Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О гомотопическом строении компактных комплексных однородных многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 2, 47–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8288>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 16:28:55

УДК 512.816.3

В. В. Горбачевич

О гомотопическом строении компактных комплексных однородных многообразий

Изучаются компактные комплексные однородные многообразия, причем рассмотрение ведется с точностью до конечнолистного накрытия. Даны достаточные условия гомотопической тривиальности натурального расслоения для таких многообразий. В случае дискретной стационарной подгруппы эта тривиальность имеет место всегда.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: комплексная группа Ли, однородное пространство, решетка, гомотопический тип.

DOI: 10.4213/im8288

§ 1. Введение

В этой статье будет доказано, что многие компактные комплексные однородные пространства с гомотопической точки зрения устроены достаточно просто – они гомотопически эквивалентны прямым произведениям однородных пространств компактных полупростых групп Ли и компактных асферических многообразий весьма специального вида (подробнее см. теорему 6 ниже).

Гладкое многообразие M называется *однородным пространством*, если на нем задано транзитивное действие некоторой конечномерной группы Ли. Однородное пространство, которое мы всегда будем предполагать связным, можно представить в виде факторпространства G/H , где G – некоторая связная группа Ли (можно также предполагать, что группа Ли G односвязна, переходя в случае необходимости к универсальной накрывающей ее группе Ли), а H – замкнутая подгруппа Ли в G .

Гладкое многообразие M называется *однородным многообразием*, если на нем существует транзитивное действие некоторой конечномерной группы Ли (в отличие от понятия однородного пространства, здесь сама группа Ли и ее транзитивное действие не фиксируются).

Предположим теперь, что на гладком многообразии M задана комплексная структура (имеется в виду интегрируемая комплексная структура, превращающая M в комплексно-аналитическое многообразие). Тогда M называется *комплексным однородным пространством*, если существует комплексно-аналитическое (т. е. голоморфное) транзитивное действие некоторой группы Ли G (сама группа Ли, вообще говоря, здесь не обязана быть комплексной). Аналогично, комплексное многообразие M называется *комплексным однородным многообразием*, если на нем существует транзитивное (и, конечно, комплексно-аналитическое) действие некоторой группы Ли.

Мы будем изучать расслоения и гомотопические свойства компактных однородных комплексных многообразий M . Если некоторая группа Ли G транзитивна на таком многообразии M , то и комплексная группа Ли $\text{Aut}_h(M)$ всех аналитических автоморфизмов тоже, очевидно, будет транзитивна на M . Поэтому мы можем предполагать (так как мы изучаем однородные многообразия, а не однородные пространства), что транзитивная на M группа Ли комплексна и потому имеет представление $M = G/H$, где группа Ли G комплексна (а также, как обычно, связна и односвязна), а H – ее замкнутая (и тоже комплексная) подгруппа Ли. При этом мы будем еще всегда предполагать, что действие G на M локально эффективно. Из сказанного выше следует, что транзитивное и эффективное на компактном комплексном многообразии действие группы Ли всегда может быть расширено до транзитивного и эффективного действия некоторой комплексной группы Ли (в качестве которой можно взять $\text{Aut}_h(M)$).

Опишем вкратце содержание статьи.

В § 2 рассмотрен важный частный случай – компактные комплексные однородные пространства вида G/D , где D – решетка (т. е. равномерная дискретная подгруппа) в связной, односвязной комплексной группе Ли G . В этом случае доказана теорема 3, в силу которой гомотопический тип таких пространств (рассматриваемых, как это часто принято, с точностью до конечнолистного накрытия) описывается очень просто – это прямое произведение компактной комплексной группы Ли и некоторого асферичного компактного многообразия весьма специального вида.

В § 3 рассматривается общий случай произвольных компактных комплексных однородных пространств. Здесь доказывается основной результат настоящей статьи – теорема 6.

Также в § 3 приводятся следствия этого результата.

Для группы Ли H через H_0 мы будем обозначать ее связную компоненту единицы. Если H – подгруппа в группе G , то $N_G(H)$ обозначает нормализатор H в G .

§ 2. Комплексные компактные однородные пространства с дискретной стационарной подгруппой

Здесь мы рассмотрим топологическое (точнее, гомотопическое) строение комплексных компактных однородных пространств специального вида – с дискретной стационарной подгруппой. Другими словами, речь будет идти о многообразиях M вида G/D , где G – комплексная связная (и, обычно, односвязная) группа Ли, а D – решетка в G (уточним, что мы рассматриваем здесь только равномерные решетки, хотя наши результаты справедливы и для произвольных решеток, но здесь мы не будем на этом останавливаться). Мы всегда можем (и будем это делать в дальнейшем) считать, что группа Ли G односвязна, переходя в случае необходимости к универсальному накрытию над G и к прообразу решетки D при этом накрытии. Отметим, что любая решетка в группе Ли является конечнопорожденной группой (подробнее см. обзор [1]).

Топологические свойства многообразий вида G/D изучаются довольно давно, но до окончательных результатов здесь очень далеко. Универсальная накрывающая для многообразия G/D диффеоморфна группе Ли G и гомотопически эквивалентна K – максимальной компактной подгруппе в G . Топология же компактных групп Ли изучена довольно подробно, хотя даже гомотопические группы π_i вычислены только при небольших i . Фундаментальная группа $\pi_1(G/D)$ изоморфна группе D . Однако о топологии многообразий вида G/D до сих пор известно довольно мало. В случае, когда G полупроста, в [2]–[4] вычислялись вещественные когомологии многообразия G/Γ , и они часто оказываются теми же, что и когомологии прямого произведения базы и слоя натурального расслоения (это расслоение мы ниже опишем). Это утверждение, как оказывается, для комплексных компактных однородных пространств допускает значительное усиление, что и показано в данной статье.

