Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Вырождения кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 4, 103–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8276>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:38:32

УДК 512.774.4+512.774.2+512.542+512.647.4

В. В. Никулин

Вырождения кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов

При использовании результатов из [1]–[3], где изучались кэлеровы КЗ-поверхности и решетки Нимейера, классифицируются вырождения кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов. Главным образом, классифицируются вырождения коразмерности 1.

Библиография: 23 наименования.

Ключевые слова: КЗ-поверхность, кэлерова поверхность, группа автоморфизмов, вырождение, особенности, решетка Пикара, целочисленная квадратичная форма.

DOI: 10.4213/im8276

Посвящается памяти А. Н. Тодорова

§ 1. Введение

При использовании результатов из препринта [1], содержащего также результаты статей [2], [3], посвященных изучению кэлеровых КЗ-поверхностей и решеток Нимейера, классифицируются вырождения кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов. Главным образом, рассматриваются вырождения коразмерности 1. Описываются возможные диаграммы Дынкина и дискриминатные группы вырождений (см. § 6). В § 5 дано детальное описание возможных вырождений при использовании отметок решетками Нимейера и классификации так называемых KahKЗ -классов сопряженности групп автоморфизмов решеток Нимейера, полученной в [1]–[3] и § 4 настоящей работы. В § 7 формулируется важная гипотеза 7.1 и приводятся некоторые замечания.

В § 3 приведены классический пример куммеровых поверхностей, которые можно рассматривать как вырождение коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов $(C_2)^4$, и общая теория.

В § 2 мы напоминаем результаты работы [4] о существовании примитивного вложения решетки (т. е. целочисленной симметрической билинейной формы) в одну из четных унимодулярных решеток фиксированной сигнатуры (см. теорему 2.1). Данные результаты являются основным инструментом нашей классификации в силу эпиморфности отображения периодов для кэлеровых

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

КЗ-поверхностей, доказанной Тодоровым в [5] и Сиу в [6], и глобальной теоремы Торелли для кэлеровых КЗ-поверхностей [7] (см. также [8] и [9]). Они позволяют описать возможные решетки Пикара и группы автоморфизмов КЗ-поверхностей. Постоянно используются программы 5, 6 из § 8 (дополнение), основанные на теореме 2.1.

Мы надеемся дать более точные результаты и рассмотреть другие случаи (например, вырождения коразмерностей, больших 1) в последующих публикациях.

Предварительный вариант настоящей работы опубликован как препринт [10].

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Существование примитивного вложения четной решетки в четные унимодулярные решетки согласно [4]

В настоящей статье мы используем обозначения, определения и результаты о решетках (т.е. невырожденных целочисленных (над $\mathbb{Z}$) симметрических билинейных форм) из [4]. В частности, $\oplus$ обозначает ортогональную сумму решеток и квадратичных форм. Для простого p через $\mathbb{Z}_p$ обозначается кольцо целых p -адических чисел и через $\mathbb{Z}_p^*$ – его группа обратимых элементов.

Пусть S – решетка, $A_S = S^*/S$ – ее дискриминантная группа и q_S – ее дискриминантная квадратичная форма на A_S , где предполагается, что решетка S четна, т.е. квадрат x^2 четен для любого $x \in S$. Через $l(A_S)$ обозначается минимальное число образующих конечной абелевой группы A_S и через $|A_S|$ – ее порядок. Для простого p через $q_{S_p} = q_{S \otimes \mathbb{Z}_p}$ обозначается p -компонента формы q_S (эквивалентно, дискриминантная квадратичная форма p -адической решетки $S \otimes \mathbb{Z}_p$). Квадратичная форма на группе порядка 2 обозначается $q_\theta^{(2)}(2)$. Через $K(q_{S_p})$ обозначается p -адическая решетка ранга $l(A_{S_p})$ с дискриминантной квадратичной формой q_{S_p} . Она единственна с точностью до изоморфизма для $p \neq 2$ и $p = 2$, если $q_{S_2} \not\cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$. Имеет место следующая теорема, где вложение $S \subset L$ решеток называется *примитивным*, если L/S не имеет кручения.

ТЕОРЕМА 2.1 [4, теорема 1.12.2]. Пусть S – четная решетка сигнатуры $(t_{(+)}, t_{(-)})$ и $l_{(+)}, l_{(-)}$ – целые числа. Тогда существует примитивное вложение решетки S в одну из четных унимодулярных решеток L сигнатуры $(l_{(+)}, l_{(-)})$, если и только если выполнены следующие условия:

- 1) $l_{(+)} - l_{(-)} \equiv 0 \pmod{8}$;
- 2) $l_{(+)} - t_{(+)} \geq 0$, $l_{(-)} - t_{(-)} \geq 0$, $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} \geq l(A_S)$;
- 3) $(-1)^{l_{(+)} - t_{(+)}} |A_S| \equiv \det K(q_{S_p}) \pmod{(\mathbb{Z}_p^*)^2}$ для каждого нечетного простого p такого, что $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{S_p})$;
- 4) $|A_S| \equiv \pm \det K(q_{S_2}) \pmod{(\mathbb{Z}_2^*)^2}$, если $l_{(+)} + l_{(-)} - t_{(+)} - t_{(-)} = l(A_{S_2})$ и $q_{S_2} \not\cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$.

Отметим, что если последнее неравенство в условии 2) теоремы 2.1 строгое, то не нужны условия 3) и 4). Если $q_{S_2} \cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$, то не нужно условие 4).

В данной работе мы применяем эту теорему в случае отрицательно определенных четных решеток S и четной унимодулярной решетки L сигнатуры $(3, 19)$ (единственной с точностью до изоморфизма), изоморфной решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$ КЗ-поверхностей X . В этом случае $t_{(+)} = 0$, $t_{(-)} = \text{rk } S$ и $l_{(+)} = 3$, $l_{(-)} = 19$.

§ 3. Пример куммеровых поверхностей и общая теория

Рассмотрим кэлеровы КЗ-поверхности, являющиеся куммеровыми поверхностями. Они являются минимальными разрешениями особенностей факторов 2-мерных комплексных торов по инволюции обращения. Общая куммерова поверхность X имеет число Пикара 16 и имеет 16 неособых рациональных кривых, определяющих диаграмму Дынкина $16A_1$. Кроме того, X имеет конечную симплектическую группу автоморфизмов $(C_2)^4$, задаваемую сдвигами на точки второго порядка двумерного тора. Общая кэлерова КЗ-поверхность с симплектической группой автоморфизмов $(C_2)^4$ имеет число Пикара 15 (см. [11], [12]). Таким образом, куммеровы поверхности можно рассматривать как *вырождение коразмерности 1* кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов $(C_2)^4$.

Этот классический пример поднимает следующие интересные вопросы.

Имеются ли вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов $(C_2)^4$, отличные от куммеровых поверхностей?

Каковы вырождения коразмерности 1 (и других коразмерностей) кэлеровых КЗ-поверхностей с другими конечными симплектическими группами автоморфизмов?

Используя результаты препринта [1] (и соответствующих статей [2], [3]), мы можем ответить на эти вопросы.

Например, мы показываем, что кэлеровы КЗ-поверхности с конечной симплектической группой автоморфизмов $(C_2)^4$ имеют другое вырождение коразмерности 1, которое имеет тип $4A_1$. Это следует из нижеприведенной теоремы 6.1. Таким образом, решетка Пикара данных КЗ-поверхностей имеет ранг 16, данные КЗ-поверхности имеют в точности четыре неособые рациональные кривые, образующие диаграмму Дынкина $4A_1$, и они имеют группу автоморфизмов $(C_2)^4$. В силу результатов из [13]–[15] их можно рассматривать как минимальные разрешения особенностей комплексных поверхностей с четырьмя особенностями Дю Валия типа A_1 и группой автоморфизмов $(C_2)^4$. Используя отметки кэлеровых КЗ-поверхностей решетками Нимейера и следуя обозначениям и результатам работ [1]–[3], мы сводим доказательство этого к следующему.

Напомним, что решетка Нимейера – это четная отрицательно определенная унимодулярная решетка ранга 24. С точностью до изоморфизма имеется 24 таких решетки $N = N_j$, $j = 1, 2, \dots, 24$, классифицированных Нимейером [16]. Они характеризуются их подрешетками $N^{(2)}$, порожденными всеми элементами

с квадратом (-2) , называемыми *корнями*. Приведем список решеток Нимейера N_j , где в скобках указан номер j :

$$\begin{aligned} N^{(2)} = [\Delta(N)] = & (1) D_{24}, (2) D_{16} \oplus E_8, (3) 3E_8, (4) A_{24}, (5) 2D_{12}, \\ & (6) A_{17} \oplus E_7, (7) D_{10} \oplus 2E_7, (8) A_{15} \oplus D_9, (9) 3D_8, (10) 2A_{12}, \\ & (11) A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6, (12) 4E_6, (13) 2A_9 \oplus D_6, (14) 4D_6, \\ & (15) 3A_8, (16) 2A_7 \oplus 2D_5, (17) 4A_6, (18) 4A_5 \oplus D_4, (19) 6D_4, \\ & (20) 6A_4, (21) 8A_3, (22) 12A_2, (23) 24A_1, \end{aligned}$$

что дает 23 решетки Нимейера N_j . Последней является решетка Лича (24) с $N^{(2)} = \{0\}$, не имеющая корней. Далее $N(R)$ обозначает решетку Нимейера с системой корней R .

Пусть $N = N_j$, $j = 1, 2, \dots, 23$, – одна из 23 решеток Нимейера, имеющих нетривиальную систему корней. Фиксируем базис $P(N)$ системы корней решетки N и рассмотрим группу автоморфизмов $A(N)$ решетки N , сохраняющих базис $P(N)$. Пусть $H \subset A(N)$ – подгруппа группы $A(N)$. Обозначим через $N_H = (N^H)^\perp \subset N$ коинвариантную подрешетку группы H , где $N^H = \{x \in N \mid H(x) = x\} \subset N$ – неподвижная подрешетка группы H . Известно (см. [4], [12]), что N_H не имеет корней. Подгруппа H *максимальна*, если $H = \text{Clos}(H)$ – максимальная подгруппа группы $A(N)$ с той же самой коинвариантной подрешеткой N_H . Можно ограничиться рассмотрением только максимальных подгрупп H . Подгруппа H называется *группой автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей* (кратко: H имеет KahKЗ -класс сопряженности в $A(N)$), если решетка N_H имеет примитивное вложение в решетку $L_{\text{КЗ}}$, являющуюся четной унимодулярной решеткой сигнатуры $(3, 19)$. (Решетка $L_{\text{КЗ}}$ изоморфна решетке когомологий $H^2(X, \mathbb{Z})$ кэлеровых КЗ-поверхностей.) Эквивалентно, N_H удовлетворяет условиям теоремы 2.1 для $l_{(+)} = 3$, $l_{(-)} = 19$.

Пусть $\alpha \in P(N)$ и $H(\alpha)$ – орбита подгруппы H данного элемента α . Примитивная подрешетка $S = [N_H, \alpha]_{\text{пр}} \subset N$, порожденная N_H и α , содержит $H(\alpha)$, и $H(\alpha)$ дает базис системы корней с квадратом (-2) в S . Если S имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$ (эквивалентно, S удовлетворяет теореме 2.1 для $l_{(+)} = 3$, $l_{(-)} = 19$), то S является решеткой Пикара кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов H и классами неособых рациональных кривых $H(\alpha)$. Здесь мы используем эпиморфность отображения периодов для кэлеровых КЗ-поверхностей, доказанную Тодоровым в [5] и Сиу в [6], и глобальную теорему Торелли для кэлеровых КЗ-поверхностей [7] (см. также [8] и [9]). Поскольку $\text{rk } S = \text{rk } N_H + 1$, данные КЗ-поверхности могут рассматриваться как вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов H . Примитивное вложение $S \subset N$ может рассматриваться как *отметка* данных кэлеровых КЗ-поверхностей решеткой Нимейера $N = N_j$ (см. [1]–[3]).

В [1]–[3] описаны KahKЗ -классы сопряженности для решеток Нимейера N_j , $j = 1, \dots, 23$. Таким образом, используя данную классификацию и теорему 2.1, мы опишем вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов.

Аналогично, рассматривая $t \geq 1$ различных орбит группы H в $P(N)$ и порожденную их представителями и подрешеткой N_H примитивную подрешетку S в N , можно описать вырождения коразмерности t кэлеровых КЗ-поверхностей с симплектической группой автоморфизмов H и отметкой $S \subset N$ решеткой Нимейера N .

Например, группа $H \cong (C_2)^4$ соответствует следующим двум приводимым ниже KahKЗ -классам сопряженности $H_{21,1}$ и $H_{21,2}$ для $N_{23} = N(24A_1)$. Этот случай может быть отмечен только решеткой Нимейера N_{23} (см. [1]–[3]). Мы используем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_{24}$ с диаграммой Дынкина $24\mathbb{A}_1$ для системы корней $24A_1$ решетки N_{23} . Далее $\mathbf{n}$ – номер данной группы в классификации Мукаи [17] и Ксиао [18] абстрактных конечных симплектических групп автоморфизмов КЗ-поверхностей, i – номер $(C_2)^4$ среди абстрактных групп порядка 16 в программе GAP [19], см. [20].

