Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Романовский, Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жесткими разрешимыми группами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 201–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8295>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 02:47:54

УДК 512.5

Н. С. Романовский

Теорема Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над жесткими разрешимыми группами

Обсуждается вопрос о том, какой вид может иметь аналог классической теоремы Гильберта о нулях (Nullstellensatz) в алгебраической геометрии над достаточно хорошим классом групп, и доказывается такой аналог в классе жестких разрешимых групп.

Библиография: 8 наименований.

Ключевые слова: группа, разрешимая, алгебраическая геометрия.

DOI: 10.4213/im8295

§ 1. Введение и постановка задачи

Классическая теорема Гильберта о нулях состоит в том, что если K – алгебраически замкнутое поле и имеется система полиномиальных над K уравнений $\{f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \mid i \in I\}$, то уравнение $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ является ее логическим следствием (выполняется на всех решениях системы в K^n) в том и только в том случае, когда многочлен f в некоторой ненулевой степени принадлежит идеалу $(f_i \mid i \in I)$ кольца $K[x_1, \dots, x_n]$. Можно сказать, что в этой теореме дан алгебраический способ построения всех логических следствий данной системы уравнений: f получается из $f_i, i \in I$, при помощи операций сложения, вычитания, умножения на элементы кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ и извлечения корней. Слабая теорема Гильберта о нулях утверждает, что система имеет решение в K^n тогда и только тогда, когда идеал $(f_i \mid i \in I)$ строго меньше всего кольца $K[x_1, \dots, x_n]$, или, что равносильно, пересекается с K по нулю.

В работах Г. Баумслага, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [1] и [2] были изложены основы алгебраической геометрии над группой. Мы напомним некоторые определения. Для данной группы G назовем G -группой любую группу, содержащую G в качестве фиксированной подгруппы. Пусть $F = G * \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ – свободное произведение группы G и свободной группы с базой $\{x_1, \dots, x_n\}$. Уравнением от $x = (x_1, \dots, x_n)$ над G называется выражение вида $v(x) = 1$, где $v \in F$. Иногда под уравнением понимают левую часть, т. е. $v(x)$. Переменные x_i принимают значения в G . Множество $S \subseteq G^n$ решений некоторой системы уравнений $\{v_j(x) = 1 \mid j \in J\}$ называется алгебраическим подмножеством в аффинном пространстве G^n .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

Обозначим через $I(S) = \{v(x) \in F \mid v(s) = 1, s \in S\}$ аннулятор непустого алгебраического множества S и назовем *координатной группой* этого множества факторгруппу $\Gamma(S) = F/I(S)$. Очевидно, что G вкладывается в эту факторгруппу и $\Gamma(S)$ как G -группа порождается образами элементов $x_1, \dots, x_n$. Группу F можно понимать как группу уравнений от x с коэффициентами из G . В общем случае мы назовем *группой уравнений* от x над G любую группу D , которая порождается своей подгруппой G и множеством элементов $\{x_1, \dots, x_n\}$, если она удовлетворяет условию: всякое отображение $x \rightarrow (g_1, \dots, g_n)$ определяет G -эпиморфизм $D \rightarrow G$. Понятно, что D представляется в виде факторгруппы F/H . Среди таких D существует группа $\Gamma(G^n)$ с максимальным $H = I(G^n)$. На пространстве G^n определяется топология Зарисского: в качестве предбазы системы замкнутых множеств берутся все алгебраические множества. Доказано, что топология Зарисского на G^n при любом n является нётеровой тогда и только тогда, когда группа G *нётерова по уравнениям*. Последнее означает, что любая система уравнений над G от ограниченного числа переменных логически эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме. Понятно, что трудно изучать алгебраическую геометрию над группой, если она не нётерова по уравнениям.

В работе Скотта [3] дано следующее определение алгебраически замкнутой группы: это такая группа G , что любая конечная система уравнений и неравенств над G , имеющая решение в некоторой G -группе, имеет решение и в G . В [3] также доказано, что всякая группа вкладывается в алгебраически замкнутую. Хотя это определение используется также в [1], на наш взгляд, правильно здесь употребить термин *экзистенциально замкнутая группа*, ибо по сути утверждается, что любая $\exists$ -формула в сигнатуре теории групп с константами из G , истинная в некоторой G -группе, должна быть истинна в G . Как было показано в [1], для экзистенциально замкнутой группы G имеет место теорема Гильберта о нулях в следующей простой формулировке: пусть $H \triangleleft F = G * \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ и H порождается как нормальная подгруппа конечным числом элементов; тогда система $\{h(x_1, \dots, x_n) = 1 \mid h \in H\}$ имеет решение в G^n в том и только в том случае, если $H \cap G = 1$. Это также означает, что логические следствия конечной непротиворечивой системы уравнений составляют нормальную подгруппу группы F , порожденную этими уравнениями. Однако, по мнению автора, сформулированное утверждение не совсем верно называть аналогом классической теоремы Гильберта о нулях. Скорее, это аналог следующего простого по формулировке и доказательству утверждения: пусть K – экзистенциально замкнутое коммутативное кольцо; тогда логические следствия конечной системы полиномиальных над K уравнений $\{f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \mid i \in I\}$ в точности составляют идеал $(f_i \mid i \in I)$ кольца $K[x_1, \dots, x_n]$ при условии, что этот идеал пересекается с K по нулю.

