Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Лебак, А. Шмидт, Свойство $K(\pi, 1)$ для неособых отмеченных кривых над конечными полями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 193–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8282>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 17:11:12

УДК 511.236+511.238.2+512.737

Ф. Лебак, А. Шмидт

Свойство $K(\pi, 1)$ для неособых отмеченных кривых над конечными полями

В случае неособых отмеченных кривых (X, T) над конечными полями характеристики p изучается свойство $K(\pi, 1)$ для простого p . Доказано, что (X, T) обладает свойством $K(\pi, 1)$, если X – аффинная кривая. Если X – собственная кривая, приведены примеры, показывающие, что свойство может быть как выполнено, так и не выполнено. Рассмотрен случай неотмеченных собственных кривых над конечным полем характеристики, отличной от p .

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: когомологии Галуа, этальные когомологии, ограниченное ветвление.

DOI: 10.4213/im8282

§ 1. Введение

В работах [1]–[3] второй автор изучал свойство $K(\pi, 1)$ при простом p для арифметических кривых, поле функций которых имеет характеристику, отличную от p . Доказано, что группа Галуа максимального неразветвленного вне S и полностью разложимого в T про- p -расширения глобального поля характеристики, отличной от p , часто имеет когомологическую размерность не более двух. В настоящей статье мы рассмотрим случай гладкой кривой над конечным полем характеристики p . Мы доказываем, что (X, T) обладает свойством $K(\pi, 1)$, если X – аффинная кривая, и приводим примеры, в которых X – собственная кривая и свойство выполнено или не выполнено. Кроме того, рассматриваем случай неотмеченных собственных кривых над конечным полем характеристики, отличной от p . Этот случай не был рассмотрен в [3].

Авторы благодарны Е. Пирютко и А. Зыкину за улучшение русского текста предварительной версии данной статьи и рецензенту за полезные советы.

1.1. Отмеченный этальный situs и свойство $K(\pi, 1)$. Пусть X – одномерная нётерова регулярная схема, определенная над $\mathbb{F}_q$, $q = p^f$, и T – конечное множество замкнутых точек X . В работе [3] второй автор определил отмеченный этальный situs (X, T) кривой X в T , рассматривая конечные этальные морфизмы $Y \rightarrow X$, индуцирующие изоморфизмы на полях вычетов для всех замкнутых точек $y \in Y$ над $x \in T$.

Пусть M – пучок p -крючения. Полученные группы когомологий обозначаются $H^i(X, T, M)$, и они удовлетворяют обычным свойствам, которые мы ожидаем от групп этальных когомологий. Также доказано (см. [3] для более подробной информации), что эти конечные отмеченные этальные морфизмы обладают теорией Галуа, и (после выбора базовой геометрической точки $\bar{x} \notin T$) мы

обозначаем через $\pi_1(X, T)$ проконечную группу, классифицирующую этальные накрытия X , в которых точки T полностью распадаются. Обозначим через $\widetilde{(X, T)}(p)$ универсальное про- p -накрытие отмеченной кривой (X, T) . Проекция $\widetilde{(X, T)}(p) \rightarrow X$ является накрытием Галуа, группа Галуа которого – это максимальный про- p -фактор $\pi_1(X, T)(p)$ группы $\pi_1(X, T)$.

Пусть M – дискретный $\pi_1(X, T)(p)$ -модуль p -крючения. Рассмотрим спектральную последовательность Хохшильда–Серра

$$E_2^{ij} = H^i(\pi_1(X, T)(p), H^j(\widetilde{(X, T)}(p), T, M)) \implies H^{i+j}(X, T, M).$$

Граничные морфизмы дают гомоморфизмы

$$\phi_{i,M}: H^i(\pi_1(X, T)(p), M) \rightarrow H^i(X, T, M).$$

Мы говорим, что (X, T) имеет свойство $K(\pi, 1)$ для p , если $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для всех M и $i \geq 0$. Из следующей леммы получаем, что (X, T) имеет свойство $K(\pi, 1)$ для p , если $\phi_{i, \mathbb{F}_p}$ является изоморфизмом для $i \geq 2$.

