Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Почти периодические решения дискретных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 2, 125–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8279>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 11:25:35

УДК 517.925.52

В. Е. Слюсарчук

Почти периодические решения дискретных уравнений

Рассмотрены нелинейные почти периодические дискретные уравнения в метрическом пространстве, имеющие решения с предкомпактными множествами значений. С помощью вспомогательного функционала δ , определенного на множестве таких решений, получены такие условия почти периодичности этих решений, которые, в отличие от классических работ Фавара и Америо, не используют H -классы исследуемых уравнений. Аналогичные исследования проведены для линейных почти периодических и нелинейных устойчивых по Пуассону дискретных уравнений.

Библиография: 28 наименований.

Ключевые слова: почти периодические решения, дискретные уравнения в метрическом пространстве.

DOI: 10.4213/im8279

§ 1. Основные обозначения и объект исследований

Пусть M – метрическое пространство с метрикой ρ_M , G – произвольная счетная аддитивная группа, $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел и $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Фиксируем произвольный элемент $a \in M$. Обозначим через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(G, M)$ метрическое пространство всех отображений $\mathbf{x}: G \rightarrow M$, для каждого из которых

$$\sup_{g \in G} \rho_M(\mathbf{x}(g), a) < \infty,$$

с метрикой

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{g \in G} \rho_M(\mathbf{x}_1(g), \mathbf{x}_2(g)).$$

В пространстве $\mathfrak{M}$ определим оператор сдвига $\mathbf{S}_h$, $h \in G$, с помощью формулы

$$(\mathbf{S}_h \mathbf{x})(g) = \mathbf{x}(g + h), \quad g \in G.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ называется *почти периодическим* (по Бохнеру) (см. [1]–[3]), если замыкание множества $\{\mathbf{S}_h \mathbf{y}: h \in G\}$ в пространстве $\mathfrak{M}$ является компактным подмножеством этого пространства.

Множество $\mathfrak{B}$ почти периодических элементов пространства $\mathfrak{M}$ есть подпространство этого пространства с метрикой $\rho_{\mathfrak{M}}$.

Пусть $B[\mathbf{a}, r]$ – замкнутый шар в $\mathfrak{M}$ с центром в точке $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ и радиусом r , т. е. множество $\{\mathbf{x} \in \mathfrak{M}: \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \leq r\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $\mathbf{H}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *почти периодическим*, если для каждого элемента $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$, числа $r \in (0, +\infty)$ и последовательности

$(h_k)_{k \geq 1}$ элементов группы G существует такая подпоследовательность $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, что

$$\lim_{\substack{l_1 \rightarrow \infty \\ l_2 \rightarrow \infty}} \sup_{\mathbf{x} \in B[\mathbf{a}, r]} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{h_{l_1}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_1}} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{h_{l_2}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_2}} \mathbf{x}) = 0.$$

Это определение в случае банахова пространства $\mathfrak{M}$ (когда, например, метрическое пространство M является банаховым пространством) и линейного почти периодического оператора $\mathbf{H}$ равносильно определению, которое использовалось Э. Мухамадиевым при исследовании обратимости линейных функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций [4], [5].

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех непустых компактных подмножеств $K \subset M$ и $R(\mathbf{x})$ – множество значений элемента $\mathbf{x}$, т. е. множество $\{\mathbf{x}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Для компактного множества $K \subset \mathcal{K}$ обозначим через $\mathfrak{D}_K$ множество всех элементов $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, для каждого из которых $R(\mathbf{x}) \subset K$.

В дальнейшем мы будем использовать следующее определение почти периодического оператора.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *почти периодическим*, если для каждого множества $K \in \mathcal{K}$ и последовательности $(h_k)_{k \geq 1}$ элементов группы G существует такая подпоследовательность $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, что

$$\lim_{\substack{l_1 \rightarrow \infty \\ l_2 \rightarrow \infty}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{h_{l_1}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_1}} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{h_{l_2}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_2}} \mathbf{x}) = 0.$$

Заметим, что почти периодический в смысле определения 3 оператор $\mathbf{H}$ может не быть почти периодическим в смысле определения 2 (соответствующий пример приведен в § 2). Однако почти периодический в смысле определения 2 оператор $\mathbf{H}$ является почти периодическим и в смысле определения 3.

Рассмотрим ограниченный и почти периодический в смысле определения 3 оператор $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ (напомним, что ограниченный оператор отображает ограниченное множество в ограниченное множество). Оператору $\mathbf{F}$ поставим в соответствие уравнение

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \quad (1)$$

где $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$.