Заметим, что любая экзистенциально замкнутая группа является “довольно плохой”. Она, например, содержит в качестве подгрупп все конечные группы, а точнее, симметрическую группу $S_\omega = \bigcup_n S_n$. Нетрудно показать, что группа S_ω не является нётеровой по уравнениям, а значит, и сама группа G

не нётерова по уравнениям. Такую группу сложно использовать в алгебраической геометрии. Допустим теперь, что группа G нётерова по уравнениям и для нее, как и выше, логические следствия конечной непротиворечивой системы уравнений в точности составляют нормальную подгруппу группы F , порожденную этими уравнениями. Возьмем тогда произвольную нормальную подгруппу H из F , пересекающуюся с G по единице, и рассмотрим систему уравнений $\{h(x_1, \dots, x_n) = 1 \mid h \in H\}$. Она эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме, а тогда H как нормальная подгруппа должна быть конечно порождена. Последнее при $n > 1$ невозможно для любой группы G в связи с тем, что в свободной группе $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ не всякая нормальная подгруппа конечно порождена (как нормальная подгруппа). Здесь, разумеется, можно и необходимо изменить ситуацию в лучшую сторону следующим образом. Понятно, что все G -тождества, т. е. элементы из $I(G^n)$ являются логическими следствиями любой системы уравнений. Поэтому в качестве группы уравнений нужно рассматривать не F , а $\Gamma(G^n) = F/I(G^n)$. Тогда, например, если G является конечно порожденной нильпотентной надабелевой группой, то и $\Gamma(G^n)$ будет конечно порожденной нильпотентной надабелевой группой, а значит, всякая ее нормальная подгруппа конечно порождена (как нормальная подгруппа). Однако в других интересных случаях этим свойством группа $\Gamma(G^n)$ не обладает, и поэтому логические следствия системы уравнений, вообще говоря, не будут получаться из исходных уравнений только с помощью стандартных операций перемножения, взятия обратного и сопряжения элементами группы. Нужно придумывать еще какие-то другие алгебраические правила вывода, если они вообще существуют.

Отметим, кроме того, что в классической алгебраической геометрии объединение конечного числа алгебраических множеств также является алгебраическим множеством, а значит, задается (конечной) системой уравнений. В алгебраической геометрии над нётеровыми по уравнениям группами замкнутое множество может не быть алгебраическим, но оно является объединением конечного числа неприводимых алгебраических множеств и поэтому задается (бескванторной) позитивной формулой – булевой комбинацией без отрицаний конечного множества уравнений. Поэтому в этом случае естественно рассматривать не системы уравнений, а позитивные формулы.

Теперь сформулируем, как можно трактовать теорему Гильберта о нулях в алгебраической геометрии над группами. Сначала ограничимся рассмотрением какого-то конкретного класса нётеровых по уравнениям групп, интересного с той или иной точки зрения. В этом классе должны существовать объекты, похожие на алгебраически замкнутые поля, назовем их *алгебраически замкнутыми группами* и докажем, что всякая группа рассматриваемого класса вкладывается в алгебраически замкнутую. Для данной алгебраически замкнутой группы G и данной позитивной формулы от переменных $x_1, \dots, x_n$, в которой равенства имеют вид $v = 1$, $v \in \Gamma(G^n)$, следует указать алгебраические правила построения всех логических следствий (в виде позитивных формул). В этом и будет состоять теорема Гильберта о нулях в рассматриваемом классе групп.

Было бы интересно, к примеру, найти подобный класс, содержащий свободные группы, и доказать для него теорему Гильберта о нулях. Причем постановка задачи будет проще, так как, скорее всего, для алгебраически замкнутого объекта будет выполняться условие $\Gamma(G^n) = F$ и вместо позитивных формул достаточно будет рассматривать обычные системы уравнений (напомним, что в топологии Зарисского над свободной группой всякое замкнутое множество является алгебраическим).

В настоящей работе поставленная выше задача решается для класса Σ_m жестких групп (определение жесткой группы будет дано в следующем параграфе) ступени разрешимости не выше m при любом натуральном m . Тем самым охватывается достаточно широкий спектр разрешимых групп, включающий в себя свободные разрешимые группы и итерированные сплетения абелевых групп без кручения, а также их подгруппы. Отметим, что в работе [4] был получен следующий принципиальный результат: всякая жесткая группа нётерова по уравнениям. В [5] определено понятие делимой жесткой группы и доказано, что произвольная m -жесткая группа вкладывается в делимую m -жесткую группу. В [6] были определены алгебраически замкнутые и экзистенциально замкнутые объекты в классе Σ_m и установлено, что делимые m -жесткие группы в точности являются как теми, так и другими. Именно для этих групп мы указываем алгебраический способ построения всех логических следствий данной позитивной формулы и получаем информацию о неприводимых компонентах соответствующего замкнутого множества. В каком-то смысле формулировка основного утверждения близка к формулировке классической теоремы Гильберта о нулях. В последней говорится, что при выводе следствий кроме стандартных конструкций построения элементов идеала, порожденного данными уравнениями, нужно еще добавлять элементы f такие, что f^k для некоторого $0 < k \in \mathbb{Z}$ лежит в этом идеале. В нашем случае стандартными являются конструкция построения нормальной подгруппы, порожденной данными уравнениями, и правила вывода исчисления высказываний, не содержащие отрицаний. К ним мы добавляем следующее новое правило. Пусть имеется уравнение $v = 1$. Предположим, что элемент v принадлежит подгруппе группы всех уравнений, которая распадается в полупрямое произведение BA , где A – абелева нормальная подгруппа в BA (на самом деле нами будут указаны конкретные такие подгруппы в конечном числе). Тогда A можно рассматривать как правый модуль над групповым кольцом $\mathbb{Z}B$. Предположим, что v имеет вид a^γ , где $a \in A$, $0 \neq \gamma \in \mathbb{Z}B$. Понятно, что если для каких-то значений переменных $v = 1$, то либо $a = 1$, либо $\gamma = 0$. Последнее равенство может выполняться лишь в том случае, если элемент γ лежит в разностном идеале $(B - 1)\mathbb{Z}B$. В этом случае представим γ в виде $u_1 + \dots + u_m - v_1 - \dots - v_m$, где $u_i, v_i \in B$ и множества $\{u_1, \dots, u_m\}$ и $\{v_1, \dots, v_m\}$ не пересекаются. Это представление единственно с точностью до перестановки u_i и v_i . Поставим в соответствие элементу γ позитивную формулу