Для $\mathbf{n} = 21$ имеем $H \cong C_2^4$ ($|H| = 16$, $i = 14$): $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$, и классы сопряженности следующие:

$$\begin{aligned} H_{21,1} = [& (\alpha_2\alpha_{20})(\alpha_3\alpha_{10})(\alpha_5\alpha_6)(\alpha_8\alpha_{11})(\alpha_9\alpha_{21})(\alpha_{12}\alpha_{22})(\alpha_{17}\alpha_{23})(\alpha_{19}\alpha_{24}), \\ & (\alpha_2\alpha_{19})(\alpha_3\alpha_5)(\alpha_6\alpha_{10})(\alpha_8\alpha_9)(\alpha_{11}\alpha_{21})(\alpha_{12}\alpha_{23})(\alpha_{17}\alpha_{22})(\alpha_{20}\alpha_{24}), \\ & (\alpha_1\alpha_{16})(\alpha_2\alpha_{20})(\alpha_3\alpha_6)(\alpha_5\alpha_{10})(\alpha_{12}\alpha_{23})(\alpha_{14}\alpha_{18})(\alpha_{17}\alpha_{22})(\alpha_{19}\alpha_{24}), \\ & (\alpha_1\alpha_{14})(\alpha_2\alpha_{24})(\alpha_3\alpha_5)(\alpha_6\alpha_{10})(\alpha_{12}\alpha_{22})(\alpha_{16}\alpha_{18})(\alpha_{17}\alpha_{23})(\alpha_{19}\alpha_{20})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_1, \alpha_{16}, \alpha_{14}, \alpha_{18}\}$, $\{\alpha_2, \alpha_{20}, \alpha_{19}, \alpha_{24}\}$, $\{\alpha_3, \alpha_{10}, \alpha_5, \alpha_6\}$, $\{\alpha_8, \alpha_{11}, \alpha_9, \alpha_{21}\}$, $\{\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \alpha_{17}\}$,

$$\begin{aligned} H_{21,2} = [& (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_2\alpha_{23})(\alpha_5\alpha_{14})(\alpha_6\alpha_{16})(\alpha_{10}\alpha_{18})(\alpha_{12}\alpha_{20})(\alpha_{17}\alpha_{24})(\alpha_{19}\alpha_{22}), \\ & (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_3\alpha_{23})(\alpha_5\alpha_{17})(\alpha_6\alpha_{12})(\alpha_{10}\alpha_{22})(\alpha_{14}\alpha_{24})(\alpha_{16}\alpha_{20})(\alpha_{18}\alpha_{19}), \\ & (\alpha_1\alpha_{16})(\alpha_2\alpha_{20})(\alpha_3\alpha_6)(\alpha_5\alpha_{10})(\alpha_{12}\alpha_{23})(\alpha_{14}\alpha_{18})(\alpha_{17}\alpha_{22})(\alpha_{19}\alpha_{24}), \\ & (\alpha_1\alpha_{14})(\alpha_2\alpha_{24})(\alpha_3\alpha_5)(\alpha_6\alpha_{10})(\alpha_{12}\alpha_{22})(\alpha_{16}\alpha_{18})(\alpha_{17}\alpha_{23})(\alpha_{19}\alpha_{20})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_{16}, \alpha_{14}, \alpha_{23}, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_{20}, \alpha_{24}, \alpha_{18}, \alpha_{12}, \alpha_{17}, \alpha_{10}, \alpha_{19}, \alpha_{22}\}$ (мы даем только орбиты с более чем одним элементом).

Группа $H_{21,1}$ и ее орбиты с четырьмя элементами (имеются также четыре орбиты с одним элементом) дают вырождения типа $4\mathbb{A}_1$ (в силу теоремы 2.1 только эти орбиты дают решетки S , имеющие примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$). Группа $H_{21,2}$ и ее орбита с 16 элементами дает вырождение типа $16\mathbb{A}_1$ (в силу теоремы 2.1 только для этой орбиты решетка S имеет примитивное вложение в $L_{\text{КЗ}}$). В силу [11] данное вырождение соответствует куммеровым поверхностям. Таким образом, кэлеровы КЗ-поверхности с симплектической группой автоморфизмов $H \cong (C_2)^4$ имеют вырождения коразмерности 1 только типов $4\mathbb{A}_1$ и $16\mathbb{A}_1$. Мы также вычисляем дискриминантную группу $A_S = S^*/S$ решетки S в обоих случаях (см. случай $\mathbf{n} = 21$ теоремы 6.1 в § 6).

Аналогично ниже мы описываем все возможные вырождения коразмерности 1 со всеми их возможными отметками решетками Нимейера N_j , $j = 1, 2, \dots, 23$, кэлеровых КЗ-поверхностей для всех их конечных симплектических групп автоморфизмов. В результате мы получаем классификацию соответствующих типов вырождений. Мы надеемся рассмотреть более точную

классификацию (см. гипотезу 7.1) и вырождения произвольной коразмерности в дальнейших публикациях.

§ 4. Классификация КалКЗ-классов сопряженности для решеток Нимейера N_j при $j = 1, \dots, 21$

Мы используем те же обозначения, что в [1]–[3] и [21].

Ниже мы используем базисы решеток корней A_n , D_n и E_k , $k = 6, 7, 8$, показанные на рис. 1.

Рис. 1. Базисы диаграмм Дынкина A_n , D_n , E_k

Для A_n , $n \geq 1$, обозначаем $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n)/(n+1)$. Элемент ε_1 определяет образующую дискриминантной группы $A_n^*/A_n \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.

Для D_n , $n \geq 4$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$, обозначаем $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_{n-1})/2$, $\varepsilon_2 = (\alpha_{n-1} + \alpha_n)/2$, $\varepsilon_3 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-3} + \alpha_n)/2$. Элементы ε_1 , ε_2 , ε_3 определяют все ненулевые элементы дискриминантной группы $D_n^*/D_n \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Для D_n , $n \geq 4$ и $n \equiv 1 \pmod{2}$, обозначаем $\varepsilon_1 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2})/2 + \alpha_{n-1}/4 - \alpha_n/4$, $\varepsilon_2 = (\alpha_{n-1} + \alpha_n)/2$, $\varepsilon_3 = (\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{n-2})/2 - \alpha_{n-1}/4 + \alpha_n/4$. Элементы ε_1 , ε_2 , ε_3 определяют все ненулевые элементы дискриминантной группы $D_n^*/D_n \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Для E_6 обозначаем $\varepsilon_1 = (\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_6)/3$, $\varepsilon_2 = (-\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_5 + \alpha_6)/3$. Элементы ε_1 , ε_2 определяют все ненулевые элементы дискриминантной группы $E_6^*/E_6 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Для E_7 обозначаем $\varepsilon_1 = (\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_7)/2$. Элемент ε_1 определяет ненулевой элемент $E_7^*/E_7 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Если диаграмма Дынкина решетки корней имеет несколько связных компонент, второй индекс нумерации базиса соответствует связной компоненте.

Далее рассмотрим случай $j = 21$.

Случай 21. Для решетки Нимейера

$$N_{21} = N(8A_3) = [8A_3, [3(2001011)]]$$

$$= [8A_3, -\varepsilon_{1,1} + 2\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{1,7} + \varepsilon_{1,8}, -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + 2\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,6} + \varepsilon_{1,8}, \\ -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} + 2\varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,7}, -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,4} + 2\varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{1,8}, \\ -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,5} + 2\varepsilon_{1,6}, -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{1,6} + 2\varepsilon_{1,7}, \\ -\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,6} + \varepsilon_{1,7} + 2\varepsilon_{1,8}]$$

группа $A(N_{21})$ имеет порядок 2688 и порождена элементами

$$\begin{aligned} \widetilde{F1}_7 &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}\alpha_{1,7}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7}\alpha_{2,8}) \\ &\quad (\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6}\alpha_{3,7}\alpha_{3,8}), \\ \widetilde{F1}_4 &= (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,7}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,7}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,7}\alpha_{3,5}) \\ &\quad (\alpha_{1,6}\alpha_{1,8}\alpha_{3,6}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,6}\alpha_{2,8}), \\ \widetilde{T}_{12} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}) \\ &\quad (\alpha_{1,6}\alpha_{1,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{3,8}) \end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Используя классификацию Мукаи [17], ее уточнение Ксиао [18] абстрактных конечных симплектических групп автоморфизмов КЗ-поверхностей и программе GAP [19] (аналогично [20]), как для N_{23} и N_{22} в [1] и [3], получаем следующую классификацию. (Постоянно используется теорема 2.1 и применяется программа 5 из § 8, основанная на этой теореме.)

То же самое мы делаем во всех остальных нижеприведенных случаях. Классификация такого стиля более удобна для изучения вырождений КЗ-поверхностей, чем классификация автора в [1] и [2].

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{21})$

$\mathbf{n} = 74$, $H \cong L_2(7)$ ($|H| = 168$, $i = 42$), $\text{rk } N_H = 19$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} H_{74,1} &= [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,7}\alpha_{1,6}) \\ &\quad (\alpha_{2,4}\alpha_{2,7}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,7}\alpha_{3,6}), \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ &\quad (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\}$;

$\mathbf{n} = 51$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 48$, $i = 48$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$\begin{aligned} H_{51,1} &= [(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,7}) \\ &\quad (\alpha_{3,5}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}), \\ &\quad (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ &\quad (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}\}$,

$$H_{51,2} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{1,8})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,7}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,8}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}\}$;

$\mathbf{n} = 35$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{A}_4$, $(|H| = 24, i = 13)$:

$$H_{35,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,8}\alpha_{1,7}\alpha_{3,5}\alpha_{1,8}\alpha_{3,7})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}\alpha_{2,7}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,8}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,8}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}\alpha_{3,7}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7})]$$

с $\text{Clos}(H_{35,1}) = H_{51,1}$;

$$H_{35,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,7}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,8}\alpha_{3,4}\alpha_{3,6}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,7}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,7}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{3,6}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8})]$$

с $\text{Clos}(H_{35,2}) = H_{51,2}$;

$\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$), $\text{rk } N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

$$H_{34,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,8})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,6}\alpha_{3,7}) \\ (\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,5}\alpha_{1,6}\alpha_{1,7}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,8}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$,

$$H_{34,2} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,8}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,8}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,8}\alpha_{1,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}\}$,

$$H_{34,3} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,8}\alpha_{1,6}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,8}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,8}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,3}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}\}, \{\alpha_{1,4}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,8}\}, \{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$;

$\mathbf{n} = 33$, $H \cong C_7 \rtimes C_3$ ($|H| = 21$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$:

$$H_{33,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{1,5}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,5}\alpha_{1,8})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{1,7}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,7}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,7}\alpha_{2,3}\alpha_{2,8}) \\ (\alpha_{3,2}\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,7}\alpha_{1,3}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,8}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,8}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,8}\}$;

$\mathbf{n} = 22$, $H \cong C_2 \times D_8$ ($|H| = 16$, $i = 11$), $\text{rk } N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{22,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{3,8})(\alpha_{1,7}\alpha_{3,7}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,7}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}, \{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}\}, \{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$;

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$:

$$H_{18,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,8}\alpha_{1,7}\alpha_{3,5}\alpha_{1,8}\alpha_{3,7})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}\alpha_{2,7})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,7}\}, \{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}$;

$\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{17,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{1,8})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,7}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,6}\alpha_{1,7}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,4}\}$,

$$H_{17,2} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,7}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,6}\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,8}\}$;

$\mathbf{n} = 11$, $H \cong C_2 \times C_4$ ($|H| = 8$, $i = 2$):

$$H_{11,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,6}\alpha_{1,7}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6}\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,6}\alpha_{3,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{11,1}) = H_{22,1}$;

$\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$:

$$H_{10,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{3,8})(\alpha_{1,7}\alpha_{3,7}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,7}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$,

$$H_{10,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,7}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,7}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$;

$\mathbf{n} = 9$, $H \cong C_2^3$ ($|H| = 8$, $i = 5$), $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$:

$$H_{9,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{1,6}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,8}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,8}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$,

$$H_{9,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{3,8})(\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}\},$
 $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}, \{\alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,8}\}, \{\alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\};$

$\mathbf{n} = 8, H \cong C_7 (|H| = 7, i = 1):$

$$H_{8,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,7}\alpha_{3,3}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,7}\alpha_{2,3}\alpha_{2,8}) \\ (\alpha_{3,2}\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,7}\alpha_{1,3}\alpha_{3,8})]$$

с $\text{Clos}(H_{8,1}) = H_{33,1};$

$\mathbf{n} = 7, H \cong C_6 (|H| = 6, i = 2):$

$$H_{7,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{3,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,8}\alpha_{1,7}\alpha_{3,5}\alpha_{1,8}\alpha_{3,7})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}\alpha_{2,7})]$$

с $\text{Clos}(H_{7,1}) = H_{18,1};$

$\mathbf{n} = 6, H \cong D_6 (|H| = 6, i = 1), \text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3:$

$$H_{6,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,8}\alpha_{1,7}) \\ (\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}\alpha_{3,7})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}\}, \{\alpha_{1,5},$
 $\alpha_{1,8}, \alpha_{1,7}\}, \{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}, \{\alpha_{3,5}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,7}\};$

$\mathbf{n} = 4, H \cong C_4 (|H| = 4, i = 1), \text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2:$

$$H_{4,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,7}, \alpha_{3,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5}\alpha_{1,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,7}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}\}, \{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,8}\},$
 $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}\}, \{\alpha_{3,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,8}\};$

$\mathbf{n} = 3, H \cong C_2^2 (|H| = 4, i = 2), \text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6;$

$$H_{3,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}, \{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\},$
 $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}, \{\alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,8}\}, \{\alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\},$

$$H_{3,2} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{1,7})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,6}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,6}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,8}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,7}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,8}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$,

$$H_{3,3} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,7}\alpha_{3,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{1,8}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{1,7}, \alpha_{3,8}, \alpha_{1,8}, \alpha_{3,7}\}$, $\{\alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\}$,

$$H_{3,4} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\}$, $\{\alpha_{3,7}, \alpha_{3,8}\}$;

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$H_{2,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,8}\alpha_{1,7}) \\ (\alpha_{2,5}\alpha_{2,8}\alpha_{2,7})(\alpha_{3,5}\alpha_{3,8}\alpha_{3,7})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,7}\}$, $\{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,8}, \alpha_{2,7}\}$, $\{\alpha_{3,5}, \alpha_{3,8}, \alpha_{3,7}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,7}\alpha_{3,7})(\alpha_{1,8}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}\}$, $\{\alpha_{1,8}, \alpha_{3,8}\}$,

$$H_{1,2} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,7}\alpha_{1,8}) \\ (\alpha_{2,7}\alpha_{2,8})(\alpha_{3,7}\alpha_{3,8})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}\}$, $\{\alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}\}$, $\{\alpha_{3,7}, \alpha_{3,8}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{1,1} \cong (\text{I.10})$; $H_{1,2} \cong (\text{II.11})$, $(\text{II.11}')$; $H_{2,1} \cong (\text{II.6})$; $H_{3,1} \cong (\text{I.9})$; $H_{3,2} \cong (\text{II.8})$, $(\text{II.8}')$, $(\text{II.8}'')$; $H_{3,3} \cong (\text{II.9})$; $H_{3,4} \cong (\text{II.9}')$; $H_{4,1} \cong (\text{II.10})$, $(\text{II.10}')$; $H_{6,1} \cong (\text{II.5})$, $(\text{II.5}')$; $H_{7,1} \cong (\text{I.4})$; $H_{8,1} \cong (\text{II.2a})$; $H_{9,1} \cong (\text{I.6})$; $H_{9,2} \cong (\text{I.7})$; $H_{10,1} \cong (\text{II.7})$, $(\text{II.7}''')$; $H_{10,2} \cong (\text{II.7}')$, $(\text{II.7}''')$; $H_{11,1} \cong (\text{I.8})$; $H_{17,1} \cong (\text{II.4})$; $H_{17,2} \cong (\text{IV.2})$, $(\text{IV.2}')$; $H_{18,1} \cong (\text{I.3})$; $H_{22,1} \cong (\text{I.5})$; $H_{33,1} \cong (\text{II.2})$; $H_{34,1} \cong (\text{II.3})$, $(\text{II.3}')$; $H_{34,2} \cong (\text{IV.1}')$; $H_{34,3} \cong (\text{IV.1})$; $H_{35,1} \cong (\text{I.2})$; $H_{35,2} \cong (\text{III.2})$; $H_{51,1} \cong (\text{I.1})$; $H_{51,2} \cong (\text{III.1})$; $H_{74,1} \cong (\text{II.1})$.

