремы 1.4.

4.1. Метод гиперкасательных дивизоров. Зафиксируем особую точку $o \in F$, систему координат $(z_1, \dots, z_M)$ на $\mathbb{P}$ с началом в этой точке и уравнение $f = q_2 + \dots + q_M$ гиперповерхности F .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что многообразие F удовлетворяет условиям (R2.1), (R2.2) в особой точке o . Тогда справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любого неприводимого подмногообразия $Y \subset F$ коразмерности 2 выполнено неравенство*

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{4}{M};$$

(ii) *если $\Delta \ni o$ – произвольное гиперплоское сечение гиперповерхности F , то для любого простого дивизора $Y \subset \Delta$ выполнено неравенство*

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{3}{M};$$

(iii) *если $P \ni o$ – сечение гиперповерхности F произвольным линейным подпространством коразмерности 2, то для любого простого дивизора $Y \subset P$ выполнено неравенство*

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{4}{M}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится методом гиперкасательных дивизоров [1, ч. 3]. Для $k = 2, \dots, M - 1$ пусть Λ_k есть линейная система

$$\left| \sum_{i=2}^k s_{k-i}(q_2 + \dots + q_i) \right|_F = 0$$

– k -я гиперкасательная линейная система, где $s_j(z_*)$ – всевозможные однородные многочлены степени j . Для раздутия $\sigma: F^+ \rightarrow F$ точки o с исключительным дивизором $E = \sigma^{-1}(o)$, естественно реализованным как квадрака в $\mathbb{P}^{M-1}$, имеем

$$\Lambda_k^+ \subset |kH - (k+1)E|,$$

где Λ_k^+ – собственный прообраз системы Λ_k на F^+ . Пусть $D_k \in \Lambda_k$, $k = 2, \dots, M - 1$, – общие гиперкасательные дивизоры.

Докажем утверждение (i). В силу условия (R2.1) имеет место равенство

$$\text{codim}_o(\text{Bs } \Lambda_k \subset F) = k - 1, \quad (4.1)$$

где через codim_o означена коразмерность в окрестности точки o ; следовательно,

$$Y \cap D_4 \cap D_5 \cap \dots \cap D_{M-1}$$

в окрестности точки o есть замкнутое одномерное множество. Строим последовательность неприводимых подмногообразий $Y_i \subset F$ коразмерности i : $Y_2 = Y$ и Y_{i+1} – неприводимая компонента эффективного цикла $(Y_i \circ D_{i+2})$, имеющая максимальное значение отношения $\text{mult}_o / \deg$. Цикл $(Y_i \circ D_{i+2})$ каждый раз корректно определен, потому что в силу неравенства (4.1) имеем $Y_i \not\subset D_{i+2}$ для общего гиперкасательного дивизора D_{i+2} . По построению гиперкасательных линейных систем, на каждом шаге нашей процедуры справедливо неравенство

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y_{i+1} \geq \frac{i+3}{i+2} \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y_i,$$

так что для кривой Y_{M-2} имеем оценки

$$1 \geq \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y_{M-2} \geq \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \cdot \frac{5}{4} \frac{6}{5} \cdots \frac{M}{M-1},$$

откуда и следует утверждение (i).

Докажем утверждение (ii). В силу леммы 3.2 дивизор $D_2|_\Delta$ неприводим и приведен, а в силу условия (R2.1) для него справедливо равенство

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} D_2|_\Delta = \frac{3}{M}.$$

Поэтому можно предполагать, что $Y \neq D_2|_\Delta$, так что $Y \not\subset D_2$ и корректно определен эффективный цикл $(Y \circ D_2)$ коразмерности 2 на Δ , для которого верно неравенство

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} (Y \circ D_2) \geq \frac{3}{2} \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y.$$