ЛЕММА 1.1 [3, лемма 2.2]. $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для $i = 0, 1$ и мономорфизмом для $i = 2$. Кроме того, $\phi_{i,M}$ является изоморфизмом для всех $i \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{(Y, T')} H^i(Y, T', M) = 0 \quad \forall i \geq 1,$$

где прямой предел берется по всем конечным промежуточным накрытиям (Y, T') из $\widetilde{(X, T)}(p) \rightarrow (X, T)$.

1.2. Обозначения. Если не указано иное, мы используем следующие обозначения: p – простое число; $\mathbb{F}$ – конечное поле, $\overline{\mathbb{F}}$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{F}$, $\widetilde{\mathbb{F}}$ – его максимальное про- p -расширение, вложенное в $\overline{\mathbb{F}}$, и $G_{\mathbb{F}}$ – группа Галуа расширения $\overline{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$; X является гладкой проективной абсолютно неприводимой кривой, определенной над $\mathbb{F}$; $k = \mathbb{F}(X)$ – поле функций кривой X ; g_X – род кривой X ; $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$, $\widetilde{X} = X \times_{\mathbb{F}} \widetilde{\mathbb{F}}$; S, T – непересекающиеся множества (возможно, пустые), состоящие из замкнутых точек X .

Если x является замкнутой точкой X , то X_x обозначает гензелизацию кривой X в точке x и $T_x = \{x\}$, если $x \in T$, и $T_x = \emptyset$ в противном случае; k_S^T обозначает максимальное про- p -расширение поля k , неразветвленное вне S , в котором все точки из T полностью распадаются. Если множество пусто, мы не выписываем S (или T) в обозначениях.

Далее, $G_S^T(k) = \text{Gal}(k_S^T/k) = \pi_1(X - S, T)(p)$; $H^i(X - S, T)$ – группа этальных когомологий $H_{\text{et}}^i(X - S, T, \mathbb{F}_p)$ отмеченной кривой $(X - S, T)$.

Для про- p -группы G положим $H^i(G) = H^i(G, \mathbb{F}_p)$. Для абелевой группы A и целого m будем обозначать $A[m] = \ker(A \xrightarrow{m} A)$.

1.3. Новые результаты. Пусть X – гладкая проективная абсолютно неприводимая кривая, определенная над конечным полем $\mathbb{F}$, и $k = \mathbb{F}(X)$ – поле функций X . Пусть S и T – конечные непересекающиеся множества замкнутых точек X . Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что $p = \text{char}(\mathbb{F})$.*

(i) *Если $S \neq \emptyset$, то $(X - S, T)$ обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p и $\text{cd } G_S^T(k) = 1$.*

(ii) *Если $T = \emptyset$, то $(X - S)$ обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p и $\text{cd } G_S(k) \leq 2$.*

В остальных случаях мы имеем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что $p = \text{char}(\mathbb{F})$, $S = \emptyset$ и $T \neq \emptyset$.*

(i) *Если $\text{Pic}(X)[p] = 0$, то (X, T) имеет $K(\pi, 1)$ -свойство для p тогда и только тогда, когда $T = \{x\}$ состоит из одной точки и $p \nmid \deg x$. В этом случае $\pi_1(X, T)(p) = 1$.*

(ii) *Если $\text{Pic}(X)[p] \neq 0$ и*

$$\sum_{x \in T} \frac{\deg(x)}{(\#\mathbb{F})^{\deg(x)/2} - 1} > g_X - 1,$$

то группа $\pi_1(X, T)(p)$ конечна и (X, T) не имеет $K(\pi, 1)$ -свойства для p .

