Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Зеленов, p -адический закон больших чисел, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 3, 31–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8275>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:26:36

УДК 519.21

Е. И. Зеленов

 p -адический закон больших чисел

Изучаются предельные теоремы для суммы независимых случайных величин, принимающих значение в поле p -адических чисел. Получены оценки для скорости сходимости по распределению суммы независимых случайных величин со значениями в группе целых p -адических чисел.

Библиография: 22 наименования.

Ключевые слова: p -адические числа, предельные теоремы, сумма независимых случайных величин.

DOI: 10.4213/im8275

§ 1. Введение

На написание настоящей статьи повлияла следующая физическая задача. Рассмотрим некоторую физическую систему, обладающую p -адическим параметром. В качестве примера такого рода систем выступают, например, спиновые стекла (см. [1]–[3]) или модели белка (см. [4]–[6]). Пусть есть статистический ансамбль, состоящий из такого рода систем по p -адическому параметру. Возникают следующие естественные вопросы: какое распределение соответствует равновесному состоянию ансамбля, что считать малым отклонением от равновесного распределения и какова скорость сходимости неравновесного распределения к равновесному. В качестве моделирования поведения такого ансамбля рассматривается задача о случайном блуждании со значениями в поле p -адических чисел или, другими словами, задача о распределении сумм случайных независимых величин со значениями в поле p -адических чисел. Ответ на первый вопрос дается теоремой 1. При некоторых естественных ограничениях на носитель распределения распределение суммы независимых одинаково распределенных величин сходится к равномерному распределению (мере Хаара) на носителе исходного распределения. Этот результат хорошо известен в теории случайных блужданий со значениями в компактной группе (см. [7]–[9]). Ответ на второй вопрос дается теоремой 2 – исходное распределение естественно считать “близким” к равновесному, если выпуклая оболочка его носителя содержит точку ноль. Если это условие выполнено, то распределение суммы величин сходится к равновесному распределению. В противном случае существуют только пределы по подпоследовательностям. Результат о существовании пределов по подпоследовательностям был получен в работе [10] в более общей ситуации (для произвольных перестановочных событий). Наиболее интересный результат – о скорости сходимости неравновесного распределения к равновесному – удается получить только для распределений, имеющих локально постоянную

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №4-11-00687).

плотность. Ответ дается теоремой 3. Вопросы скорости сходимости свертки случайных мер на компактных группах, имеющие непосредственное отношение к этому результату, рассматривались в работах [7], [11].

Случайным процессам со значениями в поле p -адических чисел, либо имеющими p -адические числа в качестве параметра, посвящено обширное количество работ (см., например, [12]–[17]). Всплеск интереса к случайным процессам над неархимедовыми полями во многом мотивирован идеями работы [18] о неархимедовой структуре пространства-времени. Обширный круг вопросов о применении p -адического анализа в математической физике рассматривался в [13], современный обзор содержится в [19].

Введем необходимые понятия и обозначения. Через $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ будем обозначать поле p -адических чисел и кольцо целых p -адических чисел соответственно. Будем рассматривать случай $p \neq 2$. Пусть $\mathbb{P}$ – мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная таким образом, что мера $\mathbb{Z}_p$ равна 1, $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p) = 1$. p -адичнозначной случайной величиной ξ называется $\mathbb{P}$ -измеримое отображение $\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$. В стандартной теории вероятностей для такого рода объектов используется термин “случайный элемент со значениями в $\mathbb{Q}_p$ ”. Всюду далее под случайными величинами будут пониматься p -адичнозначные случайные величины.

Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера $\mathbb{P}_\xi$ на $\mathbb{Q}_p$, определяемая формулой

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in A\}$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$. Далее вместо $\mathbb{P}\{\omega : \xi(\omega) \in A\}$ будем писать $\mathbb{P}\{\xi \in A\}$ для краткости.

Если мера $\mathbb{P}_\xi$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара $\mathbb{P}$, то существует измеримая вещественнозначная неотрицательная функция p_ξ такая, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \int_A p_\xi(x) \mathbb{P}(dx).$$

Функция p_ξ называется *плотностью случайной величины* ξ . Такие случайные величины будем называть *абсолютно непрерывными*.