$$\Theta(\gamma) = \bigvee_{\sigma \in S_m} (u_1 = v_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge u_m = v_{\sigma(m)}).$$

Если $\gamma \notin (B-1)\mathbb{Z}B$, то считаем $\Theta(\gamma)$ ложью. Правило вывода состоит в замене уравнения $v = 1$ формулой $a = 1 \vee \Theta(\gamma)$. Более точные определения и формулировку основного результата приведем далее. Можно сказать, что в отличие от классической теоремы Гильберта показатель степени γ зависит от переменных.

Отметим, что наши доказательства существенно опираются на упомянутый результат о нётеровости по уравнениям жестких групп из [4], описание координатных групп неприводимых алгебраических множеств над делимой жесткой группой из [7] и на технику, развитую в этих работах.

Заметим, что в работе [2] (параграф “Радикалы и обобщенная Nullstellensatz”) был предложен общий подход к построению логических следствий (радикалов в G -группах) на языке формальных логических систем. При этом подходе можно обходиться без алгебраически замкнутых объектов, поскольку решения уравнений рассматриваются во всех G -группах данного класса. В частности, было показано, что если группа G является нётеровой по уравнениям, то логические следствия относительно G полностью определяются квазимногообразием, порожденным группой G (квазиэквациональной теорией группы G), что дает способ построения радикалов. Однако в силу своей общности данное описание радикалов трудно применять на практике, особенно в тех классах групп, где квазиэквациональная теория сложна или недостаточно изучена. Наша точка зрения состоит в том, что, прежде чем доказать теорему Гильберта о нулях в хорошей формулировке, необходимо подробно изучить алгебраическую геометрию над (алгебраически замкнутыми) группами данного класса, что было уже сделано в случае жестких групп.

Автор благодарит А. Г. Мясникова за полезные обсуждения тематики работы.

§ 2. Некоторые определения и известные факты

2.1. Как обычно, для элементов a, b данной группы полагаем

$$a^b = b^{-1}ab, \quad [a, b] = a^{-1}b^{-1}ab.$$

Напомним, что если A – абелева нормальная подгруппа в группе G , то действие G на A сопряжениями определяет действие целочисленного группового кольца $\mathbb{Z}[G/A]$, вследствие чего на A возникает структура правого $\mathbb{Z}[G/A]$ -модуля.

2.2. Группа G называется *m -жесткой*, если в ней существует нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_m > G_{m+1} = 1,$$

факторгруппы G_i/G_{i+1} которого абелевы и как правые $\mathbb{Z}[G/G_i]$ -модули не имеют модульного кручения. Из [8] следует, что такой ряд, если он вообще существует, определяется группой G однозначно, кроме того, ступень разрешимости группы в точности равна m . Назовем соответствующий ряд *жестким* и

для его членов введем обозначения $G_i = \rho_i(G)$. Жесткой группой называется m -жесткая для некоторого m группа. Важными примерами жестких групп являются свободные разрешимые группы. Класс жестких групп замкнут относительно подгрупп и факторгрупп вида $G/\rho_i(G)$. Целочисленное групповое кольцо $\mathbb{Z}G$ жесткой группы G является кольцом Оре, через $Q(G)$ обозначим его тело частных.

Согласно [5] жесткая группа G называется делимой, если элементы факторгруппы $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, или, другими словами, $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ является (правым) векторным пространством над телом частных $Q(G/\rho_i(G))$ этого кольца. Наконец, жесткая группа G называется расщепимой, если она распадается в последовательное полупрямое произведение $A_1 A_2 \cdots A_m$ (A_i нормализует A_j при $i < j$) абелевых групп $A_i \cong \rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ и $A_i A_{i+1} \cdots A_m = \rho_i(G)$. Делимая расщепимая жесткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностями α_i баз соответствующих векторных пространств A_i , она обозначается через $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. В [6] доказано, что любая делимая группа расщепляется, т. е. изоморфна группе вида $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Говорят, что m -жесткая группа G вложена в m -жесткую группу H с сохранением линейной независимости, если любая система элементов из $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, остается линейно независимой и над кольцом $\mathbb{Z}[H/\rho_i(H)]$. Здесь используются равенства $\rho_i(G) = \rho_i(H) \cap G$, вследствие чего можно считать

$$\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G) \leq \rho_i(H)/\rho_{i+1}(H), \quad \mathbb{Z}[G/\rho_i(G)] \leq \mathbb{Z}[H/\rho_i(H)].$$

В [5] установлено, что всякая m -жесткая группа вкладывается с сохранением линейной независимости в подходящую группу $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Вложения с сохранением линейной независимости для краткости назовем *независимыми*, они играют важную роль в теории жестких групп.