Цель статьи – нахождение условий, при выполнении которых ограниченные решения уравнения (1) являются почти периодическими. При исследовании уравнения (1) будем использовать один функционал, определенный на множестве решений этого уравнения с предкомпактными множествами значений.

§ 2. Пример почти периодического оператора

Пусть $(y_k)_{k \geq 1}$ – ограниченная последовательность элементов метрического пространства M , для которых выполняется соотношение

$$\rho_M(y_i, y_j) \geq \mu$$

для всех $i, j \in \mathbb{N}$ ($i \neq j$) и некоторого положительного числа μ . Множество пространств с таким свойством непусто. Примером такого пространства является каждое бесконечномерное банахово пространство, если метрику ρ определить с помощью нормы равенством

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

(см. [6, гл. IV, § 6]), или метрическое пространство M с метрикой

$$\rho_M(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases}$$

и бесконечным числом элементов.

Представим группу G в виде

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_k, \dots\},$$

что возможно, поскольку группа G счетная и, следовательно, ее элементы можно пронумеровать.

Определим элемент $\mathbf{y} = \mathbf{y}(g)$ пространства $\mathfrak{M}$ с помощью равенств

$$\mathbf{y}(g_k) = y_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что

$$\rho_M(\mathbf{y}(g), \mathbf{y}(\tilde{g})) \geq \mu$$

для всех не совпадающих между собой элементов $g, \tilde{g} \in G$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ всех элементов $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, замыкания множеств значений которых компактны в M .

Определим оператор $\Upsilon: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ с помощью равенства

$$\Upsilon \mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x}, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathfrak{S}, \\ \mathbf{y}, & \text{если } \mathbf{x} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{S}_h \Upsilon \mathbf{S}_{-h} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$ и $h \in G$. Поэтому для каждого компактного множества $K \subset M$ и последовательности $(h_k)_{k \geq 1}$ элементов группы G

$$\lim_{\substack{k \rightarrow \infty, \\ l \rightarrow \infty}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{h_k} \Upsilon \mathbf{S}_{-h_k} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{h_l} \Upsilon \mathbf{S}_{-h_l} \mathbf{x}) = 0$$

и, следовательно, оператор $\Upsilon: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ является почти периодическим в смысле определения 3. Однако этот оператор не является почти периодическим в смысле определения 2. Действительно, фиксируем произвольный элемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}$. Очевидно, что

$$\mathbf{S}_h \Upsilon \mathbf{S}_{-h} \mathbf{z} = \mathbf{S}_h \mathbf{y} \tag{2}$$

для каждого $h \in G$. Поэтому

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{h_1} \mathbf{y}, \mathbf{S}_{h_2} \mathbf{y}) = \sup_{g \in G} \rho_M(\mathbf{y}(g + h_1), \mathbf{y}(g + h_2)) \geq \rho_M(\mathbf{y}(h_1), \mathbf{y}(h_2)) \geq \mu,$$

если $h_1 \neq h_2$.

Следовательно, если $h_1 \neq h_2$ и $\{\mathbf{S}_h \mathbf{z}: h \in G\} \subset B[\mathbf{b}, r]$ (r – некоторое положительное число), то

$$\sup_{\mathbf{x} \in B[\mathbf{b}, r]} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{h_1} \Upsilon \mathbf{S}_{-h_1} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{h_2} \Upsilon \mathbf{S}_{-h_2} \mathbf{x}) \geq \mu > 0.$$

Отсюда, из соотношения (2) и определения 2 вытекает, что оператор Υ не является почти периодическим в смысле определения 2.

§ 3. Функционал δ

Фиксируем произвольное множество $K \in \mathcal{K}$. Обозначим через $N(\mathbf{F}, K)$ множество всех решений уравнения (1), для каждого из которых

$$R(\mathbf{x}) \subset K.$$

Будем считать, что

$$N(\mathbf{F}, K) \neq \emptyset.$$

Рассмотрим элемент $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$, для которого

$$\sup\{\rho_M(x, y) : x, y \in \overline{R(\mathbf{x}^*)}\} \neq 0,$$

и положительное число

$$r(\mathbf{x}^*, K) = \sup\{\rho_M(x, y) : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)}, y \in K\}.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Обозначим через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множество всех элементов $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для каждого из которых

$$R(\mathbf{y}) \subset K, \quad \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) \geq \varepsilon.$$

Рассмотрим функционал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{y}, \mathbf{F}\mathbf{x}^*). \quad (3)$$

Этот функционал будем использовать для исследования уравнения (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если в качестве метрического пространства M взять банахово пространство E с нормой $\|\cdot\|_E$, то метрическое пространство $\mathfrak{M}$ будет банаховым пространством с нормой