Случай 20. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned} N = N_{20} = N(6A_4) &= [6A_4, [1(01441)]] \\ &= [6A_4, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,3} - \varepsilon_{1,4} - \varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{1,6}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,4} - \varepsilon_{1,5} - \varepsilon_{1,6}, \\ &\quad \varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,5} - \varepsilon_{1,6}, \varepsilon_{1,1} - \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,6}, \\ &\quad \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} - \varepsilon_{1,3} - \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,5}] \end{aligned}$$

группа $A = A(N_{20})$ имеет порядок 240 и порождена элементами

$$\begin{aligned} \widetilde{(12)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,5}\alpha_{4,1}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,5}\alpha_{3,1}\alpha_{3,5}) \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{4,6}\alpha_{4,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{3,6}\alpha_{3,2}\alpha_{2,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,3}\alpha_{2,4}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,6}\alpha_{4,1}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,6}\alpha_{3,1}\alpha_{3,6}) \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,4}\alpha_{2,5}), \\ \widetilde{(34)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}) \\ &\quad (\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5}\alpha_{2,6}), \\ \widetilde{(45)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{4,1}\alpha_{4,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{3,1}\alpha_{3,3}) \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,6}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}). \end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16, 18] и [1], [2]).

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{20})$

$\mathbf{n} = 32$, $H \cong \text{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} H_{32,1} &= [(\alpha_{1,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,4}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,6}\alpha_{3,5}) \\ &\quad (\alpha_{3,3}\alpha_{2,4}\alpha_{3,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{4,6}\alpha_{1,5}), (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}, \alpha_{2,5}\}$,

$$\begin{aligned} H_{32,2} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,6}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}) \\ &\quad (\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,6}\alpha_{4,5}), (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{4,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$:

$$\begin{aligned} H_{16,1} &= [(\alpha_{1,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}) \\ &\quad (\alpha_{3,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}), (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 5$, $H \cong C_5$ ($|H| = 5$, $i = 1$):

$$H_{5,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с $\text{Clos}(H_{5,1}) = H_{16,1}$;

$\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{4,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,4}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,3}\alpha_{3,4}\alpha_{2,6}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{3,3}\alpha_{2,4}\alpha_{3,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{4,6}\alpha_{1,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{4,5}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{4,6}, \alpha_{1,5}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{1,3}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,6})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}) \\ (\alpha_{3,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{4,4}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом:

$$H_{32,1} = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)}\varphi] \quad \text{в } 1); \\ H_{32,2} = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)}] \quad \text{в } 1); \\ H_{16,1} = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}, \widetilde{(45)(23)(34)(23)(45)(34)}] \quad \text{в } 2); \\ H_{5,1} = [\widetilde{(12)(23)(34)(45)}] \quad \text{в } 3); \\ H_{4,1} \cong [\widetilde{(12)(23)(34)}] \quad \text{в } 4); \quad H_{1,1} \cong [\widetilde{(12)(34)}] \quad \text{в } 5).$$

Случай 19. Для решетки Нимейера

$$N_{19} = N(6D_4)$$

$$= [6D_4, \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{1,6}, \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{2,5} + \varepsilon_{3,6}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{3,5} + \varepsilon_{2,6}, \\ \varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{2,4} + \varepsilon_{2,5} + \varepsilon_{2,6}, \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{2,4} + \varepsilon_{3,5} + \varepsilon_{1,6}, \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{2,4} + \varepsilon_{1,5} + \varepsilon_{3,6}]$$

группа $A(N_{19})$ имеет порядок 2160 и порождена элементами

$$\varphi = (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6}), \\ \widetilde{(12)} = (\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}), \\ \widetilde{(23)} = (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}) \\ (\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}),$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{(34)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}) \\
&\quad (\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}), \\
\widetilde{(45)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{1,5}) \\
&\quad (\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}), \\
\widetilde{(56)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{3,5}\alpha_{1,6}) \\
&\quad (\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})
\end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16, 18] и [1], [2]).

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{19})$

$\mathbf{n} = 70$, $H \cong \mathfrak{S}_5$ ($|H| = 120$, $i = 34$), $\text{rk } N_H = 19$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
H_{70,1} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,3}\alpha_{4,5}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,5}\alpha_{2,4}) \\
&\quad (\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,3}\alpha_{1,5}\alpha_{4,4})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{1,3}\alpha_{3,5}\alpha_{1,4}), \\
&\quad (\alpha_{1,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,4}) \\
&\quad (\alpha_{1,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6})]
\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{4,6}\}$;

$\mathbf{n} = 61$, $H \cong \mathfrak{A}_{4,3}$ ($|H| = 72$, $i = 43$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
H_{61,1} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,3})(\alpha_{4,1}\alpha_{3,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\
&\quad (\alpha_{1,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}), \\
&\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\
&\quad (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}\alpha_{3,6}), \\
&\quad (\alpha_{1,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,4}) \\
&\quad (\alpha_{1,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6})]
\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}, \alpha_{4,6}\}$;

$\mathbf{n} = 55$, $H \cong \mathfrak{A}_5$ ($|H| = 60$, $i = 5$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
H_{55,1} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{1,6}\alpha_{4,2}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{2,6}\alpha_{2,2}\alpha_{2,5}) \\
&\quad (\alpha_{3,1}\alpha_{3,3}\alpha_{3,6}\alpha_{1,2}\alpha_{1,5})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,3}\alpha_{4,6}\alpha_{3,2}\alpha_{3,5}), \\
&\quad (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\
&\quad (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]
\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$;

$\mathbf{n} = 48$, $H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ ($|H| = 36$, $i = 10$), $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$:

$$H_{48,1} = [(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}) \\ (\alpha_{4,4}\alpha_{1,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{4,2}\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{4,6}\alpha_{3,5}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$;

$\mathbf{n} = 47$, $H \cong C_3 \times \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 36$, $i = 11$):

$$H_{47,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

c $\text{Clos}(H_{47,1}) = H_{61,1}$;

$\mathbf{n} = 36$, $H \cong C_3 \rtimes D_8$ ($|H| = 24$, $i = 8$):

$$H_{36,1} = [(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

c $\text{Clos}(H_{36,1}) = H_{61,1}$;

$\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$), $\text{rk } N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:

$$H_{34,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6}) \\ (\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,4}\alpha_{3,4}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}) \\ (\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,4}\}$;

$$H_{34,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,5}\alpha_{1,6}) \\ (\alpha_{4,2}\alpha_{1,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}\alpha_{3,3}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}) \\ (\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$;

$\mathbf{n} = 32$, $H \cong \text{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$:

$$H_{32,1} = [(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{4,6}\alpha_{1,4}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{3,4}\alpha_{1,5}) \\ (\alpha_{4,2}\alpha_{1,6}\alpha_{4,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{3,3}\alpha_{4,3}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{3,5}\alpha_{4,4})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,6}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$;

$\mathbf{n} = 31$, $H \cong C_3 \times D_6$ ($|H| = 18$, $i = 3$):

$$H_{31,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{4,6}\alpha_{1,5}\alpha_{4,4}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,4}\alpha_{3,6}\alpha_{3,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{31,1}) = H_{48,1}$,

$$H_{31,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{4,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,4}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}\alpha_{3,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{4,6}\alpha_{3,4}\alpha_{1,6}\alpha_{4,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}\alpha_{3,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{31,2}) = H_{48,1}$;

$\mathbf{n} = 30$, $H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ ($|H| = 18$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$:

$$H_{30,1} = [(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,6}\}$;

$\mathbf{n} = 20$, $H \cong Q_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 1$):

$$H_{20,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{2,2}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,3}\alpha_{3,2}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{4,1}\alpha_{3,3}\alpha_{4,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{3,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

с $\text{Clos}(H_{20,1}) = H_{61,1}$;

$\mathbf{n} = 19$, $H \cong C_2 \times C_6$ ($|H| = 12$, $i = 5$):

$$H_{19,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,4}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4}\alpha_{4,3}\alpha_{1,4}\alpha_{3,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

с $\text{Clos}(H_{19,1}) = H_{61,1}$;

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$:

$$H_{18,1} = [(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$,

$$H_{18,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}) \\ (\alpha_{3,4}\alpha_{4,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{4,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}\}$;

$\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{17,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,5}\alpha_{4,6}) \\ (\alpha_9\alpha_{11}\alpha_{12})(\alpha_{13}\alpha_{16}\alpha_{15}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,4}\}$,

$$H_{17,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,5}\alpha_{1,6}) \\ (\alpha_{4,2}\alpha_{1,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}\alpha_{3,3}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,3}\}$;

$\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$:

$$H_{16,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{1,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{3,5}\alpha_{4,4})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 15$, $H \cong C_3^2$ ($|H| = 9$, $i = 2$):

$$H_{15,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

с $\text{Clos}(H_{15,1}) = H_{30,1}$;

$\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$:

$$H_{10,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,5})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{3,3}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{4,4})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}\}$;

$\mathbf{n} = 7$, $H \cong C_6$ ($|H| = 6$, $i = 2$):

$$H_{7,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6})]$$

с $\text{Clos}(H_{7,1}) = H_{18,1}$,

$$H_{7,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{4,6})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{1,5}\alpha_{4,4}\alpha_{3,5}\alpha_{3,4}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{7,2}) = H_{18,2}$;

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$:

$$H_{6,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,6}\}$,

$$H_{6,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,3})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}, \alpha_{1,2})(\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{4,6}, \alpha_{3,6}\}$,

$$H_{6,3} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,4}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,4}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,4}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{2,4}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{3,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{4,4}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 5$, $H \cong C_5$ ($|H| = 5$, $i = 1$):

$$H_{5,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{3,5}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,6}\alpha_{4,5}\alpha_{1,4})]$$

с $\text{Clos}(H_{5,1}) = H_{16,1}$;

$\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{4,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{1,6}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,6}\alpha_{1,5}) \\ (\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,6}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,5}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,6}, \alpha_{1,5}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,6}, \alpha_{4,5}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$;

$\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$:

$$H_{3,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}\}$,

$$H_{3,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,5})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,5})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,2}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,6}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,5}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,6}\}$,

$$H_{3,3} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}\}$;
 $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$H_{2,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}, \alpha_{4,6}\}$,

$$H_{2,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,6})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,6})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,2}\alpha_{1,6})(\alpha_{4,1}\alpha_{1,2}\alpha_{3,6}) \\ (\alpha_{1,3}\alpha_{4,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,6}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{1,6}\alpha_{3,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$, $\{\alpha_{1,6}, \alpha_{3,6}\}$,

$$H_{1,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,5}\alpha_{1,6})(\alpha_{2,5}\alpha_{2,6}) \\ (\alpha_{3,5}\alpha_{3,6})(\alpha_{4,5}\alpha_{4,6})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}\}$, $\{\alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}\}$, $\{\alpha_{3,5}, \alpha_{3,6}\}$, $\{\alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{70,1} \cong (\text{II.1})$; $H_{61,1} \cong (\text{I.1})$; $H_{55,1} \cong (\text{II.2})$; $H_{48,1} \cong (\text{I'.1})$; $H_{47,1} \cong (\text{I.2})$; $H_{36,1} \cong (\text{I.3})$; $H_{34,1} \cong (\text{II.6'})$; $H_{34,2} \cong (\text{II.6})$; $H_{32,1} \cong (\text{II.3})$; $H_{31,1} \cong (\text{I'.2})$; $H_{31,2} \cong (\text{I'.3}) = [\varphi, \widetilde{(45)}\widetilde{(23)}, \widetilde{(45)}\widetilde{(56)}]$; $H_{30,1} \cong (\text{I.6})$; $H_{20,1} \cong (\text{I.5})$; $H_{19,1} \cong (\text{I.4})$; $H_{18,1} \cong (\text{I.8})$; $H_{18,2} \cong (\text{II.8})$; $H_{17,1} \cong (\text{II.7'})$; $H_{17,2} \cong (\text{II.7})$; $H_{16,1} \cong (\text{II.4})$; $H_{15,1} \cong (\text{I.7})$; $H_{10,1} \cong (\text{II.12})$; $H_{7,1} \cong (\text{I.9})$; $H_{7,2} \cong (\text{II.9})$; $H_{6,1} \cong (\text{I.10})$; $H_{6,2} \cong (\text{II.11})$; $H_{6,3} \cong (\text{II.10})$; $H_{5,1} \cong (\text{II.5})$; $H_{4,1} \cong (\text{II.13})$; $H_{3,1} \cong (\text{II.16})$; $H_{3,2} \cong (\text{II.15})$; $H_{3,3} \cong (\text{II'.1})$; $H_{2,1} \cong (\text{I.11})$; $H_{2,2} \cong (\text{II.14})$; $H_{1,1} \cong (\text{II.18})$; $H_{1,2} \cong (\text{II.17})$.

