Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Н. Фоменко, Функция Браудера и теоремы о неподвижных точках и совпадениях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 239–248

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8284>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:03:57

УДК 515.124+515.126.4+517.938.5

Т. Н. Фоменко

Функция Браудера и теоремы о неподвижных точках и совпадениях

Вводится понятие функционала, подчиненного функциональному ряду, понятие функции Браудера, а также понятие функционала, подчиненного функции Браудера. Доказываются теоремы о поиске нулей для введенных типов функционалов. На этой основе получено некоторое развитие, для многозначных отображений, известной теоремы Ф. Браудера о неподвижной точке, а также доказаны теоремы об общих прообразах и совпадениях отображений метрических пространств, обобщающие некоторые известные результаты.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: теорема Браудера, функция Браудера, поиск нулей функционала, неподвижная точка, точка совпадения.

DOI: 10.4213/im8284

В 1968 г. Ф. Браудером [1] (см. также [2, гл. 1, § 1, п. В2, с. 19]) была доказана знаменитая теорема о неподвижной точке (теорема 1 ниже), обобщающая известный принцип Банаха сжимающих отображений. В этой теореме используется неубывающая функция со специальными свойствами (называемая ниже функцией Браудера). В обзоре [3] (см. также [4]) упомянуты некоторые варианты обобщений этой теоремы Браудера и сформулированы связанные с ней открытые вопросы. В работе [5] дан вариант обобщения теоремы Браудера для многозначных сжатий в случае функций Браудера специального вида.

В [6]–[9] были введены понятия (α, β) -поисковых функционалов $(0 < \beta < \alpha)$, а также функционалов, подчиненных и строго подчиненных сходящимся числовым рядам. В [8] рассмотрены примеры и проведено сравнение этих понятий. Для таких функционалов были предложены принципы поиска их нулей, имеющие ряд приложений для поиска общих неподвижных точек и совпадений конечных наборов однозначных и/или многозначных отображений метрических пространств.

В настоящей работе вводится понятие функционала, подчиненного функциональному ряду, а также понятие функции Браудера и понятие функционала, подчиненного функции Браудера. Проводится сравнение введенных типов функционалов (лемма 1). Доказываются теоремы о поиске нулей для каждого из введенных типов функционалов (теоремы 2, 3). На основе принципа поиска нулей функционала, подчиненного функции Браудера, получено некоторое развитие, для случая многозначных отображений, упомянутой выше теоремы Браудера о неподвижной точке (теорема 4), а также доказана теорема о поиске

общих прообразов замкнутого подпространства при действии конечного набора многозначных отображений (теорема 5).

Приведем необходимые обозначения и формулировки.

ТЕОРЕМА 1 (Браудер, см. [2, гл. 1, § 1, п. В2, с. 19]). Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство и отображение $f: X \rightarrow X$ удовлетворяет условию $\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha(\rho(x, y))$ для всех $x, y \in X$, где $\alpha: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ есть произвольная неубывающая, непрерывная справа функция такая, что $\alpha(t) < t$ для любого $t > 0$. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку $x_0 \in X$ и для любого $x \in X$ последовательность $\{f^n(x)\}_{n=0,1,\dots}$, где $f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ есть n -я итерация функции f , сходится к x_0 при $n \rightarrow \infty$.

Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ – метрические пространства. Везде ниже метрику в прямом произведении $X \times Y$ будем задавать по правилу $D((x, y), (x', y')) := \rho(x, x') + d(y, y')$, $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$. Будем обозначать через $P(A)$, $C(A)$ множества непустых и пустых замкнутых подмножеств множества A соответственно. Пусть задан сходящийся числовой ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = S < \infty, \quad \text{где } 0 < c_{n+1} < c_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [8], а также [9] – для случая однозначного функционала). Многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ называется *подчиненным рядом* (1) на X , если для любой пары $\langle x, t \rangle \in \text{Gr}(\varphi) = \{\langle x, t \rangle \mid x \in X, t \in \varphi(x)\}$, где $t > 0$, существует такая пара $\langle x', t' \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &\leq t, \\ (\exists k \geq 1: c_{k+1} < t \leq c_k) &\implies (t' \leq c_{k+1}), \\ (t > c_1) &\implies (\exists k \geq 1: t' \leq c_k). \end{aligned}$$

Частным случаем является понятие функционала, *строго подчиненного ряду* (1) (см. соответствующее определение в [7], [8]). В настоящей работе мы его не используем.

