Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Неретин, Бесконечномерные p -адические группы, полугруппы двойных классов смежности и внутренние функции на ансамблях Брюа–Титса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 3, 87–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8299>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 11:50:12

УДК 512.625.5+512.741.5+512.816.4

Ю. А. Неретин

Бесконечномерные p -адические группы, полугруппы двойных классов смежности и внутренние функции на ансамблях Брюа–Титса

Строятся p -адические аналоги операторных узлов и их характеристических функций. Рассмотрена p -адическая группа $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$, ее подгруппа $L = \mathrm{O}(k\infty, \mathbb{Z}_p)$ и подгруппа $\mathbf{K} = \mathrm{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$, вложенная в L по диагонали. Показано, что множество двойных классов смежности $\Gamma = \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ обладает структурой полугруппы, Γ естественным образом действует в пространстве всех $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов любого унитарного представления группы $\mathbf{G}$. Каждому двойному классу смежности поставлена в соответствие “характеристическая функция” – отображение, которое переводит некоторый ансамбль Брюа–Титса в другой ансамбль (ансамбли конечномерны); образ остова содержится в остове. Второй ансамбль обладает структурой полугруппы (Назарова), произведение в Γ соответствует поточечному умножению характеристических функций.

Библиография: 45 наименований.

Ключевые слова: ансамбли Брюа–Титса, решетки, представление Вейля, характеристические функции, симплицальные отображения.

DOI: 10.4213/im8299

§ 1. Вырождение алгебр Гекке–Ивахори в бесконечномерном пределе

1.1. Гипергруппы двойных классов смежности. Рассмотрим группу G , ее компактную подгруппу K и пространство двойных классов смежности $K \setminus G/K$, т. е. факторпространство группы G по отношению эквивалентности

$$g \sim k_1 g k_2, \quad k_1, k_2 \in K.$$

Любой двойной класс смежности $\mathfrak{g} = KgK$ обладает единственной вероятностной мерой $\mu_{\mathfrak{g}}$, инвариантной относительно левых и правых сдвигов на элементы K . Свертка мер $\mu_{\mathfrak{g}}, \mu_{\mathfrak{h}}$ представима в виде

$$\mu_{\mathfrak{g}} * \mu_{\mathfrak{h}} = \int_{K \setminus G/K} \mu_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}) d\sigma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(\mathfrak{r}),$$

где $\sigma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ – положительная вероятностная мера на $K \setminus G/K$. Таким образом, мы получаем отображение

$$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \mapsto \sigma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке FWF (гранты P22122 и P25142).

из $K \backslash G/K \times K \backslash G/K$ в пространство вероятностных мер на $K \backslash G/K$. Такие алгебраические структуры называются *гипергруппами* (см., например, [1]). Кроме того, отображение $g \mapsto g^{-1}$ индуцирует инволюцию $\mu \mapsto \mu^*$ в гипергруппе,

$$(\mu_{\mathfrak{g}} * \mu_{\mathfrak{h}})^* = \mu_{\mathfrak{h}}^* * \mu_{\mathfrak{g}}^*.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Мы можем переформулировать вышеизложенное в следующих двух формах.

а) Обозначим через $\mathcal{M}(K \backslash G/K)$ пространство всех (знаконеопределенных) мер на G с компактным носителем, инвариантных относительно левых и правых сдвигов на элементы группы K . Множество $\mathcal{M}(K \backslash G/K)$ является алгеброй по отношению к операции свертки.

б) Пусть G – локально компактная группа с двусторонне инвариантной мерой Хаара dg . Рассмотрим множество $C(K \backslash G/K)$ функций на G с компактным носителем, инвариантных относительно левых и правых сдвигов на элементы K . Пространство $C(K \backslash G/K)$ является алгеброй относительно свертки, иногда называемой (*обобщенной*) *алгеброй Гекке–Ивахори*.

Пусть ρ – унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H . Обозначим через H^K пространство K -неподвижных векторов, пусть P^K – ортогональный проектор на H^K и $g \in \mathfrak{g}$. Определим оператор $H^K \rightarrow H^K$ по формуле

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g}) := P^K \rho(g)|_{H^K}. \quad (1.1)$$

Легко видеть, что $\bar{\rho}(\mathfrak{g})$ зависит лишь от двойного класса смежности, а не от его представителя g . Операторы $\bar{\rho}(g)$ могут быть представлены в виде

$$\bar{\rho}(g) = \int_{K \times K} \rho(k_1 g k_1) dk_1 dk_2 \Big|_{H^K} = \int_K \rho(kg) dk \Big|_{H^K}.$$

Мы получаем представление гипергруппы в H^K в следующем смысле:

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g} * \mathfrak{h}) = \int \bar{\rho}(\mathfrak{r}) d\sigma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}(\mathfrak{r}).$$

Несколько частных случаев этой конструкции интенсивно используется в теории представлений, в частности, для следующих пар $G \supset K$:

1) G – вещественная полупростая группа, а K – ее максимальная компактная подгруппа; или G – компактная группа Ли, а K – ее симметрическая подгруппа [2], [3];

2) G – группа Шевалле, а K – ее борелевская подгруппа [4];

3) G – полупростая группа над p -адическим полем, а K – ее подгруппа Ивахори [5].

Даже для $(G, K) = (\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \mathrm{SO}(2))$ явное описание мер $\sigma_{\mathfrak{g}, \mathfrak{h}}$ нетривиально (см. [6]).

Для меньших подгрупп $K \subset G$ в полупростых группах гипергруппы $K \backslash G/K$ становятся слишком сложными объектами. Для некомпактных подгрупп K не существует *конечных* $(K \times K)$ -инвариантных мер на $K \backslash G/K$. С другой стороны, свертка бесконечных мер не определена (за исключением некоторых экзотических ситуаций).

В 1970-х годах Р. С. Исмагилов и Г. И. Ольшанский обнаружили, что картина может резко меняться при переходе к бесконечномерным группам.

Обсудим вещественный прототип нашей p -адической конструкции.

1.2. Операторные узлы. Обозначим через $U(\infty)$ группу *финитных*¹ бесконечных унитарных матриц и через $O(\infty) \subset U(\infty)$ группу вещественных ортогональных матриц. Мы также используем обозначение $U(n + \infty)$ для группы блочных *финитных* унитарных матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $(n + \infty) \times (n + \infty)$. Рассмотрим двойные классы смежности

$$K \setminus G/K = O(\infty) \setminus U(n + \infty)/O(\infty),$$

т. е. матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(n + \infty)$, определенные с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}, \quad u, v \in O(\infty).$$

Мы называем такие классы эквивалентности *операторными узлами*².

На группе K не существует меры Хаара, поэтому не существует и естественных мер на двойных классах смежности KgK , следовательно, мы не можем повторить конструкцию гипергруппы $K \setminus G/K$. Однако существует естественное умножение

$$K \setminus G/K \times K \setminus G/K \rightarrow K \setminus G/K,$$

определенное формулой

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap & b & cq \\ cp & d & cq \\ r & 0 & ct \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Матрица в правой части (1.2) имеет размер $(n + \infty + \infty) \times (n + \infty + \infty)$, мы рассматриваем ее как блочную матрицу размера

$$(n + (\infty + \infty)) \times (n + (\infty + \infty)) = (n + \infty) \times (n + \infty).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *о-умножение является корректно определенной ассоциативной операцией на $K \setminus G/K$.*

Мы также вводим инволюцию $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^*$ на $K \setminus G/K$, индуцированную отображением $g \mapsto g^*$ (взятием сопряженного оператора). Легко видеть, что

$$(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}^* \circ \mathfrak{g}^*.$$

Рассмотрим унитарное представление группы $G = U(n + \infty)$ в гильбертовом пространстве H . Как и выше, рассмотрим подпространство H^K всех K -неподвижных векторов в H и операторы (1.1). Имеет место следующая *теорема мультипликативности*.

ТЕОРЕМА 1.3 [7], [8, § IX.4]. *Для любых $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in K \setminus G/K$ имеем*

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g})\bar{\rho}(\mathfrak{h}) = \bar{\rho}(\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}).$$

Кроме того, для любого $\mathfrak{g}$ выполнено

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g}^*) = \bar{\rho}(\mathfrak{g})^*.$$

Эти явления (полугрупповая структура на $K \setminus G/K$ и мультипликативность) не имеют конечномерных аналогов. Однако для бесконечномерных групп они обычны (см. обсуждение ниже, в п. 1.8).

¹Бесконечная матрица g *финитна*, если $g - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых матричных элементов.

²Это термин из теории операторов, операторный узел (colligation, node) – это класс сопряженности (1.10).

1.3. Характеристические функции. Опишем $\circ$ -умножение на более привычном языке. По матрице $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ мы выписываем следующее уравнение:

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ \lambda y \\ q_- \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ x \\ p_- \\ \lambda x \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$, $x, y \in \ell_2$, $p_{\pm}, q_{\pm} \in \mathbb{C}^n$.

Исключая переменные x, y из этой системы уравнений, что возможно, если $\det(\lambda^2 \bar{d} - d)$ не является тождественным нулем, мы получаем зависимость

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ q_- \end{pmatrix} = \chi_g(\lambda) \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix},$$

где $\lambda \mapsto \chi_g(\lambda)$ – матричнозначная рациональная функция на $\mathbb{C}$. Она называется *характеристической функцией*.

Характеристическая функция $\chi_g(\lambda)$ зависит только от двойного класса смежности $\mathfrak{g}$, содержащего g , но не от самого g .

ТЕОРЕМА 1.4. *Если определены $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ и $\chi_{\mathfrak{h}}(\lambda)$, то*

$$\chi_{\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}}(\lambda) = \chi_{\mathfrak{g}}(\lambda) \chi_{\mathfrak{h}}(\lambda). \quad (1.4)$$

Кроме того, имеем $\chi_{\mathfrak{g}}^*(\lambda) = \chi_{\mathfrak{g}}^*(\lambda^{-1})^{-1}$.

1.4. Переформулировка. Язык грассманианов. Фиксируем λ . Рассмотрим множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ всех $(p_+, p_-; q_+, q_-) \in \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$ таких, что существуют x, y , удовлетворяющие (1.3). Очевидно, $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ является линейным подпространством.

Заметим, что в неособой точке функции $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ подпространство $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ является графиком оператора $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda): \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Далее мы продолжаем функцию $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ на риманову сферу $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ следующим образом. Записываем уравнение

$$\begin{pmatrix} q_+ \\ y \\ q_- \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_+ \\ 0 \\ p_- \\ x \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

и рассматриваем множество $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\infty)$ всех $(p_+, p_-; q_+, q_-) \in \mathbb{C}^{2n} \oplus \mathbb{C}^{2n}$ таких, что уравнение (1.5) имеет решение.

ТЕОРЕМА 1.5. а) *Имеем $\dim \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda) = 2n$ для всех $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$.*

б) *Для любого $\mathfrak{g}$ отображение $\lambda \mapsto \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ голоморфно на $\overline{\mathbb{C}}$.*

Отметим, что характеристическая функция $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ определена для всех двойных классов смежности $\mathfrak{g}$.

Теперь покажем, как интерпретировать формулу (1.4) на языке грассманианов.

Рассмотрим линейные пространства V, W . Мы скажем, что *линейное отношение* $L: V \rightrightarrows W$ – это подпространство $L \subset V \oplus W$.

ПРИМЕР 1.6. Пусть $A: V \rightarrow W$ – произвольный линейный оператор. Его график $\text{graph}(A) \subset V \oplus W$ является линейным отношением. Множество всех линейных подпространств в $V \oplus W$ состоит из $\dim V + \dim W$ компонент. Графики операторов образуют открытое плотное множество в одной из компонент.

Рассмотрим два линейных отношения $L: V \rightrightarrows W$, $M: W \rightrightarrows Y$. Определим их *произведение* $LM: V \rightrightarrows Y$ как множество всех $(r, p) \in V \oplus Y$ таких, что существует $q \in W$, удовлетворяющее $(r, q) \in L$, $(q, p) \in M$.

Далее, для линейного отношения $L: V \rightrightarrows W$ мы определим *ядро* $\ker L \subset V$ и *неопределенность* $\text{indef } L \subset W$,

$$\ker L := L \cap (V \oplus 0), \quad \text{indef } L := L \cap (0 \oplus W).$$

ТЕОРЕМА 1.7. Для любых $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ и любого $\lambda \in \overline{\mathbb{C}}$ выполнено равенство

$$\mathcal{X}_{\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}}(\lambda) = \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda) \mathcal{X}_{\mathfrak{h}}(\lambda).$$

1.5. Свойства характеристических функций. Введем в пространстве $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ стандартную кососимметрическую билинейную форму, заданную матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Мы рассматриваем векторы (p_+, p_-) и (q_+, q_-) как элементы из $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$. Обозначим через $\text{Sp}(2n, \mathbb{C})$ группу операторов, сохраняющих эту форму.

Введем в пространстве $(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$ форму, полученную как разность кососимметрических форм, т. е. форму, заданную матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы рассматриваем векторы $(p_+, p_-; q_+, q_-)$ как элементы этого пространства.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8 [8, §IX.4]. а) В неособых точках значения функции $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ содержатся в комплексной симплектической группе $\text{Sp}(2n, \mathbb{C})$.

б) Характеристическая функция $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ принимает значения в лагранжевом грассманиане³.

Далее рассмотрим эрмитову форму M на $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$, заданную матрицей $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. Обозначим через $U(n, n)$ группу матриц, сохраняющих M .

Мы говорим, что линейный оператор A в $\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ является M -сжатием (см., например, [9, § 2.7]), если для всех векторов v выполнено

$$M(Av, Av) \leq M(v, v).$$

Мы скажем, что A является M -растяжением, если $M(Av, Av) \geq M(v, v)$.

Введем в пространстве $(\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n)$ разность эрмитовых форм, т. е. форму $\bar{M}$, заданную матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

³Напомним, что подпространство L в $2m$ -мерном пространстве с невырожденной кососимметрической билинейной формой называется *лагранжевым*, если форма равна нулю на L и $\dim L = m$ (см., например, [9, § 3.1]).

- ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9 [8, § IX.4]. а) Если $|\lambda| = 1$, то $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda) \in U(n, n)$.
 б) Если $|\lambda| < 1$, то $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ является M -сжатием.
 в) Если $|\lambda| > 1$, то $\chi_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ является M -растяжением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10 [8, § IX.4]. Справедливы следующие утверждения:

- а) если $|\lambda| = 1$, то подпространство $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ является $\widetilde{M}$ -изотропным;
 б) если $|\lambda| < 1$, то форма $\widetilde{M}$ неотрицательно определена на подпространстве $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$;
 в) если $|\lambda| > 1$, то форма $\widetilde{M}$ неположительно определена на подпространстве $\mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$;
 д) если $|\lambda| < 1$, то M строго положительно определена⁴ на $\ker \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$, кроме того, M отрицательно определена на $\text{indef } \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.