Случай 18. Для решетки Нимейера

$$N_{18} = N(4A_5 \oplus D_4) \\ = [4A_5 \oplus D_4, 2\varepsilon_{1,1} + 2\varepsilon_{1,3} + 4\varepsilon_{1,4}, 2\varepsilon_{1,1} + 4\varepsilon_{1,2} + 2\varepsilon_{1,4}, 2\varepsilon_{1,1} + 2\varepsilon_{1,2} + 4\varepsilon_{1,3}, \\ 3\varepsilon_{1,1} + 3\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,5}, 3\varepsilon_{1,1} + 3\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{2,5}, 3\varepsilon_{1,1} + 3\varepsilon_{1,4} + \varepsilon_{3,5}]$$

группа $A(N_{18})$ имеет порядок 48 и порождена элементами

$$\varphi_0 = (\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{2,4}\alpha_{4,4}), \\ (\widetilde{12}) = (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}) \\ (\alpha_{2,4}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}), \\ (\widetilde{23}) = (\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}) \\ (\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}), \\ (\widetilde{34}) = (\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{18})$

$\mathbf{n} = 54$, $H \cong T_{48}$ ($|H| = 48$, $i = 29$), $\text{rk } N_H = 19$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$H_{54,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,4}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,4}\alpha_{5,3})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{5,4}\alpha_{5,1}\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{4,4}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,3}, \alpha_{5,4}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}\}$;

$\mathbf{n} = 38$, $H \cong T_{24}$ ($|H| = 24$, $i = 3$):

$$H_{38,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,4}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,4}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,4}\alpha_{5,3})(\alpha_{1,5}\alpha_{4,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})]$$

с $\text{Clos}(H_{38,1}) = H_{54,1}$;

$\mathbf{n} = 26$, $H \cong SD_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 8$), $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$H_{26,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{5,1}\alpha_{5,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{4,1}\alpha_{4,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,3})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,4}\alpha_{5,2}\alpha_{1,4}) \\ (\alpha_{2,2}\alpha_{4,4}\alpha_{2,4}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,4}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,4}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$;

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$:

$$H_{18,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,2}\alpha_{1,3}\alpha_{5,4}) \\ (\alpha_{2,2}\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,2}\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{5,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\}$;

$\mathbf{n} = 14$, $H \cong C_8$ ($|H| = 8$, $i = 1$):

$$H_{14,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,3}\alpha_{5,2}\alpha_{5,4}\alpha_{5,1}\alpha_{5,3}\alpha_{1,2}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,3}\alpha_{4,2}\alpha_{4,4}\alpha_{4,1}\alpha_{4,3}\alpha_{2,2}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{3,1}\alpha_{3,3}\alpha_{3,2}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{14,1}) = H_{26,1}$;

$\mathbf{n} = 12$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$:

$$H_{12,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{5,4}\alpha_{5,1}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,4}\alpha_{4,1}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,2}\alpha_{1,3}) \\ (\alpha_{2,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{5,4}, \alpha_{1,2}, \alpha_{5,1}, \alpha_{1,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{4,4}, \alpha_{2,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,4}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}\}$;

$\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$), $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$:

$$H_{10,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{5,4}, \alpha_{5,3}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\}$;

$\mathbf{n} = 7$, $H \cong C_6$ ($|H| = 6$, $i = 2$):

$$H_{7,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,2}\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,2}\alpha_{2,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с $\text{Clos}(H_{7,1}) = H_{18,1}$;

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$:

$$H_{6,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\},$

$$H_{6,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\};$

$\mathbf{n} = 4, H \cong C_4$ ($|H| = 4, i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{4,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}) \\ (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\};$

$\mathbf{n} = 3, H \cong C_2^2$ ($|H| = 4, i = 2$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$:

$$H_{3,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{5,4}, \alpha_{5,3}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,3}\}, \{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\};$

$\mathbf{n} = 2, H \cong C_3$ ($|H| = 3, i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$H_{2,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{1,5}\alpha_{3,5}\alpha_{4,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\};$

$\mathbf{n} = 1, H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{2,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{5,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}\},$

$$H_{1,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{4,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{2,3}\alpha_{4,3}) \\ (\alpha_{1,4}\alpha_{5,4})(\alpha_{2,4}\alpha_{4,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{5,3}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}\}, \{\alpha_{1,4}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{2,4}, \alpha_{4,4}\}.$

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{54,1} = A(N_{18})$; $H_{38,1} \cong 1$ (подгруппа 1 в [1] и [2]); $H_{26,1} \cong 2$; $H_{18,1} \cong 5$; $H_{14,1} \cong 3$; $H_{12,1} \cong 4$; $H_{10,1} \cong 7$; $H_{7,1} \cong 6$; $H_{6,1} \cong [\varphi_0(23)(12)(23), (23)]$ в 8; $H_{6,2} \cong [\varphi_0(23), (12)]$ в 8; $H_{4,1} \cong 9$; $H_{3,1} \cong 10$; $H_{2,1} \cong 11$; $H_{1,1} \cong [(ij)]$ и $[(ij)\varphi_0]$ в 12; $H_{1,2} \cong [\varphi_0]$ в 12.

Случай 17. Для решетки Нимейера

$$N_{17} = N(4A_6) = [4A_6, \varepsilon_{1,1} + 2\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} + 6\varepsilon_{1,4}, \\ \varepsilon_{1,1} + 6\varepsilon_{1,2} + 2\varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{1,4}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + 6\varepsilon_{1,3} + 2\varepsilon_{1,4}]$$

группа $A(N_{17})$ имеет порядок 24 и порождена элементами

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{4,1}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{4,2})(\alpha_{2,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{3,3}\alpha_{4,3})(\alpha_{2,4}\alpha_{5,4})(\alpha_{3,4}\alpha_{4,4}), \\ \varphi_1 &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}) \\ &\quad (\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}), \\ \varphi_2 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{6,3})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{5,3})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{4,3}) \\ &\quad (\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2}\alpha_{2,3}). \end{aligned}$$

Классификация КэпКЗ-классов сопряженности для $A(N_{17})$

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$H_{2,1} = [\varphi_1 = (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}$, $\{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}\}$.

В [1] и [2] тот же самый результат получен непосредственно: $H_{2,1} = [\varphi_1] \cong C_3$ – единственный нетривиальный КэпКЗ-класс сопряженности в $A(N_{17})$.

Случай 16. Для решетки Нимейера

$$N_{16} = N(2A_7 \oplus 2D_5) \\ = [2A_7 \oplus 2D_5, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{2,4}, \varepsilon_{1,1} + 7\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{1,4}]$$

группа $A(N_{16})$ имеет порядок 8 и порождена элементами

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2}), \\ \varphi_1 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}), \\ \varphi_2 &= (\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}) \end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_{16})$

$\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$:

$$H_{3,1} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{4,4}), \\ (\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{7,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{5,4}, \alpha_{4,4}, \alpha_{5,3}\}$,

$$H_{3,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4}), \\ (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}) \\ (\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{7,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}\}$, $\{\alpha_{4,4}, \alpha_{5,4}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}$,

$$H_{1,2} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{2,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2}) \\ (\alpha_{4,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{7,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}\}$, $\{\alpha_{4,4}, \alpha_{5,4}\}$,

$$H_{1,3} = [(\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}) \\ (\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,4}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{7,1}, \alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{4,4}, \alpha_{5,4}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{3,1} = [\varphi_0, \varphi_2]$; $H_{3,2} = [\varphi_0, \varphi_1]$; $H_{1,1} = [\varphi_2]$; $H_{1,2} = [\varphi_0]$; $H_{1,3} = [\varphi_1]$.

Случай 15. Для решетки Нимейера

$$N_{15} = N(3A_8) = [3A_8, 4\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{1,1} + 4\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + 4\varepsilon_{1,3}]$$

группа $A(N_{15})$ имеет порядок 12 и порождена элементами

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{8,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{8,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{8,3})(\alpha_{2,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{4,1}\alpha_{5,1}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{4,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{2,3}\alpha_{7,3})(\alpha_{3,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{4,3}\alpha_{5,3}), \\ \widetilde{(12)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{8,1}\alpha_{8,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2}) \\ &\quad (\alpha_{6,1}\alpha_{6,2})(\alpha_{7,1}\alpha_{7,2}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{8,2}\alpha_{8,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}) \\ &\quad (\alpha_{6,2}\alpha_{6,3})(\alpha_{7,2}\alpha_{7,3})\end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{15})$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$\begin{aligned}H_{1,1} = [\widetilde{(23)} &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}) \\ &\quad (\alpha_{6,2}\alpha_{6,3})(\alpha_{7,2}\alpha_{7,3})(\alpha_{8,2}\alpha_{8,3})]\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}\}$, $\{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}\}$, $\{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}\}$, $\{\alpha_{7,2}, \alpha_{7,3}\}$, $\{\alpha_{8,2}, \alpha_{8,3}\}$.

В [1] и [2] класс сопряженности $H_{1,1} = [\widetilde{(23)}]$ был описан непосредственно.

Случай 14. Для решетки Нимейера

$$\begin{aligned}N_{14} = N(4D_6) &= [4D_6, \text{ четные перестановки } 0_1 + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{3,4}] \\ &= [4D_6, \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{3,4}, \varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{2,4}, \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{3,3} + \varepsilon_{1,4}; \\ &\quad \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{3,3} + \varepsilon_{2,4}, \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{3,4}, \varepsilon_{3,1} + \varepsilon_{2,3} + \varepsilon_{1,4}; \\ &\quad \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,4}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{3,4}, \varepsilon_{3,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,4}; \\ &\quad \varepsilon_{3,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{1,3}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{2,3}, \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,3}]\end{aligned}$$

группа $A(N_{14})$ имеет порядок 24 и порождена элементами

$$\begin{aligned}(12) &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{6,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{5,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{5,4}\alpha_{6,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}), \\ (23) &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{6,3})(\alpha_{6,2}\alpha_{5,3})(\alpha_{5,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{5,4}\alpha_{6,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}), \\ (34) &= (\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{5,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{5,2}\alpha_{6,2}) \\ &\quad (\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})\end{aligned}$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{14})$

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$:

$$\begin{aligned}H_{6,1} &= [(\alpha_{5,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{5,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{5,4}), \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})]\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}, \alpha_{5,4}\}$;

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$H_{2,1} = [(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}, \{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(\alpha_{5,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{5,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ (\alpha_{5,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{5,4})]$$

с орбитами $\{\alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}, \{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}, \{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}, \{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}, \{\alpha_{5,3}, \alpha_{6,4}\}, \{\alpha_{6,3}, \alpha_{5,4}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{6,1} = (\mathfrak{D}_6)_1$; $H_{2,1} = (C_3)_1$; $H_{1,1} = [(34)]$.

Случай 13. Для решетки Нимейера

$$N_{13} = N(2A_9 \oplus D_6) = [2A_9 \oplus D_6, 2\varepsilon_{1,1} + 4\varepsilon_{1,2}, 5\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,3}, 5\varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{3,3}]$$

группа $A(N_{13})$ имеет порядок 4 и порождена элементом

$$\varphi = (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{9,1}\alpha_{9,2})(\alpha_{5,3}\alpha_{6,3}) \\ (\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{8,1}\alpha_{8,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{6,1}\alpha_{6,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})$$

(см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Классификация Кэли-классов сопряженности для $A(N_{13})$

$\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$:

$$H_{4,1} = [\varphi = (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2}\alpha_{9,1}\alpha_{9,2})(\alpha_{5,3}\alpha_{6,3}) \\ (\alpha_{2,1}\alpha_{2,2}\alpha_{8,1}\alpha_{8,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2}\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2}\alpha_{6,1}\alpha_{6,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{9,1}, \alpha_{9,2}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{8,1}, \alpha_{8,2}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{7,1}, \alpha_{7,2}\}, \{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}\}, \{\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{5,3}, \alpha_{6,3}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [\varphi^2 = (\alpha_{1,1}\alpha_{9,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{9,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{8,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{4,1}\alpha_{6,1}) \\ (\alpha_{2,2}\alpha_{8,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{7,2})(\alpha_{4,2}\alpha_{6,2})]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{9,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{9,2}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{8,1}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{7,1}\}, \{\alpha_{4,1}, \alpha_{6,1}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{8,2}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{7,2}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{6,2}\}$.

Случай 12. Для решетки Нимейера

$$N_{12} = N(4E_6) = [4E_6, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,3} + \varepsilon_{2,4}, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{1,4}, \\ \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3}]$$

группа $A(N_{12})$ имеет порядок 48 и порождена элементами

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{6,4}) \\ &\quad (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{5,4}), \\ \widetilde{(12)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,4}\alpha_{6,4}) \\ &\quad (\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{3,4}, \alpha_{5,4}), \\ \widetilde{(23)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}) \\ &\quad (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}), \\ \widetilde{(34)} &= (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{6,4}) \\ &\quad (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4}).\end{aligned}$$

Классификация КалКЗ-классов сопряженности для $A(N_{12})$

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$), $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$:

$$\begin{aligned}H_{18,1} &= [(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{1,4}), \\ &\quad (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,3}\alpha_{1,4}\alpha_{6,2}\alpha_{1,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}) \\ &\quad (\alpha_{3,2}\alpha_{5,3}\alpha_{3,4}\alpha_{5,2}\alpha_{3,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})]\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{6,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{5,4}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$;

$\mathbf{n} = 7$, $H \cong C_6$ ($|H| = 6$, $i = 2$):

$$\begin{aligned}H_{7,1} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,3}\alpha_{1,4}\alpha_{6,2}\alpha_{1,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4}) \\ &\quad (\alpha_{3,2}\alpha_{5,3}\alpha_{3,4}\alpha_{5,2}\alpha_{3,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})]\end{aligned}$$

с $\text{Clos}(H_{7,1}) = H_{18,1}$;

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$:

$$\begin{aligned}H_{6,1} &= [(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{1,4}), \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})]\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$,

$$\begin{aligned}H_{6,2} &= [(\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{6,4}), \\ &\quad (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ &\quad (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})]\end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}$, $\{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}\}$;

$\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$:

$$\begin{aligned} H_{3,1} = [\varphi_0 = & (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{6,4}) \\ & (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{5,4}), \\ \widetilde{(34)} = & (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{6,4}) \\ & (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$;

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$:

$$\begin{aligned} H_{2,1} = [& (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3}\alpha_{4,4}) \\ & (\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}\alpha_{6,4})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}$, $\{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}\}$;

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$\begin{aligned} H_{1,1} = [\varphi_0 = & (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{6,2})(\alpha_{1,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{1,4}\alpha_{6,4}) \\ & (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{3,2}\alpha_{5,2})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,3})(\alpha_{3,4}\alpha_{5,4})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{6,3}\}$, $\{\alpha_{1,4}, \alpha_{6,4}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}\}$, $\{\alpha_{3,4}, \alpha_{5,4}\}$,

$$\begin{aligned} H_{1,2} = [\widetilde{(34)} = & (\alpha_{1,1}\alpha_{6,1})(\alpha_{1,3}\alpha_{1,4})(\alpha_{6,3}\alpha_{6,4}) \\ & (\alpha_{3,1}\alpha_{5,1})(\alpha_{2,3}\alpha_{2,4})(\alpha_{3,3}\alpha_{3,4})(\alpha_{4,3}\alpha_{4,4})(\alpha_{5,3}\alpha_{5,4})] \end{aligned}$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}\}$, $\{\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}\}$, $\{\alpha_{6,3}, \alpha_{6,4}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}\}$, $\{\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}\}$, $\{\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}\}$, $\{\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}\}$, $\{\alpha_{5,3}, \alpha_{5,4}\}$.

В [1] и [2] эти классы сопряженности были описаны непосредственно. Данные два описания связаны следующим образом: $H_{12,1} = (\mathfrak{D}_{12})_1$; $H_{7,1} = (C_6)_1$; $\{H_{6,1}, H_{6,2}\} = \{(\mathfrak{D}_6)_{11}, (\mathfrak{D}_6)_{12}\}$; $H_{3,1} = [\varphi_0, \widetilde{(34)}]$; $H_{2,1} = (C_3)_1$; $H_{1,1} = [\varphi_0]$; $H_{1,2} = [\widetilde{(34)}]$.