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{g \in G} \|\mathbf{x}(g)\|_E, \quad (4)$$

и поэтому (3) на основании равенства $\mathbf{F}\mathbf{x}^* = \mathbf{h}$ примет вид

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \|\mathbf{F}\mathbf{y} - \mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}}. \quad (5)$$

§ 4. Основной результат

С помощью функционала δ получим условия существования почти периодических решений уравнения (1), что, в отличие от известной теоремы Америко о почти периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений (см. [7], [8]), не используют $\mathcal{H}$ -класс уравнения (1) и разделенность решений уравнений $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения. Существенным для этих условий является то, что рассматриваемое далее утверждение о почти периодических решениях уравнения (1) имеет компактные по объему формулировку и доказательство.

Пусть Λ – ограниченное подмножество пространства E . Определим диаметр $\text{diam } \Lambda$ множества Λ равенством

$$\text{diam } \Lambda = \sup\{\rho_M(x, y) : x, y \in \Lambda\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если для решения $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1)

$$\text{diam } R(\mathbf{x}^*) \neq 0$$

и выполняется соотношение

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0 \quad (6)$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то это решение почти периодически.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Каждое решение $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1), для которого $\text{diam } R(\mathbf{x}^*) = 0$, является постоянным и, следовательно, почти периодическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что решение $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1) не является элементом пространства $\mathfrak{B}$. Тогда существует последовательность $(\mathbf{S}_{m_p} \mathbf{x}^*)_{p \geq 1}$, для которой каждая подпоследовательность $(\mathbf{S}_{k_p} \mathbf{x}^*)_{p \geq 1}$ будет расходящейся (здесь $(k_p)_{p \geq 1}$ – подпоследовательность последовательности $(m_p)_{p \geq 1}$). Следовательно, для некоторых последовательностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ натуральных чисел и числа $\gamma \in (0, \text{diam } R(\mathbf{x}^*))$

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{k_{p_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \geq \gamma, \quad r \geq 1.$$

Поэтому

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \geq \gamma, \quad r \geq 1,$$

и, следовательно,

$$\mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^* \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \gamma), \quad r \geq 1.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что на основании включения $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{h}, \mathbf{S}_{-k_{q_r}} \mathbf{h}) = 0. \quad (7)$$

Заметим, что $\text{diam } R(\mathbf{x}^*) \leq r(\mathbf{x}^*, K)$. Не уменьшая общности, можно считать, что последовательность $(\mathbf{S}_{k_p} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_p} \mathbf{x})_{p \geq 1}$ сходится равномерно на $\mathfrak{D}_K$. Поэтому

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{k_p} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_p} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{k_q} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_q} \mathbf{x}) = 0. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \gamma) = 0. \quad (9)$$

Очевидно, что в силу (3) и (8)

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \gamma) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \gamma)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F} \mathbf{y}, \mathbf{F} \mathbf{x}^*) \leq \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F} \mathbf{x}^*), \quad r \geq 1. \quad (10)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F} \mathbf{x}^*) \\ &= \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} (\mathbf{S}_{k_{p_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-k_{q_r}} (\mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \\ &\leq \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} (\mathbf{S}_{k_{p_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-k_{p_r}} (\mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \\ &\quad + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} (\mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-k_{q_r}} (\mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \\ &= \rho_{\mathfrak{M}}((\mathbf{S}_{k_{p_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, (\mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}}) \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*) \\ &\quad + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{h}, \mathbf{S}_{-k_{q_r}} \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{h}) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{k_{p_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{x}, \mathbf{S}_{k_{q_r}} \mathbf{F} \mathbf{S}_{-k_{q_r}} \mathbf{x}) + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-k_{p_r}} \mathbf{h}, \mathbf{S}_{-k_{q_r}} \mathbf{h}), \quad r \geq 1, \end{aligned}$$

то на основании (7), (8) и (10) выполняется равенство (9), противоречащее (6). Следовательно, предположение, что решение $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1) не является элементом пространства $\mathfrak{B}$, ложное.

Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 1 применима к уравнению (1) и в случае, когда почти периодический в смысле определения 3 оператор $\mathbf{F}$ может не быть почти периодическим в смысле определения 2. В простейшем случае в качестве такого оператора можно взять, например, оператор Υ , рассмотренный в § 2. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\Upsilon \mathbf{x} = \mathbf{h}. \quad (11)$$

Очевидно, что для каждого $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$ (тогда $\mathbf{h} \in \mathfrak{S}$) это уравнение имеет единственное решение $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{B}$, совпадающее с $\mathbf{h}$, и, очевидно, что для $\mathbf{x}^*$ выполняется соотношение (6) при $K = \overline{R(\mathbf{h})}$.