Пусть Y_2 – неприводимая компонента этого цикла, имеющая максимальное значение отношения $\text{mult}_o / \deg$. Применяя к Y_2 технику гиперкасательных дивизоров точно так же, как в доказательстве утверждения (i), видим, что в силу условия (R2.1) пересечение

$$Y_2 \cap D_4|_\Delta \cap D_5|_\Delta \cap \cdots \cap D_{M-2}|_\Delta$$

в окрестности точки o есть одномерное замкнутое множество, где $D_4 \in \Lambda_4, \dots, D_{M-2} \in \Lambda_{M-2}$ – общие гиперкасательные дивизоры (обратим внимание, что последний гиперкасательный дивизор есть D_{M-2} , а не D_{M-1} , как в части (i), потому что размерность Δ на единицу меньше, чем размерность F , и условие (R2.1) обеспечивает регулярность укороченной последовательности $q_2|_\Pi, \dots, q_{M-1}|_\Pi$, где в данном случае Π – гиперплоскость, высекающая Δ на F). Теперь, рассуждая, как в доказательстве утверждения (i), получаем оценку

$$1 \geq \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \cdot \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{6}{5} \cdots \frac{M-1}{M-2},$$

откуда следует, что

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{8}{3(M-1)}.$$

При $M \geq 9$ правая часть неравенства не превосходит $3/M$, что и доказывает утверждение (ii).

Докажем утверждение (iii). Рассуждаем так же, как в доказательстве утверждения (ii), с единственным отличием: для оценки кратности цикла $(Y \circ D_2|_P)$ в точке o используются гиперкасательные дивизоры

$$D_4|_P, D_5|_P, \dots, D_{M-3}|_P$$

(на один меньше, чем выше), так что имеем оценку

$$1 \geq \frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \cdot \frac{3}{2} \frac{5}{4} \frac{6}{5} \dots \frac{M-2}{M-3},$$

откуда следует, что

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} Y \leq \frac{8}{3(M-2)}.$$

При $M \geq 6$ правая часть неравенства не превосходит $4/M$, что и доказывает утверждение (iii).

Доказательство предложения завершено.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 1.4.

4.2. Раздутие особой точки. Предположим, что пара $(F, \frac{1}{n}D)$ не логканонична для некоторого дивизора $D \in |nH|$, т. е. для некоторого простого дивизора E^* над F , простого дивизора $E^* \subset \tilde{F}$, где $\psi: \tilde{F} \rightarrow F$ – некоторый бирациональный морфизм, $\tilde{F}$ неособо и проективно, справедливо *логнеравенство Нётера–Фано*

$$\text{ord}_{E^*} \psi^* D > n(a(E^*) + 1).$$

В силу линейности этого неравенства по D и n можно считать дивизор D простым. Пусть $B^* = \psi(E^*) \subset F$ – центр логмаксимальной особенности E^* . Известно, что $B^* \subset \text{Sing } F$; в частности, $\text{codim}(B^* \subset F) \geq 7$. Пусть $o \in B^*$ – точка общего положения, $\varphi: F^+ \rightarrow F$ – ее раздутие, $E \subset F^+$ – исключительная квадрика.

Рассмотрим первый гиперкасательный дивизор $D_2 \in |2H|$ в точке o . Согласно лемме 3.2 дивизор D_2 неприводим и приведен, а в силу предложения 3.7 пара $(F, \frac{1}{2}D_2)$ логканонична в точке o . Следовательно, $D \neq D_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеет место неравенство*

$$\text{mult}_o D \leq \frac{8}{3}n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эффективный цикл $(D \circ D_2)$ коразмерности 2. Очевидно,

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg} (D \circ D_2) \geq \frac{3}{2} \frac{\text{mult}_o}{\deg} D,$$

однако согласно предложению 4.1, (i) левая часть этого неравенства не превосходит $4/M$. Поскольку $\deg D = nM$, предложение доказано.

Запишем $D^+ \sim nH - \nu E$, где $\nu \leq \frac{4}{3}n$.

Рассмотрим сечение P гиперповерхности F общим 5-мерным линейным подпространством, содержащим точку o . Пусть P^+ – собственный прообраз P на F^+ и $E_P = P^+ \cap E$ – неособая трехмерная квадрика. Положим также $D_P = D|_P$. Очевидно, пара $(P, \frac{1}{n}D_P)$ имеет точку o изолированным центром