Характеристические функции также удовлетворяют следующему условию симметрии в точке 0:

$$\chi_{\mathfrak{g}}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi_{\mathfrak{g}}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (1.6)$$

В терминах грассманианов это означает

$$(p_+, p_-; q_+, q_-) \in \mathcal{X}(\lambda) \iff (p_+, -p_-; q_+, -q_-) \in \mathcal{X}(\lambda). \quad (1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.11. Любое голоморфное отображение $\mathcal{X}$ из $\overline{\mathbb{C}}$ в лагранжесв грассманиан, удовлетворяющее условиям предложения 1.10 и условию (1.7), является характеристической функцией некоторого двойного класса смежности $\mathfrak{g}$.

1.6. Центральное расширение. Характеристическая функция не достаточна для восстановления двойного класса смежности. В самом деле, матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \begin{matrix} \} n \\ \} \infty \\ \} \infty \end{matrix}$$

с фиксированными a, b, c, d и произвольным блоком e имеют одну и ту же характеристическую функцию. Введем дополнительный инвариант. Рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ \lambda x \end{pmatrix}$$

для x, y . Обозначим через $n_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ размерность пространства решений этого уравнения. Тогда:

- 1) $n_{\mathfrak{g}}(\lambda) = 0$ для всех значений λ , кроме конечного числа;
- 2) $n_{\mathfrak{g}}(\lambda) = 0$, если $|\lambda| \neq 1$;
- 3) $n_{\mathfrak{g}}(\lambda) = n_{\mathfrak{g}}(-\lambda)$;

⁴Это условие содержит дополнительную информацию лишь в точках λ , где $\mathcal{X}(\lambda)$ не является графиком оператора. В силу условия б) форма M неотрицательно определена на $\ker \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)$.

4) $n_{\mathfrak{g}}(\pm 1) = \infty$.

Таким образом, мы получаем конечное множество с кратностями (мы называем его *дивизором*).

ТЕОРЕМА 1.12. *Двойной класс смежности однозначно определен характеристической функцией $\mathcal{X}$ и дивизором n .*

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. Теоремы 1.11, 1.12 были сформулированы в [8, п. IX.4.8] без формального доказательства. По существу доказательство в этой работе приведено в добавлении Е, а именно в п. Е.4 показывается, как свести эти утверждения к стандартной теореме (см. [10]): *чистый унитарный операторный узел определяется своей характеристической функцией*. Фактически эта теорема нужна лишь в случае финитных матриц и рациональных характеристических функций.

ТЕОРЕМА 1.14 [8, теорема IX.4.5]. *Справедливо равенство*

$$n_{\mathfrak{g} \circ \mathfrak{h}}(\lambda) = n_{\mathfrak{g}}(\lambda) + n_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}; \lambda) + \dim(\text{indef } \mathcal{X}_{\mathfrak{h}}(\lambda) \cap \ker \mathcal{X}_{\mathfrak{g}}(\lambda)).$$

Двойные классы смежности, соответствующие матрицам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \} n \\ \} \infty \end{array} \right\},$$

являются центром полугруппы $K \setminus G/K$. Факторполугруппа полугруппы $K \setminus G/K$ по центру изоморфна полугруппе рациональных матричнозначных функций, описанной выше.

1.7. Вырождение гипергруппы двойных классов смежности. Пусть $N > k$. Рассмотрим вложение $U(n+k)$ в $U(n+k+N)$, заданное формулой

$$\iota_N: \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и вложение $U(k+N)$ в $U(n+k+N)$ – формулой

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Фиксируем матрицы $g = \begin{pmatrix} q & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $h = \begin{pmatrix} p & q \\ r & t \end{pmatrix} \in U(n+k)$. Тогда для любого $N > k$ матрица $\iota_N(g) \circ \iota_N(h)$ корректно определена как элемент двойного класса смежности $U(k+N) \setminus U(n+k+N)/U(k+N)$.

Снабдим группу $U(n+k+N)$ метрикой, индуцированной матричной нормой в евклидовом пространстве $\mathbb{C}^{n+k+N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.15. *Пусть $g, h \in U(n+k)$. Рассмотрим соответствующие двойные классы смежности*

$$\mathfrak{g}_N, \mathfrak{h}_N \in U(k+N) \setminus U(n+k+N)/U(k+N)$$

и меру

$$\varkappa_N = \mu_{\mathfrak{g}_N} * \mu_{\mathfrak{h}_N}.$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ существует N такое, что мера $\varkappa_N$ ε -окрестности двойного класса $\iota_N(g) \circ \iota_N(h)$ больше $1 - \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [12], аналогичные утверждения см. [7], [11].

1.8. Полугруппы двойных классов смежности. Первый пример умножения двойных классов смежности был обнаружен Р. С. Исмагиловым [13], он рассматривал группу $G = \mathrm{SL}(2, k)$ над неархимедовым не локально компактным полем k . В качестве подгруппы K бралась подгруппа $\mathrm{SL}(2, o)$ над целыми элементами k . Двойные классы смежности нумеруются множеством неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$, операция $\circ$ – обычное сложение. Теорема мультипликативности позволяет классифицировать все сферические функции (см. также работу [14]). Г. И. Олшанский показал [15], что эта полугруппа является пределом гипергрупп $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \setminus \mathrm{SL}(2, \mathbb{Q}_p) / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ при $p \rightarrow \infty$.

Рассмотрим серию римановых симметрических пространств $G(n)/K(n)$ (например, $U(n)/O(n)$). Олшанский показал [7], [11], что то же явление выполняется для любой пары групп $G(k + \infty) \supset K(\infty)$. Он также описал соответствующие полугруппы для бесконечных симметрических групп. Как только явное описание подобных объектов получено, они становятся инструментом теории представлений. С другой стороны, подобные алгебраические структуры интересны сами по себе.

В [8, § 8.5] автор заметил, что умножение на $K \setminus G/K$ – вполне обычное явление для бесконечномерных групп (см. также [16], [17]). Оно наблюдается более-менее всегда, если K – одна из следующих групп:

- 1) полная бесконечномерная унитарная, ортогональная или симплектическая (кватернионно-унитарная) группа (или произведение нескольких копий таких групп);
- 2) полная бесконечная симметрическая группа $S(\infty)$;
- 3) группа автоморфизмов пространства с мерой.

Эти группы являются бесконечномерной имитацией компактных групп (но они не являются ни компактными, ни локально компактными). Вероятно, есть и другие примеры (например, ниже мы обсуждаем группу $K = O(\infty, \mathbb{Z}_p)$).

Формальные общие теоремы можно найти в [16], [17]. Чтобы их использовать, нужны явные описания $K \setminus G/K$, такие описания были недавно получены в [16]–[18], [20].

1.9. Внутренние функции. Напомним определение внутренних функций.

- 1) Голоморфная функция $f(z)$ в единичном круге $|z| < 1$ называется *внутренней*, если $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$ и

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} |f(re^{i\theta})| = 1 \quad \text{для п. в. } \theta \in [0, 2\pi], \quad (1.8)$$

где $z = re^{i\theta}$, а r, θ вещественны⁵ (см., например, [21]). Можно показать, что предел (1.8) заменяется п. в. на *некасательный предел*

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta}, \left| \arg \frac{e^{i\theta} - z}{e^{i\theta}} \right| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon} f(z), \quad (1.9)$$

где $\varepsilon > 0$ фиксировано (фактически мы рассматриваем предел по углу величиной $\pi - 2\varepsilon$ с вершиной $e^{i\theta}$ и биссектрисой $te^{i\theta}$).

⁵Мы не можем записывать предел при $z \rightarrow e^{i\theta}$, внутренняя функция может быть разрывна во всех точках окружности.

2) Голоморфная матричнозначная (операторнозначная) функция $f(z)$ в единичном круге называется *внутренней*, если $\|f(z)\| \leq 1$ при $|z| < 1$ и граничные значения f на окружности являются унитарными (см. [22], [23]). Рассмотрим оператор d , близкий к унитарному (один из возможных вариантов $\text{rk}(dd^* - 1) = \text{rk}(d^*d - 1) < \infty$), такой, что $\|d\| = 1$. Мы интересуемся его свойствами с точностью до сопряжения $d \mapsto udu^{-1}$, где u – унитарный оператор. Построим большую *унитарную* матрицу $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, включающую d в качестве блока. Рассмотрим g с точностью до эквивалентности

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \quad u \in U(\infty). \quad (1.10)$$

Поставим в соответствие матрице g следующее выражение (*характеристическую функцию*):

$$\chi(\lambda) = a + \lambda b(1 - \lambda d)^{-1}c.$$

Функции $\chi(\lambda)$ (при некоторых условиях для d) являются внутренними функциями в единичном круге. Инвариантные подпространства оператора d находятся во взаимно однозначном соответствии с делителями θ в классе внутренних функций. Произведение внутренних функций соответствует умножению классов сопряженности (1.10) по формуле (1.2).

3) Рассмотрим более общую ситуацию псевдоевклидовых пространств. Мы скажем, что мероморфная в круге матричнозначная функция f является *внутренней*, если ее значения являются индефинитными сжатиями внутри круга и псевдоунитарны на единичной окружности. Подобные функции естественно возникают в той же ситуации, что и выше, когда условие $\|d\| \leq 1$ не выполнено.

Введенные нами ранее характеристические функции двойных классов смежности являются внутренними в этом смысле.

4) Обозначим через B_n множество всех комплексных $(n \times n)$ -матриц с нормой меньше 1; B_n является эрмитовым симметрическим пространством:

$$B_n \simeq U(n, n)/U(n) \times U(n),$$

его остов (граница Шилова) состоит из унитарных матриц.

В [16], [20] рассматривались различные полугруппы двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп. Например, возьмем группу $G = U(\alpha + k\infty)$, состоящую из квадратных блочных матриц размера $\alpha + \infty + \dots + \infty$. Рассмотрим ее подгруппу $L = U(\infty)$, вложенную в G по диагонали, и подгруппу $K = O(\infty) \subset L$, вложенную в $U(\infty)$ стандартным способом. Тогда $K \setminus G/K$ является полугруппой. Характеристические функции [20] являются внутренними функциями на $B_k \times B_k$, принимающими значения в пространстве $(2\alpha \times 2\alpha)$ -матриц. Это означает, что значения функции являются M -сжатиями внутри $B_k \times B_k$ и псевдоунитарны на границе Шилова $U(n) \times U(n)$. Произведение двойных классов смежности соответствует умножению характеристических функций.

Можно варьировать определение и рассматривать характеристические функции как отображения $B_k \times B_k \rightarrow B_{2\alpha}$.

1.10. Бесконечномерные p -адические группы. Теория представлений бесконечномерных классических групп (см., например, [7], [8], [16], [24]–[27]) и бесконечных симметрических групп (см., например, [18], [28], [29]) существует и хорошо развита (см. также недавние работы по бесконечномерным классическим группам над конечными полями [30]–[32]).

О бесконечномерных p -адических группах известно немного.

1) В работах М. Назарова [33], [34] приведены представления Вейля бесконечномерной группы $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{Q}_p)$. Существование этого представления более-менее очевидно. Однако представления Вейля $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ и $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{R})$ допускают продолжение в некоторую комплексную область Γ (если $n < \infty$, то Γ – полугруппа, параметризованная комплексными симметрическими $(2n \times 2n)$ -матрицами с нормой < 1 (см., например, [8, § 4.2], [9, § 5.1]). Назаров построил аналог Γ в p -адическом случае (см. ниже § 3, подробнее см. [9, § 10.7, п. 11.2]).

2) В работе [35] была получена конструкция мер Хуа для p -адических грассманианов и обратных пределов p -адических грассманианов. Это аналог обратных пределов компактных симметрических пространств (см. [36]) и симметрических групп (см. [29]). Напомним, что в двух последних случаях существует содержательный гармонический анализ на подобных обратных пределах (см. [27], [29]).

3) В работе [37] рассматривалась группа диффеоморфизмов p -адической проективной прямой. Эта группа родственна группе диффеоморфизмов окружности.

1.11. Один p -адический пример. Обсудим один p -адический объект, родственный вводимым в § 4 характеристическим функциям, но более простой. Обозначим p -адическое поле через $\mathbb{Q}_p$, через $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$ – кольцо целых p -адических чисел. Обозначим через $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Q}_p)$ группу финитных обратимых матриц над $\mathbb{Q}_p$. Рассмотрим классы сопряженности $\mathrm{GL}(\alpha + \infty, \mathbb{Q}_p)$ по отношению к подгруппе $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z}_p)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}, \quad u \in \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z}_p). \quad (1.11)$$

Такие классы сопряженности допускают естественное $\circ$ -умножение по формуле (1.2), это произведение является корректно определенной ассоциативной операцией на пространстве классов сопряженности. Опишем аналог характеристической функции.

Сначала возьмем достаточно большое m такое, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ фактически содержится в $\mathrm{GL}(\alpha + m, \mathbb{Q}_p)$. Рассмотрим решетку⁶ $R \subset \mathbb{Q}_p^2$ и по ней построим решетку

$$R \otimes \mathbb{Z}_p^m \subset \mathbb{Q}_p^2 \otimes \mathbb{Q}_p^m \simeq \mathbb{Q}_p^m \oplus \mathbb{Q}_p^m.$$

Запишем уравнение

$$\begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Рассмотрим множество $\chi(R)$ всех пар $(v, u) \in \mathbb{Q}_p^\alpha \oplus \mathbb{Q}_p^\alpha$, для которых существует элемент $y \oplus x \in R \otimes \mathbb{Z}_p^m$ такой, что выполняется равенство (1.12). Тогда $\chi(R)$ является $\mathbb{Z}_p$ -подмодулем в $\mathbb{Q}_p^\alpha \oplus \mathbb{Q}_p^\alpha$, который может рассматриваться

⁶См. определение ниже, в п. 3.1.

как отношение $\mathbb{Q}_p^\alpha \Rightarrow \mathbb{Q}_p^\alpha$. Умножение классов сопряженности соответствует поточечному произведению функций $\chi(R)$ со значениями в отношениях.

Мы также отметим, что эти функции согласованы со структурой ансамбля Брюа–Титса и являются внутренними в разумном смысле. Оба явления обобщаются далее для более замысловатых объектов.

1.12. Цель статьи. Мы хотим описать умножение двойных классов смежности на p -адических группах и построить аналоги характеристических функций. Каждому двойному классу смежности мы ставим в соответствие симплициальное отображение из некоторого ансамбля Брюа–Титса Ω в некоторый ансамбль Брюа–Титса Ξ такое, что образ остова содержится в остове. При этом на множестве вершин ансамбля Ξ имеется структура полугруппы (полугруппа Назарова) и произведение двойных классов смежности соответствует поточечному произведению функций $\Omega \rightarrow \Xi$. Наша конструкция не является окончательным решением проблемы ⁷.