Обозначим через Σ_m класс всех жестких групп ступени разрешимости $\leq m$. Будем говорить, что нетривиальная группа $G \in \Sigma_m$ алгебраически замкнута в классе Σ_m (по независимым вложениям), если из того, что G независимо вложена в $H \in \Sigma_m$, следует, что любая система уравнений от конечного числа переменных с коэффициентами из G , имеющая решение над H , имеет решение над G . Соответственно группа G называется экзистенциально замкнутой (по независимым вложениям), если любая $\exists$ -формула с коэффициентами из G , истинная на H , истинна на G . В [6] доказано, что алгебраически замкнутые в классе Σ_m группы – это в точности делимые m -жесткие группы, они же являются в точности экзистенциально замкнутыми объектами в рассматриваемом классе.

2.3. Итак, мы будем рассматривать делимую m -жесткую группу $G = M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Зафиксируем ее расщепление $A_1 A_2 \cdots A_m$ в полупрямое произведение абелевых подгрупп. Полагаем для краткости $A = A_1 \cdots A_{m-1}$. Группу G можно отождествить с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} = AA_m$, где $T = t_1 Q(A) + \cdots$ – векторное пространство над телом $Q(A)$ с базой $\{t_1, \dots\}$ мощности α_m , $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$.

Важный момент состоит в следующем. Как и в [4], мы обычные переменные $x_1, \dots, x_n$ расщепим, т. е. представим каждое x_i в виде произведения $x_{i1} \cdots x_{im}$, где x_{ij} принимает значение в A_j . Новые переменные назовем *специальными*. На самом деле специальные переменные можно рассматривать как обычные, но при этом они должны удовлетворять уравнениям $[x_{ij}, a_j] = 1$, где a_j – какой-то нетривиальный элемент из A_j . Пусть X обозначает множество всех специальных переменных, X' – его подмножество, состоящее из переменных x_{ij} с условием $j < m$. Естественным образом определяются *специальные алгебраические множества*, они будут подмножествами множества $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m)^n$, которое можно отождествить с G^n . Также естественно определяются координатные группы специальных алгебраических множеств.

В работе [4] построена координатная группа $D = G[X]$ аффинного пространства G^n в специальных переменных X . Укажем ее вид. Пусть по индукции построена координатная группа $C = A[X']$ аффинного пространства A^n в специальных переменных X' , она является $(m-1)$ -жесткой и расщепляется в полупрямое произведение $D_1 \cdots D_{m-1}$ абелевых подгрупп. Рассмотрим правый $\mathbb{Z}C$ -модуль T_C , который является прямой суммой модуля $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}C$ и свободного модуля $x_{1m} \cdot \mathbb{Z}C + \cdots + x_{nm} \cdot \mathbb{Z}C$ с базой $\{x_{1m}, \dots, x_{nm}\}$. Тогда полагаем

$$D = G[X] = \Gamma(G^n) = \begin{pmatrix} C & 0 \\ T_C & 1 \end{pmatrix} = D_1 \cdots D_m = CD_m,$$

где $D_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_C & 1 \end{pmatrix}$. При этом переменная x_{ij} для $j < m$ отождествляется с матрицей $\begin{pmatrix} x_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а для $j = m$ – с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x_{im} & 1 \end{pmatrix}$. Имеется канонический гомоморфизм модуля $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}C$ в векторное пространство $t_1 \cdot Q(C) + \cdots$ над телом $Q(C)$ с базой $\{t_1, \dots\}$. Из [7, лемма 3] следует, что этот гомоморфизм является вложением; в частности, модуль $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}C$ не имеет кручения.

Отметим, что если $f \in D$ и $f = f_1 \cdots f_m$, где $f_j \in D_j$, то при любых значениях специальных переменных X значения f_j принадлежат A_j . В частности, если для данных значений переменных $f = 1$, то и все $f_j = 1$.

2.4. Нам понадобится рассматривать так называемые *кольцевые уравнения*. В нашей ситуации это будут уравнения вида $\gamma = 0$, где $\gamma \in \mathbb{Z}C$, при этом значения переменных x_{ij} по-прежнему ищутся в A_j . Понятно, что если некоторые значения $x_{ij} \in A_j$ удовлетворяют уравнению, то $\gamma \in (C-1)\mathbb{Z}C$. Во введении мы определили позитивную формулу $\Theta(\gamma)$, в нашем случае она зависит от переменных X' . Легко видеть, что эта формула логически равносильна уравнению $\gamma = 0$.

§ 3. Алгебраические следствия и формулировка теоремы

Позитивной формулой от X над G будем называть булеву комбинацию без отрицаний уравнений от X над G либо утверждений “истина” или “ложь”. Если g – нетривиальный элемент группы G , то утверждение $g = 1$ считаем ложью, утверждение $1 = 1$ является истиной. Обычно позитивную формулу будем представлять в дизъюнктивной нормальной форме $\Phi = \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_k$.

Назовем *стандартными* правилами вывода для позитивных формул следующие два типа:

1) правила вывода

$$(f = 1) \vdash (f^{-1} = 1), \quad (f = 1 \wedge h = 1) \vdash (fh = 1), \quad (f = 1) \vdash (f^h = 1), \\ f, h \in D,$$

которые соответствуют построению нормальной подгруппы, порожденной данными уравнениями;

2) *пропозициональные* правила вывода, взятые из исчисления высказываний и аксиом булевой алгебры без отрицаний.

Также будут применяться два дополнительных правила вывода.