Случай 11. Для решетки Нимейера

$$N_{11} = N(A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6) = [A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{1,3}]$$

группа $A(N_{11})$ имеет порядок 2 и порождена элементом

$$\begin{aligned} \varphi = & (\alpha_{1,1}\alpha_{11,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{10,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{9,1})(\alpha_{4,1}\alpha_{8,1})(\alpha_{5,1}\alpha_{7,1})(\alpha_{6,2}\alpha_{7,2}) \\ & (\alpha_{1,3}\alpha_{6,3})(\alpha_{3,3}\alpha_{5,3}). \end{aligned}$$

Классификация KаhK3-классов сопряженности для $A(N_{11})$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [\varphi]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{11,1}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{10,1}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{9,1}\}, \{\alpha_{4,1}, \alpha_{8,1}\}, \{\alpha_{5,1}, \alpha_{7,1}\}, \{\alpha_{6,2}, \alpha_{7,2}\}, \{\alpha_{1,3}, \alpha_{6,3}\}, \{\alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случай 9. Для решетки Нимейера

$$N_9 = N(3D_8) = [3D_8, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{2,3}, \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{1,2} + \varepsilon_{2,3}, \varepsilon_{2,1} + \varepsilon_{2,2} + \varepsilon_{1,3}]$$

группа $A(N_9)$ имеет порядок 6 и порождена элементами

$$\begin{aligned} (12) &= (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}) \\ &\quad (\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{8,1}\alpha_{8,2}), \\ (23) &= (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}) \\ &\quad (\alpha_{7,2}\alpha_{7,3})(\alpha_{8,2}\alpha_{8,3}). \end{aligned}$$

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_9)$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(12)]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}, \{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}, \{\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}, \{\alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}\}, \{\alpha_{7,1}\alpha_{7,2}\}, \{\alpha_{8,1}\alpha_{8,2}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случай 8. Для решетки Нимейера

$$N_8 = N(A_{15} \oplus D_9) = [A_{15} \oplus D_9, 2\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2}]$$

группа $A(N_8)$ имеет порядок 2 и порождена элементом

$$\begin{aligned} \varphi &= (\alpha_{1,1}\alpha_{15,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{14,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{13,1})(\alpha_{4,1}\alpha_{12,1})(\alpha_{5,1}\alpha_{11,1})(\alpha_{6,1}\alpha_{10,1}) \\ &\quad (\alpha_{7,1}\alpha_{9,1})(\alpha_{8,2}\alpha_{9,2}). \end{aligned}$$

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_8)$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [\varphi]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{15,1}\}, \{\alpha_{2,1}, \alpha_{14,1}\}, \{\alpha_{3,1}, \alpha_{13,1}\}, \{\alpha_{4,1}, \alpha_{12,1}\}, \{\alpha_{5,1}, \alpha_{11,1}\}, \{\alpha_{6,1}, \alpha_{10,1}\}, \{\alpha_{7,1}, \alpha_{9,1}\}, \{\alpha_{8,2}, \alpha_{9,2}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случай 7. Для решетки Нимейера

$$N_7 = N(D_{10} \oplus 2E_7) = [D_{10} \oplus 2E_7, \varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{3,1} + \varepsilon_{1,3}]$$

группа $A(N_7)$ имеет порядок 2 и порождена элементом

$$\begin{aligned} \varphi &= (\alpha_{9,1}\alpha_{10,1})(\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3}) \\ &\quad (\alpha_{6,2}\alpha_{6,3})(\alpha_{7,2}\alpha_{7,3}). \end{aligned}$$

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_7)$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [\varphi]$$

$\{\alpha_{9,1}, \alpha_{10,1}\}, \{\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}\}, \{\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}\}, \{\alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}\}, \{\alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}\}, \{\alpha_{5,2}, \alpha_{5,3}\}, \{\alpha_{6,2}, \alpha_{6,3}\}, \{\alpha_{7,2}, \alpha_{7,3}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случай 6. Для решетки Нимейера

$$N_6 = N(A_{17} \oplus E_7) = [A_{17} \oplus E_7, 3\varepsilon_{1,1} + \varepsilon_{1,2}]$$

группа $A(N_6)$ имеет порядок 2 и порождена элементом

$$\varphi = (\alpha_{1,1}\alpha_{17,1})(\alpha_{2,1}\alpha_{16,1})(\alpha_{3,1}\alpha_{15,1})(\alpha_{4,1}\alpha_{14,1})(\alpha_{5,1}\alpha_{13,1})(\alpha_{6,1}\alpha_{12,1}) \\ (\alpha_{7,1}\alpha_{11,1})(\alpha_{8,1}\alpha_{10,1}).$$

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_6)$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [\varphi]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{17,1}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{16,1}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{15,1}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{14,1}\}$, $\{\alpha_{5,1}, \alpha_{13,1}\}$, $\{\alpha_{6,1}, \alpha_{12,1}\}$, $\{\alpha_{7,1}, \alpha_{11,1}\}$, $\{\alpha_{8,1}, \alpha_{10,1}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случай 3. Для решетки Нимейера

$$N_3 = N(3E_8) = 3E_8$$

группа $A(N_3)$ имеет порядок 6 и порождена элементами

$$(12) = (\alpha_{1,1}\alpha_{1,2})(\alpha_{2,1}\alpha_{2,2})(\alpha_{3,1}\alpha_{3,2})(\alpha_{4,1}\alpha_{4,2})(\alpha_{5,1}\alpha_{5,2})(\alpha_{6,1}\alpha_{6,2}) \\ (\alpha_{7,1}\alpha_{7,2})(\alpha_{8,1}\alpha_{8,2}), \\ (23) = (\alpha_{1,2}\alpha_{1,3})(\alpha_{2,2}\alpha_{2,3})(\alpha_{3,2}\alpha_{3,3})(\alpha_{4,2}\alpha_{4,3})(\alpha_{5,2}\alpha_{5,3})(\alpha_{6,2}\alpha_{6,3}) \\ (\alpha_{7,2}\alpha_{7,3})(\alpha_{8,2}\alpha_{8,3}).$$

Классификация KahK3-классов сопряженности для $A(N_3)$

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$), $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$:

$$H_{1,1} = [(12)]$$

с орбитами $\{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}\}$, $\{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}\}$, $\{\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}\}$, $\{\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}\}$, $\{\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}\}$, $\{\alpha_{6,1}, \alpha_{6,2}\}$, $\{\alpha_{7,1}\alpha_{7,2}\}$, $\{\alpha_{8,1}\alpha_{8,2}\}$ (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

Случаи 1, 2, 4, 5, 10. Для остальных решеток Нимейера N_1 , N_2 , N_4 , N_5 , N_{10} KahK3-классы сопряженности тривиальны (см. [22, гл. 16] и [1], [2]).

§ 5. Отметки решетками Нимейера вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых K3-поверхностей

Как для примера куммеровых поверхностей в § 3, используя теорему 2.1 (применяется основанная на этой теореме программа 6 из § 8), мы классифицируем все возможные отметки решетками Нимейера N_j , $j = 1, \dots, 23$, вырождений коразмерности 1 конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых K3-поверхностей. Для решеток Нимейера N_{23} и N_{22} используется классификация KahK3-классов сопряженности из [1] и [3]. Для решеток Нимейера N_j , $j = 21, \dots, 1$, используется того же стиля классификация из § 4, она более удобна, чем классификация для этих случаев из [1] и [2]. Числами

$n = 81, \dots, 1$ нумеруются типы абстрактных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей (см. [12], [17], [18] и [20]).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть N_j – одна из решеток Нимейера, $j = 1, 2, \dots, 23$. Все возможные типы вырождений коразмерности один $N_H \subset S \subset N_j$ максимальных ($\text{Clos}(H) = H$) нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов H кэлеровых КЗ-поверхностей, которые могут быть отмечены решеткой Нимейера N_j , указаны ниже в таблице j . Они задаются орбитами элементов $\alpha \in P(N_j)$ КалКЗ-классов сопряженности H из $A(N_j)$, классифицированных в [1], [3] для $j = 23, 22$ (используются обозначения случаев 23 и 22 соответственно из [1], [3]), и § 4 для $j = 21, 20, \dots, 11, 9, 8, 7, 6, 3$ (используются обозначения случая j из § 4). Дается тип системы корней и класс изоморфизма дискриминантной группы A_S соответствующей решетки $S = [N_H, \alpha]_{\text{pr}} \subset N_j$.

Таблица 23. Все возможные отметки решеткой $N_{23} = N(24A_1)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 81$, $H \cong M_{20}$ ($|H| = 960$, $i = 11357$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 80$, $H \cong F_{384}$ ($|H| = 384$, $i = 18135$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 79$, $H \cong \mathfrak{A}_6$ ($|H| = 360$, $i = 118$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 78$, $H \cong \mathfrak{A}_{4,4}$ ($|H| = 288$, $i = 1026$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 77$, $H \cong T_{192}$ ($|H| = 192$, $i = 1493$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 76$, $H \cong H_{192}$ ($|H| = 192$, $i = 955$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 75$, $H \cong 4^2\mathfrak{A}_4$ ($|H| = 192$, $i = 1023$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $16A_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{75,1}$ с орбитой элемента α_1).
- $\mathbf{n} = 74$, $H \cong L_2(7)$ ($|H| = 168$, $i = 42$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 70$, $H \cong \mathfrak{S}_5$ ($|H| = 120$, $i = 34$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 65$, $H \cong 2^4D_6$ ($|H| = 96$, $i = 227$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $4A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{65,3}$ с орбитой элемента α_3 или α_{10} ; $H_{65,4}$ с орбитой элемента α_3 , α_4 или α_7); $8A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{65,2}$ с орбитой элемента α_1 ; $H_{65,4}$ с орбитой элемента α_1); $12A_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{65,3}$ с орбитой элемента α_1); $16A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{65,1}$ с орбитой элемента α_1).
- $\mathbf{n} = 63$, $H \cong M_9$ ($|H| = 72$, $i = 41$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 62$, $H \cong N_{72}$ ($|H| = 72$, $i = 40$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 61$, $H \cong \mathfrak{A}_{4,3}$ ($|H| = 72$, $i = 43$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Вырождения: $3A_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{61,1}$ с орбитой элемента α_7 или α_{16}); $12A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{61,1}$ с орбитой элемента α_2).
- $\mathbf{n} = 56$, $H \cong \Gamma_{25}a_1$ ($|H| = 64$, $i = 138$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$. Вырождения: $8A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{56,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_6); $16A_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{56,2}$ с орбитой элемента α_2).
- $\mathbf{n} = 55$, $H \cong \mathfrak{A}_5$ ($|H| = 60$, $i = 5$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. Вырождения: A_1 с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента α_1 , α_{10} или α_{24} ; $H_{55,2}$ с орбитой элемента α_1 , α_5 , α_{21} или α_{24}); $5A_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента α_2 ; $H_{55,2}$ с орбитой элемента

α_4); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента α_4); $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента α_3); $15\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{55,2}$ с орбитой элемента α_2).

$\mathbf{n} = 54$, $H \cong T_{48}$ ($|H| = 48$, $i = 29$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

$\mathbf{n} = 51$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 48$, $i = 48$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{51,2}$ с орбитой элемента α_2 или α_{10}); $H_{51,3}$ с орбитой элемента α_2 ; $H_{51,4}$ с орбитой элемента α_3 или α_6); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{51,2}$ с орбитой элемента α_1 ; $H_{51,4}$ с орбитой элемента α_1 или α_5); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{51,3}$ с орбитой элемента α_4 ; $H_{51,4}$ с орбитой элемента α_2 или α_7); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{51,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_4 ; $H_{51,3}$ с орбитой элемента α_1); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{51,2}$ с орбитой элемента α_4).

$\mathbf{n} = 49$, $H \cong 2^4C_3$ ($|H| = 48$, $i = 50$): $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{49,1}$ с орбитой элемента α_2 или α_4 ; $H_{49,3}$ с орбитой элемента α_2 , α_4 , α_8 , α_{10} или α_{11}); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{49,1}$ с орбитой элемента α_1); $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{49,2}$ с орбитой элемента α_2).

$\mathbf{n} = 48$, $H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ ($|H| = 36$, $i = 10$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента α_5 или α_7); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента α_2); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента α_4).

$\mathbf{n} = 46$, $H \cong 3^2C_4$ ($|H| = 36$, $i = 9$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Вырождения: $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{46,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_3); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{46,1}$ с орбитой элемента α_2);

$\mathbf{n} = 40$, $H \cong Q_8 * Q_8$ ($|H| = 32$, $i = 49$): $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. Вырождения коразмерности 1: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{40,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_3).

$\mathbf{n} = 39$, $H \cong 2^4C_2$ ($|H| = 32$, $i = 27$): $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{39,2}$ с орбитой элемента α_2 , α_3 или α_4); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{39,2}$ с орбитой элемента α_5 ; $H_{39,3}$ с орбитой элемента α_3 или α_5); $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{39,1}$ с орбитой элемента α_2).

$\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$): $\text{rk } N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента α_5 , α_6 , α_{17} или α_{21} ; $H_{34,2}$ с орбитой элемента α_6 , α_{21} или α_{24} ; $H_{34,3}$ с орбитой элемента α_5 или α_{21} ; $H_{34,4}$ с орбитой элемента α_{10} или α_{24}); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента α_4 ; $H_{34,3}$ с орбитой элемента α_4); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента α_2 ; $H_{34,4}$ с орбитой элемента α_2 или α_3); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента α_1 ; $H_{34,3}$ с орбитой элемента α_1 или α_{10} ; $H_{34,4}$ с орбитой элемента α_1 или α_5); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_8 ; $H_{34,3}$ с орбитой элемента α_2 или α_3); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента α_2 ; $H_{34,4}$ с орбитой элемента α_4); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента α_3).