1.13. Не вполне понятная связь. Фактически наша основная конструкция устроена как продолжение рациональных отображений p -адических грассманианов до симплициальных отображений ансамблей Брюа–Титса. Кроме того, наша конструкция автоматически выдерживает переход к алгебраическим расширениям. Продолжения такого рода рассматривались в теории аналитических пространств Берковича (см., например, [39], [40]). Однако в той теории продолжения являются жестко определенными, у нас продолжений много (они зависят от некоторых дополнительных данных ⁸). Автор не понимает связи конструкции из настоящей статьи и теории Берковича.

1.14. Обозначения. Введем следующие обозначения: A^t – транспонированная матрица; 1_α – единичная матрица порядка α , 1_V – единичный оператор в пространстве V ; $\mathbb{Q}_p$ – p -адическое поле; $\mathbb{Z}_p$ – кольцо целых p -адических чисел; $\mathbb{Q}_p^\times$, $\mathbb{C}^\times$ – мультипликативные группы полей $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}$ соответственно.

Мы обозначаем стандартный характер $\mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}^\times$ через $\exp\{2\pi ia\}$. Для $a = \sum_{j \geq -N} a_j p^j$, где $a_j = 0, 1, \dots, p-1$, мы полагаем

$$\exp\{2\pi ia\} = \exp\left\{2\pi i \sum_{j \geq -N} a_j p^j\right\} := \exp\left\{2\pi i \sum_{j: -1 \geq j \geq -N} a_j p^j\right\}.$$

⁷Во-первых, мы не вводим аналог “дивизора”. Во-вторых, конструкция из [19] заставляет предположить, что полные спектральные данные, разделяющие двойные классы смежности, должны содержать последовательность характеристических функций, определенных на возрастающей последовательности ансамблей. Построение полных спектральных данных в [19] в вещественном случае основано на классической теории инвариантов, которая не распространяется на кольца $\mathbb{Z}_p$.

⁸Ниже отображения грассманианов происходят из двойных классов смежности

$$O(\infty, \mathbb{Q}_p) \setminus GL(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p) / O(\infty, \mathbb{Q}_p)$$

(см. предложение 4.11), а отображения ансамблей – из двойных классов

$$O(\infty, \mathbb{Z}_p) \setminus GL(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p) / O(\infty, \mathbb{Z}_p).$$

Соответственно получается много отображений ансамблей Брюа–Титса с одним и тем же ограничением на остов (грассманиан).

§ 2. Умножение двойных классов смежности

2.1. Группы. Через $V = \mathbb{Q}_p^n$ мы обозначим линейное пространство над $\mathbb{Q}_p$; через $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{GL}(V)$ – группу обратимых линейных операторов в $\mathbb{Q}_p^n$; через $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ – группу всех таких матриц g с целыми элементами, что g^{-1} также имеет целые элементы.

Рассмотрим пространство $V = \mathbb{Q}_p^{2n}$, снабженное кососимметрической билинейной формой B_V , скажем $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Симплектическая группа $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ – группа всех матриц, сохраняющих эту форму; $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Z}_p)$ – группа симплектических матриц с целыми элементами. Обозначим

$$V_+ := \mathbb{Q}_p^n \oplus 0, \quad V_- = 0 \oplus \mathbb{Q}_p^n. \quad (2.1)$$

Рассмотрим пространство $\mathbb{Q}_p^n$, снабженное стандартной симметрической билинейной формой, $(v, w) = \sum_j v_j w_j$. Обозначим через $\mathrm{O}(n, \mathbb{Q}_p)$ группу всех матриц, сохраняющих эту форму⁹.

Через $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Q}_p)$ мы обозначим группу всех бесконечных обратимых матриц g над $\mathbb{Q}_p$ таких, что матрица $g - 1$ имеет лишь конечное число ненулевых элементов. Мы называем такие матрицы *финитными*. Группы $\mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{Q}_p)$, $\mathrm{Sp}(2\infty, \mathbb{Z}_p)$, $\mathrm{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ определяются тем же способом.

2.2. Умножение двойных классов смежности. Обозначим через

$$\mathbf{G} := \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Q}_p) := \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$$

группу финитных блочных $((\alpha + \infty + \dots + \infty) \times (\alpha + \infty + \dots + \infty))$ -матриц, берется k копий ∞ . Через $\mathbf{K}$ мы обозначим группу

$$\mathbf{K} = \mathrm{O}(\infty, \mathbb{Z}_p),$$

вложенную в $\mathbf{G}$ по правилу

$$\mathfrak{I}: u \mapsto \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & \dots & o \\ 0 & u & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

где 1_α – единичная матрица размера $\alpha \times \alpha$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Конечно, $\mathbf{G} := \mathrm{GL}(\infty, \mathbb{Q}_p)$. Однако обозначения типа $\mathbf{G} := \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$ дают возможность указывать некоторые подгруппы $\mathbf{G}$.

Мы хотим определить структуру полугруппы на двойных классах смежности $\mathbf{K} \backslash \mathbf{G}/\mathbf{K}$.

Положим

$$\Theta_N := \begin{pmatrix} 0 & 1_N & 0 \\ 1_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix} \in \mathbf{K}. \quad (2.3)$$

⁹Существует несколько неэквивалентных невырожденных квадратичных форм и несколько различных ортогональных групп над $\mathbb{Q}_p$, мы рассматриваем лишь только что введенную группу.

Пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Возьмем их представителей $g, h \in \mathbf{G}$. Рассмотрим последовательность

$$f_N := g\mathfrak{I}(\Theta_N)h$$

и двойной класс смежности $\mathfrak{f}_N$, содержащий f_N .

ТЕОРЕМА 2.2. а) Последовательность $\mathfrak{f}_N$ двойных классов смежности постоянна, начиная с некоторого места.

б) Предел $\mathfrak{f} := \lim_{N \rightarrow \infty} \mathfrak{f}_N$ не зависит от выбора представителей g, h .

с) Произведение $\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}$ в $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$, полученное таким способом, ассоциативно.

Доказательство теоремы 2.2 является несложным (см. доказательство аналогичных высказываний в случае вещественного поля в [16]). Легко выписать явную формулу для произведения. Для определенности возьмем $k = 2$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} \\ c_2 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} a' & b'_1 & b'_2 \\ c'_1 & d'_{11} & d'_{12} \\ c'_2 & d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ c_1 & d_{11} & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_\infty & 0 & 0 \\ 0 & 1_\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_\infty \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b'_1 & 0 & b'_2 & 0 \\ c'_1 & d'_{11} & 0 & d'_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c'_2 & d'_{21} & 0 & d'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку результатом является двойной класс смежности, мы можем записывать окончательную матрицу в различных видах, например

$$\mathfrak{f} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} aa' & b_1 & ab'_1 & b_1 & ab'_1 \\ \hline c_1a' & d_{11} & c_1b'_1 & d_{12} & c_1b'_2 \\ c'_1 & 0 & d'_{11} & 0 & d'_{12} \\ \hline c_2a' & d_{21} & c_2b'_1 & d_{22} & c_2b'_2 \\ c'_2 & 0 & d'_{21} & 0 & d'_{22} \end{array} \right) \quad (2.4)$$

или

$$\mathfrak{f} = \left(\begin{array}{c|cc|cc} aa' & ab'_1 & b_1 & ab'_2 & b_2 \\ \hline c_1a' & c_1b'_1 & d_{11} & c_1b'_2 & d_{12} \\ c'_1 & d_{11} & 0 & d'_{12} & 0 \\ \hline c_2a' & c_2b'_1 & d_{21} & c_2b'_2 & d_{22} \\ c'_2 & d'_{21} & 0 & d'_{22} & 0 \end{array} \right).$$

2.3. Теорема мультипликативности. Пусть ρ – унитарное представление группы $\mathbf{G}$, обозначим через $H^{\mathbf{K}}$ подпространство всех $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов. Пусть $P^{\mathbf{K}}$ – оператор ортогонального проектирования на $H^{\mathbf{K}}$. Для $g \in \mathbf{G}$ определим оператор $\bar{\rho}(g): H^{\mathbf{K}} \rightarrow H^{\mathbf{K}}$ по формуле

$$\bar{\rho}(g) := P^{\mathbf{K}}\rho(g)|_{H^{\mathbf{K}}}.$$

Очевидно, $\bar{\rho}(g)$ – функция на двойных классах смежности $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$, поэтому мы можем записывать $\bar{\rho}(\mathfrak{g})$.

ТЕОРЕМА 2.3. Для любого унитарного представления ρ и любых двойных классов смежности $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ выполняется равенство (“теорема мультипликативности”)

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g})\bar{\rho}(\mathfrak{h}) = \bar{\rho}(\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}).$$

Доказательство теоремы 2.3 содержится в § 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. По-видимому, аналог предложения 1.15 в p -адическом случае не выполняется.

2.4. Сферичность. Приведем формулировку следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $\alpha = 0$. Тогда пара $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ является сферической, т. е. для любого неприводимого унитарного представления группы $\mathbf{G}$ размерность пространства $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов не превосходит 1.

Мы не приводим доказательство предложения 2.5, поскольку оно такое же, как в случае вещественных бесконечномерных классических групп (см. [16]).

2.5. Инволюция. Отображение $g \mapsto g^{-1}$ индуцирует инволюцию $\mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}^*$ на $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Очевидно,

$$(\mathfrak{g} \star \mathfrak{h})^* = \mathfrak{h}^* \star \mathfrak{g}^*.$$

Кроме того, для любого унитарного представления ρ группы $\mathbf{G}$ выполнено тождество

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g}^*) = \bar{\rho}(\mathfrak{g})^*.$$

2.6. Цели работы. Мы хотим описать $\star$ -умножение в более привычных терминах. Более точно, мы строим p -адический аналог многомерной характеристической функции, построенной в [16], [20].

2.7. Структура статьи. В § 3 приведены предварительные сведения о решетках, ансамблях Брюа–Титса, отношениях, представлениях Вейля категории Назарова. Основная конструкция (характеристические функции двойных классов смежности и их свойства) содержится в § 4, доказательства – в § 5. В § 6 мы доказываем теорему мультипликативности. В § 7 приведены некоторые конструкции представлений. Теорема 7.5 показывает связь характеристической функции и операторов $\bar{\rho}(\mathfrak{g})$.

§ 3. Предварительные сведения. Подмодули, отношения, ансамбли Брюа–Титса, категория Назарова и представление Вейля

А. Подмодули и сходимость

3.1. Модули. Ниже термин “подмодуль” означает $\mathbb{Z}_p$ -подмодуль в линейном пространстве $V = \mathbb{Q}_p^k$. Для любого подмодуля $R \subset \mathbb{Q}_p^k$ существует (неканонический) базис $e_i \in \mathbb{Q}_p^k$ такой, что

$$R = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Q}_p e_j \oplus \mathbb{Z}_p e_{j+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p e_l. \quad (3.1)$$

Если $j = k$, то R – линейное подпространство. Если $j = 0$, $l = k$, то мы получаем *решетку*. Формальное определение: *решетка* R – это компактный $\mathbb{Z}_p$ -подмодуль такой, что $\mathbb{Q}_p R = \mathbb{Q}_p^k$ (см., например, [41]).

Обозначим через $\text{Mod}(V)$ множество всех подмодулей в V , через $\text{Lat}(V)$ – множество всех решеток. Легко видеть, что

$$\text{Lat}(V) \simeq \text{GL}(V, \mathbb{Q}_p) / \text{GL}(V, \mathbb{Z}_p).$$

Для подмодуля R обозначим через $R_\downarrow$ максимальное линейное подпространство в R , через $R^\uparrow$ – минимальное линейное подпространство, содержащее R ,

$$R_\downarrow \subset R \subset R^\uparrow.$$

Образ R в факторпространстве $R^\uparrow / R_\downarrow$ является решеткой.

Обратно, пусть $L \subset M$ – пара подпространств, $\pi: L \rightarrow L/M$ – проекция. Пусть $P \subset M/L$ – решетка. Тогда $\pi^{-1}P$ – подмодуль в $\mathbb{Q}_p^k$, и все подмодули получаются таким способом.

3.2. Двойственность. Для p -адического линейного пространства V мы обозначим через V' пространство линейных функционалов на V . Для подмодуля $L \subset V$ мы определим двойственный подмодуль $L^\diamond \subset V'$ как множество всех линейных функционалов $\ell \in V'$ таких, что

$$\ell(v) \in \mathbb{Z}_p \quad \forall v \in L.$$

Отметим, что $L^{\diamond\diamond} = L$.

Если L – решетка, то $L^\diamond$ – также решетка.

3.3. Хаусдорфова сходимость на $\text{Mod}(V)$. Пусть $V = \mathbb{Q}_p^n$. Определим норму на V по формуле

$$\|x\| = \max_j |x_j|.$$

Обозначим через $B(p^l)$ шар с центром в нуле и радиусом p^l .

Пусть K – метрическое пространство, A, B – замкнутые подмножества. Определим *хаусдорфово уклонение* $\eta_B(A)$ как точную верхнюю грань расстояний между точкой a , пробегаящей A , и B (величина $\eta_B(A)$ – неотрицательное вещественное число или ∞). *Хаусдорфова ∞ -метрика*¹⁰ на множестве замкнутых подмножеств определяется формулой

$$h(A, B) = \max(\eta_A(B), \eta_B(A)).$$

Ее ограничение на множество компактных подмножеств является метрикой. Если K компактно, то пространство его замкнутых подмножеств компактно.

Введем топологию на $\text{Mod}(V)$. Скажем, что R_j сходится к R , если для любого l имеет место сходимость $B(p^l) \cap R_j \rightarrow B(p^l) \cap R$ в смысле хаусдорфовой метрики. Отметим, что эта сходимость метризуема, неканоническая метрика задается формулой

$$d(L, M) = \sum_{j=1}^{\infty} (2p)^{-j} h(L \cap B(p^l), M \cap B(p^l)).$$

ЛЕММА 3.1. а) *Пространство $\text{Mod}(V)$ компактно относительно хаусдорфовой топологии.*

б) *Пространство $\text{Lat}(V)$ является дискретным плотным подмножеством в $\text{Mod}(V)$.*

¹⁰Мы разрешаем метрике принимать значение $+\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Выберем сходящуюся подпоследовательность из произвольной последовательности подмодулей L_j . Сначала выбираем подпоследовательность L_{j_k} такую, что $L_{j_k} \cap B(p^0)$ сходится. Из нее выбираем подпоследовательность такую, что пересечение с $B(p^1)$ сходится, и т. д. Утверждение б) очевидно.