§ 5. Пример применения теоремы 1

В этом параграфе будем считать, что метрическое пространство M совпадает с банаховым пространством E с нормой $\|\cdot\|_E$. Тогда пространство $\mathfrak{M}$ является банаховым пространством с нормой, которая определяется равенством (4).

Рассмотрим почти периодический в смысле определения 3 линейный непрерывный оператор $\mathbf{A}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ и соответствующее линейное уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \quad (12)$$

где $\mathbf{h}$ — почти периодический элемент пространства $\mathfrak{M}$.

Уравнение (12) — частный случай уравнения (1), поэтому к нему применима теорема 1.

Согласно равенству (5) и теореме 1 имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если для решения $\mathbf{x}^*$ уравнения (12)

$$R(\mathbf{x}^*) \subset K, \quad \text{diam } R(\mathbf{x}^*) \neq 0$$

и выполняется соотношение

$$\inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \|\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}} > 0 \quad (13)$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то это решение почти периодически.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В теореме 2 оператор $\mathbf{A}$ может не иметь непрерывного обратного.

ПРИМЕР 1. Пусть $M = l_\infty$, где l_∞ — банахово пространство ограниченных числовых последовательностей $x = \langle x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \rangle$ с нормой $\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$.

Оператор $\mathbf{A}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ в уравнении (12) определим с помощью соотношения

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(g) = \mathbf{y}(g), \quad g \in G,$$

где

$$\mathbf{x}(g) = \langle x_1(g), x_2(g), \dots, x_n(g), \dots \rangle, \quad \mathbf{y}(g) = \left\langle x_1(g), \frac{x_2(g)}{2}, \dots, \frac{x_n(g)}{n}, \dots \right\rangle.$$

Очевидно, что этот оператор является почти периодическим в смысле определения 3 и не имеет непрерывного обратного.

Фиксируем произвольное число $m \in \mathbb{N}$ и компактное множество K , элементами которого являются все последовательности $z = \langle z_1, z_2, \dots, z_m, 0, 0, 0, \dots \rangle$, для каждой из которых $|z_k| \leq 1$, $k = \overline{1, m}$.

Очевидно, что для каждого почти периодического элемента $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}$ со значениями в $m^{-1}K$ уравнение (12) имеет решение $\mathbf{x}^* \in \mathfrak{M}$ со значениями в K и для него выполняется соотношение (13).

§ 6. Применение функционала δ к уравнению (1) в случае устойчивого по Пуассону оператора $\mathbf{F}$

Здесь мы исследуем уравнение (1), когда оператор $\mathbf{F}$ и элемент $\mathbf{h}$ устойчивы по Пуассону.

Сначала приведем определения, которые будут необходимы в дальнейшем.

Обозначим через Ω множество всех последовательностей $(\omega_n)_{n \geq 1}$ элементов группы G , для каждой из которых $\omega_{n_1} \neq \omega_{n_2}$, если $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ и $n_1 \neq n_2$. Очевидно, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\omega_n| = +\infty$ в случае $G = \mathbb{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Пуассону*, если существует последовательность $(\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{y}) = 0. \quad (14)$$

Очевидно, что каждый почти периодический элемент $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$ устойчив по Пуассону.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор $\mathbf{H}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ называется *устойчивым по Пуассону*, если для каждого множества $K \in \mathcal{K}$ существует такая зависящая от этого множества последовательность $(\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{H}\mathbf{x}, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{H}\mathbf{S}_{-\omega_n} \mathbf{x}) = 0. \quad (15)$$

Очевидно, что каждый почти периодический в смысле определения 3 оператор $\mathbf{H}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ устойчив по Пуассону.

Следующий пример, который будет использоваться в дальнейшем, показывает, что множество устойчивых по Пуассону операторов, не являющихся почти периодическими, не пусто.

ПРИМЕР 2. Пусть E – банахово пространство и $\mathbb{Q}$ – аддитивная группа рациональных чисел. Определим оператор $\mathbf{F}: \mathfrak{M}(\mathbb{Q}, E) \rightarrow \mathfrak{M}(\mathbb{Q}, E)$ с помощью соотношения

$$(\mathbf{F}x)(t) = x([t]), \quad t \in \mathbb{Q},$$

где $x = x(t)$ – произвольный элемент пространства $\mathfrak{M}(\mathbb{Q}, E)$ и $[t]$ – целая часть числа t . Очевидно, что для каждого $h \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}_h x)(t) &= x(t+h), & t \in \mathbb{Q}, \\ (\mathbf{F}\mathbf{S}_h x)(t) &= x([t]+h), & t \in \mathbb{Q}, \\ (\mathbf{S}_{-h}\mathbf{F}\mathbf{S}_h x)(t) &= x([t-h]+h), & t \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Также очевидно, что