- $\mathbf{n} = 33$, $H \cong C_7 \rtimes C_3$ ($|H| = 21$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$.
Вырождения: $7\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ($H_{33,1}$ с орбитой элемента α_1 , α_3 или α_{11}).
- $\mathbf{n} = 32$, $H \cong \operatorname{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$): $\operatorname{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *Вырождения:* $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента α_{19}); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента α_3 или α_4); $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента α_2).
- $\mathbf{n} = 30$, $H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ ($|H| = 18$, $i = 4$): $\operatorname{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.
Вырождения коразмерности 1: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,1}$ с орбитой элемента α_4 , α_5 , α_{11} или α_{15}); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,1}$ с орбитой элемента α_1).
- $\mathbf{n} = 26$, $H \cong SD_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 8$): $\operatorname{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Вырождения:* $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{26,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_3).
- $\mathbf{n} = 22$, $H \cong C_2 \times D_8$ ($|H| = 16$, $i = 11$): $\operatorname{rk} N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1:* $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{22,2}$ с орбитой элемента α_{12} или α_{16} ; $H_{22,3}$ с орбитой элемента α_8 , α_{11} , α_{12} или α_{16}); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{22,2}$ с орбитой элемента α_6 или α_8 ; $H_{22,3}$ с орбитой элемента α_1 , α_2 , α_4 или α_6); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{22,1}$ с орбитой элемента α_2 или α_4 ; $H_{22,2}$ с орбитой элемента α_2).
- $\mathbf{n} = 21$, $H \cong C_2^4$ ($|H| = 16$, $i = 14$): $\operatorname{rk} N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{21,1}$ с орбитой элемента α_1 , α_2 , α_3 , α_8 или α_{12}); $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{21,2}$ с орбитой элемента α_1).
- $\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\operatorname{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_6); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента α_{15} или α_{16}); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента α_4 или α_5); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента α_2 или α_8).
- $\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$): $\operatorname{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента α_5 , α_{15} , α_{17} , α_{21} или α_{24} ; $H_{17,2}$ с орбитой элемента α_5 , α_6 , α_{10} или α_{17} ; $H_{17,3}$ с орбитой элемента α_{10} или α_{15}); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента α_1 ; $H_{17,3}$ с орбитой элемента α_1 или α_6); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента α_2 ; $H_{17,2}$ с орбитой элемента α_2 или α_4 ; $H_{17,3}$ с орбитой элемента α_2 , α_3 , α_8 или α_{11}); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,2}$ с орбитой элемента α_2 или α_4); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента α_3).
- $\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента α_1 , α_6 , α_{19} или α_{22}); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента α_2 , α_3 , α_4 или α_5).
- $\mathbf{n} = 12$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$): $\operatorname{rk} N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

- Вырождения коразмерности 1:* $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{12,1}$ с орбитой элемента α_1 или α_4).
- n = 10,** $H \cong D_8$ ($|H| = 8, i = 3$): $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$ или α_{24} ; $H_{10,2}$ с орбитой элемента α_1 или α_6); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента α_{10} или α_{15} ; $H_{10,2}$ с орбитой элемента α_2, α_{10} или α_{16}); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента α_3 или α_7 ; $H_{10,2}$ с орбитой элемента $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ или α_7); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента α_2).
- n = 9,** $H \cong C_2^3$ ($|H| = 8, i = 5$): $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1:* $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{9,1}$ с орбитой элемента α_5 или α_6 ; $H_{9,3}$ с орбитой элемента $\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}$ или α_{16}); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{9,1}$ с орбитой элемента $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ или α_7 ; $H_{9,4}$ с орбитой элемента α_2 или α_4); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{9,2}$ с орбитой элемента α_2 или α_4 ; $H_{9,3}$ с орбитой элемента α_2).
- n = 6,** $H \cong D_6$ ($|H| = 6, i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$ или α_{24}); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента α_{16}); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_3, \alpha_7, \alpha_{10}$ или α_{11}); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента α_2).
- n = 4,** $H \cong C_4$ ($|H| = 4, i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_{17}$ или α_{18}); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента α_8 или α_{12}); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_7$ или α_{11}).
- n = 3,** $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4, i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{15}, \alpha_{17}, \alpha_{21}$ или α_{24} ; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6$ или α_{21}); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}$ или α_{16} ; $H_{3,3}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}$ или α_{16}); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ или α_7 ; $H_{3,2}$ с орбитой элемента α_2 или α_4).
- n = 2,** $H \cong C_3$ ($|H| = 3, i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_{14}, \alpha_{17}, \alpha_{21}$ или α_{24}); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{12}$ или α_{15}).
- n = 1,** $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1:* $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_1, \alpha_4, \alpha_8, \alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{17}, \alpha_{18}$ или α_{21}); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ или α_{14}).

Таблица 22. Все возможные отметки решеткой $N_{22} = N(12A_2)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

n = 79, $H \cong \mathfrak{A}_6$ ($|H| = 360, i = 118$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

- $n = 70$, $H \cong \mathfrak{S}_5$ ($|H| = 120$, $i = 34$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $n = 63$, $H \cong M_9$ ($|H| = 72$, $i = 41$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $n = 62$, $H \cong N_{72}$ ($|H| = 72$, $i = 40$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $n = 55$, $H \cong \mathfrak{A}_5$ ($|H| = 60$, $i = 5$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
Вырождения: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,10}$ или $\alpha_{2,10}$; $H_{55,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,8}$ или $\alpha_{2,8}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$ или $\alpha_{2,6}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ ($H_{55,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $n = 54$, $H \cong T_{48}$ ($|H| = 48$, $i = 29$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $n = 48$, $H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ ($|H| = 36$, $i = 10$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{2,7}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,2}$); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $n = 46$, $H \cong 3^2C_4$ ($|H| = 36$, $i = 9$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Вырождения: $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{46,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $9\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{46,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $n = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$): $\text{rk } N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $6\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$).
- $n = 32$, $H \cong \text{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Вырождения: $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,3}$); $5\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$).
- $n = 30$, $H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ ($|H| = 18$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{2,7}$); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $n = 26$, $H \cong SD_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 8$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Вырождения: $2\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{26,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{26,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$).
- $n = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{2,7}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$).
- $n = 17$, $H = \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,3}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$).

- $\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$).
- $\mathbf{n} = 12$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$): $\operatorname{rk} N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{12,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{1,8}$ или $\alpha_{1,11}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{12,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$): $\operatorname{rk} N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$); $2\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,9}$).
- $\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,8}$ или $\alpha_{2,8}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,8}$, $\alpha_{2,8}$, $\alpha_{1,10}$ или $\alpha_{2,10}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$ или $\alpha_{2,6}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$).
- $\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,5}$); $\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,11}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,6}$ или $\alpha_{2,6}$).
- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\operatorname{rk} N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{1,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{2,7}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$ или $\alpha_{2,6}$).
- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,8}$, $\alpha_{2,8}$, $\alpha_{1,10}$ или $\alpha_{2,10}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{2,7}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\operatorname{rk} N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{1,11}$ или $\alpha_{2,11}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{1,7}$, $\alpha_{2,7}$, $\alpha_{1,9}$ или $\alpha_{2,9}$).

Таблица 21. Все возможные отметки решеткой $N_{21} = N(8A_3)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 74$, $H \cong L_2(7)$ ($|H| = 168$, $i = 42$): $\operatorname{rk} N_H = 19$. *Нет вырождений.*
- $\mathbf{n} = 51$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 48$, $i = 48$): $\operatorname{rk} N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{51,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,2}$; $H_{51,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{51,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,4}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$

($H_{51,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{51,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{51,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$): $\mathrm{rk} N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{3,2}$); $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$; $H_{34,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{3,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$; $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$; $H_{34,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$; $H_{34,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,4}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$; $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$; $H_{34,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 33$, $H \cong C_7 \times C_3$ ($|H| = 21$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$. *Вырождения*: $7\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ($H_{33,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{3,2}$).

$\mathbf{n} = 22$, $H \cong C_2 \times D_8$ ($|H| = 16$, $i = 11$): $\mathrm{rk} N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{22,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,2}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{22,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{1,4}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{22,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\mathrm{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{2,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,2}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{2,5}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,5}$).

$\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$): $\mathrm{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{3,5}$; $H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{3,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{3,3}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$; $H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$).

$\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$): $\mathrm{rk} N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{2,2}$; $H_{10,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{2,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,4}$; $H_{10,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,4}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{1,4}$; $H_{10,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{1,4}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 9$, $H \cong C_2^3$ ($|H| = 8$, $i = 5$): $\mathrm{rk} N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{9,1}$

с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,4}$ или $\alpha_{1,5}$; $H_{9,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,7}$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{9,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$; $H_{9,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,7}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{9,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{2,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{3,5}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$).

$\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{3,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$).

$\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{2,5}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{2,5}$; $H_{3,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{3,5}$; $H_{3,4}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{2,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{2,7}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,4}$ или $\alpha_{1,5}$; $H_{3,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, или $\alpha_{2,7}$; $H_{3,4}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{1,7}$, $\alpha_{2,7}$ или $\alpha_{3,7}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,7}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{3,3}$; $H_{3,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,7}$; $H_{3,4}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$).

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{3,2}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{3,5}$).

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{2,6}$, $\alpha_{2,7}$ или $\alpha_{2,8}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{3,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{1,6}$, $\alpha_{1,7}$ или $\alpha_{1,8}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,7}$, $\alpha_{2,7}$ или $\alpha_{3,7}$).

Таблица 20. Все возможные отметки решеткой $N_{20} = N(6A_4)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 32$, $H \cong \text{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{32,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{32,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$); $5\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$).

- $\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$).
- $\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$); $\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{4,3}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$).

Таблица 19. Все возможные отметки решеткой $N_{19} = N(6D_4)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 70$, $H \cong \mathfrak{S}_5$ ($|H| = 120$, $i = 34$): $\mathrm{rk} N_H = 19$. *Нет вырождений.*
- $\mathbf{n} = 61$, $H \cong \mathfrak{A}_{4,3}$ ($|H| = 72$, $i = 43$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{61,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{61,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 55$, $H \cong \mathfrak{A}_5$ ($|H| = 60$, $i = 5$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$); $15\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{55,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 48$, $H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ ($|H| = 36$, $i = 10$): $\mathrm{rk} N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. *Вырождения*: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,4}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$ ($H_{48,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$).
- $\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$): $\mathrm{rk} N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{2,4}$; $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,4}$ или $\alpha_{2,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,4}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,4}$; $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{4,1}$; $H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$ ($H_{34,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ($H_{34,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 32$, $H \cong \mathrm{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,3}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ ($H_{32,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$).

- $\mathbf{n} = 30$, $H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ ($|H| = 18$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$); $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{30,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{2,4}$; $H_{18,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{2,5}$; $H_{18,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,4}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,4}$; $H_{18,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{3,1}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,5}$; $H_{18,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,4}$).
- $\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{2,4}$; $H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,4}$; $H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{17,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$; $H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$); $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{17,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ ($H_{16,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$).
- $\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{1,4}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{2,6}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{4,4}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{2,6}$; $H_{6,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$; $H_{6,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$; $H_{6,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$; $H_{6,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$).
- $\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,4}$ или $\alpha_{2,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{3,4}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$).

- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\mathrm{rk} N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{4,5}$, $\alpha_{2,6}$ или $\alpha_{4,6}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$; $H_{3,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{3,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{1,3}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$).
- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{2,6}$; $H_{2,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$, $\alpha_{4,4}$ или $\alpha_{2,5}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$; $H_{2,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,5}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{4,4}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{4,5}$, $\alpha_{2,6}$ или $\alpha_{4,6}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{1,5}$ или $\alpha_{1,6}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{3,5}$ или $\alpha_{4,5}$).

Таблица 18. Все возможные отметки решеткой $N_{18} = N(4A_5 \oplus D_4)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 54$, $H \cong T_{48}$ ($|H| = 48$, $i = 29$): $\mathrm{rk} N_H = 19$. *Нет вырождений.*
- $\mathbf{n} = 26$, $H \cong SD_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 8$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{26,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\mathrm{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{2,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,2}$ или $\alpha_{1,5}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$).
- $\mathbf{n} = 12$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$): $\mathrm{rk} N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{12,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$).
- $\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$): $\mathrm{rk} N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{1,5}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$ ($H_{10,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,3}$).
- $\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$ или $\alpha_{2,5}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{2,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{2,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,2}$ или

- $\alpha_{1,5}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{1,5}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{2,2}$).
- $\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{3,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$ или $\alpha_{3,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{2,3}$).
- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{1,5}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{1,4}$).
- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$ или $\alpha_{2,5}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{1,5}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{2,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{3,4}$, $\alpha_{1,5}$, $\alpha_{2,5}$, $\alpha_{3,5}$ или $\alpha_{4,5}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{5,3}$ или $\alpha_{1,5}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{1,4}$ или $\alpha_{2,4}$).

Таблица 17. Все возможные отметки решеткой $N_{17} = N(4A_6)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$ или $\alpha_{6,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{6,2}$).

Таблица 16. Все возможные отметки решеткой $N_{16} = N(2A_7 \oplus 2D_5)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{4,1}$ или $\alpha_{4,2}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{3,3}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{4,3}$ или $\alpha_{4,4}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{4,3}$; $H_{3,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{3,1}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$, $\alpha_{6,1}$, $\alpha_{7,1}$ или $\alpha_{4,2}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$; $H_{1,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{5,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{3,4}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$ или $\alpha_{5,3}$; $H_{1,2}$

с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,3}$ или $\alpha_{4,4}$; $H_{1,3}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{4,4}$).

Таблица 15. Все возможные отметки решеткой $N_{15} = N(3A_8)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}, \alpha_{7,2}$ или $\alpha_{8,2}$).

Таблица 14. Все возможные отметки решеткой $N_{14} = N(4D_6)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6, i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{5,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{5,2}$).

$\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3, i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}$ или $\alpha_{6,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}$ или $\alpha_{6,2}$).

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}$ или $\alpha_{6,3}$).

Таблица 13. Все возможные отметки решеткой $N_{13} = N(2A_9 \oplus D_6)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4, i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{5,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{4,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}$ или $\alpha_{4,1}$).

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}$ или $\alpha_{6,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$ или $\alpha_{4,2}$).

Таблица 12. Все возможные отметки решеткой $N_{12} = N(4E_6)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12, i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{18,1}$ с орбитой

элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{3,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$ ($H_{18,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{3,2}$).

- $\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$ или $\alpha_{6,1}$); $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$ или $\alpha_{4,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$ или $\alpha_{3,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{4,2}$; $H_{6,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{6,2}$); $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$ ($H_{6,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$ или $\alpha_{3,2}$).
- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{2,2}$ или $\alpha_{4,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{3,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{3,3}$).
- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$ или $\alpha_{6,1}$); $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ ($H_{2,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{6,2}$).
- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{2,4}$ или $\alpha_{4,4}$); $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$ или $\alpha_{6,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{1,4}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{3,3}$ или $\alpha_{3,4}$; $H_{1,2}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{6,3}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$ или $\alpha_{5,3}$).

Таблица 11. Все возможные отметки решеткой $N_{11} = N(A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{6,1}$, $\alpha_{1,2}$, $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{3,2}$, $\alpha_{4,2}$, $\alpha_{5,2}$, $\alpha_{2,3}$ или $\alpha_{4,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$, $\alpha_{6,2}$, $\alpha_{1,3}$ или $\alpha_{3,3}$).

Таблица 9. Все возможные отметки решеткой $N_9 = N(3D_8)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{3,3}$, $\alpha_{4,3}$, $\alpha_{5,3}$, $\alpha_{6,3}$, $\alpha_{7,3}$ или $\alpha_{8,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}$, $\alpha_{2,1}$, $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{4,1}$, $\alpha_{5,1}$, $\alpha_{6,1}$, $\alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,1}$).

Таблица 8. Все возможные отметки решеткой $N_8 = N(A_{15} \oplus D_9)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

- $\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{8,1}$, $\alpha_{1,2}$,

$\alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}$ или $\alpha_{7,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,2}$).