3.4. Аналог радиального предела. Нам нужен аналог радиального предела (1.8). Скажем, что последовательность подмодулей R_j *жестко сходится* к подмодулю R (обозначение $R_j \nearrow R$), если:

(А) для любого компактного подмножества $S \subset R$ начиная с некоторого места выполнено $S \subset R_j$;

(В) при любом $\varepsilon > 0$ для достаточно больших j подмодуль R_j содержится в ε -окрестности подмодуля R .

ПРИМЕР 3.2. Пусть $V = \mathbb{Q}_p^2$. Пусть $R_j = p^{-k}\mathbb{Z}_p e_1 \oplus p^k\mathbb{Z}_p e_2$. Тогда R_j жестко сходится к прямой $\mathbb{Q}_p e_1$. Положим

$$S_j = \mathbb{Z}_p(p^{-k}e_1 + e_2) \oplus p^k\mathbb{Z}_p e_2.$$

Тогда S_j сходится к прямой $\mathbb{Q}_p e_1$ в смысле Хаусдорфа, но не сходится жестко.

Мы можем переформулировать условие (В) в виде $\eta_R(R_j) \rightarrow 0$.

ЛЕММА 3.3. Условие (А) эквивалентно $\eta_{R^\diamond}(R_j^\diamond) \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снабдим V' двойственной нормой. Пусть $S, S_j \in V'$ и $\eta_S(S_j) \rightarrow 0$. Для малого $\varepsilon > 0$ мы имеем

$$S_j \subset S + B(\varepsilon). \quad (3.2)$$

Переходя к двойственным объектам, получаем

$$S_j^\diamond \supset S^\diamond \cap B(\varepsilon^{-1}). \quad (3.3)$$

Однако $S^\diamond \cap B(\varepsilon^{-1})$ — исчерпывающая последовательность компактных подмножеств в $S^\diamond$. Кроме того, (3.3) влечет (3.2).

ЛЕММА 3.4. Если $R_j \nearrow R$, то $(R_j)_\downarrow \subset R_\downarrow$ и $(R_j)^\uparrow \supset R^\uparrow$ начиная с некоторого j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое утверждение. Для достаточно большого k мы имеем $R \subset R_\downarrow + B(p^k)$. Кроме того, $B(p^k) + B(\varepsilon) = B(p^k)$ для $\varepsilon \leq p^k$. Поэтому для большого j выполнено

$$R_\downarrow + B(p^k) \supset R_j \supset (R_j)_\downarrow.$$

Однако подпространство, которое содержится в трубчатой окрестности подпространства $R_\downarrow$, содержится в $R_\downarrow$.

Теперь докажем второе утверждение. Рассмотрим компактное подмножество $K \subset R$, порождающее $R^\uparrow$ как $\mathbb{Q}_p$ -подпространство. Тогда $(R_j)^\uparrow$ содержит K для достаточно больших j и, следовательно, $(R_j)^\uparrow \supset R^\uparrow$.

В частности, любая $\nearrow$ -сходящаяся последовательность линейных подпространств постоянна начиная с некоторого места.

ЛЕММА 3.5. а) Пусть $L \subset V$ – линейное подпространство. Если $R_j \nearrow R$, то $(L \cap R_j) \nearrow (L \cap R)$.

б) Пусть $M \subset V$ – линейное подпространство, обозначим через π естественное отображение $V \rightarrow V/M$. Если $R_j \nearrow R$, то $\pi(R_j) \nearrow \pi(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Лишь условие (В) нуждается в доказательстве: для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что для $j \geq N$

$$R_j \cap L \subset (R \cap L) + B(\varepsilon).$$

Легко показать, что существует базис e_m в $\mathbb{Q}_p^n$ такой, что R имеет канонический вид (3.1), а L является линейной оболочкой нескольких базисных векторов. Для достаточно больших N мы имеем

$$(R + p^N \oplus \mathbb{Z}_p e_j) \cap L \subset (R \cap L) + p^N \oplus \mathbb{Z}_p e_j.$$

Переходя от базиса e_m к стандартному базису в $\mathbb{Q}_p^n$, мы получаем

$$(R + B(\delta)) \cap L \subset (R \cap L) + B(C\delta),$$

где $C = C(R, L)$ – константа. Теперь возьмем $\delta = \varepsilon/C$ и выберем номер k , начиная с которого $R_j \subset R + B(\delta)$.

б) Это утверждение вытекает из а) по двойственности. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. $\nearrow$ -сходимость не метризуема.

В. Ансамбли Брюа–Титса

3.5. Самодвойственные модули (подробнее см. [9, §10.6–10.7]). Рассмотрим p -адическое линейное пространство $V \simeq \mathbb{Q}_p^{2n}$, снабженное невырожденной кососимметрической билинейной формой $B_V(\cdot, \cdot)$ (см. выше). Подпространство L называется *изотропным*, если $B_V(v, w) = 0$ для любых $v, w \in L$. Через $\text{LGr}(V)$ обозначим множество максимальных изотропных (*лагранжевых*) подпространств в V (их размерность равна n).

Через $L^\perp$ обозначим ортодвойственное подпространство к L , т. е. множество всех векторов w таких, что $B_V(v, w) = 0$ для всех $v \in L$.

Пусть P – подмодуль. Обозначим через $P^\perp$ *двойственный подмодуль*, т. е. множество векторов w таких, что $B(v, w) \in \mathbb{Z}_p$ для всех $v \in P$. Если P – подпространство, то $P^\perp = P^\perp$.

Мы скажем, что подмодуль $R \subset V$ является *изотропным*, если $B_V(v, w) \in \mathbb{Z}_p$ для всех $v, w \in R$.

ПРИМЕР 3.7. Если R – линейное подпространство, то R изотропно в обычном смысле. С другой стороны, решетка $\mathbb{Z}_p^{2n}$ изотропна (и самодвойственна – см. ниже).

Мы скажем, что подмодуль R *самодвойственный*, если он является максимальным изотропным подмодулем в V . Равносильно, $P^\perp = P$. Обозначим через $\text{LMod}(V)$ множество всех самодвойственных подмодулей в V , через $\text{LLat}(V)$ – множество всех самодвойственных решеток. Легко показать, что $\text{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ действует на $\text{LLat}(V)$ транзитивно и

$$\text{LLat}(V) = \text{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p) / \text{Sp}(2n, \mathbb{Z}_p).$$

ЛЕММА 3.8. а) Для любого самодвойственного модуля R подпространство $R_{\downarrow}$ изотропно, а $R^{\uparrow}$ ортодвойственно к $R_{\downarrow}$.

б) Пусть L пробегает множество изотропных подпространств. Обозначим через $\pi: L^{\perp} \rightarrow L^{\perp}/L$ естественную проекцию. Любой самодвойственный модуль R имеет вид $\pi^{-1}S$, где S – самодвойственная решетка в $L^{\perp}/L$.

в) Единственный $\mathrm{Sp}(V)$ -инвариант самодвойственного модуля R – это $\dim R_{\downarrow}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Иногда удобна для использования следующая переформулировка определения изотропного модуля. Определим бихарактер β на $V \times V$ формулой

$$\beta(x, y) = \exp\{2\pi i B(x, y)\}. \quad (3.4)$$

Скажем, что модуль P изотропен, если $\beta(x, y) = 1$ на $P \times P$.

3.6. Почти самодвойственные модули. Пусть V и B – те же, что и выше. Подмодуль L в V называется *почти самодвойственным*, если он содержит самодвойственный модуль M и $B(v, w) \in p^{-1}\mathbb{Z}_p$ для всех $v, w \in L$ (см., например, [8, § 10.6]). Заметим, что $L/M \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

ЛЕММА 3.9. а) Любой почти самодвойственный модуль может быть приведен симплектическим преобразованием к виду

$$(p^{-1}\mathbb{Z}_p e_1 \oplus \mathbb{Z}_p e_{n+1}) \oplus \dots \oplus (p^{-1}\mathbb{Z}_p e_k \oplus \mathbb{Z}_p e_{n+k}) \\ \oplus (\mathbb{Z}_p e_{k+1} \oplus \mathbb{Z}_p e_{n+k+1}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_p e_m \oplus \mathbb{Z}_p e_{n+m}) \oplus \mathbb{Q}_p e_{m+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p e_n. \quad (3.5)$$

б) Единственные $\mathrm{Sp}(V)$ -инварианты почти самодвойственных модулей R – это $\dim R_{\downarrow}$ и число k (ранг абелевой группы R/S , где S – самодвойственный подмодуль в R). Для почти самодвойственных решеток единственным $\mathrm{Sp}(V)$ -инвариантом является объем решетки R , он равен p^{-k} .

3.7. Граф $\Delta(V)$. Рассмотрим p -адическое линейное пространство V с невырожденной кососимметрической билинейной формой B , как выше. Построим некоторый ориентированный граф $\Delta(V)$. Его вершины – почти самодвойственные модули в V . Если $R \supset R'$, то мы ставим стрелку из вершины R в вершину R' .

Если R, R' соединены стрелкой, то $R_{\downarrow} = (R')_{\downarrow}$ и $R^{\uparrow} = (R')^{\uparrow}$.

Любая пара решеток может быть соединена (неориентированным) путем. Обозначим подграф, вершины которого соответствуют решеткам, через $\Delta_0(V)$.

Обобщим это обозначение. Фиксируем изотропное подпространство L и рассмотрим подграф $\Delta_L(V)$, вершины которого – почти самодвойственные модули R такие, что $R_{\downarrow} = L$, $R^{\uparrow} = L^{\perp}$. Мы получаем связный подграф, более того,

$$\Delta_L(V) \simeq \Delta_0(L^{\perp}/L).$$

По определению имеем

$$\Delta(V) = \bigsqcup_{L - \text{изотроп. подпрост.}} \Delta_L(V).$$

Если $L \subset M$, то Δ_M содержится в замыкании Δ_L в смысле $\nearrow$ -сходимости.

3.8. Ансамбли Брюа–Титса (подробнее см. [42], [8]). Мы рассматриваем все наборы из k вершин $\Delta(V)$, которые попарно соединены ребрами. Для каждого такого набора мы рисуем $(k - 1)$ -мерный симплекс с данными вершинами и ребрами. Грани этого симплекса соответствуют подмножествам его набора вершин. Таким образом, мы получаем симплициальный комплекс и обозначаем его через $\text{Bd}(V)$.

Сначала рассмотрим подграф Δ_0 . Можно показать, что $k \leq n + 1$ и любой симплекс содержится в n -мерном симплексе. Таким способом мы получаем структуру n -мерного симплициального комплекса, он называется *ансамблем Брюа–Титса*. Обозначим его через $\text{Bd}_0(V)$.

Для подграфа Δ_L мы получаем комплекс $\text{Bd}_L(V)$, изоморфный ансамблю $\text{Bd}(L^\perp/L)$.

Ниже мы используем термин “остов ансамбля” для лагранжева грассманиана, это аналог границы Шилова.

ПРИМЕР 3.10. На рис. 1 представлен подкомплекс ансамбля $\text{Bd}(\mathbb{Q}_p^4)$, соответствующий решеткам вида $R_1 \oplus \cdots \oplus R_4$, где R_j – подмодуль в прямой $\mathbb{Q}_p e_j$ и имеют место вершины трех типов:

- 1) вершины центральной части подкомплекса – почти самодвойственные решетки вида $L = p^{k_1} \mathbb{Z}_p e_1 \oplus p^{k_2} \mathbb{Z}_p e_2 \oplus p^{l_1} \mathbb{Z}_p e_3 \oplus p^{l_2} \mathbb{Z}_p e_4$, условие самодвойственности для таких решеток следующее: $k_1 + l_1, k_2 + l_2$ равны 0 или -1 ;
- 2) вершины граничных кусков, каждый кусок соответствует почти самодвойственным модулям M с $M_\downarrow = \mathbb{Q}_p e_j$, где $j = 1, 2, 3, 4$; например, при $j = 1$ эти

Рис. 1. Подкомплекс (“апартамент”) ансамбля $\text{Bd}(\mathbb{Q}_p^4)$

подмодули имеют вид $M = \mathbb{Q}_p e_1 \oplus p^{m_2} \mathbb{Z}_p e_2 \oplus p^{l_2} \mathbb{Z}_p e_4$, где $m_2 + l_2 = 0, 1$, последовательность решеток $\nearrow$ -сходится к M , если $k_1 \rightarrow -\infty$ и $k_2 = m_2$ начиная с некоторого места;

3) четыре крайних точки соответствуют лагранжевым плоскостям, натянутым на пары векторов (e_1, e_2) , (e_1, e_4) , (e_2, e_3) , (e_3, e_4) , последовательность решеток $\nearrow$ -сходится к $\mathbb{Q}_p e_1 \oplus \mathbb{Q}_p e_4$, если $k_1 \rightarrow +\infty$, $k_2 \rightarrow -\infty$.

С. Отношения и категория Назарова

3.9. Отношения. Пусть V, W – линейные пространства. *Отношение* $P: V \rightrightarrows W$ – это подмодуль в $V \oplus W$.

ПРИМЕР 3.11. Пусть $A: V \rightarrow W$ – линейный оператор. Его график является отношением.

Пусть $P: V \rightrightarrows W, Q: W \rightrightarrows Y$ – два отношения. Мы определим их произведение $S = QP: V \rightrightarrows Y$ как множество всех $v \oplus y \in V \oplus Y$, для которых существует элемент $w \in W$ такой, что $v \oplus w \in P, w \oplus y \in Q$.

Для отношения $P: V \rightrightarrows W$ мы определим его *ядро* $\ker P \subset V$ формулой

$$\ker P = P \cap (V \oplus 0),$$

неопределенность $\operatorname{indef} P \subset W$,

$$\operatorname{indef} P = P \cap (0 \oplus W),$$

область определения $\operatorname{dom} P$ как проекцию P на V и *образ* $\operatorname{im} P$ как проекцию P на W .

Кроме того, определим *псевдообратное* отношение $P^\square: W \rightrightarrows V$, заданное тем же самым подмодулем в $W \oplus V \simeq V \oplus W$. Очевидно,

$$(PQ)^\square = Q^\square P^\square.$$

3.10. Геометрическое определение произведения. Мы сохраняем те же обозначения. Рассмотрим пространство $\mathcal{Z} := V \oplus W \oplus W \oplus Y$ и следующие подмодули в $\mathcal{Z}$:

- 1) подпространство $\mathcal{H}$, состоящее из векторов $v \oplus w \oplus w \oplus y$;
- 2) подпространство $\mathcal{A}$, состоящее из векторов $0 \oplus w \oplus w \oplus 0$;
- 3) подмодуль $P \oplus Q \subset (V \oplus W) \oplus (W \oplus Y)$.