Наконец, рассмотрим случай неотмеченной собственной кривой над конечным полем характеристики, отличной от p , который не был рассмотрен в более ранних работах.

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что $p \neq \text{char}(\mathbb{F})$. Тогда X имеет $K(\pi, 1)$ -свойство для p , если и только если $\mu_p(\mathbb{F}) = 1$ или $\text{Pic}(X)[p] \neq 0$. В оставшемся случае $\mu_p \subset \mathbb{F}$ и $\text{Pic}(X)[p] = 0$ имеем*

$$\pi_1^{\text{et}}(X)(p) \cong \pi_1^{\text{et}}(\mathbb{F})(p) \cong \mathbb{Z}_p.$$

В частности, группа $H^i(\pi_1^{\text{et}}(X)(p))$ всегда конечна и тривиальна для $i > 3$.

§ 2. Вычисление групп этальных когомологий

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 (локальное вычисление). *Пусть K – неархимедово локальное (или гензелево) поле характеристики p . Пусть $Y = \text{Spec } \mathcal{O}_K$, $y \in Y$ – замкнутая точка, и пусть $T = \emptyset$ или $T = \{y\}$. Тогда локальные группы когомологий $H_y^i(Y, T)$ обращаются в нуль при $i \neq 2$ и*

$$H_y^2(Y, T) = \begin{cases} H_{/nr}^1(K), & \text{если } T = \emptyset, \\ H^1(K), & \text{если } T = \{y\}, \end{cases}$$

где $H_{/nr}^1 = H^1(K)/H_{nr}^1(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем последовательность вырезания

$$\cdots \rightarrow H_y^i(Y, T) \rightarrow H^i(Y, T) \rightarrow H^i(Y - \{y\}) \rightarrow H_y^{i+1}(Y, T) \rightarrow \cdots.$$

Поскольку Y – спектр гензелева кольца, $H^i(Y) \cong H^i(y) = H_{nr}^i(K)$, следовательно, $H^i(Y) = 0$ для $i \geq 2$. Поскольку схема Y нормальна, отображение $H^1(Y, T) \rightarrow H^1(Y - \{y\})$ инъективно, следовательно, $H_y^1(Y, T) = 0$. Кроме того, $H^i(Y - \{y\}) = H^i(K)$, и эта группа обращается в нуль при $i \geq 2$, потому что $\text{cd}_p K = 1$ (см. [4, следствие 6.1.3]). Отсюда следует, что $H_y^i(Y, T) \cong H^i(Y, T)$ для $i \geq 3$.

При $T = \emptyset$ получаем $H_y^i(Y) = 0$ для $i \geq 3$, и короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(Y) \rightarrow H^1(Y - \{y\}) \rightarrow H_y^2(Y) \rightarrow 0$$

дает результат для $H_y^2(Y)$.

Если $T = \{y\}$, то тождественное отображение на (Y, T) кофинально среди накрывающих семейств (Y, T) , следовательно, $H^i(Y, \{y\}) = 0$ для $i \geq 1$. Мы получаем $H_y^2(Y, \{y\}) \cong H^1(K)$ и $H_y^i(Y, \{y\}) = 0$ для $i \geq 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 (глобальное вычисление). Пусть X – гладкая проективная абсолютно неприводимая кривая, определенная над $\mathbb{F}$, и $k = \mathbb{F}(X)$ – поле функций X . Пусть S и T – конечные непересекающиеся множества замкнутых точек X . Тогда $H^i(X - S, T) = 0$ для $i \geq 3$ и $H^2(X - S, T) = 0$, если $S \neq \emptyset$. Более того, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(X - S, T) \rightarrow H^1(X - S) \rightarrow \bigoplus_{x \in T} H_{nr}^1(k_x) \rightarrow H^2(X - S, T) \rightarrow H^2(X - S) \rightarrow 0. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $T = \emptyset$ имеем $H^i(X - S) = 0$ для $i \geq 3$, и $H^2(X - S) = 0$, если $S \neq \emptyset$ согласно [5, пример 10, теорема 5.1, следствие 5.2]. Кроме того, очевидно, что последовательность точна.