Таблица 7. Все возможные отметки решеткой $N_7 = N(D_{10} \oplus 2E_7)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,1}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{9,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}$ или $\alpha_{7,2}$).

Таблица 6. Все возможные отметки решеткой $N_6 = N(A_{17} \oplus E_7)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{9,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}$ или $\alpha_{7,2}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,1}$).

Таблица 3. Все возможные отметки решеткой $N_3 = N(3E_8)$ вырождений коразмерности 1 нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2, i = 1$): $\text{rk } N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}, \alpha_{6,3}, \alpha_{7,3}$ или $\alpha_{8,3}$); $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$ ($H_{1,1}$ с орбитой элемента $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{7,1}$ или $\alpha_{8,1}$).

§ 6. Классификация типов вырождений конечных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

Используя теорему 5.1, получаем следующую классификацию типов вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей.

ТЕОРЕМА 6.1. *Для нетривиальных конечных симплектических групп автоморфизмов H кэлеровых КЗ-поверхностей X типами вырождений коразмерности один $N_H \subset S$ (где $\text{rk } S = \text{rk } N_H + 1$ и $S < 0$) являются те и только те, которые указаны в нижеприведенной табл. GEN. Дается тип множества неособых рациональных кривых на X и класс изоморфизма дискриминантной группы $A_S = S^*/S$ решетки $S = S_X$. Описание этих вырождений при использовании отметок решетками Нимейера N_j , $j = 3, 6, 7, 8, 9, 11, \dots, 23$, приведено в теореме 5.1 и соответствующих таблицах j .*

Таблица GEN. Классификация типов вырождений коразмерности 1 нетривиальных симплектических групп автоморфизмов кэлеровых КЗ-поверхностей

$\mathbf{n} = 81$, $H \cong M_{20}$ ($|H| = 960, i = 11357$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

$\mathbf{n} = 80$, $H \cong F_{384}$ ($|H| = 384, i = 18135$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

$\mathbf{n} = 79$, $H \cong \mathcal{A}_6$ ($|H| = 360, i = 118$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

$\mathbf{n} = 78$, $H \cong \mathcal{A}_{4,4}$ ($|H| = 288, i = 1026$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.

- $\mathbf{n} = 77$, $H \cong T_{192}$ ($|H| = 192$, $i = 1493$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 76$, $H \cong H_{192}$ ($|H| = 192$, $i = 955$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 75$, $H \cong 4^2\mathfrak{A}_4$ ($|H| = 192$, $i = 1023$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 74$, $H \cong L_2(7)$ ($|H| = 168$, $i = 42$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 73$, $H \cong 2^4D_{10}$ ($|H| = 160$, $i = 234$): то же, что для $\mathbf{n} = 81$.
- $\mathbf{n} = 72$, $H \cong \mathfrak{A}_4^2$ ($|H| = 144$, $i = 184$): то же, что для $\mathbf{n} = 78$.
- $\mathbf{n} = 71$, $H \cong F_{128}$ ($|H| = 128$, $i = 931$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 70$, $H \cong \mathfrak{S}_5$ ($|H| = 120$, $i = 34$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 69$, $H \cong (Q_8 * Q_8) \rtimes C_3$ ($|H| = 96$, $i = 204$): то же, что для $\mathbf{n} = 77$.
- $\mathbf{n} = 68$, $H \cong 2^3D_{12}$, ($|H| = 96$, $i = 195$): то же, что для $\mathbf{n} = 78$.
- $\mathbf{n} = 67$, $H \cong 4^2D_6$, ($|H| = 96$, $i = 64$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 66$, $H \cong 2^4C_6$ ($|H| = 96$, $i = 70$): то же, что для $\mathbf{n} = 76$.
- $\mathbf{n} = 65$, $H \cong 2^4D_6$ ($|H| = 96$, $i = 227$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$. $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 64$, $H \cong 2^4C_5$ ($|H| = 80$, $i = 49$): то же, что для $\mathbf{n} = 81$.
- $\mathbf{n} = 63$, $H \cong M_9$ ($|H| = 72$, $i = 41$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 62$, $H \cong N_{72}$ ($|H| = 72$, $i = 40$): $\text{rk } N_H = 19$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 61$, $H \cong \mathfrak{A}_{4,3}$ ($|H| = 72$, $i = 43$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Вырождения: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 60$, $H \cong \Gamma_{26a_2}$ ($|H| = 64$, $i = 136$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 59$, $H \cong \Gamma_{23a_2}$ ($|H| = 64$, $i = 35$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 58$, $H \cong \Gamma_{22a_1}$ ($|H| = 64$, $i = 32$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 57$, $H \cong \Gamma_{13a_1}$ ($|H| = 64$, $i = 242$): то же, что для $\mathbf{n} = 75$.
- $\mathbf{n} = 56$, $H \cong \Gamma_{25a_1}$ ($|H| = 64$, $i = 138$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$.
Вырождения: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$.
- $\mathbf{n} = 55$, $H \cong \mathfrak{A}_5$ ($|H| = 60$, $i = 5$): $\text{rk } N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.
Вырождения: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$; $15\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 54$, $H \cong T_{48}$ ($|H| = 48$, $i = 29$): $\text{rk } N_H = 19$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Нет вырождений.
- $\mathbf{n} = 53$, $H \cong 2^2Q_{12}$ ($|H| = 48$, $i = 30$): то же, что для $\mathbf{n} = 78$.
- $\mathbf{n} = 52$, $H \cong 2^2(C_2 \times C_6)$ ($|H| = 48$, $i = 49$): то же, что для $\mathbf{n} = 78$.
- $\mathbf{n} = 51$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 48$, $i = 48$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 50$, $H \cong 4^2C_3$ ($|H| = 48$, $i = 3$): то же, что для $\mathbf{n} = 75$.
- $\mathbf{n} = 49$, $H \cong 2^4C_3$ ($|H| = 48$, $i = 50$): $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$.
Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
- $\mathbf{n} = 48$, $H \cong \mathfrak{S}_{3,3}$ ($|H| = 36$, $i = 10$): $\text{rk } N_H = 18$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. Вырождения: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$; $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3$.

- $\mathbf{n} = 47$, $H \cong C_3 \times \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 36$, $i = 11$): то же, что для $\mathbf{n} = 61$.
- $\mathbf{n} = 46$, $H \cong 3^2C_4$ ($|H| = 36$, $i = 9$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $9\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 45$, $H \cong \Gamma_{6a_2}$ ($|H| = 32$, $i = 44$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 44$, $H \cong \Gamma_{3e}$ ($|H| = 32$, $i = 11$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 43$, $H \cong \Gamma_{7a_2}$ ($|H| = 32$, $i = 7$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 42$, $H \cong \Gamma_{4c_2}$ ($|H| = 32$, $i = 31$): то же, что для $\mathbf{n} = 75$.
- $\mathbf{n} = 41$, $H \cong \Gamma_{7a_1}$ ($|H| = 32$, $i = 6$): то же, что для $\mathbf{n} = 56$.
- $\mathbf{n} = 40$, $H \cong Q_8 * Q_8$ ($|H| = 32$, $i = 49$): $\mathrm{rk} N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$. *Вырождения коразмерности 1*: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$.
- $\mathbf{n} = 39$, $H \cong 2^4C_2$ ($|H| = 32$, $i = 27$): $\mathrm{rk} N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 38$, $H \cong T_{24}$ ($|H| = 24$, $i = 3$): то же, что для $\mathbf{n} = 54$.
- $\mathbf{n} = 37$, $H \cong T_{24}$ ($|H| = 24$, $i = 3$): то же, что для $\mathbf{n} = 77$.
- $\mathbf{n} = 36$, $H \cong C_3 \rtimes D_8$ ($|H| = 24$, $i = 8$): то же, что для $\mathbf{n} = 61$.
- $\mathbf{n} = 35$, $H \cong C_2 \times \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 24$, $i = 13$): то же, что для $\mathbf{n} = 51$.
- $\mathbf{n} = 34$, $H \cong \mathfrak{S}_4$ ($|H| = 24$, $i = 12$): $\mathrm{rk} N_H = 17$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. *Вырождения коразмерности 1*: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$; $6\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 33$, $H \cong C_7 \rtimes C_3$ ($|H| = 21$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^3$. *Вырождения*: $7\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/14\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 32$, $H \cong \mathrm{Hol}(C_5)$ ($|H| = 20$, $i = 3$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$; $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $10\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $5\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 31$, $H \cong C_3 \times D_6$ ($|H| = 18$, $i = 3$): то же, что для $\mathbf{n} = 48$.
- $\mathbf{n} = 30$, $H \cong \mathfrak{A}_{3,3}$ ($|H| = 18$, $i = 4$): $\mathrm{rk} N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$. *Вырождения коразмерности 1*: $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$; $9\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.
- $\mathbf{n} = 29$, $H \cong Q_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 9$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 28$, $H \cong \Gamma_{2d}$ ($|H| = 16$, $i = 6$): то же, что для $\mathbf{n} = 80$.
- $\mathbf{n} = 27$, $H \cong C_2 \times Q_8$ ($|H| = 16$, $i = 12$): то же, что для $\mathbf{n} = 75$.
- $\mathbf{n} = 26$, $H \cong SD_{16}$ ($|H| = 16$, $i = 8$): $\mathrm{rk} N_H = 18$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Вырождения*: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $2\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 25$, $H \cong C_4^2$ ($|H| = 16$, $i = 2$): то же, что для $\mathbf{n} = 75$.
- $\mathbf{n} = 24$, $H \cong Q_8 * C_4$ ($|H| = 16$, $i = 13$): то же, что для $\mathbf{n} = 40$.
- $\mathbf{n} = 23$, $H \cong \Gamma_{2c_1}$ ($|H| = 16$, $i = 3$): то же, что для $\mathbf{n} = 39$.
- $\mathbf{n} = 22$, $H \cong C_2 \times D_8$ ($|H| = 16$, $i = 11$): $\mathrm{rk} N_H = 16$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$. *Вырождения коразмерности 1*: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

- $\mathbf{n} = 21$, $H \cong C_2^4$ ($|H| = 16$, $i = 14$): $\text{rk } N_H = 15$, $(N_H)^*/N_H \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
Вырождения коразмерности 1: $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$; $16\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
- $\mathbf{n} = 20$, $H \cong Q_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 1$): то же, что для $\mathbf{n} = 61$.
- $\mathbf{n} = 19$, $H \cong C_2 \times C_6$ ($|H| = 12$, $i = 5$): то же, что для $\mathbf{n} = 61$.
- $\mathbf{n} = 18$, $H \cong D_{12}$ ($|H| = 12$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 17$, $H \cong \mathfrak{A}_4$ ($|H| = 12$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$; $12\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 16$, $H \cong D_{10}$ ($|H| = 10$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 16$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^4$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^3$; $5\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 15$, $H \cong C_3^2$ ($|H| = 9$, $i = 2$): то же, что для $\mathbf{n} = 30$.
- $\mathbf{n} = 14$, $H \cong C_8$ ($|H| = 8$, $i = 1$): то же, что для $\mathbf{n} = 26$.
- $\mathbf{n} = 13$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$): то же, что для $\mathbf{n} = 40$.
- $\mathbf{n} = 12$, $H \cong Q_8$ ($|H| = 8$, $i = 4$): $\text{rk } N_H = 17$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
Вырождения коразмерности 1: $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; $\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
- $\mathbf{n} = 11$, $H \cong C_2 \times C_4$ ($|H| = 8$, $i = 2$): то же, что для $\mathbf{n} = 22$.
- $\mathbf{n} = 10$, $H \cong D_8$ ($|H| = 8$, $i = 3$): $\text{rk } N_H = 15$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$; $2\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4$.
- $\mathbf{n} = 9$, $H \cong C_2^3$ ($|H| = 8$, $i = 5$): $\text{rk } N_H = 14$, $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
Вырождения коразмерности 1: $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$; $8\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
- $\mathbf{n} = 8$, $H \cong C_7$ ($|H| = 7$, $i = 1$): то же, что для $\mathbf{n} = 33$.
- $\mathbf{n} = 7$, $H \cong C_6$ ($|H| = 6$, $i = 2$): то же, что для $\mathbf{n} = 18$.
- $\mathbf{n} = 6$, $H \cong D_6$ ($|H| = 6$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$; $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; $6\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^3$.
- $\mathbf{n} = 5$, $H \cong C_5$ ($|H| = 5$, $i = 1$): то же, что для $\mathbf{n} = 16$.
- $\mathbf{n} = 4$, $H \cong C_4$ ($|H| = 4$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 14$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^5$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$; $\mathbb{A}_2$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- $\mathbf{n} = 3$, $H \cong C_2^2$ ($|H| = 4$, $i = 2$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^7$; $2\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$; $4\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.
- $\mathbf{n} = 2$, $H \cong C_3$ ($|H| = 3$, $i = 1$): $\text{rk } N_H = 12$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^6$.
Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^5$; $3\mathbb{A}_1$ с $A_S \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$.

$\mathbf{n} = 1$, $H \cong C_2$ ($|H| = 2$, $i = 1$): $\mathrm{rk} N_H = 8$ и $(N_H)^*/N_H \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^8$. Вырождения коразмерности 1: $\mathbb{A}_1 \subset A_S \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^9$; $2\mathbb{A}_1 \subset A_S \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$.

§ 7. Гипотеза и некоторые замечания

Теорема 6.1 показывает, что для фиксированного типа (задаваемого n) абстрактной конечной симплектической группы автоморфизмов КЗ-поверхности и фиксированного типа вырождения коразмерности 1 (типа диаграммы Дынкина) дискриминантная группа A_S соответствующей решетки S всегда одна и та же. Естественно предположить, что имеет место более сильное утверждение: при данных предположениях класс изоморфизма решетки S один и тот же.

Однако, как показывают детальные дополнительные вычисления, это так лишь с некоторыми очень редкими исключениями.

ГИПОТЕЗА 7.1. Для фиксированного типа (задаваемого n) абстрактной конечной симплектической группы автоморфизмов H кэлеровых КЗ-поверхностей и для фиксированного типа вырождения коразмерности 1 (класса изоморфизма диаграммы Дынкина) кэлеровой КЗ-поверхности соответствующая решетка $S = [N_H, \alpha]_{\mathrm{pr}}$ определена однозначно с точностью до изоморфизма решеток.

То же самое можно сформулировать геометрически. Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность с решеткой Пикара $S_X < 0$. Пусть $H = \mathrm{Aut}^0 X$ – группа симплектических автоморфизмов X и $P(X)$ – множество классов неособых рациональных кривых на X . Пусть $N_H = ((S_X)^H)_{S_X}^\perp \subset S_X$ – соответствующая коинвариантная подрешетка. Предположим, что S_X порождена N_H и $P(X)$ с точностью до конечного индекса и $\mathrm{rk} S_X = \mathrm{rk} N_H + 1$. Тогда класс изоморфизма решетки $S = S_X$ определяется типом H как абстрактной группы (эквивалентным n) и типом диаграммы Дынкина множества $P(X)$.