Мы выполняем следующие действия: берем пересечение $R = \mathcal{H} \cap (P \oplus Q)$; проецируем $\theta: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}/\mathcal{A} \simeq V \oplus Y$. Тогда $QP = \theta(R)$.

3.11. Действие на $\operatorname{Mod}(V)$. Пусть $P: V \rightrightarrows W$ – отношение, T – подмодуль в V . Мы определим подмодуль $PT \subset W$ как множество всех $w \in W$ таких, что существует $v \in T$, для которого выполнено $v \oplus w \in P$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Можно рассматривать подмодуль $T \subset V$ как отношение $0 \rightrightarrows V$. Поэтому мы можем рассматривать $PT: 0 \rightrightarrows W$ как произведение отношений $T: 0 \rightrightarrows V$ и $Q: V \rightrightarrows W$.

3.12. Категория Назарова. Для пары V, W симплектических линейных пространств мы определим кососимметрическую билинейную форму $B^\ominus$ на $V \oplus W$ по формуле

$$B^\ominus(v \oplus w, v' \oplus w') = B_V(v, v') - B_W(w, w').$$

Обозначим через $\overline{\text{Naz}}(V, W)$ множество всех самодвойственных подмодулей в $V \oplus W$ и через $\text{Naz}(V, W)$ – множество всех $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$ таких, что $\ker P$ и $\text{indef } P$ компактны.

ТЕОРЕМА 3.13. Пусть $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$ и T – самодвойственный подмодуль в V . Тогда подмодуль $PT \subset W$ самодвойственный.

В [9, теорема 10.7.2] сформулировано такое же утверждение при чуть более сильном условии $P \in \text{Naz}(V, W)$. Фактически доказательство остается в силе при $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$.

ТЕОРЕМА 3.14. а) Если $P \in \text{Naz}(V, W)$, $Q \in \text{Naz}(W, Y)$, то $QP \in \text{Naz}(V, Y)$.
 б) Если $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$, $Q \in \overline{\text{Naz}}(W, Y)$, то $QP \in \overline{\text{Naz}}(V, Y)$.
 с) Если $P \in \text{Naz}(V, W)$, $Q \in \text{Naz}(W, Y)$ – решетки, то QP – решетка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) было доказано в [33] (см. также [9, § 10.7]), утверждение с) очевидно. Утверждение б) следует из теоремы 3.13 (см. [9, п. 10.7.4]).

Таким образом, мы получаем две категории¹¹ Naz и $\overline{\text{Naz}}$. Группа автоморфизмов объекта V совпадает с симплектической группой $\text{Sp}(V, \mathbb{Q}_p)$ (для обеих категорий), оператор $V \rightarrow V$ является симплектическим, если его график изотропен относительно формы.

Для $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$ выполнено

$$\begin{aligned} (\ker P)^\perp &= \text{dom } P, & (\text{indef } P)^\perp &= \text{im } P, \\ ((\ker P)_\perp)^\perp &= (\text{dom } P)^\dagger, & ((\text{indef } P)_\perp)^\perp &= (\text{im } P)^\dagger. \end{aligned}$$

3.13. Действие категории Назарова на ансамблях. Сначала докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. а) Пусть $P \in \text{Naz}(V, W)$ и T – почти самодвойственная решетка. Тогда $PT \subset W$ – почти самодвойственная решетка.

б) Пусть $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$ и T – почти самодвойственный подмодуль. Тогда $PT \subset W$ – почти самодвойственный подмодуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) – это предложение 10.7.5 из [9], доказательство остается в силе и для утверждения б).

Теперь пусть Ξ, Σ – симплициальные комплексы и $\text{Vert}(\Xi), \text{Vert}(\Sigma)$ – их множества вершин. Мы скажем, что отображение¹² $\text{Vert}(\Xi) \rightarrow \text{Vert}(\Sigma)$ является симплициальным, если для любого симплекса $\Delta \subset \Xi$ образы его вершин содержатся в одном симплексе комплекса Σ . Заметим, что можно продолжить симплициальное отображение до отображения комплексов $\Xi \rightarrow \Sigma$, полагая, что отображение аффинно на каждом симплексе.

Следующее высказывание является следствием предложения 3.15.

¹¹Категория Назарова – аналог категорий типа Крейна–Шмюльяна (см. [8], [9]).

¹²Вообще говоря, неинъективное.

ТЕОРЕМА 3.16. а) Морфизм $P \in \text{Naz}(V, W)$ индуцирует симплициальное отображение $\text{Bd}(V) \rightarrow \text{Bd}(W)$, переводящее $\text{Bd}_0(V)$ в $\text{Bd}_0(W)$.

б) Морфизм $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$ индуцирует симплициальное отображение $\text{Bd}(V) \rightarrow \text{Bd}(W)$, которое на самом деле является отображением

$$\text{Bd}(V) \rightarrow \bigsqcup_{\substack{M - \text{изотроп. подпрост. в } W \\ M \supset \text{indef}(P)_1}} \text{Bd}[M^\perp/M]. \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.17. Отображение $T \rightarrow PT$ является сжимающим в значительно более сильном смысле (см. [43]).

ТЕОРЕМА 3.18. Пусть $P \in \overline{\text{Naz}}(V, W)$. Тогда индуцированное отображение $\text{Bd}(V) \rightarrow \text{Bd}(W)$ является $\nearrow$ -непрерывным, т. е. для любой последовательности $T_j \nearrow T$ почти самодвойственных модулей выполнено $PT_j \nearrow PT$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы вычисляем PT_j по процедуре, описанной в п. 3.10. В силу леммы 3.5 оба шага вычисления непрерывны.

Д. Представление Вейля

Представление Вейля используется лишь в § 7.

3.14. Расширенная категория Назарова. Добавим к категории Назарова бесконечномерный объект $V_{2\infty}$. Это пространство векторов вида

$$(x_1^+, x_2^+, \dots, x_1^-, x_2^-, \dots), \quad x_j^\pm \in \mathbb{Q}_p, \quad x_j^\pm \in \mathbb{Z}_p \quad \text{для почти всех } j.$$

Отметим, что $V_{2\infty}$ не является $\mathbb{Q}_p$ -линейным пространством, но является $\mathbb{Z}_p$ -модулем.

Введем бихарактер $\beta(\cdot, \cdot)$ на $V_{2\infty} \oplus V_{2\infty}$ по формуле

$$\beta(x, y) = \exp \left[2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} (x_j^+ y_j^- - x_j^- y_j^+) \right] := \prod_{j=1}^{\infty} \exp \{ 2\pi i (x_j^+ y_j^- - x_j^- y_j^+) \}.$$

Почти все множители в этом произведении равны 1. Сумма, выписанная в квадратных скобках и задающая кососимметрическую билинейную форму, формально не является корректно определенной, но она корректно определена по модулю $\mathbb{Z}_p$.

Объекты *расширенной категории Назарова* **Naz** – это:

1) конечномерные пространства V , снабженные невырожденной кососимметрической билинейной формой B_V и соответствующим бихарактером β_V (см. (3.4));

2) пространство $V_{2\infty}$.

Пусть V, W – два объекта. Мы снабдим их прямую сумму бихарактером

$$\beta_{V \oplus W}(v \oplus w, v' \oplus w') = \frac{\beta_V(v, v')}{\beta_W(w, w')}.$$

Морфизм категории **Naz** – это самодвойственный модуль $P \subset V \oplus W$ такой, что $\ker P$ и $\text{indef } P$ компактны.

Группа $\mathbf{Sp}(2\infty, \mathbb{Q}_p)$ автоморфизмов $V_{2\infty}$ состоит из $(2\infty \times 2\infty)$ -матриц $r = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таких, что:

- 1) все, кроме конечного числа, матричные элементы являются целыми;
- 2) матричные элементы $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ стремятся к нулю при $i \rightarrow \infty$ для фиксированного j ; кроме того, они стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$ для фиксированного i ;
- 3) матрицы r симплектичны в обычном смысле:

$$r^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} r = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} r^t.$$

3.15. Группы Гейзенберга. Для простоты положим $p > 2$. Обозначим через $\mathbb{T}_p \subset \mathbb{C}^\times$ группу комплексных корней из единицы степени $p, p^2, p^3, \dots$. Пусть V – объект расширенной категории Назарова. Мы определим группу Гейзенберга $\text{Heis}(V)$ как центральное расширение абелевой группы V с помощью $\mathbb{T}_p$ следующим образом. Как множество $\text{Heis}(V) \simeq V \times \mathbb{T}_p$. Умножение задается формулой

$$(v, \lambda) \cdot (w, \mu) = (v + w, \lambda\mu \cdot \beta_V(v, w)).$$

Разложим $V = V_+ \oplus V_-$, как в (2.1). Для конечномерного пространства V мы определим унитарное представление Ψ группы $\text{Heis}(V)$ в $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$ по формуле

$$\Psi(v^+ \oplus v^-, \lambda)f(x) = \lambda f(x + v^+) \exp \left\{ 2\pi i \left(\sum_j v_j^+ x_j + \frac{1}{2} \sum_j v_j^+ v_j^- \right) \right\}. \quad (3.7)$$

Далее, рассмотрим пространство $\mathcal{E}_\infty$, состоящее из последовательностей $z = (z_1, z_2, \dots)$ таких, что $|z_j| \leq 1$ для всех, кроме конечного числа, j . Это пространство является локально компактной абелевой группой и, тем самым, снабжено мерой Хаара. На открытой подгруппе $\mathbb{Z}_p^\infty \subset \mathcal{E}_\infty$ мера Хаара является произведением вероятностных мер на $\mathbb{Z}_p$. Всё пространство $\mathcal{E}_\infty$ является счетным несвязным объединением множеств вида $u + \mathbb{Z}_p^\infty$.

Мы определим представление группы $\text{Heis}(V_{2\infty})$ в $L^2(\mathcal{E}_\infty)$ по той же формуле (3.7).

3.16. Представление Вейля категории Назарова. Формальное определение. Сформулируем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.19. *Каждому $2n$ -мерному объекту категории $\mathbf{Naz}$ мы ставим в соответствие гильбертово пространство $\mathcal{H}(V) := L^2(\mathbb{Q}_p^n)$. Объекту $V_{2\infty}$ мы ставим в соответствие гильбертово пространство $\mathcal{H}(V_{2\infty}) := L^2(\mathcal{E}_\infty)$.*

а) Пусть V, W – объекты категории $\mathbf{Naz}$ и $P: V \rightrightarrows W$ – морфизм категории $\mathbf{Naz}$. Тогда существует единственный с точностью до числового множителя ограниченный оператор

$$\text{We}(P): \mathcal{H}(V) \rightarrow \mathcal{H}(W)$$

такой, что

$$\Psi(w, 1) \text{We}(P) = \text{We}(P) \Psi(v, 1) \quad \forall v \oplus w \in P.$$

б) Пусть V, W, Y – объекты категории **Naz** и $P: V \rightrightarrows W, Q: W \rightrightarrows Y$ – морфизмы **Naz**. Тогда

$$\mathrm{We}(Q) \mathrm{We}(P) = s \mathrm{We}(QP),$$

где $s = s(P, Q) \in \mathbb{C}^\times$ – ненулевой множитель. Другими словами, мы получили проективное представление категории **Naz**. Кроме того,

$$\mathrm{We}(P^\square) = t \mathrm{We}(P)^*, \quad t \in \mathbb{C}^\times.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [33], [34], конечномерный случай разобран в [9, гл. 11].

Для симплектических групп $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p) = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}_p^{2n})$ представление $\mathrm{We}(g)$ совпадает с представлением Вейля.

3.17. Явные формулы для операторов, соответствующих некоторым морфизмам. Для некоторых морфизмов операторы $\mathrm{We}(\cdot)$ задаются простыми формулами.

1) Пусть $V = W$, а P – график симплектического оператора. Имеют место следующие формулы для специальных симплектических матриц:

$$\begin{aligned} \mathrm{We} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{t-1} \end{pmatrix} f(z) &= |\det A|^{1/2} f(zA), \\ \mathrm{We} \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f(z) &= \exp\{\pi i z B z^t\}, \\ \mathrm{We} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} f(z) &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x) \exp\{2\pi i x z^t\} dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Любой элемент группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ может быть разложен в произведение матриц такого вида, что позволяет выписать явные формулы $\mathrm{We}(g)$ для любого элемента $g \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$.

Обозначим через $I(x)$ функцию на $\mathbb{Q}_p$, заданную формулой

$$I(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нам будут нужны некоторые необратимые морфизмы.

2) Пусть $V = \mathbb{Q}_p^{2n}, W = V \oplus Y$, где $Y = \mathbb{Q}_p^{2n}$ или $Y = V_{2\infty}$. Обозначим через $Y(\mathbb{Z}_p)$ решетку $\mathbb{Z}_p^{2n}$ или $\mathbb{Z}_p^{2\infty}$ соответственно и через $\lambda_W^V: V \rightrightarrows W$ прямую сумму графика $\mathrm{graph}(1_V)$ единичного оператора $1_V: V \rightarrow V$ и решетки $Y(\mathbb{Z}_p) \subset Y$. Тогда

$$\mathrm{We}(\lambda_W^V) f(v_1, \dots, v_n, y_1, y_2, \dots) = f(v_1, \dots, v_n) I(y_1) I(y_2) \cdots.$$

3) Сохраняя предыдущие обозначения, определим морфизм $\theta_W^V: W \rightrightarrows W$ как прямую сумму

$$\mathrm{graph}(1_V) \oplus (Y(\mathbb{Z}_p) \oplus Y(\mathbb{Z}_p)) \subset (V \oplus V) \oplus (Y \oplus Y).$$

Тогда

$$\theta_W^V = \lambda_W^V (\lambda_W^V)^*, \quad (\theta_W^V)^2 = \theta_W^V, \quad (\lambda_W^V)^* \lambda_W^V = 1_V. \quad (3.9)$$

Оператор $\mathrm{We}(\theta_W^V)$ является ортогональной проекцией на пространство функций вида $f(v_1, \dots, v_n) I(y_1) I(y_2) \cdots$.

3.18. Общий случай. Любой морфизм категории **Naz** может быть представлен как произведение морфизмов, описанных выше. Более того, для конечномерных V, W любой морфизм $P: V \rightrightarrows W$ может быть представлен в виде

$$P = (\lambda_Z^W)^* \cdot g \cdot \lambda_Z^V, \quad g \in \mathrm{Sp}(Z),$$

где Z достаточно велико ($\dim Z \geq 2 \max(\dim V, \dim W)$). На самом деле такое же разложение имеет место и для морфизмов $Q: V_{2\infty} \rightarrow V_{2\infty}$, любой Q представим в виде

$$Q = \theta_{V_{2\infty} \oplus V_{2\infty}}^{V_{2\infty}} \cdot g \cdot \theta_{V_{2\infty} \oplus V_{2\infty}}^{V_{2\infty}}, \quad g \in \mathrm{Sp}(V_{2\infty} \oplus V_{2\infty}).$$

§ 4. Характеристические функции

Здесь мы определяем характеристические функции двойных классов смежности $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ и формулируем несколько теорем. Доказательства содержатся в следующем параграфе.