3) *Расщепление уравнения*. Пусть $f \in D$ и $f = f_1 \cdots f_m$, где $f_j \in D_j$. Правило вывода определяется в виде

$$(f = 1) \vdash (f_1 = 1 \wedge \cdots \wedge f_m = 1).$$

С учетом этого правила можно считать, что всякое уравнение вида $f = 1$ переписывается как система $f_1 = 1 \wedge \cdots \wedge f_m = 1$.

4) *Разветвление уравнения*. По индукции предполагаем, что это правило уже определено для уравнений $f = 1$ при $f \in D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{m-1}$. Пусть $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \in D_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_C & 1 \end{pmatrix}$. Предположим, элемент $v \in V$ делится в T_C на $\gamma \in \mathbb{Z}C$, т.е. $v = u\gamma$, где $u \in T_C$. Полагаем $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$. Понятно, что уравнение $f = 1$, которое переписывается в виде $v = 0$, логически эквивалентно дизъюнкции $u = 0 \vee \gamma = 0$. В свою очередь, мы знаем, что кольцевое уравнение $\gamma = 0$ эквивалентно позитивной формуле $\Theta(\gamma)$, которая была определена во введении. Правило вывода определяется следующим образом:

$$(f = 1) \vdash (f = 1) \wedge ((h = 1) \vee \Theta(\gamma)).$$

Данная позитивная формула $\Phi = \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_k$ задает в аффинном пространстве G^n замкнутое подмножество, которое обозначим через $S(\Phi)$. Оно является объединением алгебраических множеств $S(\Phi_1), \dots, S(\Phi_k)$. Назовем $S(\Phi)$ *опорным множеством формулы* Φ .

Назовем *верхней частью формулы* $\Phi = \Phi_1 \vee \cdots \vee \Phi_k$ с расщепленными уравнениями подформулу $\Phi' = \Phi'_1 \vee \cdots \vee \Phi'_k$, в которой оставлены только уравнения от X' над A , т.е. уравнения, левые части которых принадлежат $D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_{m-1}$. Обозначим через $S'(\Phi)$ опорное множество формулы Φ' в A^n . Назовем $S'(\Phi)$ *верхним множеством формулы* Φ . Понятно, что формула Φ' является пропозициональным следствием формулы Φ (получается применением пропозициональных правил вывода) и множество $S'(\Phi)$ содержит проекцию множества $S(\Phi)$ на A^n . Отметим, что если формула Ψ получается из Φ с помощью разветвления уравнения, то $S(\Phi) = S(\Psi)$, $S'(\Phi) \supseteq S'(\Psi)$ и Φ является логическим следствием Ψ .

Нас будут интересовать следствия данной формулы Φ во множестве позитивных формул. При этом будем рассматривать логические следствия и алгебраические следствия. По определению формула Ψ является *логическим следствием* формулы Φ , если $S(\Psi) \supseteq S(\Phi)$. Формулы, получаемые из Φ с помощью

стандартных правил вывода, расщеплений и разветвлений уравнений, назовем *алгебраическими следствиями* Φ . Из определений следует, что множество алгебраических следствий содержится во множестве логических следствий.

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. *Для любой позитивной формулы от X над $G = M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ множество ее алгебраических следствий совпадает с множеством логических следствий.*

Отсюда получается и слабая форма теоремы Гильберта: формула Φ не имеет решений в G^n тогда и только тогда, когда среди ее алгебраических следствий содержится ложь.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Правило вывода разветвления уравнений

$$(f = 1) \vdash (f = 1) \wedge ((h = 1) \vee \Theta(\gamma))$$

можно было бы заменить правилом

$$(f = 1) \vdash (h = 1) \vee \Theta(\gamma),$$

так как формулы $(f = 1) \wedge ((h = 1) \vee \Theta(\gamma))$ и $(h = 1) \vee \Theta(\gamma)$ эквивалентны по стандартным правилам вывода.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При определении алгебраических следствий мы можем исключить из правил вывода расщепления уравнений, поскольку они получаются из остальных правил вывода.

Действительно, замечание 2 справедливо. Пусть $f = \begin{pmatrix} c & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \in D$, $c \in C$, $v \in T_C$. Выберем нетривиальный элемент $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \in G$ и рассмотрим коммутатор $[f, g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t(1-c) & 1 \end{pmatrix}$. Уравнение $[f, g] = 1$ получается из $f = 1$ с помощью стандартных правил вывода. Из него с помощью разветвления получаем уравнение $c = 1$. Далее по индукции можно считать, что последнее уравнение расщепляется с помощью стандартных правил вывода и разветвлений. Отсюда следует, что это верно и для уравнения $f = 1$.

§ 4. Доказательство теоремы

По индукции предполагаем, что утверждение теоремы выполнено для формул от X' над A . Также предполагаем, что в формулах все уравнения расщеплены.

4.1. Нам понадобятся некоторые конструкции и две вспомогательные леммы.