Пусть K – некоторая максимальная компактная подгруппа в G (в силу односвязности группы Ли G все такие подгруппы односвязны и полупросты, причем все они сопряжены в G). Рассмотрим естественное действие подгруппы K на $M = G/D$. Стационарные подгруппы этого действия – это подгруппы вида $K \cap g^{-1} D g$ для всевозможных $g \in G$. Так как подгруппа D дискретна, а группа Ли K компактна, то все указанные стационарные подгруппы конечны. Вообще говоря, они могут иметь различные порядки (при различных элементах $g \in G$) и потому могут не быть сопряженными в K . Тем самым орбиты естественного действия компактной группы K на $M = G/D$ могут иметь различные орбитные типы, хотя размерности имеют одинаковые (равные размерности группы Ли K). Факторпространство $K \backslash M = K \backslash G/D$ имеет, как можно проверить, структуру орбиобразия, но, возможно, с особенностями (не будучи тем самым гладким многообразием).

Для исправления ситуации со стационарными подгруппами естественного действия K на M применим простой метод – переход от D к ее подгруппе конечного индекса (или, что эквивалентно, переход от многообразия $M = G/D$ к некоторому многообразию M' , которое его конечнолистно накрывает). В качестве используемой нами подгруппы конечного индекса возьмем подгруппу D' конечного индекса в D , не имеющую кручения. Это возможно в силу леммы Сельберга (см. [1]), так как группа Ли G односвязна и потому линейна, что влечет и линейность конечнопорожденной подгруппы D . Пусть $M' = G/D'$ – компактное однородное пространство той же группы Ли G , конечнолистно накрывающее исходное однородное пространство G/D . Естественное действие подгруппы $K \subset G$ на M' свободно, так как его стационарные подгруппы (всегда конечные) будут тривиальны в силу отсутствия у D' кручения. Это действие порождает гладкое локально-тривиальное расслоение

$$\xi: K \rightarrow M' = G/D' \rightarrow K \backslash G/D'.$$

Это расслоение является K -главным. Его база – компактное многообразие $M_a = K \backslash G/D'$. Полученное расслоение является частным случаем натурального расслоения, построенного автором для произвольных компактных однородных пространств (рассматриваемых с точностью до конечнолистного накрытия). В частности, как и в общем случае, многообразие M_a является асфе-

ричным (т. е. при всех $i \geq 2$ гомотопические группы $\pi_i(M_a)$ тривиальны). Подробнее о натуральном расслоении будет сказано ниже (см. также [5]). Далее будем считать, что $D' = D$, т. е. что уже сама решетка D не имеет кручения.

Указанное расслоение $K \rightarrow M = G/D' \rightarrow K \backslash G/D'$ оказывается, как будет показано ниже, гомотопически виртуально тривиальным (т. е. становится гомотопически тривиальным при переходе к подходящему конечнолистному накрытию над M_a), что дает очень простое описание гомотопического типа комплексных компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой (см. ниже теорему 1). Но предварительно нужно описать одну конструкцию, которая будет играть в дальнейшем (и для произвольных комплексных компактных однородных пространств) значительную роль. Эта конструкция была впервые предложена в [2] и подробно изучена в [3], [4]. Ниже она будет подробно описана, так как статья [4] ныне труднодоступна, а в [2], [3] доказательства нужного нам результата (см. теорему 3 ниже) только намечены.

Вначале рассмотрим подробнее расслоение ξ . Как известно, факторпространство $K \backslash G$ диффеоморфно евклидову пространству, в частности оно стягиваемо. Подгруппа D' действует на $K \backslash G$ свободно и дискретно, а фундаментальная группа факторпространства $M_a = K \backslash G/D$ по этому действию изоморфна D . В частности, получаем, что многообразие M_a можно взять в качестве классифицирующего пространства $B(D)$ группы D . При этом, универсальное главное D -расслоение будет иметь вид $D \rightarrow E(D) \rightarrow B(D)$, где $E(D) = K \backslash G$ – тотальное пространство этого универсального расслоения и $B(D) = E(D)/D = K \backslash G/D$.

Главное K -расслоение ξ определяется однозначно с точностью до K -эквивалентности расслоений классифицирующим отображением $\phi_\xi: B(D) \rightarrow B(K)$ (точнее, его гомотопическим классом). Естественное вложение $i: K \hookrightarrow G$ подгруппы K индуцирует непрерывное отображение $B(i): B(K) \rightarrow B(G)$, являющееся гомотопической эквивалентностью (так как пространство группы Ли G гомотопически эквивалентно K). Композиция $B(i) \circ \phi_\xi: B(D) \rightarrow B(G)$ – это отображение в $B(G)$, определяющее некоторое главное G -расслоение ξ_1 над $M_a = B(D)$. Это расслоение получается из ξ расширением структурной группы K до содержащей ее в качестве подгруппы группы Ли G , и потому оно может быть записано в виде $G \rightarrow G \times_K G/D \rightarrow K \backslash G/D = B(D)$. Обозначим через p_1 проекцию расслоения ξ_1 . Здесь через $G \times_K G/D$ обозначено расслоенное произведение K -пространств G и G/D , которое является пространством орбит следующего действия группы K на прямом произведении $G \times G/D$:

$$(g', g''D)k = (g'k^{-1}, kg''D),$$

где $k \in K$, а $g', g'' \in G$.

Исходя из других, но довольно близких по идее соображений, мы сейчас построим еще одно главное G -расслоение над нашим многообразием $B(D) = K \backslash G/D$. Рассмотрим естественное вложение $\alpha: D \hookrightarrow G$ подгруппы D . Оно индуцирует отображение классифицирующих пространств $B(\alpha): B(D) \rightarrow B(G)$, которое можно рассматривать как проекцию расслоения

$$G/D \rightarrow B(D) = E(D)/D \rightarrow E(G)/G = B(G).$$

Это отображение определяет некоторое главное G -расслоение над $B(D)$; обозначим это расслоение ξ_2 . Ясно, что ξ_2 получается расширением структурной группы D до G в универсальном D -расслоении $D \rightarrow E(D) \rightarrow B(D)$. Отсюда следует, что расслоение ξ_2 является плоским расслоением. Это означает, что его функции перехода постоянны. Дадим и другое описание понятия плоского расслоения. Пусть G^d – это группа Ли G , на которой введена дискретная топология вместо обычной евклидовой. Имеем непрерывное отображение $G^d \rightarrow G$, которое индуцирует непрерывное отображение $\beta: B(G^d) \rightarrow B(G)$ классифицирующих пространств. Некоторое G -расслоение называется *плоским*, если его классифицирующее отображение факторизуется (т. е. пропускается) через отображение β .