4.1. Конструкция. Рассмотрим группу

$$\mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p) := \lim_{j \rightarrow \infty} \mathrm{GL}(\alpha + kj, \mathbb{Q}_p).$$

Пусть $g \in \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$ на самом деле содержится в $\mathrm{GL}(\alpha + km, \mathbb{Q}_p)$,

$$g = \begin{pmatrix} a & b_1 & \dots & b_k \\ c_1 & d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\alpha + km, \mathbb{Q}_p). \quad (4.1)$$

Запишем следующее уравнение (аналог (1.5), эта аналогия является важной):

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ \dots \\ y_k^+ \\ v^- \\ y_1^- \\ \dots \\ y_k^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & \dots & b_k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & d_{11} & \dots & d_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & d_{k1} & \dots & d_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a & b_1 & \dots & b_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_1 & d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_k & d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} u^+ \\ x_1^+ \\ \dots \\ x_k^+ \\ u^- \\ x_1^- \\ \dots \\ x_k^- \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Здесь $u^\pm, v^\pm \in \mathbb{Q}_p^\alpha$, а $x_j^\pm, y_j^\pm \in \mathbb{Q}_p^m$.

Перед тем как использовать равенство (4.2), мы проведем некоторые приготовления.

Определим три пространства $\mathcal{V}, \mathcal{H}, \ell_m$.

1) Обозначим $\mathcal{V} := \mathbb{Q}_p^\alpha \oplus \mathbb{Q}_p^\alpha$. Мы рассматриваем $u = u^+ \oplus u^-, v = v^+ \oplus v^-$ как элементы $\mathcal{V}$. Снабдим $\mathcal{V}$ стандартной кососимметрической билинейной формой $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Обозначим

$$\mathcal{H} := \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^- = \mathbb{Q}_p^k \oplus \mathbb{Q}_p^k \quad (4.3)$$

и снабдим это пространство стандартной кососимметрической билинейной формой.

3) Обозначим через ℓ_m пространство $\mathbb{Q}_p^m$, снабженное стандартной симметрической билинейной формой

$$(z, w) = \sum_j z_j w_j.$$

Мы рассматриваем $x_j^\pm, y_j^\pm$ как элементы этого пространства.

Рассмотрим тензорное произведение $\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \ell_m$, векторы

$$(x_1^+ \quad \dots \quad x_k^+ \quad x_1^- \quad \dots \quad x_k^-), \quad (y_1^+ \quad \dots \quad y_k^+ \quad y_1^- \quad \dots \quad y_k^-)$$

могут рассматриваться как элементы $\mathcal{H} \otimes \ell_m$. Снабдим $\mathcal{H} \otimes \ell_m$ тензорным произведением билинейных форм¹³

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1_m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1_m \\ -1_m & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -1_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, оператор в (4.2) является оператором

$$\mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m) \rightarrow \mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m).$$

Пространство $\mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)$ снабдим кососимметрической билинейной формой – прямой суммой форм в $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H} \otimes \ell_m$, матрица этой формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1_\alpha & 0 & 0 \\ -1_\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{km} \\ 0 & 0 & -1_{km} & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что операторы (4.2) эту форму сохраняют, т.е. содержатся в $\mathrm{Sp}(2(\alpha + km), \mathbb{Q}_p)$.

Теперь перейдем к описанию характеристической функции.

Для произвольного самодвойственного модуля $Q \subset \mathcal{H}$ рассмотрим самодвойственный модуль

$$Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m \subset \mathcal{H} \otimes \ell_m.$$

Отметим, что $Q \otimes \mathbb{Z}_p^m$ является прямой суммой m копий модуля Q .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Фиксируем g . Для самодвойственных модулей $Q, T \subset \mathcal{H}$ мы определим *линейное отношение*

$$\chi_g(Q, T): \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{V}$$

как множество всех $u \oplus v \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$, для которых существуют $x \in Q \otimes \mathbb{Z}_p^m$, $y \in T \otimes \mathbb{Z}_p^m$ такие, что выполнено (4.2).

¹³Тензорное произведение кососимметрической и симметрической билинейных форм является кососимметрической билинейной формой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Мы скажем, что некоторое свойство двойного класса смежности *выполняется в общем положении*, если для достаточно больших m множество точек $g \in \mathrm{GL}(\alpha + km, \mathbb{Q}_p)$, для которого свойство не выполняется, содержится в собственном алгебраическом подмногообразии в $\mathrm{GL}(\alpha + km, \mathbb{Q}_p)$.

4.2. Основные свойства характеристических функций. Сформулируем следующие утверждения.

ЛЕММА 4.3. *Характеристическая функция $\chi_g(Q, T)$ не зависит от выбора m .*

ТЕОРЕМА 4.4. *Если g_1, g_2 содержатся в одном и том же классе смежности $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$, то $\chi_{g_1}(Q, T) = \chi_{g_2}(Q, T)$.*

Таким образом, для любого двойного класса смежности $\mathfrak{g} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ мы получаем корректно определенное отображение

$$\chi_{\mathfrak{g}}: \mathrm{LMod}(\mathcal{H}) \times \mathrm{LMod}(\mathcal{H}) \rightarrow \{\text{пространство отношений } \mathcal{V} \rightrightarrows \mathcal{V}\}.$$

Следовательно, вместо $\chi_{\mathfrak{g}}$ мы можем записывать $\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$, где $\mathfrak{g} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$. Мы говорим, что $\chi_{\mathfrak{g}}(\cdot, \cdot)$ – *характеристическая функция* двойного класса смежности $\mathfrak{g}$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Имеем $\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T) \in \overline{\mathrm{Naz}}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.*

ТЕОРЕМА 4.6. *Выполнено тождество*

$$\chi_{\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}}(Q, T) = \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T) \chi_{\mathfrak{h}}(Q, T),$$

где в правой части стоит произведение отношений.

4.3. Уточнение теоремы 4.5. Фиксируем двойной класс смежности $\mathfrak{g}$. Подставляя $x^{\pm} = 0$, $y^{\pm} = 0$ в уравнение (4.2), мы получаем уравнение относительно $u \oplus v \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$. Явная форма этого уравнения (см. формулу (5.3)) следующая:

$$\begin{aligned} v^{+} &= au^{+}, & 0 &= c_j u^{+} \quad \forall j, \\ u^{-} &= a^t v^{-}, & 0 &= b_j^t v^{-} \quad \forall j. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Обозначим через $\Lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ линейное пространство решений этой системы. Заметим, что $\ker \Lambda(\mathfrak{g}) = 0$, $\mathrm{indef} \Lambda(\mathfrak{g}) = 0$, так как g обратима.

Для $\mathfrak{g}$ в общем положении имеем $\Lambda(\mathfrak{g}) = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. а) *Для любых самодвойственных $Q, T \in \mathrm{LMod}(\mathcal{H})$*

$$\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)_{\downarrow} \supset \Lambda(\mathfrak{g}), \quad \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)^{\uparrow} \subset \Lambda(\mathfrak{g})^{\perp}.$$

б) *Если Q, T – самодвойственные решетки, то*

$$\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)_{\downarrow} = \Lambda(\mathfrak{g}), \quad \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)^{\uparrow} = \Lambda(\mathfrak{g})^{\perp}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4.8. *Для матриц $\mathfrak{g}$ общего положения имеет место отображение*

$$\mathrm{LLat}(\mathcal{H}) \times \mathrm{LLat}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{LLat}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}).$$

4.4. Значение характеристической функции на остоле. Сформулируем следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 4.9. Пусть $Q, T \in \text{LGr}(\mathcal{H})$. Тогда:

- а) $\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$ – лагранжесово подпространство в $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$;
- б) отображение $\chi_{\mathfrak{g}}: \text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{LGr}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$ рационально;
- с) для $\mathfrak{g}$ в общем положении имеем $\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T) \in \text{Sp}(\mathcal{V}, \mathbb{Q}_p)$ п. в. на $\text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H})$.

Точное описание подмножества элементов в $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$, для которых выполнено последнее свойство, дано ниже, в п. 5.9.

Имеет место также следующее, более экзотическое, утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.10. Для всех $\mathfrak{g}$ и почти всех $(Q, T) \in \text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H})$ условие $(u^+ \oplus u^-) \oplus (v^+ \oplus v^-) \in \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$ может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ u^- \end{pmatrix} = Z(Q, T) \begin{pmatrix} v^- \\ u^+ \end{pmatrix},$$

где $Z(Q, T)$ – симметрическая матрица.

В предложении 4.10 существенно то, что матрица $Z(Q, T)$ существует для всех $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.11. Пусть $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K} = \text{O}(\infty, \mathbb{Z}_p) \setminus \mathbf{G}/\text{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ содержатся в одном двойном классе смежности $\text{O}(\infty, \mathbb{Q}_p) \setminus \mathbf{G}/\text{O}(\infty, \mathbb{Q}_p)$. Тогда ограничения $\chi_{\mathfrak{g}_1}$ и $\chi_{\mathfrak{g}_2}$ на $\text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H})$ совпадают.

4.5. Продолжение характеристической функции на ансамбль Брюа–Титса. Теперь рассмотрим два почти самодвойственных подмодуля Q, T и повторим для них определение характеристической функции.

Рис. 2. Произведение двух симплексов и дополнительные стрелки

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.12. Если Q, T – почти самодвойственные подмодули, то $\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$ – почти самодвойственный подмодуль.

Далее мы построим ориентированный граф $\Delta(\mathcal{H} \ltimes \mathcal{H})$ (рис. 2). Его вершины – упорядоченные пары (Q, T) почти самодвойственных подмодулей в $\mathcal{H}$. Мы проводим стрелку из (Q, T) в (Q', T') , если $Q \supset Q', T \supset T'$.

Рассмотрим произведение симплициальных комплексов $\text{Bd}(\mathcal{H}) \times \text{Bd}(\mathcal{H})$. Это полиэдральный комплекс, клетки которого – произведения симплексов. Две вершины (Q, T) и (Q', T') этого комплекса соединены стрелкой, если $Q \supset Q'$ и $T = T'$ или $Q = Q'$ и $T \supset T'$. Так или иначе наше правило дает дополнительные стрелки, в итоге получим симплициальное разбиение каждого произведения симплексов (см., например, [44, § 3.В]). Окончательно мы получаем $2k$ -мерный симплициальный комплекс $\text{Bd}(\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H})$ (он также является подкомплексом комплекса $\text{Bd}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$).

Пусть Φ, Ψ – ориентированные графы. Предположим, что число ребер, соединяющих любую пару вершин, не более 1. Мы скажем, что отображение $\sigma: \text{Vert}(\Phi) \rightarrow \text{Vert}(\Psi)$ является *морфизмом графов* (рис. 3), если для любой стрелки $a \rightarrow b$ в графе Φ или выполнено $\sigma(a) = \sigma(b)$, или существует стрелка $\sigma(a) \rightarrow \sigma(b)$.

Рис. 3. Морфизм ориентированных графов

ТЕОРЕМА 4.13. *Характеристическая функция $\chi_{\mathfrak{g}}$ является морфизмом ориентированных графов*

$$\Delta(\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H}) \rightarrow \Delta(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}). \quad (4.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.14. *Характеристическая функция определяет отображение симплициальных комплексов $\text{Bd}(\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H}) \rightarrow \text{Bd}(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$.*

4.6. Непрерывность. Характеристическая функция непрерывна на границе в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 4.15. *Пусть Q_j, Q, T_j, T – почти самодвойственные модули. Если $Q_j \nearrow Q, T_j \nearrow T$, то $\chi_{\mathfrak{g}}(Q_j, T_j) \nearrow \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$.*

Отметим, что характеристическая функция может быть разрывной относительно хаусдорфовой сходимости. Более того, ограничение $\chi_{\mathfrak{g}}$ на $\text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H})$ может быть разрывным в топологии грассманиана.

4.7. Инволюция. Инволюция на множестве двойных классов смежности легко интерпретируется в терминах характеристических функций.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.16. *Если $u \oplus v \in \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$, то $v \oplus u \in \chi_{\mathfrak{g}}^*(T, Q)$.*

4.8. Дополнительная симметрия. Для ненулевого $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times = \mathbb{Q}_p$ мы определим оператор $M(\lambda)$ в $\mathcal{H}$, равный $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$. Также через $M(\lambda)$ мы обозначим оператор $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ в пространстве $\mathcal{V}$.

ТЕОРЕМА 4.17. *Справедливо равенство*

$$\chi_{\mathfrak{g}}(M(\lambda)Q, M(\lambda)T) = M(\lambda^{-1})\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)M(\lambda).$$

4.9. Замечание. Другая полугруппа двойных классов смежности. Рассмотрим группу $\tilde{\mathbf{G}} = \mathrm{Sp}(2\alpha + 2k\infty, \mathbb{Q}_p)$ симплектических матриц $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ размера $(\alpha + k\infty) \times (\alpha + k\infty)$, $\tilde{\mathbf{G}} \supset \mathbf{G}$. Возьмем ее подгруппу $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$, состоящую из матриц $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{t-1} \end{pmatrix}$, а в ней – ту же самую подгруппу $\mathbf{K} = \mathrm{O}(\infty, \mathbb{Z}_p) \subset \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$. Рассмотрим полугруппу двойных классов смежности $\mathbf{K} \backslash \tilde{\mathbf{G}} / \mathbf{K}$, умножение определено так же, как в теореме 2.2.

Мы определим характеристическую функцию $\chi_{\tilde{\mathfrak{g}}}(Q, T)$ тем же способом, в формуле (4.2) вместо матрицы $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{t-1} \end{pmatrix}$ мы записываем симплектическую матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2\alpha + 2k\infty, \mathbb{Q}_p)$.

ТЕОРЕМА 4.18. *Все высказывания данного параграфа остаются в силе для характеристической функции $\chi_{\tilde{\mathfrak{g}}}(Q, T)$, кроме теоремы 4.17, предложения 4.10 и требующей модификации системы уравнений (4.4).*

§ 5. Доказательства

5.1. Независимость от выбора представителей. Докажем теорему 4.4. Чтобы сделать записи более короткими, положим $k = 2$. Пусть $h \in \mathrm{O}(m, \mathbb{Z}_p)$ и $\mathfrak{I}(h)$ определено формулой (2.2). Тогда характеристическая функция матрицы $g\mathfrak{I}(h)$ определяется из равенства

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ v^- \\ y_1^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 h & b_2 h & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} h & d_{12} h & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} h & d_{22} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b_1 h & b_2 h \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & d_{11} h & d_{12} h \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & d_{21} h & d_{22} h \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} u^+ \\ x_1^+ \\ x_2^+ \\ u^- \\ x_1^- \\ x_2^- \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ v^- \\ y_1^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} u^+ \\ h x_1^+ \\ h x_2^+ \\ u^- \\ h x_1^- \\ h x_2^- \end{pmatrix}.$$

Переходя к новым переменным $\tilde{x}_1^\pm = h x_1^\pm$, $\tilde{x}_2^\pm = h x_2^\pm$, мы получаем уравнение для χ_g . Отметим, что модули $Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m$ инвариантны относительно $\mathrm{O}(m, \mathbb{Z}_p)$.