Последовательность случайных величин ξ_n сходится по распределению к случайной величине ξ , $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \mathbb{P}_{\xi_n}(dx) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x) \mathbb{P}_\xi(dx).$$

§ 2. Характеристики случайной величины

Пусть $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Обозначим через $[x, y]$ минимальный шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий точки x и y . Множество $X \subset \mathbb{Q}_p$ называется *выпуклым*, если для любых точек x и y этого множества выполнено условие $[x, y] \subseteq X$. Если выпуклое множество не совпадает с $\mathbb{Q}_p$, то оно является шаром в $\mathbb{Q}_p$.

Характеристическим множеством H_ξ случайной величины ξ назовем выпуклую оболочку носителя распределения вероятности $\mathbb{P}_\xi$. Мере этого множества будем обозначать d_ξ , $d_\xi = \mathbb{P}(H_\xi)$. Легко заметить, что H_ξ либо совпадает

с $\mathbb{Q}_p$ (в этом случае $d_\xi = \infty$), либо является минимальным шаром, содержащим носитель меры $\mathbb{P}_\xi$. Если случайная величина не вырождена (т. е. не равна константе почти наверное), то $d_\xi > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Характеристическое множество случайной величины обладает следующим любопытным свойством ([20]). Пусть случайная величина ξ принадлежит пространству $L^\infty = L^\infty(\mathbb{Z}_p)$, т. е. является почти всюду ограниченной измеримой функцией на $\mathbb{Z}_p$, норма задается равенством

$$\|\xi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{Z}_p} |\xi(x)|_p.$$

Через $\epsilon(\xi)$ обозначим расстояние от ξ до подпространства постоянных функций в L^∞ :

$$\epsilon(\xi) = \inf_{c \in \mathbb{Q}_p} \{\|\xi - c\|_\infty\}.$$

Тогда характеристическое множество H_ξ есть множество p -адических чисел c , обладающих свойством $\|\xi - c\|_\infty = \epsilon(\xi)$. Другими словами, элементы характеристического множества дают наилучшее приближение случайной величины константами в пространстве L^∞ . По этой причине в [20] характеристическое множество случайной величины рассматривается как естественный аналог математического ожидания.

Через B_ξ обозначим выпуклую оболочку множества $\operatorname{supp} \mathbb{P}_\xi \cup \{0\}$. Другими словами, B_ξ – минимальный шар, содержащий носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ и точку нуль. *Дисперсией случайной величины ξ* будем называть число D_ξ , равное мере шара B_ξ , $D_\xi = \mathbb{P}(B_\xi)$. Очевидно, что $D_\xi \geq d_\xi$. Если для случайной величины ξ выполнено равенство $D_\xi = d_\xi$, такую величину будем называть *центрированной случайной величиной*. Заметим, что D_ξ есть степень числа p (рациональное число), поэтому $|D_\xi|_p = 1/D_\xi$.

§ 3. Закон больших чисел

Всюду далее будем рассматривать невырожденные случайные величины. Через $h(a, r)$ обозначим характеристическую функцию шара $B(a, r)$ радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$. Напомним, что r есть степень числа p . Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность *центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин с дисперсией* $0 < D < \infty$. Тогда последовательность $\{S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ . При этом случайная величина ξ является абсолютно непрерывной и имеет плотность $(1/D)h(0, D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Результат теоремы 1 хорошо известен в теории случайных блужданий на компактных группах (см. [7], [9]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность *независимых одинаково распределенных случайных величин с дисперсией* $D < \infty$ и мерой характеристического множества d , $0 < d \leq D$. Тогда для любого числа $a = 0, 1, 2, \dots, D/d - 1$ подпоследовательность $\{S_{n_k} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n_k}, n_k =$

$a + (D/d)k, k = 1, 2, \dots\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ . При этом случайная величина ξ является абсолютно непрерывной и имеет плотность $(1/d)h(b/D, d)$, для некоторого $b = b(a) \in \{0, 1, \dots, D/d - 1\}$.

Очевидно, что теорема 1 есть частный случай теоремы 2.