Построенное нами расслоение ξ_2 может быть записано в виде $G \rightarrow G \times_D E(D) \rightarrow B(D)$. Проекцию этого расслоения обозначим p_2 . При этом на пространстве $G \times E(D) = G \times K \backslash G$ рассматривается следующее действие группы D :

$$(g', Kg'')\gamma = (g'\gamma^{-1}, \gamma Kg''),$$

где $\gamma \in D$, $g', g'' \in G$, $Kg'' \in K \backslash G = E(D)$.

В результате над многообразием $K \backslash G / D = B(D)$ нами построены два главных G -расслоения ξ_1 и ξ_2 , тотальными пространствами которых являются соответственно $G \times_K G / D$ и $G \times_D K \backslash G$, причем главные (свободные) действия индуцированы умножениями слева на первых прямых множителях. Оказывается, что эти два расслоения эквивалентны. Причем это можно доказать в более общей ситуации, чем рассматривающаяся в настоящей статье. Дело в том, что выше мы не использовали ни тот факт, что группа Ли G комплексна и односвязна, ни тот факт, что максимальная компактная ее подгруппа K полупроста (точнее, это используется только тогда, когда указано, что расслоение ξ является натуральным расслоением для G/D).

ТЕОРЕМА 1. Пусть D – дискретная подгруппа без кручения в связной группе Ли G , а K – максимальная компактная подгруппа в G . Тогда главные G -расслоения $\xi_1: G \rightarrow G \times_K G / D \rightarrow K \backslash G / D$ и $\xi_2: G \rightarrow G \times_D K \backslash G \rightarrow K \backslash G / D$ являются G -эквивалентными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из описаний расслоений ξ_1 , ξ_2 , их тотальные пространства получаются из $G \times G$ факторизациями по свободным действиям группы $K \times D$, задаваемым соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1(k, \gamma): (g', g'') &\mapsto (g'k^{-1}, kg''\gamma^{-1}), \\ \lambda_2(k, \gamma): (g', g'') &\mapsto (g'\gamma^{-1}, kg''\gamma^{-1}), \end{aligned}$$

где $k \in K$, $\gamma \in D$, $g', g'' \in G$. Рассмотрим следующее отображение (очевидно, гладкое) многообразия $G \times G$ в себя:

$$f: (g', g'') \mapsto (g' \cdot g'', g'').$$

Очевидно, что f – диффеоморфизм (так как G – группа Ли). При этом отображение f эквивариантно относительно действий λ_1 и λ_2 группы $K \times D$ на $G \times G$.

Действительно, имеем

$$f \circ \lambda_1(k, \gamma)(g', g'') = f(g'k^{-1}, kg''\gamma^{-1}) = (g'g''\gamma^{-1}, kg''\gamma^{-1}),$$

а

$$\lambda_2 \circ f(g', g'') = \lambda_2(g'g'', g'') = (g'g''\gamma^{-1}, kg''\gamma^{-1}).$$

Следовательно, $f \circ \lambda_1 = \lambda_2 \circ f$, т. е. диффеоморфизм f эквивариантен. Поэтому он индуцирует диффеоморфизм орбит действий λ_1 и λ_2 группы $K \times D$ на $G \times G$, т. е. мы получаем диффеоморфизм $f^*: G \times_K G/D \rightarrow G \times_D K \backslash G$. Ясно также, что $p_1 = p_2 \circ f$ (где p_1, p_2 – проекции расслоений ξ_1, ξ_2 соответственно), т. е. диффеоморфизм f^* является послойным отображением, причем на базе $K \backslash G/D$ обоих расслоений (напомним, что базы этих расслоений естественно диффеоморфны) индуцируется тождественное отображение. Наконец, диффеоморфизм f^* перестановочен, как легко убедиться, с главными действиями группы G на $G \times_K G/D$ и $G \times_D K \backslash G$, соответствующими нашим двум рассматриваемым G -расслоениям. Тем самым G -эквивалентность расслоений ξ_1 и ξ_2 доказана. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем следствие, которое является ключевым при доказательстве основных результатов настоящей статьи.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть G – связная группа Ли, D – ее дискретная подгруппа без кручения, а K – максимальная компактная подгруппа в G . Тогда однородное пространство G/D гомотопически эквивалентно тотальному пространству главного плоского G -расслоения $G \rightarrow G \times_D K \backslash G \rightarrow K \backslash G/D = B(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Многообразие G/D можно записать в виде расслоенного произведения $K \times_K G/D$. Естественное вложение $K \hookrightarrow G$ является, как хорошо известно, гомотопической эквивалентностью, поэтому гомотопической эквивалентностью будет и индуцированное им отображение $K \times_K G/D \rightarrow G \times_K G/D$. Композиция этой последней гомотопической эквивалентности и диффеоморфизма f из доказательства теоремы 1 дает нам в силу теоремы 1 искомую гомотопическую эквивалентность. Следствие 1 доказано.

Отметим, что на самом деле в доказательстве следствия 1 построено вложение многообразия G/D в многообразие $G \times_D K \backslash G$ в качестве деформационного ретракта. Возможно и еще большее уточнение утверждения следствия 1 – нетрудно показать, что многообразие G/D в некотором смысле стабильно диффеоморфно многообразию $G \times_K K \backslash G$. А именно, существует такое векторное расслоение η над $B(D)$, что пространство $G \times_K K \backslash G$ диффеоморфно прямой сумме расслоения η и расслоения над $B(D)$ пространства G/D со слоем K .

Теперь можно доказать один из главных результатов настоящей статьи. При этом будет использоваться следующий результат из [6].