Введем теперь более общее понятие подчиненности функционала функциональному ряду. Пусть задан функциональный ряд из неубывающих функций $a_k(t)$, определенных на $[0; +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t), \quad \text{где } 0 < a_{k+1}(t) < a_k(t), \quad t \in [0; +\infty), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ *подчинен ряду* (2) на пространстве (X, ρ) , если для любой пары $\langle x, t \rangle \in$

$\text{Gr}(\varphi)$, где $t > 0$, существует такая пара $\langle x', t' \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &\leq t, \\ (\exists k \geq 1: a_{k+1}(t) < t \leq a_k(t)) &\implies (t' \leq \min\{t, a_{k+1}(t')\}), \\ (t > a_1(t)) &\implies (t' \leq \min\{t, a_1(t')\}). \end{aligned} \quad (3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Функцией Браудера* будем называть всякую неубывающую и непрерывную справа функцию $\alpha: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$, удовлетворяющую условию $\alpha(t) < t$ для всех $t > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем говорить, что функция Браудера α является *правильной вблизи нуля*, если существует такое $\delta > 0$, что

$$\alpha(t - \alpha(t)) \leq \alpha(t) - \alpha^2(t), \quad \text{где} \quad \alpha^2(t) = \alpha(\alpha(t)), \quad 0 < t < \delta. \quad (4)$$

Очевидно, что всякая функция Браудера $\alpha(t)$, являющаяся супераддитивной (т.е. такой, что $\alpha(a) + \alpha(b) \leq \alpha(a + b)$ для любых $a, b \in [0; \infty)$), удовлетворяет условию (4). Определению 4 удовлетворяют, например, функции вида $\alpha(t) = t^p$, где $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, при $0 < \delta \leq 1$.

Пусть $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ – многозначный функционал на метрическом пространстве (X, ρ) , $\text{Gr}(\varphi) = \{\langle x, t \rangle \mid x \in X, t \in \varphi(x)\}$ – его график и $\beta: [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$ – некоторая неубывающая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем говорить, что функционал φ *подчинен функции* β на X , если для любой пары $\langle x, t \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, где $t > 0$, непустым является следующее множество:

$$A(\langle x, t \rangle) = \{\langle x', t' \rangle \in \text{Gr}(\varphi) \mid \rho(x, x') \leq t, t' \leq \min\{t, \beta(t)\}\}.$$

В частности, несложно показать, что если функционал $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ является $(1, \frac{\beta}{\alpha})$ -поисковым ($0 < \beta < \alpha$) на пространстве (X, ρ) , т.е. для любого $x \in X$ такого, что $\varphi(x) > 0$, существует $x' \in X$, для которого $\rho(x, x') \leq \varphi(x)$ и $\varphi(x') \leq \frac{\beta}{\alpha}\varphi(x)$, то φ подчинен линейной функции Браудера $\gamma(t) = \frac{\beta}{\alpha}t$.

Напомним еще некоторые понятия, которые потребуются ниже (см., например, [6]–[8]).

График $\text{Gr}(\varphi)$ многозначного функционала $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ называется *$\{0\}$ -полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{(x_m, t_m)\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(\varphi)$, где $t_m \rightarrow 0$, сходится к некоторой паре $(\xi, 0) \in \text{Gr}(\varphi)$, т.е. $\xi \in \text{Nil}(\varphi) = \{x \in X \mid 0 \in \varphi(x)\}$. График $\text{Gr}(\varphi)$ называется *$\{0\}$ -замкнутым*, если всякий его предельный элемент вида $(\xi, 0)$ лежит в нем.