Пусть в этом пункте формула Φ является системой уравнений от X над G и множество $S' = S'(\Phi)$ непусто и неприводимо. Пусть $\bar{C} = \Gamma(S') = C/I(S')$ – координатная группа множества S' . Как показано в [7], группа $\bar{C}$ будет $(m-1)$ -жесткой, поэтому кольцо $\mathbb{Z}\bar{C}$ является кольцом Оре, модуль $T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}\bar{C}$ над этим

кольцом вкладывается каноническим образом в векторное пространство над телом $Q(\overline{C})$. Полагаем

$$T_{\overline{C}} = T \otimes_{\mathbb{Z}A} \mathbb{Z}\overline{C} + x_{1m} \cdot \mathbb{Z}\overline{C} + \cdots + x_{nm} \cdot \mathbb{Z}\overline{C},$$

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} \overline{C} & 0 \\ T_{\overline{C}} & 1 \end{pmatrix} = \overline{C} \cdot \overline{D}_m, \quad \overline{D}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_{\overline{C}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеются канонические эпиморфизмы групп $C \rightarrow \overline{C}$, колец $\mathbb{Z}C \rightarrow \mathbb{Z}\overline{C}$, модулей $T_C \rightarrow T_{\overline{C}}$ и групп $D \rightarrow \overline{D}$. Чертой сверху обозначаем применение соответствующего эпиморфизма. Рассмотрим нормальную подгруппу H из D , порожденную левыми частями уравнений формулы Φ . Она разлагается в полупрямое произведение: $H = H' H_m$, где $H' \triangleleft C$,

$$H_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} \leq D_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_C & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество V является подмодулем в T_C , а $\overline{V}$ – подмодулем в $T_{\overline{C}}$. Обозначим через W изолятор подмодуля $\overline{V}$ в $T_{\overline{C}}$.

ЛЕММА 1. Пусть $u \in T_C$ и $\bar{u} \in W$. Пусть $\bar{u} \cdot \bar{\gamma} \in \overline{V}$, где $0 \neq \bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\overline{C}$. Тогда к системе уравнений Φ можно добавить несколько уравнений от X' над A , которые являются алгебраическими следствиями Φ' , так что в новой ситуации $u\gamma$ будет принадлежать V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $\bar{u} \cdot \bar{\gamma} = \bar{v}$ для некоторого $v \in V$. Тогда $v - u\gamma$ лежит в ядре гомоморфизма $T_C \rightarrow T_{\overline{C}}$. Это ядро как подмодуль в T_C порождается элементами вида $z(f-1)$, где $z \in T_C$, $f \in I(S')$. Выберем конечное множество $\{z_1(f_1-1), \dots, z_r(f_r-1)\}$ элементов такого вида, через которое выражается $v - u\gamma$. Добавим к Φ систему уравнений $f_1 = 1 \wedge \cdots \wedge f_r = 1$, при этом H' заменится на подгруппу $\langle H', f_1, \dots, f_r \rangle$. В новой ситуации $u\gamma$ будет принадлежать V . Осталось отметить, что любое уравнение $f = 1$, где $f \in I(S')$, является логическим следствием системы Φ' , а значит, по индукции и алгебраическим следствием. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $W \cap T = 0$, то опорное множество формулы Φ непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим группу $(\begin{smallmatrix} \overline{C} & 0 \\ T_{\overline{C}/W} & 1 \end{smallmatrix})$. Согласно [7, теорема 3] она является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества $S \subseteq G^n$, причем замыкание проекции S на A^n равно S' , так что S непусто. Из построений вытекает, что формула Φ выполняется на S , т. е. $S(\Phi) \supseteq S$. Лемма доказана.

4.2. Сначала докажем аналог теоремы Гильберта о нулях в слабой формулировке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если опорное множество позитивной формулы Φ является пустым, то среди алгебраических следствий Φ содержится ложь.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда Φ является системой уравнений. Пусть $S' = S'(\Phi)$. Если множество S' пусто, то по индукционному предположению среди алгебраических следствий формулы Φ' , а значит, и Φ имеется ложь. Допустим, что S' непусто. Используя нётеровость топологии Зарисского, по индукции предполагаем, что предложение выполняется для любой системы уравнений Ψ с условием $S(\Psi) = \emptyset$ и $S'(\Psi) \subsetneq S'$.

Разберем сначала случай, когда множество S' приводимо. Пусть $S' = S'_1 \cup \dots \cup S'_k$ – разложение на неприводимые компоненты. Выберем элементы $f_1, \dots, f_k \in C$ такие, что $f_i \in I(S'_i) \setminus I(S')$. Формула $f_1 = 1 \vee \dots \vee f_k = 1$ является логическим следствием формулы Φ' , а значит, по индукции и алгебраическим следствием. Тогда $\Phi \wedge (f_1 = 1) \vee \dots \vee \Phi \wedge (f_k = 1)$ будет алгебраическим следствием формулы Φ . Поскольку $S'(\Phi \wedge (f_i = 1)) \subsetneq S'$, можно утверждать, что каждая компонента $\Phi \wedge (f_i = 1)$ среди алгебраических следствий содержит ложь. Отсюда следует аналогичный вывод для Φ .

Предположим, что S' – неприводимое алгебраическое множество. Будем использовать конструкции и обозначения из п 3.1. Из леммы 2 следует, что $W \cap T > 0$. Пусть $0 \neq t \in W \cap T$. Тогда существует ненулевой элемент $\bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\bar{C}$ такой, что $t\bar{\gamma} = \bar{v} \in \bar{V}$, $v \in V$. По лемме 1 к Φ можно добавить несколько уравнений, которые являются алгебраическими следствиями Φ' , так что в новой ситуации имеем $t\gamma \in V$. Теперь рассмотрим разветвление

$$\Phi \rightarrow \Phi \wedge (t = 0) \vee \Phi \wedge \Psi_1 \vee \dots \vee \Phi \wedge \Psi_r,$$

где $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$ – дизъюнкция уравнений от X' над A , равносильная $\gamma = 0$. Формула $t = 0$ является ложью. Отметим также, что для каждого i множество $S'(\Phi \wedge \Psi_i)$ строго меньше S' , следовательно, по индукции среди алгебраических следствий каждой формулы $\Phi \wedge \Psi_i$, а значит, и формулы Φ есть ложь. Предложение доказано.