ТЕОРЕМА 2 (см. [6]). Пусть G – комплексная линейная группа Ли. Тогда любое плоское G -расслоение над базой, являющейся конечным комплексом X , будет виртуально тривиальным, т. е. оно индуцирует тривиальное расслоение над некоторым комплексом X' , конечнолистно накрывающем X .

Отметим, что впервые такого рода утверждение было доказано для группы Ли $GL(n, \mathbb{C})$ в [7]. Нетрудно отсюда вывести (см. [4]) справедливость его и для $SL(n, \mathbb{C})$. Теорема 2 в сочетании со следствием 1 позволяет получить такое утверждение (подробнее об упоминаемом там понятии натурального расслоения см. обзор [5], а также § 3 ниже).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $M = G/D$ – компактное комплексное однородное пространство односвязной комплексной группы Ли G с дискретной стационарной подгруппой D . Далее, пусть K – максимальная компактная подгруппа в G и $M_a = K \backslash G/D$ – база натурального расслоения для M . Тогда для некоторого однородного пространства $M' = G/D'$, конечнолистно накрывающего M (здесь D' – некоторая подгруппа конечного индекса в D), натуральное расслоение гомотопически эквивалентно тривиальному, и поэтому однородное пространство M' гомотопически эквивалентно прямому произведению $K \times M'_a$ (здесь $M'_a = K \backslash G/D'$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа Ли комплексна и односвязна, то она линейна. Поэтому в силу леммы Сельберга в решетке D существует подгруппа конечного индекса, свободная от кручения. В дальнейшем мы будем считать (переходя, как обычно, в случае необходимости к подходящему M' , конечнолистно накрывающему M), что уже сама группа D не имеет кручения.

В силу следствия 1 многообразие G/D гомотопически эквивалентно тотальному пространству плоского G -расслоения $G \rightarrow G \times_D K \backslash G$. Базой этого расслоения является асферичное многообразие M'_a . База M'_a компактна и, следовательно, к этому расслоению применима теорема 2. Тем самым существует некоторое многообразие M'_a , конечнолистно накрывающее M_a (как легко понять, оно соответствует некоторой подгруппе D' индекса в D), для которого соответствующее расслоение тривиально. В частности, пространство этого расслоения диффеоморфно $G \times M'_a$. Группа Ли G гомотопически эквивалентна K . В этом случае K есть слой M_c натурального расслоения над базой M_a . Все это означает, что однородное пространство G/D' , конечнолистно накрывающее G/D , гомотопически эквивалентно прямому произведению многообразий K и M'_a . Теорема 3 доказана.

Отметим здесь один естественный вопрос: верно ли более сильное, чем в теореме 3, утверждение – будут ли диффеоморфны (а не только гомотопически эквивалентны) многообразия M' и $K \times M'_a$? Ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Однако иногда такое более сильное утверждение имеет место. Рассмотрим пример.

ПРИМЕР 1. Пусть M – однородное пространство вида $SL(2, \mathbb{C})/D$, где D – решетка без кручения в односвязной простой комплексной группе Ли $SL(2, \mathbb{C})$. Нетрудно показать (см., например, [8]), что многообразие M диффеоморфно прямому произведению $SU(2)$ (максимальной компактной подгруппе в $SL(2, \mathbb{C})$) и многообразия $SU(2) \backslash SL(2, \mathbb{C})/D$. Отметим, что группа Ли $SU(2)$ диффеоморфна трехмерной сфере S^3 , а пространство $SU(2) \backslash SL(2, \mathbb{C})/D$ можно представить в виде Λ^3/D , т. е. в виде факторпространства трехмерного пространства Лобачевского Λ^3 по действию дискретной группы его изометрий, изоморф-

ной D . Тем самым уже само натуральное расслоение для такого однородного пространства M тривиально. Как отмечено в [8], натуральное расслоение для однородных пространств вида G/D , где G полупроста, тривиально тогда и только тогда, когда его база M_a параллелизуема (топологически). Как известно, трехмерное ориентируемое компактное многообразие всегда параллелизуемо, в силу чего мы получаем указанное выше утверждение о тривиальности натурального расслоения для рассматриваемого нами M . Однако далеко не все многообразия вида $K \setminus G/D$ параллелизуемы, потому и ответ на указанный выше вопрос отрицателен. Пример $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/D$ интересен тем, что это комплексное компактное однородное пространство разлагается в прямое произведение двух компактных трехмерных многообразий (и потому, конечно, не имеющих комплексной структуры), одно из которых, а именно Λ^3/D , не является однородным (подробнее об этом см. [8]). Теорема 3 дает нам множество подобных примеров в пределах гомотопического типа.

Есть еще один интересный вопрос – верно ли утверждение теоремы 3 не только для некоторого M' , конечнолистно накрывающего M , но и для исходного однородного пространства $M = G/D$ при условии, что подгруппа D не имеет кручения? Ответ автору неизвестен, видимо, он отрицателен. Однако в некоторых случаях, например, если группа D разрешима и группа одномерных гомологий $H_1(D, \mathbb{Z})$ не имеет кручения, ответ положительный.

Из теоремы 3 вытекает, что когомологии однородного пространства G/D' изоморфны тензорному произведению когомологий группы Ли K и когомологий группы D' , которые изоморфны когомологиям пространства M'_a в силу его асферичности. Такого рода результатам были посвящены работы автора [2]–[4]. В частности, для комплексных групп Ли в них было доказано сформулированное в настоящей статье когомологическое следствие теоремы 3. В этих работах рассматривались не только комплексные полупростые группы Ли, но и вещественные. В частности, там было доказана когомологическая тривиальность для однородных пространств вида G/D для некоторых простых групп Ли G , не имеющих комплексной структуры.

При рассмотрении однородных пространств вида G/D , где группа Ли G комплексна, можно несколько уточнить строение базы натурального расслоения. Для этого используем одно утверждение из [9] (с учетом результатов [10] и [11]). Для его формулировки введем некоторые обозначения. Пусть G – комплексная односвязная группа Ли, $G = S \cdot R$ – ее разложение Леви (R – радикал, S – полупростая часть). Рассмотрим разложение полупростой группы Ли S (односвязной в силу односвязности группы Ли G) в прямое произведение простых множителей $S = \times_i S_i$. Особую роль здесь будут играть простые группы Ли типа A_l (локально изоморфные группам Ли $\mathrm{SL}(l+1, \mathbb{C})$).