5.2. Доказательство предложения 4.11. Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.4, только мы берем $h \in \mathrm{O}(m, \mathbb{Q}_p)$. Если $Q \subset \mathcal{H}$ – подпространство, то $Q \otimes \ell_m = Q \otimes \mathbb{Q}_p^m$ – также подпространство, оно является $\mathrm{O}(m, \mathbb{Q}_p)$ -инвариантным.

5.3. Переформулировка определения. Уравнение (4.2) определяет линейное подпространство в

$$(\mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)) \oplus (\mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)).$$

Мы рассматриваем его как линейное отношение

$$\xi: ((\mathcal{H} \otimes \ell_m) \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)) \rightrightarrows (\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}).$$

Тогда $\chi_{\mathfrak{g}}$ является образом подмодуля

$$\eta_{Q,T} = (Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m) \oplus (T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m)$$

под действием отношения ξ .

5.4. Прямые следствия нового определения. Докажем теорему 4.5. Отношение ξ является морфизмом категории $\overline{\text{Naz}}$. Модуль $\eta_{Q,T}$ является самодвойственным. По теореме 3.13 модуль $\xi\eta_{Q,T}$ также является самодвойственным. Теорема доказана.

Аналогично доказываются теорема 4.9, а) и предложение 4.12.

Лемма 4.3 легко следует из нового определения (см. п. 5.3).

5.5. Непрерывность. Теорема 4.15 следует из теоремы 3.18.

5.6. Произведения. Доказательство теоремы 4.6. Для краткости обозначений положим $k = 2$. Пусть

$$g = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} \\ c_2 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \in \text{GL}(\alpha + 2l, \mathbb{Q}_p), \quad h = \begin{pmatrix} a' & b'_1 & b'_2 \\ c'_1 & d'_{11} & d'_{12} \\ c'_2 & d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix} \in \text{GL}(\alpha + 2m, \mathbb{Q}_p).$$

Пусть $v \oplus w \in \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T)$, $u \oplus v \in \chi_{\mathfrak{h}}(Q, T)$. Тогда существуют $x \in Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m$ и $y \in T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m$ такие, что

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ v^- \\ y_1^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b'_1 & b'_2 & 0 & 0 & 0 \\ c'_1 & d'_{11} & d'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c'_2 & d'_{21} & d'_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' & b'_1 & b'_2 \\ 0 & 0 & 0 & c'_1 & d'_{11} & d'_{12} \\ 0 & 0 & 0 & c'_2 & d'_{21} & d'_{22} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} u^+ \\ x_1^+ \\ x_2^+ \\ u^- \\ x_1^- \\ x_2^- \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Также существуют $X \in Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^l$, $Y \in T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^l$ такие, что

$$\begin{pmatrix} w^+ \\ Y_1^+ \\ Y_2^+ \\ w^- \\ Y_1^- \\ Y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & d_{11} & d_{12} \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} v^+ \\ X_1^+ \\ X_2^+ \\ v^- \\ X_1^- \\ X_2^- \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Мы переписываем (5.2) в виде

$$\begin{pmatrix} w^+ \\ Y_1^+ \\ y_1^+ \\ Y_2^+ \\ y_2^+ \\ w^- \\ Y_1^- \\ y_1^- \\ Y_2^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & d_{11} & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_{21} & 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} v^+ \\ X_1^+ \\ y_1^+ \\ X_2^+ \\ y_2^+ \\ v^- \\ X_1^- \\ y_1^- \\ X_2^- \\ y_2^- \end{pmatrix}.$$

Применяя (5.1), получаем

$$\begin{pmatrix} w^+ \\ Y_1^+ \\ y_1^+ \\ Y_2^+ \\ y_2^+ \\ w^- \\ Y_1^- \\ y_1^- \\ Y_2^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & 0 & d_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & 0 & d_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & d_{11} & 0 & d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_{21} & 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} u^+ \\ X_1^+ \\ x_1^+ \\ X_2^+ \\ x_2^+ \\ u^- \\ X_1^- \\ x_1^- \\ X_2^- \\ x_2^- \end{pmatrix}.$$

Теперь $X \oplus x \in Q \otimes (\mathbb{Z}_p^l \oplus \mathbb{Z}_p^m)$, $Y \oplus y \in T \otimes (\mathbb{Z}_p^l \oplus \mathbb{Z}_p^m)$, и мы получаем $u \oplus w \in \chi_{\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}}(Q, T)$. Итак,

$$\chi_{\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}}(Q, T) \supset \chi_{\mathfrak{g}}(Q, T) \chi_{\mathfrak{h}}(Q, T),$$

но оба модуля самодвойственны, поэтому они совпадают.

5.7. Морфизмы графов. Докажем теорему 4.13. Рассмотрим отображение

$$\text{LMod}(\mathcal{H}) \times \text{LMod}(\mathcal{H}) \rightarrow \text{LMod}(\mathcal{H} \otimes \ell_m) \times \text{LMod}(\mathcal{H} \otimes \ell_m), \quad (5.3)$$

заданное как $(Q, T) \mapsto (Q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m, T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p^m)$.

ЛЕММА 5.1. *Отображение (5.3) является морфизмом графов*

$$\Delta(\mathcal{H} \rtimes \mathcal{H}) \rightarrow \Delta((\mathcal{H} \otimes \ell_m) \rtimes (\mathcal{H} \otimes \ell_m)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Далее, мы имеем вложение комплексов

$$\mathrm{Bd}((\mathcal{H} \otimes \ell_m) \rtimes (\mathcal{H} \otimes \ell_m)) \rightarrow \mathrm{Bd}((\mathcal{H} \otimes \ell_m) \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)).$$

Линейное отношение ξ является морфизмом категории Naz . Следовательно, оно индуцирует морфизм графов $\Delta((\mathcal{H} \otimes \ell_m) \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)) \rightarrow \Delta(\mathcal{V} \oplus \mathcal{V})$.

5.8. Доказательство предложения 4.7. Легко видеть, что $\mathrm{indef} \xi = \Lambda(\mathfrak{g})$. Следовательно, $\Lambda(\mathfrak{g}) \subset \xi \eta_{Q,T} \subset \Lambda(\mathfrak{g})^\perp$. Утверждение а) доказано.

Если R – отношение $\mathcal{V} \rightrightarrows W$, а $Y \subset \mathcal{V}$ – решетка, то $(RY)_\downarrow = (\mathrm{indef} R)_\downarrow$, откуда следует справедливость утверждения б).

5.9. Значения на остовах. Пусть теперь Q, T – лагранжевы подпространства в $\mathcal{H}$. Докажем предложение 4.10. Представим $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- = \mathbb{Q}_p^\alpha \oplus \mathbb{Q}_p^\alpha$. Лагранжево подпространство $Q \subset \mathcal{H}$ общего положения является графиком оператора $\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-$, матрица этого оператора симметрична (см., например, [9, теорема 3.1.4]). Для упрощения обозначений положим $k = 2$. Уравнение (4.2) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ u^- \\ t_{11}x_1^+ + t_{12}x_2^+ \\ t_{12}x_1^+ + t_{22}x_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^t & c_1^t & c_2^t \\ 0 & 0 & 0 & b_1^t & d_{11}^t & d_{21}^t \\ 0 & 0 & 0 & b_2^t & d_{12}^t & d_{22}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ x_1^+ \\ x_2^+ \\ v^- \\ q_{11}y_1^+ + q_{12}y_2^+ \\ q_{12}y_1^+ + q_{22}y_2^+ \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Обозначим

$$\varkappa := \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{12} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \tau := \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}$$

и запишем (5.4) следующим образом:

$$v^+ = au^+ + bx^+, \quad (5.5)$$

$$y^+ = cu^+ + dx^+, \quad (5.6)$$

$$u^- = a^t v^- + c^t \varkappa y^+, \quad (5.7)$$

$$\tau x^+ = b^t v^- + d^t \varkappa y^+. \quad (5.8)$$

Соотношения (5.6), (5.8) задают систему уравнений для x^+, y^+ . Матрицей системы является

$$\Omega(\varkappa, \tau) = \begin{pmatrix} -d & 1 \\ \tau & -d^t \varkappa \end{pmatrix}.$$

Ясно, что многочлен $\det \Omega(\varkappa, \tau)$ ненулевой. Действительно, фиксируем $\varkappa$ и возьмем $\tau = p^{-N} \cdot 1$. Если N достаточно велико, то определитель $\neq 0$. Итак, в дополнении к гиперповерхности

$$\det \Omega(\varkappa, \tau) = 0$$

мы можем выразить x^+ и y^+ как функции от u^+, v^- . После подстановки x^+ и y^+ в (5.5), (5.7) мы получаем выражения u^-, v^+ через u^+, v^- . Предложение доказано.

Отсюда следует теорема 4.9, б) (рациональность характеристической функции).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.9, с). Обозначим $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ и запишем уравнение (4.2) в форме

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ v^- \\ q_{11}y_1^+ + q_{12}y_2^+ \\ q_{12}y_1^+ + q_{22}y_2^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^t & C_1^t & C_2^t \\ 0 & 0 & 0 & B_1^t & D_{11}^t & D_{21}^t \\ 0 & 0 & 0 & B_2^t & D_{12}^t & D_{22}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ x_1^+ \\ x_2^+ \\ u^- \\ t_{11}x_1^+ + t_{12}x_2^+ \\ t_{12}x_1^+ + t_{22}x_2^+ \end{pmatrix}$$

или

$$v^+ = au^+ + bx^+, \quad (5.9)$$

$$y^+ = cu^+ + dx^+, \quad (5.10)$$

$$v^- = A^t u^- + C^t \tau x^+, \quad (5.11)$$

$$\varkappa y^+ = B^t u^- + D^t \tau x^+. \quad (5.12)$$

Уравнения (5.10), (5.12) составляют систему уравнений для y^+ , x^+ . Матрицей этой системы является

$$\Xi(\varkappa, \tau) = \begin{pmatrix} 1 & -d \\ \varkappa & -D^t \tau \end{pmatrix}$$

с определителем $\det \Xi(\varkappa, \tau) = \det(-D^t \tau + \varkappa d)$. Если он не равен нулю, то мы получаем линейный оператор $u \mapsto v$. Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Если существует пара симметрических матриц $\varkappa, \tau$ таких, что $\det(-D^t \tau + \varkappa d) \neq 0$, то $\chi_g(Q, T) \in \text{Sp}(\mathcal{V}, \mathbb{Q}_p)$ п. в. на $\text{LGr}(\mathcal{H}) \times \text{LGr}(\mathcal{H})$.*

5.10. Инволюция. Доказательство предложения 4.16. Запишем определяющее соотношение для $\chi_{g^{-1}}$:

$$\begin{pmatrix} v^+ \\ y^+ \\ v^- \\ y^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ x^+ \\ u^- \\ x^- \end{pmatrix}.$$

Переписывая его в виде

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ x^+ \\ u^- \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}^{t-1} \begin{pmatrix} v^+ \\ y^+ \\ v^- \\ y^- \end{pmatrix},$$

мы завершаем доказательство предложения 4.16.

5.11. Доказательство теоремы 4.17. Перепишем (4.2) в виде

$$\begin{pmatrix} u^+ \\ x^+ \\ u^- \\ x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & & & \\ & \lambda^{-1} & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a & b)^{t-1} \\ 0 & 0 & (c & d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda^{-1} & \\ & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^+ \\ y^+ \\ v^- \\ y^- \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \lambda u^+ \\ \lambda x^+ \\ \lambda^{-1} u^- \\ \lambda^{-1} x^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a & b)^{t-1} \\ 0 & 0 & (c & d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda v^+ \\ \lambda y^+ \\ \lambda^{-1} v^- \\ \lambda^{-1} y^- \end{pmatrix}.$$

5.12. Другая переформулировка определения характеристической функции. Рассмотрим пространство $W = \mathcal{V} \oplus (\mathcal{H} \otimes \ell_m)$. Для произвольного самодвойственного модуля $Q \subset \mathcal{H}$ рассмотрим линейное отношение $\Lambda: \mathcal{V} \rightrightarrows W$, определенное формулой

$$\Lambda_Q = 1_{\mathcal{V}} \oplus (Q \otimes \mathbb{Z}_p^m) \subset (\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}) \oplus (Q \otimes \ell_m).$$

Тогда $\chi_{\mathfrak{g}}$ – произведение линейных отношений:

$$\chi_{\mathfrak{g}}(Q, T) = (\Lambda_T)^{\square} \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{t-1} \end{pmatrix} \Lambda_Q.$$

§ 6. Теорема мультипликативности

Теорема 2.3 (теорема мультипликативности) является представителем большого семейства теорем, их доказательства стандартны; ниже мы ссылаемся на доказательства из [8, гл. VIII].

6.1. Уголки ортогональных матриц.

ЛЕММА 6.1. Пусть A – матрица размера $m \times m$ с элементами из $\mathbb{Z}_p$. Тогда существуют N и матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(m + N, \mathbb{Z}_p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathbb{B}_m$ множество всех возможных левых верхних $(m \times m)$ -матриц матрицы $g \in O(\infty, \mathbb{Z}_p)$. Проведем следующие шаги.

Шаг 1. Множество $\mathbb{B}_m$ замкнуто относительно умножения матриц. Действительно, пусть

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(m + N, \mathbb{Z}_p), \quad \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in O(m + N', \mathbb{Z}_p).$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} A & B & 0 \\ C & D & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & 0 & B' \\ 0 & 1 & 0 \\ C' & 0 & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \in O(m + N + N', \mathbb{Z}_p).$$

Шаг 2. Если $A \in \mathbb{B}_m$, $A' \in \mathbb{B}_n$, то $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_{m+n}$.

Шаг 3. Более-менее ясно, что для любого $z \in \mathbb{Z}_p$ выполнено

$$(z) \in \mathbb{B}_1, \quad \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_2.$$

Шаг 4. $\mathbb{B}_m$ содержит матрицы-перестановки.

Теперь мы можем получить любую матрицу с целыми элементами.

6.2. Допустимые представления. Обозначим через $\mathbf{K}_m$ подгруппу в $\mathbf{K}$, состоящую из матриц вида $\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$.