§ 4. Скорость сходимости

В настоящем разделе рассматриваются центрированные абсолютно непрерывные случайные величины ξ с плотностью p_ξ , которая является локально постоянной функцией с компактным носителем. Такие случайные величины характеризуются дисперсией D и параметром локальной постоянности Δ . Параметр постоянности Δ однозначно определяется следующим выражением

$$\Delta = \max_B \{ \mathbb{P}(B) : p_\xi(x + x') = p_\xi(x) \ \forall x \in \mathbb{Q}_p, \ \forall x' \in B \},$$

где $B \subset \mathbb{Q}_p$ – шар в $\mathbb{Q}_p$. Легко заметить, что всегда выполнено неравенство $\Delta \leq D$.

Закономерным является вопрос – какие случайные величины имеют такую плотность. Этим свойством обладают, например, непрерывно дифференцируемые функции. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Если случайная величина $\xi: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ является непрерывно дифференцируемой функцией, производная которой нигде не обращается в нуль на $\mathbb{Z}_p$, то ее плотность p_ξ есть локально постоянная функция с компактным носителем.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для функций $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ понятие непрерывной дифференцируемости отличается от соответствующего понятия для вещественнозначных функций. А именно, функция $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ называется непрерывно дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, если предел

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - A \right|_p$$

существует и равен нулю для некоторого $A \in \mathbb{Q}_p$. При этом число A есть производная функции f в точке a (см. [21]).

Утверждение леммы 1 следует из следующего свойства непрерывно дифференцируемых функций ([21]). Пусть $f: \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$ непрерывно дифференцируема в точке $a \in \mathbb{Z}_p$ и имеет в этой точке ненулевую производную, $f'(a) \neq 0$. Тогда существует шар $B(a, r)$ радиуса r с центром в точке a такой, что функция f отображает этот шар на шар $B(f(a), |f'(a)|_p r)$ взаимно однозначно, при этом функция $f(x)/f'(a)$ является изометрией в этом шаре. Таким образом,

$$p_\xi(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}_\xi(B(x, r))}{r} = \frac{1}{|f'(x)|_p}$$

является локально постоянной функцией. Компактность носителя плотности p_ξ следует из ограниченности непрерывной функции ξ на $\mathbb{Z}_p$.

Функция концентрации Q_ξ случайной величины ξ определяется следующим выражением:

$$Q_\xi(r) = \max_{x \in \mathbb{Z}_p} \{\mathbb{P}_\xi(B(x, r))\}.$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечной дисперсией D . При этом эти величины абсолютно непрерывны с плотностью p_ξ , плотность p_ξ локально постоянна с параметром постоянности Δ . Через p_{S_n} , $n = 1, 2, \dots$, обозначим плотность распределения вероятности случайной величины $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда справедлива следующая оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_p} \left| p_{S_n}(x) - \frac{1}{D} h(0, D)(x) \right|_p \leq \left(\frac{D}{\Delta} - 1 \right) e^{-\lambda_\xi n},$$

где вещественное число λ_ξ зависит только от распределения p_ξ и удовлетворяет неравенству

$$\lambda_\xi \geq \inf_{\Delta \leq r < D} \left\{ 2Q_\xi(r)(1 - Q_\xi(r)) \sin^2 \left(\frac{\pi r}{D} \right) \right\} > 0.$$

Из последней формулы вытекает следующая оценка для параметра убывания λ :

$$\lambda_\xi \geq 2Q_\xi(\Delta)(1 - 1/p) \sin^2 \left(\frac{\pi \Delta}{D} \right) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta}{D} \right)^3.$$

§ 5. Неодинаково распределенные величины

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ — последовательность центрированных независимых случайных величин с конечными дисперсиями D_n , $n = 1, 2, \dots$. При этом пусть последовательность дисперсий D_n равномерно ограничена, $D_n \leq D < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, и существует бесконечное число членов последовательности ξ_n , дисперсии которых удовлетворяют условию $D_n = D$.

Тогда последовательность случайных величин $\{S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится по распределению к абсолютно непрерывной случайной величине с плотностью $(1/D)h(0, D)$.