ТЕОРЕМА 4 (см. [9], [11]). *Пусть G – комплексная односвязная группа Ли, а D – решетка в G . Если в полупростой части S нет нормальных делителей типа A_l , то разложение группы Ли G прямое, т. е. $G = S \times R$.*

Отметим, что в [9], кроме множителей типа A_l , приходилось исключать и множители типа E_8 . Это было связано с тем, что в доказательстве там использовался принцип Хассе, который в то время был доказан для всех простых

групп Ли, кроме группы E_8 . Позже, в 1989 году, принцип Хассе был доказан и для E_8 (см. [10]), и потому утверждение из [9] приняло окончательный вид, в котором оно и сформулировано в теореме 4.

Выше было уже показано, что однородные пространства (при рассмотрении их с точностью до конечнолистного накрытия) вида G/D , где D – решетка в связной комплексной группе Ли G , гомотопически устроены весьма просто. При этом фигурируют многообразия вида $M_a = K \backslash G/D$ – базы натуральных расслоений. Для более подробного изучения этих баз было построено в работах автора еще одно расслоение – структурное, которое можно рассматривать как аналог разложения Леви для групп Ли. Для односвязных групп Ли разложение Леви – это полупрямое произведение полупростой части и радикала этой группы Ли. Для базы M_a натурального расслоения, как оказывается, имеет место нечто аналогичное: она есть расслоение со слоем – солвмногообразием над базой, тесно связанной с полупростой группой Ли. База M_a натурального расслоения конечнолистно накрывается многообразием M'_a (являющимся базой натурального расслоения для некоторого компактного однородного пространства M' , конечнолистно накрывающего M), для которого имеется расслоение (гладкое, локально тривиальное) $M_r \rightarrow M'_a \rightarrow M_s$, слой M_r которого (разрешимая компонента однородного многообразия M) диффеоморфен некоторому солвмногообразию вида R/Γ , где Γ – решетка в некоторой разрешимой группе Ли R , а база M_s (полупростая компонента) диффеоморфна некоторому риманову симметрическому пространству $K \backslash S/\Pi$ отрицательной кривизны, здесь S – полупростая присоединенная группа Ли без компактных факторов, Π – решетка в ней, а K – максимальная компактная подгруппа в S .

ТЕОРЕМА 5. Пусть G – комплексная односвязная группа Ли, D – решетка в G и $G = S \cdot R$ – разложение Леви. Если в полупростой части S нет нормальных делителей типа A_1 , то база натурального расслоения M'_a для некоторого однородного пространства G/D' , конечнолистно накрывающего G/D (здесь D' – некоторая подгруппа конечного индекса в D), диффеоморфна прямому произведению $M_s \times M_r$. Здесь M_r – разрешимая компонента, она имеет вид $R/D' \cap R$, а M_s диффеоморфно многообразию вида $K \backslash S/\Pi$, где $\Pi = D'/(D' \cap R)$ – решетка в полупростой группе Ли S , а K – максимальная компактная подгруппа в S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4 разложение группы Ли G прямое. Далее, пересечение $D \cap R$ – решетка в R . Это является следствием общего результата, справедливого для произвольных групп Ли, не имеющих компактных нормальных делителей (см., например, [1]). Вообще говоря, $D \cap S$ не является решеткой в полупростой группе Ли S . Однако в силу [12] в D существует подгруппа конечного индекса, которую можно непрерывно деформировать в такую решетку, для которой пересечение с полупростой частью S уже будет решеткой в S . При этой деформации соответствующие факторпространства, как показано в [12], диффеоморфны. Поэтому, переходя от D к подгруппе конечного индекса, мы можем считать (с точностью до диффеоморфизма соответствующих факторпространств), что $D = (D \cap S) \times (D \cap R)$ – прямое произведение

решеток в S и R . Но тогда утверждение теоремы 5 вытекает из конструкции структурного расслоения (см. [1]).

Утверждение теоремы 5 можно существенно обобщить, если использовать усиления результата работы [9] в статье [11]. Там доказано, что можно снять ограничения на полупростую часть группы Ли G , и тогда оказывается, что произведение простых нормальных делителей группы S не типа A_1 выделяется в G в качестве прямого сомножителя. Но соответствующее утверждение для однородных пространств вида G/D формулируется довольно громоздко и потому здесь не приводится.

§ 3. Строение произвольных компактных комплексных однородных пространств

В этом параграфе, в отличие от § 2, мы будем рассматривать произвольные компактные комплексные однородные пространства G/H . Комплексная группа Ли G тоже будет предполагаться связной и односвязной, но вот стационарная подгруппа H теперь может быть не дискретной.

В [8] было построено для компактных однородных пространств (не обязательно комплексных) натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$ – гладкое локально тривиальное расслоение некоторого компактного однородного пространства M' , конечнолистно накрывающего M . База M_a этого расслоения асферична (т.е. гомотопические группы $\pi_i(M_a) = 0$ при всех $i \geq 2$), а слой M_c – компактное однородное пространство с конечной фундаментальной группой $\pi_1(M_c)$. Если M имеет вид G/H , где G – односвязная, связная группа Ли, то $M' = G/H'$ для подходящей подгруппы $H' \subset H$ конечного индекса. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G (в силу односвязности группы Ли G эта подгруппа односвязна и полупроста), тогда $M_c = K/K \cap H'$, а $M_a = K \backslash G/H'$ – пространство орбит естественного действия компактной группы Ли K на M' . Для исходного однородного пространства $M = G/H$ пространство орбит естественного действия группы K на G/H в общем случае не является многообразием, так как имеет особые точки, которые соответствуют неглавным (точнее, исключительным) орбитам этого действия. Поэтому переход к подходящему M' , конечнолистно накрывающему M , в общем случае необходим. При этом канонического выбора для M' не существует, однако группа $\pi_1(M_a)$ (а с ней и гомотопический тип асферичного многообразия M_a) определяется по многообразию M (и даже по группе $\pi_1(M)$) однозначно с точностью до перехода к подгруппе конечного индекса.