$$\sup_{\|x\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Q}, E)}=1} \|\mathbf{S}_{-h}\mathbf{F}\mathbf{S}_h x - \mathbf{F}x\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Q}, E)} = \begin{cases} 2, & \text{если } h \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Отсюда и из определения 5 следует, что оператор $\mathbf{F}$ устойчив по Пуассону и не является почти периодическим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Элементы $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathfrak{M}$ называются *совместно устойчивыми по Пуассону*, если существует последовательность $(\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}_1, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{y}_1) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}_2, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{y}_2) = 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Для фиксированного компактного множества $K \in \mathcal{K}$ оператор $\mathbf{H}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ и элемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ называются *K -совместно устойчивыми по Пуассону*, если существует зависящая от K последовательность $(\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$, для которой одновременно выполняются соотношения (14) и (15).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и существует последовательность $(\omega_n)_{n \geq 1} \in \Omega$, для которой выполняются соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{h}, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{h}) = 0, \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{x}, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_n} \mathbf{x}) = 0, \quad (17)$$

т. е. оператор $\mathbf{F}$ и элемент $\mathbf{h}$ K -совместно устойчивы по Пуассону.

Если для решения $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1) выполняются соотношения

$$\text{diam } R(\mathbf{x}^*) \neq 0, \quad \delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0 \quad (18)$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то это решение устойчиво по Пуассону и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{x}^*) = 0. \quad (19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Каждое решение $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ уравнения (1), для которого $\text{diam } R(\mathbf{x}^*) = 0$, постоянно и, следовательно, устойчиво по Пуассону.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В теореме 3 элемент $\mathbf{h}$ и решение $\mathbf{x}^*$ уравнения (1) совместно устойчивы по Пуассону. Эти элементы и оператор $\mathbf{F}$ K -совместно устойчивы по Пуассону.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Предположим, что соотношение (19) не выполняется. Тогда

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{\omega_n} \mathbf{x}^*) > 0$$

и существуют число $\mu \in (0, r(\mathbf{x}^*, K)]$ и подпоследовательность $(\omega_{n_k})_{k \geq 1}$ последовательности $(\omega_n)_{n \geq 1}$, для которых

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{x}^*) \geq \mu, \quad k \geq 1,$$

и, следовательно,

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{x}^*) \geq \mu, \quad k \geq 1.$$

Отсюда вытекает, что

$$\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{x}^* \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \mu), \quad k \geq 1,$$

и поэтому на основании (3)

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \mu) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \mu)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{y}, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) \leq \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*), \quad k \geq 1. \quad (20)$$

Покажем, что

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \mu) = 0. \quad (21)$$

Поскольку для каждого $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) &= \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} (\mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}}) \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) \\ &\leq \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} (\mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}}) \mathbf{x}^*, \mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{x}^*) + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) \\ &= \rho_{\mathfrak{M}}((\mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}}) \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{h}, \mathbf{h}) \\ &= \rho_{\mathfrak{M}}((\mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}}) \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) + \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{h}, \mathbf{S}_{\omega_{n_k}} \mathbf{h}) \end{aligned}$$

(здесь использовано неравенство треугольника), то на основании (16) и (17)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{S}_{-\omega_{n_k}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) = 0.$$

Отсюда и из (20) вытекает (21), что противоречит (18).

Следовательно, предположение, что не выполняется соотношение (19), ложное.

Теорема 3 доказана.

Проиллюстрируем теорему 3 следующим примером.

ПРИМЕР 3. Используем оператор $\Upsilon: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ из § 2, когда $M = E$ (E – банахово пространство), и оператор $\Gamma: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ из примера 2. В этом случае метрическое пространство $\mathfrak{M}$ является банаховым пространством. Также используем оператор $\mathbf{f}: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$, для которого выполняются условия:

- 1) $\mathbf{S}_{-h} \mathbf{f} \mathbf{S}_h = \mathbf{f}$ для всех $h \in G$ (такой оператор называется *автономным*);
- 2) $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$;
- 3) $\|\mathbf{f}\mathbf{x}_1 - \mathbf{f}\mathbf{x}_2\|_{\mathfrak{M}} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\mathfrak{M}}$ для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{M}$;
- 4) $R(\mathbf{f}\mathbf{z}) \subset \frac{1}{2} R(\mathbf{z})$ для всех $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$.

Пусть $K \subset E$ – произвольное компактное множество.