Теперь предположим, что $T \neq \emptyset$. Рассмотрим последовательность вырезания для $(X - S, T)$ и $(X - (S \cup T))$:

$$\cdots \rightarrow \bigoplus_{x \in T} H_x^i((X - S)_x, T_x) \rightarrow H^i(X - S, T) \rightarrow H^i(X - (S \cup T)) \rightarrow \cdots.$$

Согласно предложению 2.1 имеем, что $H^i(X - S, T) \cong H^i(X - (S \cup T)) = 0$ для $i \geq 3$ и последовательность

$$0 \rightarrow H^1(X - S, T) \rightarrow H^1(X - (S \cup T)) \rightarrow \bigoplus_{x \in T} H^1(k_x) \rightarrow H^2(X - S, T) \rightarrow 0 \quad (2)$$

точна. Сравнивая (2) с последовательностью вырезания для $(X - S)$ и $(X - (S \cup T))$

$$0 \rightarrow H^1(X - S) \rightarrow H^1(X - (S \cup T)) \rightarrow \bigoplus_{x \in T} H_{nr}^1(k_x) \rightarrow H^2(X - S) \rightarrow 0,$$

получаем точную последовательность из предложения.

Если $S \neq \emptyset$, из теоремы о сильной аппроксимации следует, что отображение

$$H^1(X - (S \cup T)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in T} H^1(k_x)$$

сюръективно (см. [4, теорема 9.2.5]). Воспользовавшись (2), мы получаем, что $H^2(X - S, T) = 0$ в этом случае.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Если группа $G_S^T(k)$ конечна и нетривиальна, то $(X - S, T)$ не имеет $K(\pi, 1)$ -свойства для p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае имеем $\text{cd } G_S^T(k) = \infty$, но $H^i(X - S, T) = 0$ для $i \geq 3$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2 (характеристика Эйлера–Пуанкаре). *Имеем*

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X, T) = \#T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $S = \emptyset$, то все группы в точной последовательности (1) конечны, и мы имеем

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X, T) = \#T + \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X).$$

Напомним, что $H^1(\bar{X}) = \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)$ (каждое связное этальное накрытие $\bar{X}$ приходит заменой базы из изогении якобиана $\bar{X}$). Следовательно,

$$H^2(X) = H^1(\mathbb{F}, H^1(\bar{X})) = H^1(\mathbb{F}, \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)) = \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)_{G_{\mathbb{F}}}.$$

Кроме того, имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\mathbb{F}) \rightarrow H^1(X) \rightarrow \text{Hom}(\text{Pic}(\bar{X})[p], \mathbb{F}_p)^{G_{\mathbb{F}}} \rightarrow 0.$$

Таким образом, следующая лемма показывает, что

$$\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{F}_p} H^i(X) = 1 - \dim_{\mathbb{F}_p} H^1(\mathbb{F}) = 0.$$

ЛЕММА 2.1. *Имеет место равенство $\text{Pic}(\bar{X})[p]^{G_{\mathbb{F}}} = \text{Pic}(X)[p]$ и выполнено*

$$\dim_{\mathbb{F}_p} \text{Pic}(\bar{X})[p]_{G_{\mathbb{F}}} = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Pic}(X)[p].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует из спектральной последовательности Лере

$$E_2^{ij} = H^i(\mathbb{F}, H^j(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) \implies H^{i+j}(X, \mathbb{G}_m)$$

и обращения в нуль группы Брауэра конечного поля:

$$H^2(\mathbb{F}, H^0(\bar{X}, \mathbb{G}_m)) = H^2(\mathbb{F}, \bar{\mathbb{F}}^{\times}) = 0.$$