Сравним условия подчиненности функционала функциональному ряду вида (2) и его подчиненности некоторой неубывающей функции.

ЛЕММА 1. *Если функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ подчинен функциональному ряду (2), где все функции $a_k(t)$, $k \geq 1$, не убывают, непрерывны справа и*

$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k(t) = 0$ при любом $t \in \varphi(X)$, то этот функционал подчинен убывающей функции $\beta(t)$, определенной следующим образом:

$$\beta(t) = \begin{cases} a_1(t), & t > a_1(t), \\ a_{k+1}(t), & a_{k+1}(t) < t \leq a_k(t), \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0, & t = 0, \end{cases} \quad t \in \varphi(X). \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы, для любой пары $\langle x, t \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, где $t > 0$, существует такая пара $\langle x', t' \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, что выполнены условия (3).

Так как функции $a_k(t)$ не убывают, из условий (5), определяющих функцию $\beta(t)$, получаем, что если $t > a_1(t)$, то $t' \leq \min\{t, a_1(t')\} \leq \min\{t, a_1(t)\} = \min\{t, \beta(t)\}$. Если же существует $k \geq 1$, для которого $a_{k+1}(t) < t \leq a_k(t)$, то $t' \leq \min\{t, a_{k+1}(t')\} \leq \min\{t, a_{k+1}(t)\} = \min\{t, \beta(t)\}$. Таким образом, для функционала φ выполнено условие подчиненности указанной выше функции β . Лемма доказана.

Отметим, что функция $\beta(t)$, заданная формулой (5), не является непрерывной справа в тех точках t , где $t = a_k(t)$ для некоторого $k \geq 1$. Отметим также, что итерационный ряд построенной функции $\beta(t)$ совпадает (начиная со второго его члена) либо с исходным рядом (2), либо с его остатком. Таким образом, сходимость ряда (2) в точке t эквивалентна сходимости в этой точке ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \beta^{k-1}(t)$ функции (5). Здесь $\beta^{k-1}(t) = \beta(\beta(\dots(\beta(t))\dots))$ есть $(k-1)$ -я итерация функции β , если $k > 1$, и $\beta^0(t) = t$.

В [6] и [9] рассматривалась задача поиска и аппроксимации нулей для так называемых (α, β) -поисковых функционалов (где числа α, β связаны неравенствами $0 < \beta < \alpha$) и для функционалов, подчиненных сходящимся числовым рядам, соответственно. Ниже предлагается аналогичный принцип поиска и аппроксимации нулей для функционала, подчиненного функциональному ряду, обобщающий перечисленные результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть задан многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$, подчиненный функциональному ряду (2), сходящемуся на множестве $\varphi(X)$. Предположим, что либо его график $\text{Gr}(\varphi)$ является $\{0\}$ -полным, либо пространство X полно и график $\text{Gr}(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым. Тогда множество $\text{Nil}(\varphi) = \{x \in X \mid 0 \in \varphi(x)\}$ нулей заданного функционала непусто. Начиная из любой пары $\langle x_0, t_0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, можно построить последовательность (вообще говоря, не единственную) элементов графика $\text{Gr}(\varphi)$, сходящуюся к паре вида $\langle \xi, 0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, т.е. $0 \in \varphi(\xi)$. Если, кроме того, $0 < t_0 \leq a_{k_0}(t_0)$ для некоторого $k_0 \in \mathbb{N}$, то верна оценка $\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{k_0+j}(t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая аналогично доказательству соответствующей теоремы для случая подчиненности функционала числовому ряду (1) (см. [9, теорема 1]), для любой пары $\langle x_0, t_0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, где $0 < t_0 \leq a_{k_0}(t_0)$, найдем пару $\langle x_1, t_1 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$ такую, что

$$\rho(x_0, x_1) \leq t_0, t_1 \leq \min\{t_0, a_{k_0+1}(t_1)\} \leq a_{k_0+1}(t_0).$$

Продолжая эту процедуру, получим последовательность $\{\langle x_m, t_m \rangle\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(\varphi)$, где $\rho(x_m, x_{m+1}) \leq t_m, t_{m+1} \leq \min\{t_m, a_{k_0+m+1}(t_{m+1})\} \leq a_{k_0+m+1}(t_m) \leq \dots \leq a_{k_0+m+1}(t_0)$. Разумеется, если при этом на каком-то, скажем j -м, шаге будет выполнено равенство $t_j = 0$, то последовательность стабилизируется, т. е. $x_{j+k} = x_j, t_{j+k} = t_j = 0, k \geq 1$.