Условия теоремы 4 есть аналог условия Линдеберга для вещественнозначных случайных величин. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с дисперсиями D_{ξ_1} и D_{ξ_2} соответственно. Тогда дисперсия $D_{\xi_1 + \xi_2}$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$ удовлетворяет равенству $D_{\xi_1 + \xi_2} = \max\{D_{\xi_1}, D_{\xi_2}\}$. Следовательно, при всех достаточно больших n дисперсия суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$ есть D . Условия теоремы 4 требуют, чтобы в последовательности $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ было достаточное количество (а именно, бесконечно много) членов с дисперсией D .

§ 6. Доказательства теорем

Прежде всего заметим, что если случайная величина имеет конечную дисперсию D , то случайная величина $D\xi$ имеет единичную дисперсию, поэтому далее рассматриваем случайные величины с единичной дисперсией.

При доказательствах будет использован метод характеристических функций.

Характеристической функцией ϕ_ξ случайной величины ξ называется преобразование Фурье распределения вероятности этой величины:

$$\phi_\xi(s) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(sx) \mathbb{P}_\xi(dx),$$

где через $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$ обозначен аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$.

Как и в вещественном случае существует взаимно однозначное соответствие между распределениями случайных величин и их характеристическими функциями. Справедливо также и следующее утверждение. Пусть ξ_n – последовательность случайных величин и ϕ_n – соответствующая последовательность характеристических функций. Если при любом $s \in \mathbb{Q}_p$ существует предел $\phi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(s)$ и функция $\phi(s)$ непрерывна в точке $s = 0$, то $\phi(s)$ является характеристической функцией некоторой случайной величины ξ и $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству для вещественного случая (см. [22]).

Перейдем к доказательству теоремы 1. Как уже отмечалось ранее, утверждение теоремы 1 известно в теории случайных блужданий на компактных группах. Интерес может представлять метод доказательства. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин с единичной дисперсией, $\mathbb{P}_{\xi_n} = \mathbb{P}_\xi$ – распределение случайной величины ξ_n .

Первое простое наблюдение заключается в том, что характеристическая функция ϕ_ξ распределения $\mathbb{P}_\xi$ локально постоянна с параметром постоянно-сти 1 и равна 1 в нуле и, следовательно, на всем единичном шаре $\mathbb{Z}_p$. Действительно, поскольку носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в единичном шаре, то $sx \in \mathbb{Z}_p \forall x \in \text{supp } \mathbb{P}_\xi, \forall s \in \mathbb{Z}_p$, и, следовательно, $\chi(sx) = 1$ для таких s и x .

Пусть теперь $|s|_p = r > 1$. Представим единичный шар в виде несвязного объединения шаров радиуса $1/r$. Центры этих шаров можно выбрать таким образом, чтобы они пробегали множество целых рациональных чисел $\{0, 1, 2, \dots, r-1\}$. Значение характеристической функции в точке s можно вычислить по формуле

$$\phi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{r-1} \int_{B(k, 1/r)} \chi(sx) \mathbb{P}_\xi(dx) = \sum_{k=0}^{r-1} \chi(sk) \mathbb{P}_\xi\left(B\left(k, \frac{1}{r}\right)\right). \quad (1)$$

Поскольку $1/r < 1$, положительное вещественное число $\mathbb{P}_\xi(B(k, 1/r))$ строго меньше единицы для всех $k = 0, 1, 2, \dots, r-1$. В противном случае носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежал бы в одном из шаров $B(k, 1/r)$, что противоречит равенству единице дисперсии величины ξ . Кроме того, справедливо очевидное равенство

$$\sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{P}_\xi\left(B\left(k, \frac{1}{r}\right)\right) = \mathbb{P}_\xi(\mathbb{Z}_p) = 1.$$

Таким образом, $\phi_\xi(s)$, $|s|_p > 1$, есть выпуклая линейная комбинация векторов $\chi(ks)$ на комплексной плоскости, равных по модулю 1, при этом как минимум два слагаемых в этой линейной комбинации отличны от нуля. Заметим также, что все векторы $\chi(ks)$, $k = 0, 1, \dots, r-1$, различны. Отсюда немедленно вытекает неравенство $|\phi_\xi(s)| < 1$ при всех s таких, что $|s|_p > 1$. Поскольку по условию теоремы 1 величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы, то характеристическая функция ϕ_{S_n} суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$ есть ϕ_ξ^n , $\phi_{S_n}(s) = \phi_\xi^n(s)$. Из предыдущих рассуждений следует существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{S_n}(s) = h(0, 1)(s) \quad \text{при } s \in \mathbb{Q}_p.$$

Функция $h(0, 1)$ есть характеристическая функция абсолютно непрерывной случайной величины с плотностью $h(0, 1)$ (это вытекает из инвариантности функции $h(0, 1)$ относительно преобразования Фурье). Поточечная сходимость последовательности характеристических функций влечет сходимость соответствующей последовательности случайных величин по распределению. Следовательно, последовательность $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ сходится по распределению к случайной величине с плотностью $h(0, 1)$. Это завершает доказательство теоремы 1.