Однако это верно, кроме следующих и только следующих двух случаев:

- (1) когда $\mathbf{n} = 34$ (эквивалентно $H \cong \mathfrak{S}_4$) и вырождение имеет тип $6\mathbb{A}_1$;
- (2) когда $\mathbf{n} = 10$ (эквивалентно $H \cong D_8$) и вырождение имеет тип $2\mathbb{A}_1$.

В каждом из этих двух случаев имеются ровно два класса изоморфизма решетки S .

Очевидно, гипотеза 7.1 верна для тривиальной группы H . Теорема 6.1 показывает, что гипотеза имеет место для дискриминантной группы A_S решетки S .

Мы надеемся дать доказательство гипотезы 7.1 и других более тонких утверждений в дальнейших публикациях. Это даст классификацию вырождений коразмерности 1 (а не только типов вырождений) кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов (см. [23]).

Из теоремы 6.1 также получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Все типы вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов, определяемые инвариантом n группы и типом диаграммы Дынкина вырождения, могут быть получены из отметок решетками Нимейера $N_{23} = N(24\mathbb{A}_1)$ и

$N_{22} = N(12A_2)$. Вырождения коразмерности 1, которые могут быть отмечены другими решетками Нимейера N_j , $j = 1, \dots, 21$, дают те же типы вырождений.

§ 8. Дополнение: программы

Здесь мы приводим программы Program 5 и Program 6 для GP/PARI Calculator, Version 2.7.0, которые использовались в вычислениях ранее. Они также включают программы Program 1–Program 4 из [1] и [2].

PROGRAM 5: niemeier\general2a.txt

```
\\for a Niemeier lattice N_i given by root matrix r
\\and cord matrix cord
\\and subgroup H\subset A(N_i)
\\and its orbits ORB matrix, each line gives
\\orbit of length > 1 with 0 remaining elements
\\it calculates all additional
\\1-elements orbits to matrix ORBF and prints them
\\(1-elements orbits the last)
\\it calculates coinvariant sublattice N_H
\\by its rational generators, and checks if
\\N_H has primitive embedding to L_K3
\\Then it prints invariants of the discriminant group of N_H
sORB=matsize(ORB);m1=0;
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]=0,,m1=m1+1));\
ORBF=matrix(sORB[1]+(24-m1),sORB[2]);
for(k=1,sORB[1],ORBF[k,]=ORB[k,]);l=sORB[1];
for(t=1,24,mu=0;for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]!=t,,mu=1));if(mu=1,,l=l+1;ORBF[l,1]=t));\
print("ORBF= ORBF");\
SUBL0=matrix(24,24);alpha=0;\
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2]-1,\
if(ORB[k1,k2+1]>0,alpha=alpha+1;\
SUBL0[,alpha]=R[,ORB[k1,k2]]-R[,ORB[k1,k2+1]]));\
sORBF=matsize(ORBF);\
SUBL=SUBL0;a=matrix(24,24+matsize(cord)[1]);\
for(i=1,24,a[i,i]=1);for(i=1,matsize(cord)[1],a[,24+i]=cord[i,]);\
L=a;N=SUBL;ggg=gcd(N);N1=N/ggg;M=L;gg=gcd(M);M1=M/gg;\
ww=matsnf(M1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnn=nnn-1));VV=matrix(nn,nnn);\
nnnn=0;for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnnn=nnnn+1;VV[,nnnn]=vv[,i]));\
M2=M1*VV;MM=M2*gg;\
kill(gg);kill(M1);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(mm);\
kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(M2);\
L1=MM;kill(VV);N2=L1^-1*N1;
```

```

ww=matsnf(N2,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
N3=N2*vv;mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnn=nnn-1));\
N4=matrix(mm,nnn);nnnn=0;\
for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnnn=nnnn+1);\
ddd=gcd(dd[i],N4[nnnn]=N3[i]/ddd));\
Npr=L1*N4;\
kill(ggg);kill(N1);kill(M);kill(L1);kill(MM);\
kill(N2);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(N3);\
kill(mm);kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(ddd);kill(N4);\
SUBLpr1=Npr;\
R=r;B=SUBLpr1;\
l=B~*R*B;\
ww=matsnf(l,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
nn=matsize(l)[1];nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnn=nnn-1));\
b=matrix(nn,nnn,X,Y,vv[X,Y+nn-nnn]);\
ll=b~*l*b;\
d=vector(nnn,X,dd[X+nn-nnn,X+nn-nnn]);\
kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);\
kill(nn);kill(nnn);\
BB=B*b;G=BB~*R*BB;D=d;\
SUBLpr=BB;DSUBLpr=D;rSUBLpr=G;\
RANK=matsize(DSUBLpr)[2];\
RANKA=0;for(k1=1,RANK,if(DSUBLpr[k1]>1,RANKA=RANKA+1));\
&if(RANK>19||RANK+RANKA>22,,\
DISCGRS=vector(RANKA,X,DSUBLpr[X]);\
if(RANK+RANKA<22,print("DISCGRS= DISCGRS),\
pp=factor(DISCGRS[RANKA]);\
u1=2;if(pp[1,1]>2,u1=1);if(pp[1,1]==2&&pp[1,2]>1,u1=1);\
if(pp[1,1]==2&&pp[1,2]==1,delta=0;\
for(k=1,RANKA,if(type(rSUBLpr[k,k]/4)!="t_INT delta=1)));\
if(delta==0,u1=1);gamm=0;\
BBB=matrix(RANK-RANKA,RANK-RANKA,\
X,Y,rSUBLpr[X+RANKA,Y+RANKA]);\
dBBB=matdet(BBB);\
for(t1=u1,matsize(pp)[1],if(pp[t1,1]==2&&\
Mod(dBBB,8)!=Mod(1,8)&&Mod(dBBB,8)!=Mod(-1,8),gamm=1);\
if(pp[t1,1]!=2&&kronecker((-1)^(RANK+1)*dBBB,pp[t1,1])!=1,gamm=1)); \
if(gamm==0,print("DISCGRS= DISCGRS)))));

```

PROGRAM 6: niemeier\degen1a.txt

```

\\for a Niemeier lattice N_i given by root matrix r, R=r inverse,
\\and cord matrix cord
\\and sugroup H\subset A(N_i)
\\and its orbits ORB matrix, each line gives orbit of length > 1,
\\with 0 remaining elements
\\it calculates all additional

```

```

\\1-elements orbits to matrix ORBF and prints them
\\(1-elements orbits the last)
\\it calculates coinvariant sublattice N_H by its rational generators,
\\for each first element k_i of i line of ORBF
\\it calculates invariants of the degeneration
\\sublattice N(H,i)=[N_H,i] using program general1.txt
\\and checks if
\\N(H,i) has primitive embedding to L_K3
\\Then it prints k_i and invariants of the discriminant
\\group of N(H,i)
\\it prints: k_i,
\\and invariants of N(H_i)\subset N(H_i)^\ast
sORB=matsize(ORB);m1=0;
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]=0,,m1=m1+1)));
ORBF=matrix(sORB[1]+(24-m1),sORB[2]);
for(k=1,sORB[1],ORBF[k,]=ORB[k,]);l=sORB[1];
for(t=1,24,mu=0;for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]!=t,,mu=1)));if(mu==1,,l=l+1;ORBF[l,1]=t));\
print("ORBF= ORBF");\
SUBL0=matrix(24,24);alpha=0;\
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2]-1,\
if(ORB[k1,k2+1]>0,alpha=alpha+1;\
SUBL0[,alpha]=R[,ORB[k1,k2]]-R[,ORB[k1,k2+1]]));\
sORBF=matsize(ORBF);\
for(n=1,sORBF[1],t=ORBF[n,1];SUBL=SUBL0;SUBL[t,alpha+1]=1; \
a=matrix(24,24+matsize(cord)[1]);\
for(i=1,24,a[i,i]=1);for(i=1,matsize(cord)[1],a[,24+i]=cord[i,~]); \
L=a;N=SUBL;\
ggg=gcd(N);N1=N/ggg;M=L;\
gg=gcd(M);M1=M/gg;\
ww=matsnf(M1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnn=nnn-1));\
VV=matrix(nn,nnn);\
nnnn=0;for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnnn=nnnn+1;VV[,nnnn]=vv[,i]));\
M2=M1*VV;MM=M2*gg;\
kill(gg);kill(M1);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);\
kill(mm);kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(M2);\
L1=MM;kill(VV);N2=L1^-1*N1;\
ww=matsnf(N2,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
N3=N2*vv;mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnn=nnn-1));\
N4=matrix(mm,nnn);nnnn=0;\
for(i=1,nn,if(dd[,i]=0,nnnn=nnnn+1);\
ddd=gcd(dd[,i]);N4[,nnnn]=N3[,i]/ddd);Npr=L1*N4;\

```



```

kill(ggg);kill(N1);kill(M);kill(L1);kill(MM);\
kill(N2);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(N3);\
kill(mm);kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(ddd);kill(N4);\
SUBLpr1=Npr;R=r;B=SUBLpr1;l=B~*R*B;\
ww=matsnf(1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
nn=matsize(l)[1];nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnn=nnn-1));\
b=matrix(nn,nnn,X,Y,vv[X,Y+nn-nnn]);\
ll=b~*l*b;d=vector(nnn,X,dd[X+nn-nnn,X+nn-nnn]);\
kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(nn);kill(nnn);\
BB=B*b;G=BB~*R*BB;D=d;\
SUBLpr=BB;DSUBLpr=D;rSUBLpr=G;\
RANK=matsize(DSUBLpr)[2];\
RANKA=0;for(k1=1,RANK,if(DSUBLpr[k1]>1,RANKA=RANKA+1));\
if(RANK>19||RANK+RANKA>22, \
DISCGRS=vector(RANKA,X,DSUBLpr[X]);\
if(RANK+RANKA<22,print("t= t,"DISCGRS= DISCGRS),\
pp=factor(DISCGRS[RANKA]);\
u1=2;if(pp[1,1]>2,u1=1);if(pp[1,1]==2&&pp[1,2]>1,u1=1);\
if(pp[1,1]==2&&pp[1,2]==1,delta=0);\
for(k=1,RANKA,if(type(rSUBLpr[k,k]/4)!="t_INT delta=1));\
if(delta==0,u1=1);gamm=0;\
BBB=matrix(RANK-RANKA,RANK-RANKA,\
X,Y,rSUBLpr[X+RANKA,Y+RANKA]);\
dBBB=matdet(BBB);\
for(t1=u1,matsize(pp)[1],if(pp[t1,1]==2&&\
Mod(dBBB,8)!=Mod(1,8)&&Mod(dBBB,8)!=Mod(-1,8),gamm=1);\
if(pp[t1,1]!=2&&kronecker((-1)^(RANK+1)*dBBB,pp[t1,1])!=1,gamm=1));\
if(gamm==0,print("t= t");print("DISCGRS= DISCGRS)))));

```

Список литературы

1. V. V. Nikulin, *Kählerian K3 surfaces and Niemeier lattices*, [arXiv:1109.2879](#).
2. В. В. Никулин, “Кэлеровы К3-поверхности и решетки Нимейера. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 109–154; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Kählerian K3 surfaces and Niemeier lattices. I”, *Izv. Math.*, **77**:5 (2013), 954–997.
3. V. V. Nikulin, “Kählerian K3 surfaces and Niemeier lattices. II”, *Adv. Stud. Pure Math.*, Math. Soc. Japan, Tokyo (to appear).
4. В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Integral symmetric bilinear forms and some of their geometric applications”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 103–167.
5. A. N. Todorov, “Applications of the Kähler–Einstein–Calabi–Yau metric to moduli of K3 surfaces”, *Invent. Math.*, **61**:3 (1980), 251–265.
6. Yum-Tong Siu, “A simple proof of the surjectivity of the period map of K3 surfaces”, *Manuscripta Math.*, **35**:3 (1981), 311–321.
7. D. Burns, M. Rapoport, “On the Torelli problem for Kählerian K-3 surfaces”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **8**:2 (1975), 235–274.

8. Вик. С. Куликов, “Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: Vic. S. Kulikov, “Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
9. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа $K3$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 530–572; англ. пер.: I. I. Pjatetskii-Šapiro, I. R. Šafarevič, “A Torelli theorem for algebraic surfaces of type $K3$ ”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 547–588.
10. V. V. Nikulin, *Degenerations of Kählerian $K3$ surfaces with finite symplectic automorphism groups*, arXiv: 1403.6061.
11. В. В. Никулин, “О куммеровых поверхностях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:2 (1975), 278–293; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On Kummer surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:2 (1975), 261–275.
12. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа $K3$ ”, Тр. ММО, **38**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 75–137; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Finite automorphism groups of Kähler $K3$ surfaces”, Trans. Moscow Math. Soc., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 71–135.
13. E. Brieskorn, “Rationale Singularitäten komplexer Flächen”, *Invent. Math.*, **4**:5 (1967/1968), 336–358.
14. Г. Грауэрт, “О модификациях и исключительных аналитических множествах”, *Комплексные пространства*, Сб. пер., Мир, М., 1965, 45–104; пер. с нем.: H. Grauert, “Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen”, *Math. Ann.*, **146**:4 (1962), 331–368.
15. D. Mumford, “The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **9** (1961), 5–22.
16. H.-V. Niemeier, “Definite quadratische Formen der Dimension 24 und Diskriminante 1”, *J. Number Theory*, **5**:2 (1973), 142–178.
17. Sh. Mukai, “Finite groups of automorphisms of $K3$ surfaces and the Mathieu group”, *Invent. Math.*, **94**:1 (1988), 183–221.
18. Gang Xiao, “Galois covers between $K3$ surfaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **46**:1 (1996), 73–88.
19. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a system for computational discrete algebra, Version 4.6.5, 2013, <http://www.gap-system.org>.
20. K. Hashimoto, “Finite symplectic actions on the $K3$ lattice”, *Nagoya Math. J.*, **206** (2012), 99–153; arXiv: 1012.2682.
21. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972, 334 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*, Actualités Sci. Indust., **1337**, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.
22. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1990, 792 с.; пер. с англ.: J. H. Conway, N. J. A. Sloane, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1988, xxviii+663 pp.
23. V. V. Nikulin, *Degenerations of Kählerian $K3$ surfaces with finite symplectic automorphism groups*, II, 2015, arXiv: 1504.00326.

Вячеслав Валентинович Никулин

(VIACHESLAV V. NIKULIN)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

E-mail: nikulin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

26.01.2015

13.02.2015