Второе равенство следует из точной последовательности конечномерных $\mathbb{F}_p$ -векторных пространств

$$0 \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})[p]^{G_{\mathbb{F}}} \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})[p] \xrightarrow{1-\text{Frob}} \text{Pic}(\bar{X})[p] \rightarrow \text{Pic}(\bar{X})[p]_{G_{\mathbb{F}}} \rightarrow 0.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1.1

Предположим сначала, что $S \neq \emptyset$. Из вычислений в § 2 нам известно, что $H^i(X - S, T) = 0$ при $i \geq 2$. По лемме 1.1 отмеченная кривая $(X - S, T)$ обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p и $\text{cd } G_S^T(k) \leq 1$. Однако $G_S^T(k)$ нетривиальна, что следует из точной последовательности

$$0 \rightarrow H^1(X - S, T) \rightarrow H^1(X - S) \rightarrow \bigoplus_{x \in T} H_{nr}^1(k_x) \rightarrow 0,$$

а также из того, что $\bigoplus_{x \in T} H_{nr}^1(k_x)$ имеет конечную $\mathbb{F}_p$ -размерность, в то время как группа $H^1(X - S)$ бесконечномерна.

Теперь предположим, что $S = \emptyset$ и $T = \emptyset$. Пусть $\tilde{\mathbb{F}}$ – максимальное p -расширение $\mathbb{F}$ в $\bar{\mathbb{F}}$. Имеем $H^2(X_{\tilde{\mathbb{F}}}) = H^2(X_{\tilde{\mathbb{F}}})^{\text{Gal}(\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})} = 0$. Поэтому $X_{\tilde{\mathbb{F}}}$ обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p и спектральная последовательность Хохшильда–Серра для $X_{\tilde{\mathbb{F}}}/X$ показывает, что то же самое верно для X . Это завершает доказательство теоремы 1.1.

§ 4. Доказательство теоремы 1.2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что $\text{Pic}(X)[p] = 0$ и $T \neq \emptyset$, и пусть p^r – максимальная степень p , делящая $\gcd(\deg x \mid x \in T)$. Тогда*

$$G^T(k) = \pi_1(X, T)(p) \cong \text{Gal}(\mathbb{F}'/\mathbb{F}),$$

где $\mathbb{F}'$ – единственное расширение $\mathbb{F}$ степени p^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mathbb{F}}$ – максимальное p -расширение $\mathbb{F}$ в $\bar{\mathbb{F}}$. Используя лемму 2.1, имеем

$$H^2(X) = H^1(\mathbb{F}, H^1(\bar{X})) \cong \text{Hom}(\text{Pic}(X)[p], \mathbb{F}_p) = 0.$$

Следствие 2.2 показывает, что группа $H^1(X)$ является одномерной. Поэтому $\pi_1(X)(p)$ является свободной группой ранга 1 и, следовательно, сюръекция

$$\pi_1(X)(p) \twoheadrightarrow \text{Gal}(\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$$

является изоморфизмом (см. [4, предложение 1.6.15]). Максимальное подрасширение $\mathbb{F}'/\mathbb{F}$ в $\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$, для которого все точки из T полностью распадаются при замене базы $X \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}' \rightarrow X$, и является именно тем расширением степени p^r поля $\mathbb{F}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Предположим, что $\text{Pic}(X)[p] = 0$ и $T \neq \emptyset$. Тогда (X, T) обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p , если и только если $T = \{x\}$ состоит из одной точки и $p \nmid \deg x$. В этом случае фундаментальная группа $\pi_1(X, T)(p)$ тривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению 4.1 группа $\pi_1(X, T)(p)$ является конечной циклической. Если $p \mid \gcd(\deg x \mid x \in T)$, то группа $\pi_1(X, T)(p)$ нетривиальна и (X, T) не обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p по следствию 2.1.