Аналогичные рассуждения применим для доказательства теоремы 2. Вернемся к формуле (1). Как и в случае теоремы 1, характеристическая функция $\phi_\xi(s)$ равна 1 на $\mathbb{Z}_p$, поскольку носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в единичном шаре (дисперсию D полагаем равной единице). В случае, когда мера $d = d_\xi$ характеристического множества случайных величин ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, совпадает с дисперсией (т.е. случайные величины являются центрированными), теорема 2 вытекает непосредственно из теоремы 1, поэтому далее рассматриваем случай $d < 1$. Это означает, что характеристическое множество H_ξ есть шар радиуса d с центром в точке K , где K имеет вид $K = k_0 + k_1p + \dots + k_{m-1}p^{m-1}$, $d = p^{-m}$, $k_0 = 1, 2, \dots, p-1$, $k_i = 0, 1, \dots, p-1$, $i > 0$. При всех s таких, что $1 < |s|_p \leq 1/d$, справедливо равенство

$$\mathbb{P}_\xi \left(B \left(k, \frac{1}{s} \right) \right) = \begin{cases} 0, & k \neq K, \\ 1, & k = K. \end{cases}$$

Последняя формула вытекает из того факта, что носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в шаре радиуса d с центром в точке K . Для всех s таких, что $|s|_p > 1/d$, рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве теоремы 1, можно доказать справедливость неравенства $|\phi_\xi(s)| < 1$. Таким образом, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \phi_\xi^n(s) - \chi(nKs)h \left(0, \frac{1}{d} \right)(s) \right| = 0 \quad \text{для всех } s \in \mathbb{Q}_p. \quad (2)$$

Из последней формулы вытекает, что $\phi_\xi^n(s)$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$ в точках s таких, что $1 < |s|_p \leq 1/d$, поскольку $\chi(Ks) \neq 1$ в этих точках. Однако если выбрать подпоследовательность $n_k(a)$ вида

$$n_k(a) = a + \frac{1}{d}k, \quad a \in \left\{ 0, 1, \dots, \frac{1}{d} - 1 \right\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то справедливо равенство

$$\chi(n_k(a)Ks) = \chi(bs), \quad b \in \left\{0, 1, \dots, \frac{1}{d} - 1\right\}, \quad b = aK \bmod \frac{1}{d}.$$

Действительно, $n_k(a)Ks = aKs + (1/d)kKs$ и при всех s таких, что $|s|_p \leq 1/d$, справедливо неравенство $|(s/d)kK|_p \leq d|s|_p \leq 1$. Таким образом, имеем

$$\chi(n_k(a)Ks) = \chi(aKs) = \chi(bs), \quad b = aK \bmod \frac{1}{d},$$

при всех $|s|_p \leq 1/d$. С учетом этих рассуждений и из формулы (2) следует равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_\xi^{n_k(a)}(s) = \chi(bs)h\left(0, \frac{1}{d}\right)(s), \quad s \in \mathbb{Q}_p.$$