Кроме того, в предыдущем параграфе описано структурное расслоение для базы M_a натурального расслоения. Конструкция этого расслоения приводится, например, в [1].

Для комплексного компактного однородного пространства конструкции натурального и структурного расслоения существенно упрощаются.

Пусть $M = G/H$ – компактное комплексное однородное пространство; здесь G – односвязная комплексная группа Ли, а H – ее замкнутая подгруппа. Положим $P = N_G(H_0)$. Как известно (см., например, обзор [5]) подгруппа P –

параболическая подгруппа в G . В частности, она связна и если K – максимальная компактная подгруппа в G , то $G = K \cdot P$.

Положим $F = P/H_0$ – связная группа Ли, содержащая в качестве решетки группу $D = H/H_0$. Переходя от M к подходящему $M' = G/H'$, его конечнолистно накрывающему, рассмотрим натуральное расслоение для M' :

$$M_c = K/L \rightarrow M' \rightarrow M_a = K \backslash G/H'.$$

Здесь $L = K \cap H'$. Слой K/L этого расслоения почти односвязен (т.е. его фундаментальная группа конечна), а база M_a – асферичное компактное многообразие. Отметим, что хотя многообразие M комплексно, но многообразия M_c , M_a комплексными, вообще говоря, не являются, более того, они могут даже иметь нечетную размерность (см. пример 1, где $M = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/D$). Структурной группой этого расслоения является компактная группа Ли $Q = N_K(L)/L$, которая, вообще говоря, не будет связной (подробнее см. [8]).

Для комплексного компактного однородного пространства $M = G/H$ (мы считаем, что уже для него натуральное расслоение существует) база натурального расслоения $M_a = K \backslash G/H$ диффеоморфна $(K \cap P) \backslash P/H$, так как $K \cdot P = G$. Здесь $K \cap P$ – максимальная компактная подгруппа в группе Ли P . Далее, имеем $(K \cap P) \backslash P/H = Q_1 \backslash F/D$, где $F = P/H_0$ (см. выше), $D = H/H_0$, а $Q_1 = (K \cap P)/(K \cap H_0)$ – компактная группа Ли. Получаем поэтому для базы натурального расслоения представление $M_a = Q_1 \backslash F/D$ (в вещественном случае подобное представление получается после значительных усилий). В [13] показано, что существует редукция структурной группы Q натурального расслоения к Q_1 . Докажем теперь самый общий вариант главного результата этой статьи. Мы будем ниже использовать общую конструкцию, применявшуюся в [13] для случая произвольных компактных однородных пространств. В комплексном случае она допускает существенные упрощения, которые мы подробно опишем в доказательстве.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $M = G/H$ – компактное комплексное однородное пространство. Предположим, что группа $F = N_G(H_0)/H_0$ линейна. Тогда для некоторого компактного однородного пространства, конечнолистно накрывающего M , натуральное расслоение гомотопически тривиально, т.е. многообразие M гомотопически эквивалентно прямому произведению базы M_a и слоя M_c натурального расслоения для M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы считаем, что натуральное расслоение существует уже для исходного компактного однородного пространства $M = G/H$, переходя, если это необходимо, к подходящему конечнолистному накрытию. Рассмотрим структурную группу $Q = N_K(L)/L$ натурального расслоения, где K – максимальная компактная подгруппа в односвязной группе Ли G , а $L = K \cap H$ – стационарная подгруппа точки $eH \in G/H$ относительно естественного действия группы K на многообразии G/H . Покажем, что эта группа может быть редуцирована к некоторой подгруппе, которая, в свою очередь, будет структурной группой некоторого расслоения, построенного для подходящего компактного комплексного пространства с дискретной стационарной подгруппой, что позволит нам применить теорему 3.

Указанное выше утверждение о возможности редукции структурной группы доказано в [13, теорема 4]. Однако там рассматривался намного более общий случай, когда $M = G/H$ является компактным однородным пространством произвольной (а не комплексной, как в данной работе) группы Ли G . Поэтому формулировка утверждения теоремы 4 из [13] несколько сложнее, чем в комплексном случае, а доказательство довольно громоздко, так как приходится учитывать, что односвязная группа Ли G может быть нелинейной, а ее полупростая часть может иметь бесконечный центр. Обе эти “неприятности” в комплексном случае не имеют места. Ниже будет приведено рассуждение, частично упрощающее рассуждения из [13]. При этом сейчас будет сделано еще одно предположение, которое выполняется в условиях теоремы 6.

Положим $F = P/H_0$, где $P = N_G(H_0)$. Группа Ли F связна, комплексна и содержит дискретную подгруппу $D = H/H_0$ в качестве решетки. Пусть C – максимальная компактная подгруппа в F . Мы будем далее предполагать, что группа Ли F линейна. В общем случае (даже для комплексного компактного однородного пространства M) это условие выполняется не всегда. Однако оно фигурирует как одно из условий теоремы 6 и потому нам достаточно рассматривать только линейные группы Ли F . Что касается случая, когда F не является линейной, то утверждение о редукции структурной группы натурального расслоения тоже верно, но требует более изощренной техники, использованной в [13].

Рассмотрим решетку D в линейной группе Ли F . Равномерная решетка D всегда конечнопорождена, а в нашем случае она еще и линейна. Поэтому применима лемма Сельберга (см., например, [1]) и в D существует подгруппа конечного индекса, свободная от кручения. Но тогда и в H существует такая подгруппа H' конечного индекса, для которой группа $D' = H'/(H')_0$ не имеет кручения. Переходя при необходимости от G/H к однородному пространству G/H' , конечнолистно накрывающему G/H , мы можем считать, что уже для исходной подгруппы H соответствующая ей решетка D не имеет кручения.