Из сходимости функционального ряда (2) в точке t_0 следует, что последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна, поскольку $\rho(x_m, x_{m+1}) \leq t_m \leq a_{k_0+m}(t_0)$. Кроме того, очевидно, что $t_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Значит, фундаментальна и последовательность пар $\{\langle x_m, t_m \rangle\}_{m=0,1,\dots}$. Сходимость этой последовательности к некоторому элементу вида $\langle \xi, 0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$ вытекает либо из полноты графика $\text{Gr}(\varphi)$, либо из полноты X и $\{0\}$ -замкнутости $\text{Gr}(\varphi)$. Требуемая оценка расстояния $\rho(x_0, \xi)$ получается стандартно. Теорема доказана.

Как видно из доказательства теоремы 2, условие подчиненности функционала φ функциональному ряду (2) обеспечивает построение аппроксимационных последовательностей в X , сходящихся к нулям этого функционала. Причем последовательность элементов графика $\text{Gr}(\varphi)$, начинающаяся из любой пары $\langle x_0, t_0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, получается такой, как если бы она строилась при условии подчиненности функционала φ числовому ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t_0)$.

Отметим также, что, пользуясь теоремой 2, можно доказать соответствующие обобщения, для случая подчиненности функционалов функциональному ряду, теорем, доказанных в [7]–[9]. Мы не приводим здесь эти утверждения.

Теперь предложим аналогичный принцип поиска нулей функционалов, подчиненных функции Браудера.

ТЕОРЕМА 3. Пусть многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$ подчинен на пространстве X функции Браудера α , правильной вблизи нуля. Пусть также либо график $\text{Gr}(\varphi)$ функционала φ является $\{0\}$ -полным, либо X полно и график $\text{Gr}(\varphi)$ является $\{0\}$ -замкнутым. Тогда из любой пары $\langle x_0, t_0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$ начинается хотя бы одна последовательность пар $\{\langle x_m, t_m \rangle\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(\varphi)$, сходящаяся к некоторой паре $\langle \xi, 0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, что означает выполнение включения $0 \in \varphi(\xi)$. Кроме того, если итерационный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t)$ (где $\alpha^{k-1}(t) = \alpha(\dots(\alpha(t))\dots)$) есть $(k-1)$ -я итерация функции α , если $k > 1$, и $\alpha^0(t) = t$) сходится в точке $t = t_0$, то $\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия подчиненности функционала φ функции Браудера $\alpha(t)$ следует, что, начиная из любой пары $\langle x_0, t_0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$, $t_0 > 0$, можно построить последовательность $\{\langle x_m, t_m \rangle\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(\varphi)$ со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \rho(x_m, x_{m+1}) &\leq t_m, t_{m+1} \leq \alpha(t_m) < t_m, & \text{если } t_m > 0, \\ t_{m+j} &= t_m, \quad j \geq 1, & \text{если } t_m = 0. \end{aligned}$$

Так как последовательность $\{t_m\}_{m=0,1,\dots}$ убывает и ограничена снизу (нулем), то она имеет (неотрицательный) предел. Обозначим его $\hat{t}$. Покажем, что $\hat{t} = 0$. Предположим, что $\hat{t} > 0$. Тогда, переходя к пределу в неравенстве $t_{m+1} \leq \alpha(t_m)$