не логканонической особенности. Поскольку $a(E_P) = 2$ и $D_P^+ \sim nH_P - \nu E_P$ (где H_P – класс гиперплоского сечения многообразия P), причем $\nu \leq \frac{4}{3}n < 2n$, пара $(P^+, \frac{1}{n}D_P^+)$ не логканонична и объединение $\text{LCS}_E(P^+, \frac{1}{n}D_P^+)$ центров всех не логканонических особенностей этой пары, пересекающих E_P , есть связное замкнутое подмножество исключительной квадррики E_P . Пусть S_P – некоторая неприводимая компонента этого множества. Очевидно, справедливо неравенство

$$\text{mult}_{S_P} D_P^+ > n.$$

Далее, $\text{codim}(S_P \subset E_P) \in \{1, 2, 3\}$. Возвращаясь к исходной паре $(F, \frac{1}{n}D)$, видим, что имеется не логканоническая особенность пары $(F^+, \frac{1}{n}D^+)$, центр которой – подмногообразие $S \subset E$ такое, что $S \cap E_P = S_P$ и, в частности, $\text{codim}(S \subset E) \in \{1, 2, 3\}$.

Отметим, что случай $\text{codim}(S \subset E) = 3$ невозможен: в силу принципа связности в этом случае S_P – точка, и потому S – линейное подпространство коразмерности 3 на квадрике E ранга не меньше 8, что невозможно.

Несложно исключить и случай $\text{codim}(S \subset E) = 1$. Предположим, что он реализуется. Тогда дивизор S высекается на E гиперповерхностью степени $d_S \geq 1$. Пусть H_E – класс гиперплоского сечения квадррики E . Имеем $D^+|_E \sim \nu H_E$, так что

$$\frac{4}{3}n \geq \nu > nd_S,$$

и потому S – гиперплоское сечение квадррики E . Пусть $\Delta \in |H|$ – однозначно определенное гиперплоское сечение гиперповерхности F такое, что $\Delta \ni o$ и $\Delta^+ \cap E = S$. Пара (F^+, Δ^+) логканонична, и поэтому $D \neq \Delta$. Для эффективного цикла $(D \circ \Delta)$ коразмерности 2 на F имеем

$$\text{mult}_o(D \circ \Delta) \geq 2\nu + 2\text{mult}_S D^+ > 4n,$$

поэтому

$$\frac{\text{mult}_o}{\deg}(D \circ \Delta) > \frac{4}{M},$$

что противоречит предложению 4.1. Этим случай дивизориального центра исключен.

4.3. Случай коразмерности 2. Начиная с этого момента предполагаем, что $\text{codim}(S \subset E) = 2$.

ЛЕММА 4.1. *Подмногообразие S содержится в некотором гиперплоском сечении квадррики E .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\text{mult}_S D^+ > n$ и $D^+|_E \sim \nu H_E$ с $\nu \leq \frac{4}{3}n$, для любой секущей $L \subset E$ подмногообразия S имеем $L \subset D^+$. Пусть $\Pi \subset E$ – линейное пространство максимальной размерности общего положения и $S_\Pi = S \cap \Pi$. Секущие замкнутого множества $S_\Pi \subset \Pi$ коразмерности 2 не могут замечать Π , так как $E \not\subset D^+$. Поэтому имеются две возможности (см. [29, лемма 2.3]):

- 1) секущие множества S_Π замечают гиперплоскость в Π ;
- 2) $S_\Pi \subset \Pi$ – линейное подпространство коразмерности 2.

В случае 1) секущие $L \subset E$ множества S замечают дивизор на E , который может быть только гиперплоским сечением квадррики E . В случае 2)

подмногообразие S содержит все свои секущие и является сечением E линейным подпространством коразмерности 2. Лемма доказана.

Как мы только что установили, реализуется одна из двух возможностей: либо существует единственное гиперплоское сечение Λ квадрики E , содержащее S (случай 1)), либо $S = E \cap \Theta$, где Θ – линейное подпространство коразмерности 2 (случай 2)). Разберем их по отдельности.

Предположим, что имеет место случай 1). Тогда S высекается на Λ гиперповерхностью степени $d_S \geq 2$. Положим

$$\mu = \text{mult}_S D^+, \quad \gamma = \text{mult}_\Lambda D^+,$$

где $\mu > n$ и $\mu \leq 2\nu \leq \frac{8}{3}n$.