4.3. Назовем *элементарными преобразованиями формулы* Φ разветвления или умножения (имеется в виду операция конъюнкции) какой-либо дизъюнктивной компоненты Φ_i на формулу от X' над A , которая являются следствием Φ'_i . Из определений следует, что если одна формула получается из другой элементарными преобразованиями, то эти формулы алгебраически эквивалентны.

Пусть Φ является системой уравнений от X над G , $S = S(\Phi)$, $S' = S'(\Phi)$. Предположим, что формула $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$ получается из Φ при помощи элементарных преобразований. Тогда можно утверждать, что $S(\Psi_i) \subseteq S$, $S'(\Psi_i) \subseteq S'$. Назовем систему уравнений Φ *предельной*, если для любой формулы $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$, полученной из Φ при помощи элементарных преобразований, выполняются условия:

- 1) хотя бы одно множество $S(\Psi_i)$ равно S ;
- 2) если $S(\Psi_i) = S$, то $S'(\Psi_i) = S'$.

Произвольную позитивную формулу назовем *предельной*, если предельными являются все ее дизъюнктивные компоненты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Любую позитивную формулу с помощью элементарных преобразований можно превратить в предельную.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть формула Φ является контрпримером. Тогда одна из ее дизъюнктивных компонент (пусть Φ_1) также является контрпримером. По предположению из Φ_1 путем элементарных преобразований можно получить формулу, каждая дизъюнктивная компонента которой не удовлетворяет либо условию 1), либо условию 2). Одна из этих компонент (пусть Φ_2) также должна быть контрпримером и т. д. Получаем бесконечную последовательность формул $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ такую, что для любого индекса выполнены включения $S(\Phi_i) \supseteq S(\Phi_{i+1})$, $S'(\Phi_i) \supseteq S'(\Phi_{i+1})$ и хотя бы одно из двух включений строгое. Это противоречит нётеровости топологии Зарисского на G^n или A^n . Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть система уравнений Φ является предельной и ее опорное множество $S = S(\Phi)$ непусто. Тогда оно неприводимо и замыканием проекции S на A^n является $S' = S'(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что множество S' приводимо и $S' = S'_1 \cup \dots \cup S'_k$ – разложение на неприводимые компоненты. Выберем элементы $f_1, \dots, f_k \in C$ такие, что $f_i \in I(S'_i) \setminus I(S')$. Формула $f_1 = 1 \vee \dots \vee f_k = 1$ является следствием формулы Φ' . Формула $\Phi \wedge (f_1 = 1) \vee \dots \vee \Phi \wedge (f_k = 1)$, полученная из Φ с помощью элементарного преобразования, не удовлетворяет условию 2). Это противоречит предельности Φ .

Итак, множество S' неприводимо. Далее используем конструкции и обозначения из п. 4.1. Покажем, что $W \cap T = 0$. Допустим противное, а именно $W \cap T > 0$ и $0 \neq t \in W \cap T$, $0 \neq \bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\bar{C}$, $t\bar{\gamma} = \bar{v} \in \bar{V}$, $v \in V$. По лемме 1 к Φ можно добавить несколько уравнений, которые являются алгебраическими следствиями Φ' так, что в новой ситуации $t\gamma \in V$. Теперь рассмотрим разветвление

$$\Phi \rightarrow \Phi \wedge (t = 0) \vee \Phi \wedge \Psi_1 \vee \dots \vee \Phi \wedge \Psi_r,$$

где $\Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$ – дизъюнкция уравнений от X' над A , равносильная $\gamma = 0$. Снова компоненты разложения не удовлетворяет условию 1) или 2), что противоречит предельности Φ .

Рассмотрим теперь группу $(\bar{C}/W \ 0 \ 1)$. Согласно [7, теорема 3] она является координатной группой некоторого неприводимого алгебраического множества $P \subseteq G^n$, причем замыкание проекции P на A^n равно S' . Покажем, что $P = S$. По построению $P \subseteq S$, так как формула Φ на P выполняется. Для доказательства обратного включения необходимо установить, что если $f \in I(P)$, то $f(S) = 1$. Пусть $f = f'f_m$, где $f' \in C$, $f_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \in D_m$. Поскольку $f'(S) = f'(S') = 1$, достаточно доказать, что $u(S) = 0$. Известно, что $\bar{u} \in W$. Пусть $0 \neq \bar{\gamma} \in \mathbb{Z}\bar{C}$, $\bar{u} \cdot \bar{\gamma} = \bar{v} \in \bar{V}$, $v \in V$. С использованием леммы 1 можно предполагать, что $u\gamma \in V$. Берем разветвление $\Phi \rightarrow \Phi \wedge (u = 0) \vee \Phi \wedge (\gamma = 0)$. Из условия предложения следует, что опорное множество любой дизъюнктивной