и пользуясь тем, что функция Браудера $\alpha(t)$ непрерывна справа, приходим к неравенствам $\hat{t} \leq \alpha(\hat{t}) < \hat{t}$. Полученное противоречие доказывает, что $\hat{t} = 0$. Итак, t_m убывает и сходится к нулю. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon - \alpha(\varepsilon))$, что для всех $m > N$ верно, что $t_m < \varepsilon - \alpha(\varepsilon)$. Зафиксируем какое-нибудь $m > N$. Пользуясь неравенством $t_m < \varepsilon - \alpha(\varepsilon)$, а также тем, что функция Браудера $\alpha(t)$ не убывает и является правильной вблизи нуля, получаем следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_{m+1}) &\leq t_m < \varepsilon - \alpha(\varepsilon), \\ \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) &\leq t_{m+1} \leq \alpha(t_m) \leq \alpha(\varepsilon - \alpha(\varepsilon)) \leq \alpha(\varepsilon) - \alpha(\alpha(\varepsilon)) = \alpha(\varepsilon) - \alpha^2(\varepsilon).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\rho(x_m, x_{m+2}) &\leq \rho(x_m, x_{m+1}) + \rho(x_{m+1}, x_{m+2}) \\ &\leq (\varepsilon - \alpha(\varepsilon)) + (\alpha(\varepsilon) - \alpha^2(\varepsilon)) = \varepsilon - \alpha^2(\varepsilon).\end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $\rho(x_m, x_{m+p}) \leq \varepsilon - \alpha^p(\varepsilon) < \varepsilon$ для любого $p \in \mathbb{N}$ (здесь, как и выше, $\alpha^p(\varepsilon)$ обозначает p -ю итерацию функции α , примененную к числу ε). Таким образом, последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ является фундаментальной, а значит, фундаментальна и последовательность $\{\langle x_m, t_m \rangle\}_{m=0,1,\dots}$. Но тогда, в силу условий теоремы на пространство X и график $\text{Gr}(\varphi)$, она сходится к некоторой паре вида $\langle \xi, 0 \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$. В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t_0)$ (где $\alpha^{k-1}(t_0)$ при $k > 1$ обозначает, как и выше, $(k-1)$ -ю итерацию функции α в точке t_0 и $\alpha^0(t_0) = t_0$) оценка расстояния $\rho(x_0, \xi)$ получается стандартно. Теорема доказана.

Заметим, что если функция Браудера $\alpha(t)$ является правильной при $0 < t < \delta$, то ее итерационный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(s)$ сходится при любом $s = t - \alpha(t)$, $0 < t < \delta$.

В качестве следствия из теоремы 3 получается, например, следующее утверждение, которое можно рассматривать как обобщение (без единственности) теоремы Браудера о неподвижной точке (теорема 1 выше) на случай многозначного отображения, не являющегося, вообще говоря, сжатием (относительно метрики Хаусдорфа).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $F: X \rightarrow P(X)$ – многозначное отображение, и $\alpha(t)$ – правильная вблизи нуля функция Браудера. Пусть для любого $x \in X$ и любого $x' \in F(x)$ существует такая точка $x'' \in F(x')$, что $\rho(x', x'') \leq \alpha(\rho(x, x'))$. Предположим также, что либо график $\text{Gr}(F)$ отображения F является полным, либо пространство X полно и график $\text{Gr}(F)$ замкнут. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует F -итерационная последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ (т. е. $x_{m+1} \in F(x_m)$, $m = 0, 1, \dots$), выходящая из x_0 и сходящаяся к некоторой неподвижной точке отображения F , т. е. к такой точке $\xi \in X$, что $\xi \in F(\xi)$. Если, кроме того, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t)$ (где $\alpha^{k-1}(t) = \alpha(\dots(\alpha(t))\dots)$ есть $(k-1)$ -я итерация функции α , если $k > 1$, и $\alpha^0(t) = t$) сходится в точке $t_0 = \rho(x_0, x_1)$, то верна оценка $\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим многозначный функционал $\varphi: X \rightarrow P(\mathbb{R}_+)$, где $\varphi(x) = \{d \mid d = \rho(x, y), y \in F(x)\}$. Согласно условиям теоремы, для любой пары $\langle x, x' \rangle \in \text{Gr}(F)$ существует такая точка $x'' \in F(x')$, что

$$d' = \rho(x', x'') \leq \alpha(\rho(x, x')) = \alpha(d).$$

Это означает, что для любой пары $\langle x, d \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$ существует пара $\langle x', d' \rangle \in \text{Gr}(\varphi)$ такая, что

$$x' \in F(x), \quad \rho(x, x') = d, \quad d' = \rho(x', x'') \leq \alpha(\rho(x, x')) = \alpha(d) < d.$$