Функция $\chi(bs)h(0, 1/d)(s)$ есть преобразование Фурье функции $(1/d)h(b, d)$. Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Будем считать, что максимальная дисперсия D равна единице. Для доказательства опять воспользуемся формулой (1) для центрированной случайной величины ξ с единичной дисперсией. Из этой формулы следует, что при $|s|_p = r > 1$ значение характеристической функции в точке s есть комплексное число, которое принадлежит правильно-му r -угольнику на комплексной плоскости, вершины которого есть точки вида $\exp(2\pi i/r)$. При этом, поскольку как минимум два члена в сумме (1) отличны от нуля, число $\phi_\xi(s)$ не совпадает с вершиной многоугольника (то есть эта сумма всегда меньше единицы). Из геометрических соображений легко заметить, что максимальное значение модуля суммы достигается в том случае, если в сумме (1) отлично от нуля ровно два слагаемых, при этом коэффициент при одном из слагаемых достигает максимального значения, и угол между соответствующими векторами на комплексной плоскости равен $2\pi/r$. По определению функции концентрации $\max_k \mathbb{P}_\xi(B(k, 1/r)) = Q_\xi(1/r)$. Следовательно, максимальное значение коэффициента есть $Q_\xi(1/r)$, соответственно минимальным значением является $1 - Q_\xi(1/r)$. Применяя теорему косинусов и простейшие тригонометрические преобразования, получаем соотношения

$$\begin{aligned} |\phi_\xi(s)|^2 &\leq Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)^2 + \left(1 - Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 - 2Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)\left(1 - Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)\right)\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{r}\right) \\ &= 1 - 4Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)\left(1 - Q_\xi\left(\frac{1}{r}\right)\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{r}\right). \end{aligned} \quad (3)$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуются некоторые свойства функции концентрации. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть ξ – центрированная случайная величина с дисперсией D . Тогда справедливы утверждения:

- 1) $Q_\xi(D) = 1$;
- 2) $Q_\xi(r) \leq 1/p, r < D$;
- 3) $Q_\xi(r) \geq r/D, r \leq D$.

Первое утверждение леммы 2 вытекает из того факта, что носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в шаре $B(0, D)$. В силу того, что $B(0, D)$ – минимальный шар, содержащий носитель меры $\mathbb{P}_\xi$, выполнено неравенство $Q_\xi(r) < 1$ при всех $r < D$ (в противном случае носитель меры содержался бы в шаре радиуса r). Поскольку функция концентрации принимает дискретные значения, равные степеням числа p , получаем второе утверждение леммы 2. Последнее утверждение леммы 2 следует из соотношений

$$1 = \sum_{k=0}^{D/r-1} \mathbb{P}_\xi(B(k, r)) \leq Q_\xi(r) \frac{D}{r}.$$

С учетом соотношений (3) и леммы 2 получаем следующую оценку для модуля характеристической функции $\phi_\xi(s)$ при всех s таких, что $|s|_p > 1$:

$$|\phi_\xi(s)| \leq \sqrt{1 - 4 \left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{|s|_p} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}} \leq \sqrt{1 - \frac{4(p-1)}{p^2} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}}. \quad (4)$$

Последняя оценка показывает, что при всех s таких, что $|s|_p > 1$, модуль характеристической функции $\phi_\xi(s)$ строго меньше единицы и, что существенно для доказательства теоремы 4, оценка не зависит от явного вида функции ξ . Единственное предположение относительно случайной величины ξ , которое использовалось при выводе (4), это центрированность и единичность дисперсии величины ξ . Поскольку по условиям теоремы 4 все случайные величины имеют дисперсию не более D (D положили равной единице), то характеристическая функция ϕ_{S_n} суммы случайных величин $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ тождественно равна единице на $\mathbb{Z}_p$ и при всех s таких, что $|s|_p > 1$, удовлетворяет оценке

$$|\phi_{S_n}(s)| \leq \left(1 - \frac{4(p-1)}{p^2} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}\right)^{k(n)/2},$$

где $k(n)$ – количество случайных величин из множества $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, имеющих единичную дисперсию. По условию теоремы 4 $k(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, при всех s таких, что $|s|_p > 1$, справедливо соотношение

$$|\phi_{S_n}(s)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы 1.