ЛЕММА 4.2. *Справедливо неравенство*

$$\gamma \geq \frac{2\mu - \nu}{3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО нетрудно получить тем же способом, что и короткое доказательство леммы 3.5 в [14, п. 3.7]. Пусть $L \subset \Lambda$ – общая секущая множества S . Рассмотрим сечение P гиперповерхности F общей 4-плоскостью в $\mathbb{P}$ такой, что $P \ni o$ и $P^+ \cap E$ содержит прямую L . Очевидно, $o \in P$ – невырожденная квадратичная точка и $E_P = P^+ \cap E \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ – неособая квадрика в $\mathbb{P}^3$. Положим $D_P = D|_P$. Очевидно, $\gamma = \text{mult}_L D_P^+$.

Пусть $\sigma_L: P_L \rightarrow P^+$ – раздутие прямой L , $E_L = \sigma_L^{-1}(L)$ – исключительный дивизор; поскольку $\mathcal{N}_{L/P^+} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}_L(-1)$, исключительная поверхность E_L является линейчатой поверхностью типа $\mathbb{F}_1$, так что

$$\text{Pic } E_L = \mathbb{Z}s \oplus \mathbb{Z}f,$$

где s и f – классы исключительного сечения и слоя соответственно. Далее, $E_L|_{E_L} = -s - f$. Пусть D_L – собственный прообраз D_P^+ на P_L . Очевидно,

$$D_L \sim nH_P - \nu E_P - \gamma E_L$$

(где H_P – класс гиперплоского сечения P), так что

$$D_L|_{E_L} \sim \gamma s + (\gamma + \nu)f.$$

С другой стороны, L – общая секущая множества S , и поэтому L содержит по крайней мере две различные точки $p, q \in S$. Следовательно, дивизор D_P^+ имеет в точках $p, q \in L$ кратность μ , и поэтому эффективный 1-цикл $D_L|_{E_L}$ содержит соответствующие слои $\sigma_L^{-1}(p)$ и $\sigma_L^{-1}(q)$ над этими точками с кратностью $\mu - \gamma$. Таким образом,

$$\gamma + \nu \geq 2(\mu - \gamma),$$

откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь однозначно определенное гиперплоское сечение Δ гиперповерхности $F \subset \mathbb{P}$ такое, что $\Delta \ni o$ и $\Delta^+ \cap E = \Lambda$. Положим $D_\Delta = D|_\Delta$. Запишем

$$D^+|_{\Delta^+} = D_\Delta^+ + a\Lambda.$$

Очевидно,

$$\text{mult}_o D_\Delta = 2(\nu + a) \geq 2\nu + 2\frac{2\mu - \nu}{3} = \frac{4}{3}(\mu + \nu) > \frac{8}{3}n.$$

Поскольку, как мы отметили выше, подмногообразие S высекается на квадрике Λ гиперповерхностью степени $d_S \geq 2$, дивизор $D_\Delta^+ \sim nH_\Delta - (\nu + a)\Lambda$ не может содержать S с кратностью, большей чем

$$\frac{1}{d_S}(\nu + a) \leq \frac{\nu + a}{2}.$$

Поскольку пара $(F^+, \frac{1}{n}D^+)$ имеет не логканоническую особенность с центром в S , из обращения присоединения следует, что и пара $(\Delta^+, \frac{1}{n}(D_\Delta^+ + a\Lambda))$ имеет не логканоническую особенность с центром в S . Напомним, что $\text{codim}(S \subset \Delta^+) = 2$. Рассмотрим раздутие $\sigma_S: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta^+$ подмногообразия S и обозначим через E_S исключительный дивизор $\sigma_S^{-1}(S)$. Следующий факт хорошо известен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для некоторого неприводимого дивизора $S_1 \subset E_S$ такового, что проекция $\sigma_S|_{S_1}$ бирациональна, справедливо неравенство*

$$\text{mult}_S(D_\Delta^+ + a\Lambda) + \text{mult}_{S_1}(\tilde{D}_\Delta + a\tilde{\Lambda}) > 2n, \quad (4.2)$$

где $\tilde{D}_\Delta$ и $\tilde{\Lambda}$ – собственные прообразы соответственно D_Δ^+ и Λ на $\tilde{\Delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [26, предложение 9].