Таким образом, функционал φ подчинен функции α . Это позволяет, начиная из любой точки $x_0 \in X$, построить последовательность $\{\langle x_m, d_m \rangle\}_{m=0,1,\dots} \subseteq \text{Gr}(\varphi)$, где $x_{m+1} \in F(x_m)$, $d_m = \rho(x_m, x_{m+1})$, $d_{m+1} \leq \alpha(d_m)$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 3, убеждаемся, что такая последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна и что $d_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Далее, если пространство X полно и график $\text{Gr}(F)$ замкнут, то существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \xi \in X$, а значит, существует и предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle x_m, x_{m+1} \rangle = \langle \xi, \xi \rangle \in \text{Gr}(F).$$

Последнее включение означает, что $\xi \in F(\xi)$, т. е. ξ – неподвижная точка отображения F . То же, очевидно, верно и в случае, когда график $\text{Gr}(F)$ является полным.

В случае сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(\rho(x_0, x_1))$ из итераций функции α , примененных к числу $\rho(x_0, x_1)$, требуемая оценка расстояния $\rho(x_0, \xi)$ получается стандартным образом. Теорема доказана.

Функционалы, подчиненные функции Браудера, можно применить к задачам поиска прообразов замкнутого подпространства при действии многозначного отображения, а также к поиску общих прообразов замкнутого подпространства при действии конечного набора многозначных отображений, вполне аналогично тому, как это делалось в случае функционалов, (строго) подчиненных рядам. Приведем в качестве такого применения следующую теорему 5 (аналог теоремы 2.2 из [8]).

Пусть, как и выше, (X, ρ) , (Y, d) – метрические пространства, $H \subseteq Y$ – замкнутое подпространство, $\alpha(t)$ – функция Браудера, правильная вблизи нуля, и $\gamma > 0$ – фиксированное число. Пусть заданы многозначные отображения $F_1, \dots, F_n: X \rightarrow C(Y)$ с замкнутыми образами и $F = F_1 \times \dots \times F_n: X \rightarrow C(Y^n)$. В пространстве Y^n будем рассматривать метрику D , определенную следующим образом: $D(y, z) := \sum_{i=1}^n d(y_i, z_i)$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$. Будем обозначать $\Delta_n(H) := \{\hat{y} \mid \hat{y} = (y, \dots, y) \in Y^n, y \in H\}$. В частности, $\Delta_n(Y) = \{\hat{y} \mid \hat{y} = (y, \dots, y) \in Y^n\}$ – диагональ в Y^n . Напомним (см., например, [6]–[8]), что график $\text{Gr}(F)$ отображения $F: X \rightarrow C(Y)$ называется H -полным, если любая фундаментальная последовательность $\{\langle x_m, y_m \rangle\}_{m=1,\dots}$ его элементов, где $d(y_m, H) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, сходится к некоторому элементу $\text{Gr}(F)$.

График $\text{Gr}(F)$ отображения F называется H -замкнутым, если он содержит все свои предельные элементы вида $\langle x, h \rangle$, где $h \in H$.