Предположим, что $p \nmid \gcd(\deg x \mid x \in T)$. Тогда $\pi_1(X, T)(p)$ – тривиальная группа, $H^1(X, T) = 0$ и (X, T) обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p , если и только если $H^2(X, T) = 0$. По следствию 2.2 это эквивалентно условию $\#T = 1$.

ЛЕММА 4.1. *Предположим, что $\pi_1(X, T)(p)$ конечна и $\text{Pic}(X)[p] \neq 0$. Тогда (X, T) не обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.1 отмеченная кривая (X, T) не обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p , если группа $\pi_1(X, T)(p)$ нетривиальна. Предположим, что $\pi_1(X, T)(p) = 1$. Тогда (X, T) обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p , если и только если $H^2(X, T) = 0$. Однако согласно предположению 2.2 получаем, что $H^2(X) \cong \text{Hom}(\text{Pic}(X)[p], \mathbb{F}_p) \neq 0$ является фактором $H^2(X, T)$.

Следующая теорема была доказана Ихарой (см. [6, теорема 1]).

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что $T \neq \emptyset$, и положим $q = \#\mathbb{F}$. Если*

$$\sum_{x \in T} \frac{\deg(x)}{q^{\deg(x)/2} - 1} > \max(g_X - 1, 0),$$

то $\pi_1(X, T)$ конечна. В частности, $\pi_1(X, T)(p)$ конечна.

Доказательство теоремы 1.2 завершено.

§ 5. Доказательство теоремы 1.3

Пусть $\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ – максимальное p -подрасширение $\bar{\mathbb{F}}/\mathbb{F}$ и $\tilde{X} = X \times_{\mathbb{F}} \tilde{\mathbb{F}}$. Известно, что X обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p тогда и только тогда, когда $\tilde{X}$ обладает $K(\pi, 1)$ -свойством для p и, кроме того,

$$H_{\text{et}}^i(\tilde{X}) \cong H_{\text{et}}^i(\bar{X})^{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})}$$

для всех i . Поэтому $H_{\text{et}}^i(\tilde{X})$ обращается в нуль при $i \geq 3$ и $H_{\text{et}}^2(\tilde{X}) = \mu_p(\tilde{\mathbb{F}})^* = \mu_p(\mathbb{F})^*$. Мы заключаем, что X обладает свойством $K(\pi, 1)$ для p , если $\mu_p(\mathbb{F}) = 1$.

В дальнейшем мы предполагаем, что $\mathbb{F}$ содержит все корни степени p из единицы. Для любой башни конечных связных этальных p -накрытий $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ естественное отображение

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = H_{\text{et}}^2(\tilde{Y}, \mu_p) \longrightarrow H_{\text{et}}^2(\tilde{Z}, \mu_p) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

есть умножение на степень $[\tilde{Z} : \tilde{Y}]$. Следовательно, по лемме 1.1 имеем

$$\tilde{X} \text{ обладает } K(\pi, 1)\text{-свойством для } p \iff \#(\pi_1^{\text{et}}(\tilde{X})(p)) = \infty.$$

Заметим, что

$$\pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})/p \cong H_{\text{et}}^1(\tilde{X})^* \cong (H_{\text{et}}^1(\bar{X})^{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})})^* \cong \text{Pic}(\bar{X})[p]_{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})},$$

и по лемме 2.1 имеем

$$\text{Pic}(\bar{X})[p]_{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})} = 0 \iff \text{Pic}(\tilde{X})[p] = 0.$$

Кроме того, поскольку $G(\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})$ является про- p -группой, получаем

$$\text{Pic}(\tilde{X})[p] = 0 \iff \text{Pic}(X)[p] = \text{Pic}(\tilde{X})[p]^{G(\tilde{\mathbb{F}}/\mathbb{F})} = 0,$$

а значит, $\text{Pic}(X)[p] \neq 0 \iff \pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})/p \neq 0$. Поэтому достаточно показать эквивалентности

$$\#(\pi_1^{\text{et}}(\tilde{X})(p)) = \infty \iff \#(\pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})(p)) = \infty \iff \#\pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})/p \neq 0.$$