компоненты формулы $\Phi \wedge (\gamma = 0)$ должно быть меньше S , иначе не выполняется 2). Тогда опорное множество формулы $\Phi \wedge (u = 0)$ должно быть равно S . Отсюда $u(S) = 0$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть система уравнений Φ является предельной и ее опорное множество $S = S(\Phi)$ непусто. Тогда любое логическое следствие формулы Φ является ее алгебраическим следствием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S' = S'(\Phi)$. Предположим, что формула $\Psi = \Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$ является логическим следствием Φ . Тогда $S(\Psi) \supseteq S$. Поскольку последнее множество неприводимо, некоторое $S(\Psi_i)$ содержит S . Поэтому можно считать, что Ψ является системой уравнений. Достаточно установить, что любое уравнение $f = 1$, где $f \in I(S)$, является алгебраическим следствием Φ . Пусть $f = f' f_m$, где $f' \in C$, $f_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix} \in D_m$. Поскольку $f'(S') = 1$, по индукции формула $f' = 1$ является алгебраическим следствием формулы Φ' , которая в свою очередь является алгебраическим следствием формулы Φ . Поэтому задача сводится к случаю, когда $f = f_m$. С учетом нётеровости топологии Зарисского на G^n можно по индукции предполагать, что утверждение предложения верно для формул, удовлетворяющих его условию, опорное множество которых меньше S . Поскольку $u(S) = 0$, в обозначениях из п. 4.1 имеем $\bar{u} \in W$. Пусть $0 \neq \bar{\gamma} \in \overline{ZC}$, $\bar{u} \cdot \bar{\gamma} = \bar{v} \in \bar{V}$, $v \in V$. С использованием леммы 1 можно предполагать, что $u\gamma \in V$. Рассмотрим разветвление

$$\Phi \rightarrow \Phi \wedge (u = 0) \vee \Phi \wedge (\gamma = 0) = \Phi \wedge (u = 0) \vee \Phi \wedge \Phi_1 \vee \dots \vee \Phi \wedge \Phi_k;$$

здесь $\gamma = 0$ переписывается в виде $\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_k$. Поскольку формула Φ предельна и множества $S'(\Phi \wedge \Phi_i)$ строго меньше S' , множества $S(\Phi \wedge \Phi_i)$ должны быть строго меньше S . Тогда по индукции формула $u = 0$ является алгебраическим следствием каждой формулы $\Phi \wedge \Phi_1, \dots, \Phi \wedge \Phi_k$. Значит, $u = 0$ является алгебраическим следствием $\Phi \wedge (u = 0) \vee \Phi \wedge \Phi_1 \vee \dots \vee \Phi \wedge \Phi_k$, а потому и Φ . Предложение доказано.

4.4. Наконец, мы можем завершить доказательство теоремы. Пусть формула $\Psi = \Psi_1 \vee \dots \vee \Psi_r$ является логическим следствием формулы Φ , т. е. $S(\Psi) \supseteq S(\Phi)$. Если $S(\Phi) = \emptyset$, то применяем предложение 1. Пусть множество $S(\Phi)$ непусто. По предложению 2 формулу Φ можно заменить предельной. Затем оставим в этой формуле только те дизъюнктивные компоненты, которые соответствуют разложению множества $S(\Phi)$ на неприводимые подмножества, так как по предложениям 3, 4 каждая выброшенная дизъюнктивная компонента будет давать в качестве алгебраического следствия одну из оставленных, а потому новая формула будет алгебраическим следствием старой. Пусть в результате $\Phi = \Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_k$. Мы можем утверждать, что найдутся $\Psi_{i_1}, \dots, \Psi_{i_k}$ такие, что $S(\Phi_1) \subseteq S(\Psi_{i_1}), \dots, S(\Phi_k) \subseteq S(\Psi_{i_k})$. Тогда по предложению 4 формула

$\Psi_{i_1} \vee \dots \vee \Psi_{i_k}$, а значит, и формула Ψ являются алгебраическим следствием формулы Φ . Теорема доказана.

Список литературы

1. G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, “Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory”, *J. Algebra*, **219**:1 (1999), 16–79.
2. A. Myasnikov, V. Remeslennikov, “Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations”, *J. Algebra*, **234**:1 (2000), 225–276.
3. W.R. Scott, “Algebraically closed groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **2**:1 (1951), 118–121.
4. Н. С. Романовский, “Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп”, *Алгебра и логика*, **48**:2 (2009), 258–279; англ. пер.: N.S. Romanovskii, “Equational Noetherianness of rigid soluble groups”, *Algebra Logic*, **48**:2 (2009), 147–160.
5. Н. С. Романовский, “Делимые жесткие группы”, *Алгебра и логика*, **47**:6 (2008), 762–776; англ. пер.: N.S. Romanovskii, “Divisible rigid groups”, *Algebra Logic*, **47**:6 (2008), 426–434.
6. А. Г. Мясников, Н. С. Романовский, “Логические аспекты теории делимых жестких групп”, *Докл. РАН*, **459**:2 (2014), 154–155; англ. пер.: A.G. Myasnikov, N.S. Romanovskii, “Logical aspects of the theory of divisible rigid groups”, *Dokl. Math.*, **90**:3 (2014), 697–698.
7. Н. С. Романовский, “Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жесткими группами”, *Алгебра и логика*, **48**:6 (2009), 793–818; англ. пер.: N.S. Romanovskii, “Irreducible algebraic sets over divisible decomposed rigid groups”, *Algebra Logic*, **48**:6 (2009), 449–464.
8. A. Myasnikov, N. Romanovskiy, “Krull dimension of solvable groups”, *J. Algebra*, **324**:10 (2010), 2814–2831.

НИКОЛАЙ СЕМЕНОВИЧ РОМАНОВСКИЙ
(NIKOLAI S. ROMANOVSKIY)

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
г. Новосибирск
E-mail: rmnvski@math.nsc.ru

Поступило в редакцию
10.09.2014