Положим $\mu_S = \text{mult}_S D_\Delta^+$ и $\beta = \text{mult}_{S_1} \tilde{D}_\Delta$. Рассмотрим сначала случай общего положения: $S_1 \neq E_S \cap \tilde{\Lambda}$. В этом случае $S_1 \not\subset \tilde{\Lambda}$ и неравенство (4.2) принимает следующий вид:

$$\mu_S + \beta + a > 2n.$$

Поскольку $\mu_S \geq \beta$, тем более имеем $2\mu_S + a > 2n$. С другой стороны, выше мы отметили, что $2\mu_S \leq \nu + a$. В итоге получаем оценку

$$\nu + 2a > 2n.$$

Следовательно, $\text{mult}_o D_\Delta > \nu + 2n > 3n$. Однако $D_\Delta \sim nH_\Delta$ – эффективный дивизор на гиперплоском сечении Δ , и согласно предложению 4.1, (ii) выполнено неравенство

$$\frac{\text{mult}_o D_\Delta}{\deg} \leq \frac{3}{M}.$$

Полученное противоречие исключает случай общего положения. Таким образом, остается единственная возможность: $S_1 = E_S \cap \tilde{\Lambda}$.

В этом случае неравенство (4.2) принимает следующий вид:

$$\mu_S + \beta + 2a > 2n.$$

Это неравенство слабее, чем соответствующая оценка в случае общего положения, но в качестве компенсации мы получаем дополнительное неравенство

$$2\mu_S + 2\beta \leq \nu + a$$

(ограничение $D_\Delta^+|_\Lambda$ высекается гиперповерхностью степени $\nu + a$ и содержит дивизор $S \sim d_S H_\Lambda$ с кратностью по крайней мере $\mu_S + \beta$). Комбинируя две последние оценки, получаем неравенство

$$\nu + 5a > 4n,$$

откуда следует, что $5(\nu + a) > 8n$, и потому $\text{mult}_o D_\Delta > \frac{16}{5}n$; как мы отметили выше, это противоречит предложению 4.1, (ii). Это завершает исключение случая 1).

Таким образом, имеет место случай 2): $S = E \cap \Theta$, где $\Theta \subset \mathbb{P}^{M-1}$ – линейное подпространство коразмерности 2. Пусть $P \subset F$ – сечение гиперповерхности F линейным подпространством коразмерности 2 в $\mathbb{P}$, однозначно определенное условиями $P \ni o$ и $P^+ \cap E = S$. Далее, пусть $|H - P|$ – пучок гиперплоских сечений F , содержащих P . Для общего гиперплоского сечения $\Delta \in |H - P|$ имеем:

а) дивизор D не содержит Δ компонентой, так что корректно определен эффективный цикл $(D \circ \Delta) = D_\Delta$ коразмерности 2 на F , который можно рассматривать как эффективный дивизор $D_\Delta \in |nH_\Delta|$ на гиперповерхности $\Delta \subset \mathbb{P}^{M-1}$;

б) для собственного прообраза D_Δ^+ на F^+ имеет место равенство $\text{mult}_S D_\Delta^+ = \text{mult}_S D^+$.

Дивизор D_Δ , конечно, может содержать P компонентой. Запишем $D_\Delta = G + aP$, где $a \in \mathbb{Z}_+$ и G – эффективный дивизор, не содержащий P компонентой, $G \in |(n - a)H_\Delta|$. Очевидно, $G^+ \sim (n - a)H_\Delta - (\nu - a)E_\Delta$, где $E_\Delta = \Delta^+ \cap E$, и, кроме того,

$$\text{mult}_S G^+ = \text{mult}_S D^+ - a > n - a.$$

Положим $m = n - a$. Корректно определен эффективный цикл $G_P = (F \circ P)$ коразмерности 2 на Δ , который, в свою очередь, можно рассматривать как эффективный дивизор $G_P \in |mH_P|$ на гиперповерхности $P \subset \mathbb{P}^{M-2}$. Дивизор G_P удовлетворяет неравенству

$$\text{mult}_o G_P \geq 2(\nu - a) + 2\text{mult}_S G^+ > 4m.$$

Это невозможно в силу предложения 4.1, (iii).

Таким образом, предположение о том, что пара $(F, \frac{1}{n}D)$ не логканонична для некоторого дивизора $D \sim nH$, приводит к противоречию.