Рассмотрим пересечение $D \cap C$. Это дискретная компактная подгруппа в D , и потому она конечна. Но так как у нас группа D не имеет кручения, то пересечение $D \cap C$ тривиально. Отсюда, кстати, легко выводится, что подгруппа $K \cap H$ связна и является максимальной компактной подгруппой в H (и в H_0). Рассмотрим расслоение $C \rightarrow F/D \rightarrow C \backslash F/D$, которое, очевидно, является C -главным. Именно к его структурной группе мы и редуцируем структурную группу натурального расслоения для нашего однородного пространства $M = G/H$. Но сначала мы более подробно рассмотрим базы натурального расслоения для M и указанного расслоения для F/D .

Подгруппа P параболична (см., например, [5]). Тогда $G = K \cdot P$. Поэтому группа P транзитивна на $K \backslash G$ и для базы $M_a = K \backslash G/H$ натурального расслоения имеем $K \backslash G/H = K \cap P \backslash P/H$. Покажем, что вложение $P/H \subset G/H$ порождает редукцию структурной группы натурального расслоения.

Так как $P/H_0 = F$, то

$$K \cap P \backslash P/H = K \cap P \backslash F/D.$$

Здесь подгруппа $K \cap P$ – максимальная компактная подгруппа в P и ее образ при естественном эпиморфизме $P \rightarrow F$ с ядром H_0 является максимальной компактной подгруппой в группе Ли F . Тем самым этот образ можно отождествить с подгруппой C . Структурной группой расслоения для пространства F/D , указанного выше, является, очевидно, группа Ли C . Покажем, что ее можно рассматривать как подгруппу в Q и именно к ней можно редуцировать структурную группу Q натурального расслоения для нашего M .

Положим $K_1 = K \cap P$. Это будет максимальная компактная подгруппа в группе Ли P , она связна. Рассмотрим естественное действие группы K_1 на многообразии P/H . Стационарная подгруппа этого действия – $K \cap H \cap P = P \cap L$, где $L = K \cap H$ – стационарная подгруппа естественного действия группы Ли K на многообразии G/H (порождающего натуральное расслоение). Так как $P \supset H$, то $K \cap H \cap P = L$.

Положим $Q_1 = N_{K \cap P}(L)/L$. Это подгруппа в $Q = N_K(L)/L$. При этом Q_1 – структурная группа расслоения, порожденного естественным действием группы K_1 на P/H (фактор по которому диффеоморфен, как показано выше, базе M_a натурального расслоения для $M = G/H$).

Вложение $P/H \subset G/H$ и дает нам редукцию, как показано в [13] (в более общей ситуации), группы Q к ее подгруппе Q_1 , которая, в свою очередь, отождествляется с C – максимальной компактной подгруппой группы Ли F .

Итак, натуральное расслоение $M_c \rightarrow M \rightarrow M_a$ может рассматриваться как Q_1 -расслоение.

Рассмотрим естественное вложение $C \subset F$ и соответствующее ему плоское F -расслоение. Его слой можно записать в виде $F \times_C M_c$ (см. [3], где упоминалось, что возможны различные применения полученных там результатов, что подтверждается результатами данной статьи). Так как группа Ли F по предположению линейна и комплексна, то это плоское расслоение можно считать в силу теоремы 6 тривиальным, переходя в случае необходимости к конечнолистному накрытию над его базой, что соответствует переходу к некоторому M' , конечнолистно накрывающему M . Но тогда, как доказано в [3, теорема 3], мы получим гомотопическую эквивалентность натурального расслоения и плоского D -расслоения со слоем $F \times_C M_c$. Последнее расслоение тривиально, поэтому M гомотопически эквивалентно прямому произведению $M_c \times M_a$. Теорема 6 доказана.

Общее утверждение теоремы 6 может быть конкретизировано в нескольких важных частных случаях.

СЛЕДСТВИЕ 2. Утверждение теоремы 6 справедливо для компактного комплексного однородного пространства G/H , если выполнено одно из следующих условий:

- 1) группа Ли $N_G(H_0)/H_0$ имеет односвязный радикал;
- 2) группа Ли $N_G(H_0)$ редуктивна;
- 3) группа Ли G редуктивна;
- 4) фундаментальная группа $\pi_1(M)$ полупроста, т. е. не имеет бесконечных разрешимых нормальных делителей;
- 5) $\dim(M) \leq 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В этом случае группа Ли $N_G(H_0)/H_0$ линейна, так как линейны ее полупростая часть и радикал, и потому применима теорема 6.

2) В этом случае утверждение следствия 2 очевидно вытекает из теоремы 6, так как редуктивная комплексная группа Ли всегда линейна.

3) Из того, что группа Ли G редуктивна, вытекает, что группа Ли P/H_0 полупроста. Это утверждение отмечено в [14] (с указанием, что его легко доказать – что действительно верно). Поэтому в данном случае утверждение следствия 2 вытекает из предыдущего пункта.

4) Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство с полупростой фундаментальной группой. Тогда максимальная полупростая подгруппа S группы Ли G (т.е. ее подгруппа Леви) тоже будет транзитивна на M (см., например, обзор [1]). Если группа Ли G комплексна (что мы всегда можем предполагать, так как многообразие M компактно и комплексно), то утверждение здесь вытекает из предыдущего.

5) Положим $F = N_G(H_0)/H_0$ и $d = \dim F$. Так как $\dim M \leq 3$, то d может равняться только 0, 1, 2 или 3. Рассмотрим последовательно все эти случаи.

Если $d = 0$, то многообразие M будет почти односвязно (см., например, [5]) и потому база M_a натурального расслоения вырождается в точку. Поэтому нужное нам утверждение здесь очевидно.

Если $d = 1$, то группа Ли F абелева (в частности, редуктивна). Поэтому здесь доказываемое утверждение вытекает из п. 2), уже рассмотренного выше.

Пусть теперь $d = 2$. Здесь F – двумерная комплексная группа Ли, причем содержащая решетку D (из чего вытекает, что эта группа Ли должна быть унимодулярна). Но с точностью до локального изоморфизма существуют только две двумерные комплексные группы Ли – абелева $\mathbb{C}^2$ и разрешимая R_2 (алгебра Ли которой в подходящем базисе X, Y задается соотношением $[X, Y] = Y$). Однако группа Ли R_2 (как и все группы Ли, ей локально изоморфные) не является унимодулярной. Поэтому группа Ли F может быть только абелевой. Но тогда нужное нам утверждение уже доказано в п. 2) выше.