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} - \Upsilon \Gamma \mathbf{f} \quad (23)$$

и $\mathbf{h}$ – элемент пространства $\mathfrak{M}$ (в случае $M = E$ и $G = \mathbb{Q}$), для которого $R(\mathbf{h}) \subset K$ и для некоторой последовательности целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_m, \dots$, удовлетворяющей условию $\lim_{m \rightarrow \infty} |n_m| = +\infty$, выполняется соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{h} - \mathbf{S}_{n_m} \mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}} = 0, \quad (24)$$

т. е. элемент $\mathbf{h}$ устойчив по Пуассону. В (23) $\mathbf{I}$ – единичный оператор.

Поскольку оператор Υ почти периодический в смысле определения 3, оператор $\mathbf{f}$ автономный, а оператор $\mathbf{\Gamma}$ устойчив по Пуассону, то согласно определению оператора Υ оператор $\mathbf{F}$ также устойчив по Пуассону и

$$\mathbf{S}_{-h}\mathbf{F}\mathbf{S}_h u = \mathbf{F}u$$

для всех $h \in \mathbb{Z}$ и $u \in \mathfrak{S}$. Отсюда и из соотношения (24) следует, что оператор $\mathbf{F}$ и элемент $\mathbf{h}$ не только K -совместно устойчивы по Пуассону, но и $(2 \operatorname{co} K)$ -совместно устойчивы по Пуассону, где $\operatorname{co} K$ – выпуклая оболочка множества K .

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\mathbf{y} = \mathbf{h} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{f}\mathbf{y}. \quad (25)$$

Поскольку

$$\|\mathbf{\Gamma}\mathbf{f}\mathbf{x}_1 - \mathbf{\Gamma}\mathbf{f}\mathbf{x}_2\|_{\mathfrak{M}} \leq \frac{1}{2}\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_{\mathfrak{M}}$$

для всех $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathfrak{M}$, то на основании принципа сжатых отображений [6] уравнение (25) имеет единственное решение $\mathbf{y}^* \in \mathfrak{M}$. Согласно определению оператора $\mathbf{\Gamma}$ и свойствам оператора $\mathbf{f}$

$$R(\mathbf{y}^*) = R(\mathbf{h} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{f}\mathbf{y}^*) \subset R(\mathbf{h}) + R(\mathbf{\Gamma}\mathbf{f}\mathbf{y}^*) \subset R(\mathbf{h}) + R(\mathbf{f}\mathbf{y}^*) \subset R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{y}^*).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} R(\mathbf{y}^*) &\subset R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{4}R(\mathbf{y}^*), \\ R(\mathbf{y}^*) &\subset R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{4}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{8}R(\mathbf{y}^*), \\ R(\mathbf{y}^*) &\subset R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{4}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{8}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{16}R(\mathbf{y}^*), \\ &\dots\dots\dots \\ R(\mathbf{y}^*) &\subset R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{4}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{8}R(\mathbf{h}) + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2^n}R(\mathbf{y}^*), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Поскольку

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{diam} \frac{1}{2^n}R(\mathbf{y}^*) = 0$$

и $R(\mathbf{h}) \subset K$, то

$$R(\mathbf{y}^*) \subset \overline{R(\mathbf{h}) + \frac{1}{2}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{4}R(\mathbf{h}) + \frac{1}{8}R(\mathbf{h}) + \dots} \subset 2 \operatorname{co} K.$$

В силу компактности множества $2 \operatorname{co} K$ и равенств

$$\mathbf{F}\mathbf{z} = (\mathbf{I} - \mathbf{\Gamma}\mathbf{f})\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} \in \mathfrak{S}, \quad (26)$$

элемент $\mathbf{y}^*$ является решением не только уравнения (25), но и уравнения (22).

На основании (26) для каждого элемента $\mathbf{y} \in \mathfrak{S}$, для которого

$$\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \varepsilon > 0,$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\mathbf{y}^* - \mathbf{F}\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} &= \|(\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{f})\mathbf{y}^* - (\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{f})\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} - \|\mathbf{G}\mathbf{f}\mathbf{y}^* - \mathbf{G}\mathbf{f}\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \\ &\geq \|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} - \frac{1}{2}\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} = \frac{1}{2}\|\mathbf{y}^* - \mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения функционала δ следует, что

$$\delta(\mathbf{y}^*, 2 \cos K, \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

для каждого $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{y}^*, 2 \cos K))$.

Следовательно, согласно теореме 3 решение $\mathbf{y}^*$ уравнения (22) устойчиво по Пуассону и для него выполняется соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}^* - \mathbf{S}_{n_m} \mathbf{y}^*\|_{\mathfrak{M}} = 0,$$

аналогичное (19).