Доказательство теоремы 1.4 завершено.

Список литературы

1. A. V. Pukhlikov, *Birationally rigid varieties*, Math. Surveys Monogr., **190**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, vi+365 pp.
2. В. Г. Саркисов, “Бирациональные автоморфизмы расслоений коник”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:4 (1980), 918–945; англ. пер.: V. G. Sarkisov, “Birational automorphisms of conic bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:1 (1981), 177–202.
3. В. Г. Саркисов, “О структурах расслоений на коники”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:2 (1982), 371–408; англ. пер.: V. G. Sarkisov, “On conic bundle structures”, *Math. USSR-Izv.*, **20**:2 (1983), 355–390.
4. Н. Р. Hudson, *Cremona transformations in plane and space*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, xx+454 pp.
5. В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. сб.*, **74**(116):4 (1967), 608–638; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Rational surfaces with a pencil of rational curves”, *Math. USSR-Sb.*, **3**:4 (1967), 563–587.
6. В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса”, *Матем. сб.*, **83**(125):1(9) (1970), 90–119; англ. пер.: V. A. Iskovskikh, “Rational surfaces with a pencil of

- rational curves and with positive square of the canonical class", *Math. USSR-Sb.*, **12**:1 (1970), 91–117.
7. М. Х. Гизатуллин, "Об аффинных поверхностях, пополняемых неособой рациональной кривой", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **34**:4 (1970), 778–802; англ. пер.: М. Kh. Gizatullin, "On affine surfaces that can be completed by a nonsingular rational curve", *Math. USSR-Izv.*, **4**:4 (1970), 787–810.
 8. Ю. И. Манин, "Рациональные поверхности над совершенными полями", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **30**:1 (1966), 55–97; англ. пер.: Yu. I. Manin, "Rational surfaces over perfect fields", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **30**:1 (1966), 99–113.
 9. Ю. И. Манин, "Рациональные поверхности над совершенными полями. II", *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 161–192; англ. пер.: Yu. I. Manin, "Rational surfaces over perfect fields. II", *Math. USSR-Sb.*, **1**:2 (1967), 141–168.
 10. Ю. И. Манин, *Кубические формы. Алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, М., 1972, 304 с.; англ. пер.: Yu. I. Manin, *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic*, North-Holland Math. Library, **4**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–London; American Elsevier Publishing Co., New York, 1974, vii+292 pp.
 11. И. В. Долгачев, "О рациональных поверхностях с пучком эллиптических кривых", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **30**:5 (1966), 1073–1100.
 12. В. А. Исковских, Ю. И. Манин, "Трехмерные кватерники и контрпримеры к проблеме Люрота", *Матем. сб.*, **86(128)**:1(9) (1971), 140–166; англ. пер.: V. A. Iskovskih, Yu. I. Manin, "Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem", *Math. USSR-Sb.*, **15**:1 (1971), 141–166.
 13. А. В. Пухликов, "Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:1 (1998), 123–164; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, "Birational automorphisms of algebraic threefolds with a pencil of Del Pezzo surfaces", *Izv. Math.*, **62**:1 (1998), 115–155.
 14. А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие расслоения Фано", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:3 (2000), 131–150; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, "Birationally rigid Fano fibrations", *Izv. Math.*, **64**:3 (2000), 563–581.
 15. И. В. Соболев, "Об одной серии бирационально жестких многообразий с пучком гиперповерхностей Фано", *Матем. сб.*, **192**:10 (2001), 123–130; англ. пер.: I. V. Sobolev, "On a series of birationally rigid varieties with a pencil of Fano hypersurfaces", *Sb. Math.*, **192**:10 (2001), 1543–1551.
 16. И. В. Соболев, "Бирациональные автоморфизмы одного класса многообразий, расслоенных на кубические поверхности", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:1 (2002), 203–224; англ. пер.: I. V. Sobolev, "Birational automorphisms of a class of varieties fibred into cubic surfaces", *Izv. Math.*, **66**:1 (2002), 201–222.
 17. А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. I", *Матем. сб.*, **195**:7 (2004), 127–160; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, "Birationally rigid varieties with a pencil of double Fano covers. I", *Sb. Math.*, **195**:7 (2004), 1039–1071.
 18. А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. II", *Матем. сб.*, **195**:11 (2004), 119–156; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, "Birationally rigid varieties with a pencil of Fano double covers. II", *Sb. Math.*, **195**:11 (2004), 1665–1702.
 19. А. В. Пухликов, "Бирационально жесткие многообразия с пучком двойных накрытий Фано. III", *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 35–68; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, "Birationally rigid varieties with a pencil of Fano double covers. III", *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 335–368.
 20. A. V. Pukhlikov, "Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano complete intersections", *Manuscripta Math.*, **121**:4 (2006), 491–526.