Пусть теперь $d = 3$. Но тогда должно быть $P = G$, т.е. $N_G(H_0) = G$. Это означает, что связная группа Ли H_0 нормальна в G . В силу предполагаемой нами локальной эффективности транзитивного действия группы Ли G на M получаем, что H_0 тривиальна и потому подгруппа H дискретна. Случай дискретной стационарной подгруппы уже был рассмотрен нами выше (теорема 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Фактически в двух последних случаях доказательства п. 5) следствия 2 было показано, что группа Ли F линейна. Однако уже при рассмотрении случая $\dim M = 4$ возникает ситуация, когда соответствующая группа Ли F не будет линейной (и применить теорему 6 здесь не получится). Пример такого рода был приведен независимо в [9] и [14], хотя тема нелинейности там не затрагивалась. В этих работах в качестве нелинейной группы Ли F (если ее вычислить явно в приведенных там примерах) фигурирует трехмерная нильпотентная группа Ли, локально изоморфная $N(3, \mathbb{C})$.

Точно по той же схеме, что и в упомянутых работах, можно построить примеры подобного рода для групп Ли вида $S \times N(3, \mathbb{C})$, где S – произвольная комплексная полупростая группа Ли.

Можно рассмотреть случай, когда $\dim M = 4$. Здесь заключение теоремы 6 справедливо, если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ абелева или ненильпотентна (именно нильпотентный случай оказывается самым трудным). Это легко можно вывести из замечания 2 с помощью рассуждений, использованных при доказательстве п. 5) следствия 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. На самом деле при доказательстве п. 5) следствия 2 было доказано несколько больше, чем там было нужно. А именно, фактически доказано, что если $\dim N_G(H_0)/H_0 \leq 2$, то выполняется заключение теоремы 6 о гомотопической тривиальности натурального расслоения. Если рассматривать случай $\dim N_G(H_0)/H_0 = 3$, то на пути к применению теоремы 6 возникает только одно препятствие – случай, когда группа Ли $N_G(H_0)/H_0$ трехмерная неабелева и нелинейная группа Ли (именно такая фигурировала в замечании 1).

Список литературы

1. Э. Б. Винберг, В. В. Горбацевич, О. В. Шварцман, “Дискретные подгруппы групп Ли”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **21**, ВИНИТИ, М., 1988, 5–120; англ. пер.: E. B. Vinberg, V. V. Gorbatsevich, O. V. Shvartsman, “Discrete subgroups of Lie groups”, *Lie groups and Lie algebras II*, Encyclopaedia Math. Sci., **21**, Springer, Berlin, 2000, 1–123.
2. В. В. Горбацевич, “Некоторые гомотопические свойства натурального расслоения для компактных однородных пространств”, *Докл. АН СССР*, **264**:3 (1982), 525–528; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Some homotopy properties of the natural fibration for compact homogeneous manifolds”, *Soviet Math. Dokl.*, **25** (1982), 657–661.
3. В. В. Горбацевич, “О тривиальности натурального расслоения некоторых компактных однородных пространств”, *Изв. вузов. Матем.*, 2000, № 1, 15–19; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On the triviality of natural bundles of some compact homogeneous spaces”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **44**:1 (2000), 13–17.
4. В. В. Горбацевич, “О когомологиях компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1990, 107–123.
5. В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Группы Ли и алгебры Ли* – 1, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, **20**, ВИНИТИ, М., 1988, 103–240; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, “Lie transformation groups”, *Lie groups and Lie algebras I*, Encyclopaedia Math. Sci., **20**, Springer, Berlin, 1993, 95–229.
6. I. Chatterji, G. Mislin, Ch. Pittet, *Flat bundles with complex analytic holonomy*, arXiv: 1308.1412.
7. P. Deligne, D. Sullivan, “Fibres vectoriels complexes à groupe structural discret”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **281**:24 (1975), 1081–1083.
8. В. В. Горбацевич, “Об одном расслоении компактного однородного пространства”, *Тр. ММО*, **43**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1981, 116–141; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On a fibration of compact homogeneous spaces”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, **1983**, №1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, 129–157.
9. M. Otte, J. Potters, “Beispiele homogener Mannigfaltigkeiten”, *Manuscripta Math.*, **10**:2 (1973), 117–127.
10. В. И. Черноусов, “О принципе Хассе для групп типа E_8 ”, *Докл. АН СССР*, **306**:5 (1989), 1059–1063; англ. пер.: V. I. Chernousov, “On the Hasse principle for groups of type E_8 ”, *Soviet Math. Dokl.*, **39**:3 (1989), 592–596.

11. D. Guan, “Toward a classification of compact complex homogeneous spaces”, *J. Algebra*, **273**:1 (2004), 33–59.
12. G. D. Mostow, “On the topology of homogeneous spaces of finite measure”, *Convegno sui gruppi topologici e gruppi di Lie* (INDAM, Roma, Gennaio, 1974), *Symposia Mathematica*, **16**, Academic Press, London, 1975, 375–398.
13. В. В. Горбацевич, “Модификации транзитивных действий групп Ли на компактных многообразиях и их применения”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, Изд-во ЯрГУ, Ярославль, 1981, 131–145.
14. Д. Н. Ахиезер, “Компактные комплексные однородные пространства с разрешимой фундаментальной группой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:1 (1974), 59–80; англ. пер.: D. N. Ahiezer, “Compact complex homogeneous spaces with solvable fundamental group”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:1 (1974), 61–83.

Владимир Витальевич Горбацевич
(VLADIMIR V. GORBATSEVICH)
МАТИ – Российский государственный
технологический университет
имени К.Э. Циолковского, г. Москва
E-mail: vgorvich@yandex.ru

Поступило в редакцию
21.08.2014
10.03.2015