§ 7. Заключительные замечания

Функционалы, аналогичные функционалу δ , введены автором в [9]–[13] для исследования нелинейных почти периодических уравнений

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ f(t, x(t)) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ G(t, x(t), x(t - \Delta_1), \dots, x(t - \Delta_m)) &= 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Здесь $f: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ и $G: \mathbb{R} \times E^{m+1} \rightarrow E$ – непрерывные операторы, E – банахово пространство и $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – произвольные действительные числа. Для этих уравнений получены условия почти периодичности ограниченных решений с предкомпактными множествами значений.

Аналогичный функционал для исследования нелинейных разностных, дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений

$$x(n+1) = g(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (28)$$

$$F\left(t, \sum_{l=0}^m A_l(t)x(t - \Delta_l), \sum_{l=0}^m B_l(t)\frac{dx(t - \tau_l)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (29)$$

использован автором в [14]–[16]. В этих уравнениях g и F – отображения, действующие из $\mathbb{Z} \times E$ и $\mathbb{R} \times E \times E$ соответственно в E и удовлетворяющие условию почти периодичности, $A_l(t)$ и $B_l(t)$ – непрерывные на $\mathbb{R}$ почти периодические функции со значениями в $L(E, E)$, $m \in \mathbb{N}$, а $\Delta_0, \dots, \Delta_m$ и $\tau_0, \dots, \tau_m$ –

произвольные действительные числа. Для уравнений (27)–(29) также получены условия почти периодичности ограниченных решений с предкомпактными множествами значений.

Заметим, что результаты настоящей статьи, изложенные в § 1, 3 и 4, аналогичны соответствующим результатам статьи [16] об условиях почти периодичности решений дифференциально-разностного уравнения (29). В [16] функционал Δ , аналогичный функционалу δ , применяется не непосредственно к исследуемому дифференциально-разностному уравнению (29), а к вспомогательному функциональному уравнению, что усложняет исследование уравнения (29). Этого недостатка лишена данная статья. Также здесь уравнение (1) может не быть почти периодическим по Бохнеру, как уравнение (11).

Приведенные в данной статье условия существования почти периодических и устойчивых по Пуассону решений уравнения (1) являются новыми. В отличие от известных теорем Америо [7] и Фавара [17], в теореме 1 не используется $\mathcal{H}$ -класс уравнения (1). Также в этой теореме не используется условие разделимости решений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1) и банахово пространство E может быть бесконечномерным.

Исследованию решений почти периодических уравнений посвящено много публикаций. Выделим лишь часть из них. Для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Фаваром в работе [17], а для нелинейных дифференциальных уравнений – Америо в работе [7]. Результаты Фавара были значительно улучшены Э. Мухамадиевым [4], [5]. Обобщениям теорем Мухамадиева посвящены работы автора [18]–[20]. Важные результаты в этом направлении также принадлежат Б. М. Левитану [3], Америо [21] и В. В. Жикову [22]. Почти периодические операторы в пространствах последовательностей исследовались Г. Бруно, А. Панковым и Ю. Твердохлебом [23].

Проблеме экспоненциальной дихотомии решений систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами посвящены исследования Р. К. Романовского, Л. В. Бельгарда [24].

Необходимые и достаточные условия существования и единственности ограниченных и почти периодических решений нелинейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} + f(x(t)) = h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, а $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная и ограниченная функция, получены автором в [25].

Устойчивые по Пуассону траектории динамических систем исследовались В. А. Щербаковым [26] и Д. Н. Чебаном [27], а функциональные операторы – автором [28]. Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений исследовались Д. Н. Чебаном [27].

Список литературы

1. S. Bochner, “Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I. Funktionen einer Variablen”, *Math. Ann.*, **96**:1 (1927), 119–147.
2. S. Bochner, “Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II. Funktionen mehrerer Variablen”, *Math. Ann.*, **96**:1 (1927), 383–409.
3. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953, 396 с.

4. Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274; англ. пер.: Ё. Mukhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11**:3 (1972), 169–172.
5. Э. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460; англ. пер.: Ё. Mukhamadiev, “Investigations in the theory of bounded and periodic solutions of differential equations”, *Math. Notes*, **30**:3 (1981), 713–722.
6. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 2-е изд., Наука, М., 1968, 496 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v.I, II, Graylock Press, Albany, N.Y., 1957, 1961, ix+129, ix+128 pp.
7. L. Amerio, “Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **39** (1955), 97–119.
8. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.
9. В. Ю. Слюсарчук, “Умови майже періодичності обмежених розв’язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом”, *Нелінійні коливання*, **16**:1 (2013), 118–124; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions of almost periodicity for bounded solutions of nonlinear difference equations with continuous argument”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **197**:1 (2014), 122–128.
10. В. Ю. Слюсарчук, “Умови існування майже періодичних розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі”, *Укр. матем. журн.*, **65**:2 (2013), 307–312; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear differential equations in Banach spaces”, *Ukrainian Math. J.*, **65**:2 (2013), 341–347.
11. В. Ю. Слюсарчук, “Критерій існування майже періодичних розв’язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$ -класи цих рівнянь”, *Буковинський матем. журн.*, **1**:1-2 (2013), 136–138.
12. В. Ю. Слюсарчук, “Дослідження майже періодичних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$ -класи цих рівнянь”, *Буковинський матем. журн.*, **1**:3-4 (2013), 137–143.
13. В. Е. Слюсарчук, “Условия существования почти периодических решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **97**:2 (2015), 277–285; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Conditions for the existence of almost-periodic solutions of nonlinear difference equations in Banach space”, *Math. Notes*, **97**:2 (2015), 268–274.
14. В. Ю. Слюсарчук, “Умови існування майже періодичних розв’язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом”, *Нелінійні коливання*, **16**:3 (2013), 416–425; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions for the existence of almost periodic solutions of nonlinear difference equations with discrete argument”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **201**:3 (2014), 391–399.
15. В. Ю. Слюсарчук, “Умови майже періодичності обмежених розв’язків не розв’язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь”, *Укр. матем. журн.*, **66**:3 (2014), 384–393; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Conditions for almost periodicity of bounded solutions of nonlinear differential equations unsolved with respect to the derivative”, *Ukrainian Math. J.*, **66**:3 (2014), 432–442.
16. В. Е. Слюсарчук, “Условия почти периодичности ограниченных решений нелинейных дифференциально-разностных уравнений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:6 (2014), 179–192; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Conditions for almost periodicity of bounded solutions of non-linear differential-difference equations”, *Izv. Math.*, **78**:6 (2014), 1232–1243.

17. J. Favard, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques", *Acta Math.*, **51**:1 (1927), 31–81.
18. В. Е. Слюсарчук, "Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов", *Матем. сб.*, **116(158)**:4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, "Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators", *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.
19. В. Е. Слюсарчук, "Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов", *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, "Invertibility of nonautonomous functional-differential operators", *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.
20. В. Е. Слюсарчук, "Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов", *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, "Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators", *Math. Notes*, **42**:2 (1987), 648–651.
21. L. Amerio, "Sulle equazioni differenziali quasi-periodiche astratte", *Ricerche Mat.*, **9** (1960), 255–274.
22. В. В. Жиков, "Доказательство теоремы Фавара о существовании почти периодического решения в случае произвольного банахова пространства", *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 121–126; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Proof of the Favard theorem on the existence of almost-periodic solution for an arbitrary Banach space", *Math. Notes*, **23**:1 (1978), 66–69.
23. G. Bruno, A. Pankov, Y. Tverdokhlebo, "On almost-periodic operators in the spaces of sequences", *Acta Appl. Math.*, **65**:1-3 (2001), 153–167.
24. Р. К. Романовский, Л. В. Бельгарт, "Об экспоненциальной дихотомии решений систем линейных разностных уравнений с почти периодическими коэффициентами", *Изв. вузов. Матем.*, **54**:10 (2010), 51–59; англ. пер.: R. K. Romanovskii, L. V. Belgart, "The exponential dichotomy of solutions to systems of linear difference equations with almost periodic coefficients", *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **54**:10 (2010), 44–51.
25. V. E. Slyusarchuk, "Necessary and sufficient conditions for existence and uniqueness of bounded and almost-periodic solutions of nonlinear differential equations", *Acta Appl. Math.*, **65**:1-3 (2001), 333–341.
26. Б. А. Щербаков, *Устойчивость по Пуассону движений динамических систем и решений дифференциальных уравнений*, Штиинца, Кишинев, 1985, 148 с.
27. Д. Н. Чебан, *Асимптотически почти периодические решения дифференциальных уравнений*, Изд. центр Молд. гос. ун-та, Кишинев, 2002, 223 с.; англ. пер.: D. N. Cheban, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2009, x+186 pp.
28. В. Е. Слюсарчук, "Обратимость устойчивых по Пуассону функциональных операторов", *Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики*, Изд-во ИМ АН УССР, Киев, 1986, 173–174.

ВАСИЛИЙ ЕФИМОВИЧ СЛЮСАРЧУК
(VASILII E. SLYUSARCHUK)

Национальный университет водного хозяйства и
природопользования, г. Ровно, Украина
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

Поступило в редакцию
18.07.2014