В описанных условиях верно следующее утверждение о поиске общих прообразов подпространства H при действии отображений $F_1, \dots, F_n$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть в описанных выше условиях график $\text{Gr}(F_1)$ отображения F_1 является H -полным, а график $\text{Gr}(F)$ является $\Delta_n(H)$ -замкнутым. Пусть также для любой пары $\langle x, y \rangle \in \text{Gr}(F)$ существует такая пара $\langle x', y' \rangle \in \text{Gr}(F)$, что выполнены условия:

$$\begin{aligned} \rho(x, x') &\leq D(y, \Delta_n(H)), & D(y, y') &\leq \gamma D(y, \Delta_n(H)), \\ D(y', \Delta_n(H)) &\leq \alpha(D(y, \Delta_n(H))). \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда из любой пары $\langle x_0, y_0 \rangle \in \text{Gr}(F)$ начинается хотя бы одна последовательность элементов графика $\text{Gr}(F)$, сходящаяся к некоторой паре $\langle \xi, \hat{\eta} \rangle \in \text{Gr}(F)$, где $\hat{\eta} = (\eta, \dots, \eta) \in \Delta_n(H)$, т.е. $\eta \in H \cap F_1(\xi) \cap \dots \cap F_n(\xi)$. Если при этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t)$ (где $\alpha^{k-1}(t) = \alpha(\dots(\alpha(t))\dots)$ есть $(k-1)$ -я итерация функции α , если $k > 1$, и $\alpha^0(t) = t$) сходится в точке $t_0 = D(y_0, \Delta_n(H))$, то верна оценка

$$\rho(x_0, \xi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функционал

$$\varphi: \text{Gr}(F) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \varphi(\langle x, y \rangle) = D(y, \Delta_n(H)).$$

Покажем, что его график $\{0\}$ -полон. Для этого покажем, что график $\text{Gr}(F)$ является $\Delta_n(H)$ -полным. Рассуждения аналогичны соответствующей части доказательства теоремы 2.2 в [8]. Предположим, что последовательность $\{\langle x_m, y_m \rangle\} \subseteq \text{Gr}(F)$ фундаментальна (относительно метрики $\tilde{D}$, где $\tilde{D}(\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle) = \rho(x, x') + D(y, y')$), и пусть $t_m = D(y_m, \Delta_n(H)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда последовательность $\{\langle x_m, y_{m1} \rangle\} \subseteq \text{Gr}(F_1)$ также фундаментальна (в метрике $\hat{\rho}: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$, где $\hat{\rho}(\langle x, z \rangle, \langle x', z' \rangle) = \rho(x, x') + d(z, z')$ и $d(y_{m1}, H) \rightarrow 0$). Поскольку график $\text{Gr}(F_1)$ является H -полным, то существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle x_m, y_{m1} \rangle = \langle \xi, \eta \rangle \in \text{Gr}(F_1).$$

При этом $\eta \in H$, так как H – замкнутое подпространство в Y . Далее, так как $t_m = D(y_m, \Delta_n(H)) \rightarrow 0$, то фундаментальные последовательности $\{y_{mj}\}$, $j = 1, \dots, n$, сближаются. Следовательно, все они сходятся к одному и тому же пределу η . Отсюда следует, что последовательность $\{\langle x_m, y_m \rangle\}$ сходится к паре $\langle \xi, \hat{\eta} \rangle \in X \times Y^n$, где $\hat{\eta} = (\eta, \dots, \eta) \in \Delta_n(H)$. А так как график $\text{Gr}(F)$ является по условию $\Delta_n(H)$ -замкнутым, то $\langle \xi, \hat{\eta} \rangle \in \text{Gr}(F)$. Итак, график $\text{Gr}(F)$ является $\Delta_n(H)$ -полным (в метрике $\tilde{D}$). Но тогда график $\text{Gr}(\varphi)$, очевидно, $\{0\}$ -полон (в соответствующей метрике). То же верно для $\text{Gr}(\varphi)$, если функционал φ рассматривать на метрическом пространстве $(\text{Gr}(F), \tilde{D}_\gamma)$, где $\tilde{D}_\gamma(\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle) = \frac{1}{1+\gamma}(\rho(x, x') + D(y, y'))$ – метрика, эквивалентная $\tilde{D}$.