Для доказательства теоремы 3 используем те же соображения (формулу (3)). При всех s таких, что $|s|_p > 1$, имеет место

$$|\phi_\xi(s)| \leq \sqrt{1 - 4Q_\xi\left(\frac{1}{|s|_p}\right)\left(1 - Q_\xi\left(\frac{1}{|s|_p}\right)\right) \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}}. \quad (5)$$

Поскольку плотность p_ξ случайной величины ξ есть по условию теоремы 3 локально постоянная функция (с параметром постоянности Δ) и имеет носитель в шаре $B(0, 1)$, то характеристическая функция ϕ_ξ – локально постоянная функция с параметром постоянности единица и компактным носителем (носитель лежит в шаре $B(0, 1/\Delta)$). Введем обозначение

$$\lambda_\xi = \inf_{\Delta \leq r < 1} 2Q_\xi(r)(1 - Q_\xi(r)) \sin^2(\pi r).$$

С учетом последней формулы получаем оценку при всех s таких, что $1 < |s|_p \leq 1/\Delta$:

$$|\phi_\xi(s)| \leq \sqrt{1 - 2\lambda_\xi} \leq e^{-\lambda_\xi}.$$

С учетом последней оценки справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} |p_{S_n}(s) - h(0, 1)(s)| &= \left| \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-sx)(\phi_\xi^n(x) - h(0, 1)(x)) \mathbb{P}(dx) \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right) \sup_{1 < |s|_p \leq 1/\Delta} |\phi_\xi(s)|^n \leq \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right) e^{-\lambda_\xi n}. \end{aligned}$$

Поскольку r строго меньше дисперсии (дисперсия равна единице), то $Q_\xi(r) \leq 1/p$ для таких r . Далее, справедливы неравенства $Q_\xi(r) \geq r \geq \Delta$. Следовательно, для степени убывания λ_ξ справедлива оценка

$$\lambda_\xi \geq \frac{2(p-1)}{p} Q_\xi(\Delta) \sin^2(\pi\Delta).$$

Легко заметить, что справедливо равенство $Q_\xi(\Delta) = \Delta \sup_{x \in B(0,1)} p_\xi(x)$. Если обозначить через $\|\cdot\|$ стандартную норму в пространстве комплекснозначных непрерывных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем, то оценку для скорости сходимости можно переписать следующим образом:

$$\|p_{S_n} - h(0, 1)\| \leq \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{4}{3} \Delta \sin^2(\pi\Delta) \|p_\xi\| n \right\} \leq \left(\frac{1}{\Delta} - 1 \right) \exp \left\{ -\frac{\Delta^3}{3} n \right\}.$$

В последнем равенстве использовались очевидные оценки

$$\|p_\xi\| \geq 1, \quad \sin(\pi x) \geq \frac{x}{2} \quad \forall x \in [0, 1], \quad \frac{2(p-1)}{p} \geq \frac{4}{3} \quad \forall p \geq 3.$$

Теорема 3 доказана.

§ 7. Вероятности больших уклонений

В силу неархимедовости нормы если последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин равномерно ограничена, $|\xi_n|_p \leq C$, то и суммы этих величин равномерно ограничены, $|S_n|_p \leq C$ при всех n . Тем не менее задача о вероятности больших уклонений имеет смысл для нецентрированных случайных величин. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с дисперсией $D = 1$ и мерой характеристического множества $d < 1$. Через $S_n, n = 1, 2, \dots$, обозначим сумму первых n элементов этой последовательности, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть $B(a, r), a \in \mathbb{Z}_p, r \leq 1$, – шар с центром в точке a радиуса r . Через $P_n(a, r)$ обозначим вероятность

$$P_n(a, r) = \mathbb{P}\{S_n \in B(a, r)\}$$

и рассмотрим поведение величины $P_n(a, r)$ при больших n . Как следует из теоремы 2, последовательность $P_n(a, r)$ не имеет предела при $n \rightarrow \infty$, поскольку существуют подпоследовательности, пределы по которым равны 1, и подпоследовательности, пределы по которым равны нулю. Однако справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. При всех $a \in \mathbb{Z}_p$ и $r \leq 1$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P_k(a, r) = r.$$

Теорема 5 является простым следствием теоремы 2. Действительно, в силу теоремы 2 последовательность $P_n(a, r)$ имеет тот же предел средних по Чезаро, что и последовательность $p_n(a, r)$ следующего вида:

$$p_n(a, r) = \begin{cases} 0, & n \not\equiv a \pmod{\frac{1}{d}}; \\ \frac{r}{d}, & n \equiv a \pmod{\frac{1}{d}}, \quad r \leq d; \\ 1, & n \equiv a \pmod{\frac{1}{r}}, \quad r \geq d. \end{cases}$$

Легко увидеть, что предел средних по Чезаро последовательности $p_n(a, r)$ равен r .