21. A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of algebraic varieties with a pencil of Fano cyclic covers”, *Pure Appl. Math. Q.*, **5**:2 (2009), 641–700.
22. М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей Дель Пеццо степеней 1 и 2”, *Матем. сб.*, **191**:5 (2000), 17–38; англ. пер.: М. М. Grinenko, “Birational properties of pencils of del Pezzo surfaces of degrees 1 and 2”, *Sb. Math.*, **191**:5 (2000), 633–653.
23. М. М. Гриненко, “Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2. II”, *Матем. сб.*, **194**:5 (2003), 31–60; англ. пер.: М. М. Grinenko, “Birational properties of pencils of del Pezzo surfaces of degrees 1 and 2. II”, *Sb. Math.*, **194**:5 (2003), 669–695.
24. М. М. Гриненко, “О двойном конусе над поверхностью Веронезе”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 5–22; англ. пер.: М. М. Grinenko, “On a double cone over a Veronese surface”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 421–438.
25. М. М. Гриненко, “Структуры Мори на трехмерном многообразии Фано индекса 2 и степени 1”, *Алгебраическая геометрия: Методы, связи и приложения*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Андрея Николаевича Тюринга, Тр. МИАН, **246**, Наука, М., 2004, 116–141; англ. пер.: М. М. Grinenko, “Mori structures on a Fano threefold of index 2 and degree 1”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **246** (2004), 103–128.
26. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия прямых произведений Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 153–186; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano direct products”, *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1225–1255.
27. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия двойных накрытий Фано”, *Матем. сб.*, **199**:8 (2008), 123–148; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of Fano double covers”, *Sb. Math.*, **199**:8 (2008), 1225–1250.
28. I. A. Cheltsov, “Fano varieties with many selfmaps”, *Adv. Math.*, **217**:1 (2008), 97–124.
29. А. В. Пухликов, “Бирациональная геометрия особых многообразий Фано”, *Многомерная алгебраическая геометрия*, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН, **264**, МАИК, М., 2009, 165–183; англ. пер.: A. V. Pukhlikov, “Birational geometry of singular Fano varieties”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **264** (2009), 159–177.
30. *Flips and abundance for algebraic threefolds* (Univ. of Utah, Salt Lake City, Utah, August 1991), *Astérisque*, **211**, eds. J. Kollár, Soc. Math. France, Paris, 1992, 258 pp.
31. Th. Eckl, A. Pukhlikov, “On the locus of nonrigid hypersurfaces”, *Automorphisms in birational and affine geometry*, Springer Proc. Math. Stat., **79**, Springer, New York, 2014, 121–139; 2012, 17 pp., arXiv: 1210.3715.
32. F. Call, G. Lyubeznik, “A simple proof of Grothendieck’s theorem on the parafactoriality of local rings”, *Commutative algebra: syzygies, multiplicities, and birational algebra* (South Hadley, MA, 1992), *Contemp. Math.*, **159**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, 15–18.
33. A. V. Pukhlikov, “Birational automorphisms of Fano hypersurfaces”, *Invent. Math.*, **134**:2 (1998), 401–426.
34. A. V. Pukhlikov, “Birationally rigid Fano complete intersections”, *J. Reine Angew. Math.*, **541** (2001), 55–79.
35. A. Corti, “Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry”, *Explicit birational geometry of 3-folds*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **281**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000, 259–312.

АЛЕКСАНДР ВАЛЕНТИНОВИЧ ПУХЛИКОВ
 (ALEKSANDR V. PUKHLIKOV)
 Department of Mathematical Sciences,
 The University of Liverpool, UK
 E-mail: pukh@liv.ac.uk

Поступило в редакцию
 02.07.2014