Из условий (6) следует, что функционал φ подчинен функции Браудера α относительно метрики $\tilde{D}_\gamma$. Следовательно, для функционала φ на пространстве $(\text{Gr}(F), \tilde{D}_\gamma)$ выполнены все условия теоремы 3. В силу этой теоремы из каждой пары $\langle x_0, y_0 \rangle \in \text{Gr}(F)$ начинается хотя бы одна последовательность, сходящаяся к некоторой паре $\langle \xi, \hat{\eta} \rangle$ такой, что $\varphi(\langle \xi, \hat{\eta} \rangle) = D(\hat{\eta}, \Delta_n(H)) = 0$. То же, очевидно, верно и в метрике $\tilde{D}$. А так как подпространство $\Delta_n(H)$ является замкнутым в Y^n , то отсюда следует, что $\hat{\eta} \in \Delta_n(H) \cap \text{Gr}(F)$.

В случае сходимости итерационного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1}(t_0)$ функции Браудера α в точке $t_0 = D(y_0, \Delta_n(H))$ требуемая в теореме оценка расстояния $\rho(x_0, \xi)$ получается стандартно. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 5 охватывает несколько следующих важных частных случаев.

При $n = 1$ решается задача поиска прообразов замкнутого подпространства при действии заданного многозначного отображения.

При $n \geq 2$ и $H = Y$, т. е. при $\Delta_n(H) = \Delta_n(Y)$, осуществляется поиск множества точек совпадения заданного конечного набора многозначных отображений $F_1, \dots, F_n$.

Если $Y = X$ и задан набор отображений $\text{Id}_X: X \rightarrow X$, $F_j: X \rightarrow C(X)$, $j = 1, \dots, n$, где Id_X – тождественное отображение, $n \geq 1$, то решается задача поиска общих неподвижных точек отображений $F_1, \dots, F_n$.

И наконец, если $H = \{c\} \in Y$ – одноточечное подпространство, то теорема 5 дает достаточные условия для поиска общих корней отображений $F_1, \dots, F_n$, соответствующих их общему значению c .

Автор искренне благодарит рецензента за ценные замечания и предложения, позволившие существенно улучшить изложение.

Список литературы

1. F. E. Browder, “On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **71** (1968), 27–35.
2. A. Granas, J. Dugundji, *Fixed point theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, New York, 2003, xvi+690 pp.
3. J. Jachymski, “Around Browder’s fixed point theorem for contractions”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5**:1 (2009), 47–61.
4. J. Jachymski, I. Jozwik, “Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems”, *Fixed point theory and its applications*, Banach Center Publ., **77**, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2007, 123–146.
5. П. В. Семенов, “О неподвижных точках многозначных сжатий”, *Функц. анализ и его прил.*, **36**:2 (2002), 89–92; англ. пер.: P. V. Semenov, “Fixed points of multivalued contractions”, *Funct. Anal. Appl.*, **36**:2 (2002), 159–161.
6. T. N. Fomenko, “Cascade search principle and its applications to the coincidence problems of n one-valued or multi-valued mappings”, *Topology Appl.*, **157**:4 (2010), 760–773.
7. Т. Н. Фоменко, “Функционалы, строго подчиненные рядам, и поиск решений уравнений”, *Докл. РАН*, **453**:6 (2013), 617–619; англ. пер.: T. N. Fomenko, “Functionals strictly subordinate to series and search for solutions of equations”, *Dokl. Math.*, **88**:3 (2013), 748–750.

8. T. N. Fomenko, “Functionals strictly subjected to convergent series and search for singularities of mappings”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **14**:1 (2013), 21–40.
9. С. Р. Гайнуллова, Т. Н. Фоменко, “Функционалы, подчиненные сходящимся рядам, и некоторые приложения”, *Матем. заметки*, **96**:2 (2014), 314–317; англ. пер.: S. R. Gajnullova, T. N. Fomenko, “Functionals subordinate to converging series and some applications”, *Math. Notes*, **96**:2 (2014), 294–297.

ТАТЬЯНА НИКОЛАЕВНА ФОМЕНКО
(TATIANA N. FOMENKO)

Поступило в редакцию
14.08.2014

Факультет вычислительной математики и
кибернетики,

Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

E-mail: tn-fomenko@yandex.ru