Список литературы

1. G. Parisi, “Infinite number of order parameters for spin-glasses”, *Phys. Rev. Lett.*, **43** (1979), 1754–1756.
2. M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, M. Virasoro, “Nature of the spin-glass phase”, *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 1156–1159.
3. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, “Application of p -adic analysis to models of breaking of replica symmetry”, *J. Phys. A*, **32**:50 (1999), 8785–8791.
4. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, “ p -adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes”, *J. Phys. A*, **35**:2 (2002), 177–189.
5. В. А. Аветисов, А. Х. Биколов, “Об ультраметричности флуктуационно динамической подвижности белковых молекул”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Сборник статей, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 82–89; англ. пер.: V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, “Ultrametricity of fluctuation dynamic mobility of protein molecules”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265** (2009), 75–81.
6. В. А. Аветисов, А. Х. Биколов, В. А. Осипов, “ p -адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул”, *Избранные вопросы p -адической математической физики и анализа*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимиров, Тр. МИАН, **245**, Наука, М., 2004, 55–64; англ. пер.: V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov, V. A. Osipov, “ p -adic models for ultrametric diffusion in conformational dynamics of macromolecules”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **245** (2004), 48–57.
7. Б. М. Клосс, “Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной группы”, *Докл. АН СССР*, **109**:3 (1956), 453–455.
8. K. Urbanik, “On the limiting probability distribution on a compact topological group”, *Fund. Math.*, **44** (1957), 253–261.
9. K. Stromberg, “Probabilities on a compact group”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **94**:2 (1960), 295–309.

10. S. Evans, “Local field U -statistics”, *Algebraic methods in statistics and probability* (Notre Dame, IN, 2000), Contemp. Math., **287**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 75–81.
11. Д. С. Миндлин, “Скорость сходимости сверток случайных мер на компактной группе”, *ТВП*, **35**:2 (1990), 361–367; англ. пер.: D. S. Mindlin, “Rate of convergence of convolutions of random measures on a compact group”, *Theory Probab. Appl.*, **35**:2 (1990), 368–373.
12. S. Albeverio, W. Karwowski, “Diffusion on p -adic numbers”, *Gaussian random fields* (Nagoya, 1990), Ser. Probab. Statist., **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, 86–99.
13. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p -адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994, 352 с.; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p -adic analysis and mathematical physics*, Series on Soviet and East European Mathematics, **1**, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994, xx+319 pp.
14. А. Х. Бикүлов, И. В. Волович, “ p -адическое броуновское движение”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:3 (1997), 75–90; англ. пер.: A. Kh. Bikulov, I. V. Volovich, “ p -adic Brownian motion”, *Izv. Math.*, **61**:3 (1997), 537–552.
15. A. Yu. Khrennikov, M. Nilson, *p -adic deterministic and random dynamics*, Math. Appl., **574**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, xviii+270 pp.
16. S. N. Evans, “Local fields, Gaussian measures, and Brownian motions”, *Topics in probability and Lie groups: boundary theory*, CRM Proc. Lecture Notes, **28**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 11–50.
17. A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **244**, Marcel Dekker, New York, 2001, xii+316 pp.
18. И. В. Волович, “ p -адическое пространство-время и теория струн”, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340; англ. пер.: I. V. Volovich, “ p -adic space-time and string theory”, *Theoret. and Math. Phys.*, **71**:3 (1987), 574–576.
19. В. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, “On p -adic mathematical physics”, *p -Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:1 (2009), 1–17.
20. S. N. Evans, T. Lidman, “Expectation, conditional expectation and martingales in local fields”, *Electron. J. Probab.*, **12**:17 (2007), 498–515.
21. W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus. An introduction to p -adic analysis*, Cambridge Stud. Adv. Math., **4**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984, viii+306 pp.
22. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, В 2-х кн., 3-е изд., перераб. и доп., МЦНМО, М., 2004, 928 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Shiryaev, 2nd ed., Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1995, xvi+623 pp.

ЕВГЕНИЙ ИГОРЕВИЧ ЗЕЛЕНОВ

(EVGENII I. ZELENOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

Поступило в редакцию

08.07.2014

20.10.2014