Элементарная теория про- p -групп показывает, что достаточно доказать импликацию

$$\pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})/p \neq 0 \implies \#(\pi_1^{\text{ab}}(\tilde{X})(p)) = \infty.$$

Обозначив $T := T_p(\bar{X}) = \pi_1^{\text{ab}}(\bar{X})(p)$, мы можем записать импликацию в виде

$$(T_{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})})/p \neq 0 \implies \#(T_{G(\bar{\mathbb{F}}/\tilde{\mathbb{F}})}) = \infty.$$

Группа $G(\widetilde{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})$ является проциклической группой супернатурального порядка, взаимно простого с p . Кроме того, $T \cong \mathbb{Z}_p^{2g}$, и ядро отображения ограничения $\mathrm{Gl}_{2g}(\mathbb{Z}_p) \rightarrow \mathrm{Gl}_{2g}(\mathbb{F}_p)$ является про- p -группой. Поэтому действие $G(\widetilde{\mathbb{F}}/\widetilde{\mathbb{F}})$ на T факторизуется через конечную циклическую группу порядка, взаимно простого с p . Мы заключаем, что теорема 1.3 вытекает из следующей леммы.

Следующая лемма и ее применение в доказательстве теоремы 1.3 были предложены нам Дж. Стиксом. Мы благодарны рецензенту, который предложил короткое доказательство, приведенное ниже.

ЛЕММА 5.1. Пусть G – конечная группа порядка n , p – простое число, которое не делит n , и T – конечно порожденный свободный $\mathbb{Z}_p$ -модуль с действием G . Тогда

$$\#T_G = \infty \iff (T/p)_G \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку группы когомологий Тейта $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулей тривиальны, получаем расщепленную точную последовательность $\mathbb{Z}_p[G]$ -модулей

$$0 \longrightarrow \ker(N) \longrightarrow T \xrightarrow{N} T^G \longrightarrow 0,$$

где $N = \sum_{g \in G} g$. Пусть $B = \ker(N)$. Поскольку $\hat{H}^{-1}(G, B) = 0$, то $B_G = 0$. Получаем $T_G \cong T^G$ и $(T/p)_G \cong (T^G)/p$, поэтому оба утверждения леммы эквивалентны $T^G \neq 0$. Лемма доказана.

Список литературы

1. A. Schmidt, “Rings of integers of type $K(\pi, 1)$ ”, *Doc. Math.*, **12** (2007), 441–471 (electronic).
2. A. Schmidt, “On the $K(\pi, 1)$ -property for rings of integers in the mixed case”, *Algebraic number theory and related topics 2007*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B12**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2009, 91–100.
3. A. Schmidt, “Über Pro- p -Fundamentalgruppen markierter arithmetischer Kurven”, *J. Reine Angew. Math.*, **2010**:640 (2010), 203–235.
4. J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, 2nd ed., 2nd corr. print., Grundlehren Math. Wiss., **323**, Springer-Verlag, Berlin, 2013, 826 pp.
5. M. Artin, P. Deligne, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 3*, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4). Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier. Avec la collaboration de P. Deligne, B. Saint-Donat, *Lecture Notes in Math.*, **305**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, vi+640 pp.
6. Y. Ihara, “How many primes decompose completely in an infinite unramified Galois extension of a global field?”, *J. Math. Soc. Japan*, **35**:4 (1983), 693–709.

Филипп ЛЕБАК
(PHILIPPE LEVACQUE)
Laboratoire de Mathématiques de Besançon, France
E-mail: philippe.levacque@univ-fcomte.fr

Поступило в редакцию
24.07.2014
13.01.2015

Александр ШМИДТ
(ALEXANDER SCHMIDT)
Universität Heidelberg, Mathematisches Institut,
Germany
E-mail: schmidt@mathi.uni-heidelberg.de