Пусть τ – унитарное представление группы $\mathbf{K}$ в гильбертовом пространстве H . Обозначим через $H(m)$ подпространство всех $\mathbf{K}_m$ -неподвижных векторов и через $P(m)$ оператор ортогонального проектирования на $H(m)$. Мы говорим, что представление τ *допустимо*, если $\bigcup_m H(m)$ плотно в H .

Скажем, что представление группы $\mathbf{G}$ является *$\mathbf{K}$ -допустимым*, если его ограничение на $\mathbf{K}$ допустимо.

6.3. Продолжение представлений. Обозначим через $\mathbb{B}_\infty$ полугруппу всех бесконечных матриц A таких, что:

а) $a_{ij} \in \mathbb{Z}_p$;

б) для любого i последовательность a_{ij} стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$; для любого j последовательность a_{ij} стремится к нулю при $i \rightarrow \infty$.

Скажем, что последовательность матриц $A^{(j)} \in \mathbb{B}_\infty$ *слабо сходится* к A , если имеет место сходимость всех матричных элементов, $a_{kl}^{(j)} \rightarrow a_{kl}$.

Обозначим через $\mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ группу всех ортогональных матриц из $\mathbb{B}_\infty$.

ЛЕММА 6.2. *Группа $\mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ плотна в $\mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ и $\mathbb{B}_\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $S \in \mathbb{B}_\infty$. Рассмотрим левую верхнюю $(m \times m)$ -матрицу матрицы S . Рассмотрим элемент $g_m \in \mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$, имеющий ту же самую левую верхнюю подматрицу. Тогда g_m слабо сходится к S .

ТЕОРЕМА 6.3. а) Пусть τ – унитарное представление группы $\mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$. Следующие условия эквивалентны:

1) τ допустимо;

2) τ допускает слабо непрерывное продолжение на группу $\mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$;

3) τ допускает слабо непрерывное продолжение до представления $\tilde{\tau}$ полугруппы $\mathbb{B}_\infty$ такого, что $\tilde{\tau}(A^t) = \tilde{\tau}(A)^*$, $\|\tilde{\tau}(A)\| \leq 1$ для всех A .

б) Для любого допустимого представления τ

$$P(m) = \tilde{\tau} \begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы не приводим доказательство теоремы 6.3, потому что оно повторяет доказательство теоремы VIII.1.4 из [8] о симметрических группах (допустимость влечет полугрупповое продолжение), единственное отличие – доказательство леммы 6.1. Допустимость вытекает из непрерывности в силу [8, предложение VIII.1.3].

СЛЕДСТВИЕ 6.4. *Обозначим*

$$\Theta_N^{(m)} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_N & 0 \\ 0 & 1_N & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_\infty \end{pmatrix}.$$

Тогда проектор $P(m)$ является слабым пределом последовательности:

$$P(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tau(\Theta_N^{(m)}). \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\Theta_N^{(m)} \in \mathbf{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ слабо сходится к матрице $\begin{pmatrix} 1_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}_\infty$. Мы ссылаемся на утверждение б) теоремы 6.3.

6.4. Доказательство теоремы 2.3. Мы сохраняем обозначения из п. 2.3. Пусть $v \in H^{\mathbf{K}}$, $g \in G_j = \mathrm{GL}(\alpha + km, \mathbb{Q}_p)$, и пусть $q \in \mathbf{K}_j$. Тогда

$$\rho(q)\rho(g)v = \rho(g)\rho(q)h = \rho(g)h,$$

т.е. $v \in H(j)$. Поэтому подпространство $\bigcup_j H(j)$ является $\mathbf{G}$ -инвариантным. Его замыкание является допустимым представлением группы $\mathbf{G}$. Для представления в пространстве $(\bigcup_j H(j))^{\perp}$ теорема 2.3 выполняется по тривиальной причине (пространство $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов является нулевым).

Таким образом, без ограничения общности мы можем предположить, что ρ допустимо.

Теперь пусть $g, h \in \mathbf{G}$, и пусть $\mathfrak{g}, \mathfrak{h} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ – соответствующие двойные классы смежности. Пусть $P = P(0)$ – проектор на подпространство $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов. Применяя следствие 6.4, получаем

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g})\bar{\rho}(h) = P\rho(g)P\rho(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\rho(g)\rho(\mathfrak{J}(\Theta_N^{(0)}))\rho(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} P\rho(g\mathfrak{J}(\Theta_N)h),$$

где $\mathfrak{J}: \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{G}$ – вложение (2.2). По определению $(\Theta_N^{(0)})$ – это Θ_N из п. 2.3) мы получаем $\bar{\rho}(\mathfrak{g} \star \mathfrak{h})$.

6.5. Вариация конструкции. Шлейф. Можно определить умножение двойных классов смежности

$$\mathbf{K}_p \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_q \times \mathbf{K}_q \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_r \rightarrow \mathbf{K}_p \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_r.$$

В определении произведения двойных классов смежности (п. 2.2) мы просто заменяем Θ_N на $\Theta_N^{(q)}$. Явная формула для произведения – та же формула (2.4). Таким образом, мы получаем категорию (*шлейф* $\mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ пары $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$).

Далее, для любого унитарного представления ρ группы $\mathbf{G}$ двойной класс смежности $\mathfrak{g} \in \mathbf{K}_p \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_q$ определяет оператор $\bar{\rho}(\mathfrak{g}): H(q) \rightarrow H(p)$ по формуле

$$\bar{\rho}(g) := P(q)\rho(g), \quad g \in \mathfrak{g}.$$

Для любых $\mathfrak{g} \in \mathbf{K}_p \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_q$, $\mathfrak{h} \in \mathbf{K}_q \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_r$ выполнено тождество

$$\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{h}) = \rho(\mathfrak{g} \star \mathfrak{h}),$$

т.е. мы получаем представление категории $\mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$. Кроме того,

$$\rho(\mathfrak{g}^*) = \rho(\mathfrak{g})^*, \quad \|\rho(\mathfrak{g})\| \leq 1, \quad (6.2)$$

и имеет место следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.5. *Данная конструкция является биекцией между множеством всех $\mathbf{K}$ -допустимых унитарных представлений группы $\mathbf{G}$ и множеством всех представлений категории $\mathcal{T}(\mathbf{G}, \mathbf{K})$, удовлетворяющих (6.2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО такое же, как в [16].

Конструкции характеристических функций и их свойства остаются в силе для двойных классов смежности $\mathbf{K}_p \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}_q$.

§ 7. Представления группы $\mathbf{G}$

7.1. Существование представлений. Пусть

$$\begin{pmatrix} a & b_1 & \dots & b_k \\ c_1 & d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_k & d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p).$$

Рассмотрим вложение $\mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(2(\alpha + k\infty), \mathbb{Q}_p)$, определенное по формуле

$$\iota: g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{t-1} \end{pmatrix}.$$

Для любого

$$r = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{2n,1} & \dots & r_{2n,2n} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Q}_p)$$

рассмотрим матрицу $\sigma(r) = 1_{2\alpha} \oplus (r \otimes 1_\infty)$,

$$\sigma(r) := \begin{pmatrix} 1_\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r_{11} \cdot 1_\infty & \dots & 0 & r_{1k} \cdot 1_\infty \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1_\alpha & 0 \\ 0 & r_{11} \cdot 1_\infty & \dots & 0 & r_{1k} \cdot 1_\infty \end{pmatrix}.$$

Данная матрица не содержится в $\mathrm{Sp}(2(\alpha + k\infty), \mathbb{Q}_p)$, поскольку она не финитна. Однако отображение

$$q \mapsto \sigma(r^{-1})q\sigma(r) \tag{7.1}$$

является внешним автоморфизмом группы $\mathrm{Sp}(2(\alpha + k\infty), \mathbb{Q}_p)$. Отметим, что этот автоморфизм оставляет элементы подгруппы $\mathbf{K} = \mathrm{O}(\infty, \mathbb{Z}_p)$ неподвижными.

Мы рассмотрим представление $\rho_r(g)$ группы $\mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$, заданное формулой

$$\rho_r(g) = \mathrm{We}(\sigma(r^{-1})\iota(g)\sigma(r)),$$

где $\mathrm{We}(\cdot)$ – представление Вейля (см. п. 3.16).

Напомним, что представление Вейля проективно.

ЛЕММА 7.1. *Представление $\rho_r(g)$ эквивалентно линейному представлению, т. е. существует функция (тривиализатор) $\gamma: \mathbf{G} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ такая, что $\gamma(g)\rho_r(g)$ является линейным представлением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что ограничение представления Вейля группы $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q}_p)$ на подгруппу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}_p)$ является линейным (см. (3.8)). Следовательно, ограничивая представление Вейля на любую конечномерную подгруппу $G_j = \mathrm{GL}(\alpha + kj, \mathbb{Q}_p)$, мы получаем представление, эквивалентное линейному представлению (в конечномерных группах автоморфизм (7.1) является внутренним). Обозначим через $\gamma_j(g)$ тривиализатор для G_j . Отношение $\gamma(g)_j/\gamma(g)_{j+1}$ двух тривиализаторов должно быть характером группы из G_j

в $\mathbb{C}^\times$. Все характеры группы $G_j \rightarrow \mathbb{C}^\times$ имеют вид $\varphi(\det h)$, где φ – характер группы из $\mathbb{Q}^\times$ в $\mathbb{C}^\times$. Поправляя

$$\gamma_{j+1}(g) \mapsto \gamma_{j+1}(g)\psi(\det g),$$

мы можем получить $\gamma_{j+1}(g) = \gamma_j(g)$ на G_j .

Таким способом мы получаем тривиализатор γ на всей группе $\mathbf{G}$. Ограничение γ на $O(\infty, \mathbb{Z}_p)$ должно быть характером из $O(\infty, \mathbb{Z}_p)$ в $\mathbb{C}^\times$. Единственный нетривиальный характер – это $\det(u) = \pm 1$. Мы меняем тривиализатор $\gamma(g)$ на $\det(g)\gamma(g)$.

ЛЕММА 7.2. *В модели из п. 3.17 подпространство $L^2(\mathcal{E}_{\alpha+k\infty})^{\mathbf{K}}$ всех $\mathbf{K}$ -неподвижных векторов представления ρ_r совпадает с пространством функций вида*

$$f(z_1, \dots, z_\alpha)I(z_{\alpha+1})I(z_{\alpha+2}) \cdots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без потери общности можно положить $\alpha = 0$. Мы рассматриваем $\mathcal{E}_{k\infty}$ как подпространство $(\infty \times k)$ -матриц $Z = \{z_{ij}\}$ с элементами из $\mathbb{Q}_p$ (все, кроме конечного числа, элементы содержатся в $\mathbb{Z}_p$). Группа $\mathbf{K} = O(\infty, \mathbb{Z}_p)$ действует левыми умножениями

$$\mathrm{We}(u)f(Z) = f(Zu).$$

Мы должны показать, что $\prod_{ij} I(z_{ij})$ является единственной $O(\infty, \mathbb{Z}_p)$ -инвариантной функцией в $L^2(\mathcal{E}_{k\infty})$. Равносильно, $\mathbb{Z}_p^{k\infty}$ является единственным инвариантным подмножеством конечной положительной меры.

Группа $O(\infty, \mathbb{Z}_p)$ содержит подгруппу $S(\infty)$ финитных перестановок $\mathbb{N}$. В силу закона “нуля и единицы” (см., например, [45, §4.1]) действие группы $S(\infty)$ на множестве $\mathbb{Z}_p^{k\infty} \subset \mathcal{E}_{k\infty}$ является эргодическим. Пусть $\Omega \subset \mathcal{E}_{k\infty}$ – инвариантное подмножество. Пусть $\xi \in \mathcal{E}_{k\infty} \setminus \mathbb{Z}_p^{k\infty}$. Предположим, что мера множества $\Omega \cap (\xi + \mathbb{Z}_p^{k\infty})$ ненулевая, скажем ν_0 . Поскольку множество Ω является $S(\infty)$ -инвариантным, для любого $\mathfrak{s} \in S(\infty)$ множество $\Omega \cap (\xi\mathfrak{s} + \mathbb{Z}_p^{k\infty})$ имеет ту же меру ν_0 . Однако имеется счетное множество попарно непересекающихся подмножеств $\xi\mathfrak{s} + \mathbb{Z}_p^{k\infty}$, следовательно, мера Ω бесконечна.

СЛЕДСТВИЕ 7.3. *Пусть $\alpha = 0$. Тогда представление ρ_r содержит единственное неприводимое $\mathbf{K}$ -сферическое подпредставление группы $\mathbf{G}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы возьмем $\mathbf{G}$ -циклическую оболочку единственного $\mathbf{K}$ -неподвижного вектора.

Далее, рассмотрим подгруппу $\mathrm{GL}(1, \mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Q}_p)$, состоящую из матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda \cdot 1_k & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \cdot 1_k \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in \mathbb{Q}_p^\times$.

ЛЕММА 7.4. *Если $r, r' \in \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Q}_p)$ содержатся в одном классе смежности*

$$\mathrm{GL}(1, \mathbb{Q}_p) \setminus \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Q}_p) / \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Z}_p),$$

то $\rho_r \simeq \rho_{r'}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, если $q \in \mathrm{GL}(1, \mathbb{Q}_p)$, то автоморфизм (7.1) оставляет на месте все элементы подгруппы $\mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$. Во-вторых, если $t \in \mathrm{Sp}(2k, \mathbb{Z}_p)$, то $\sigma(t)$ содержится в группе **Sp** автоморфизмов бесконечномерного объекта категории Назарова. Следовательно, оператор $\mathrm{We}(\sigma(t))$ корректно определен, он сплетает ρ_r и ρ_{rt} .

7.2. Связь характеристических функций и представлений. В силу леммы 7.2 мы можем отождествить пространство **K**-неподвижных векторов ρ_r и пространство представления Вейля группы $\mathrm{Sp}(2\alpha, \mathbb{Q}_p)$.

ТЕОРЕМА 7.5. *Представление полугруппы $\mathbf{K} \setminus \mathbf{G}/\mathbf{K}$ в пространстве **K**-неподвижных векторов представления ρ_r задается формулой*

$$\bar{\rho}_r(\mathfrak{g}) = s \mathrm{We}(\chi_{\mathfrak{g}}(r\mathbb{Z}_p^{2k}, r\mathbb{Z}_p^{2k})), \quad s \in \mathbb{C}^\times.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем обозначения и утверждения из п. 3.16. Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ – те же, что и в § 4. Пусть $Y = V_{2k\infty}$, $W = V \oplus Y$. Тогда оператор проектирования $\mathcal{H}(\mathcal{V} \oplus Y)$ на $\mathcal{H}(V \oplus Y)^{\mathbf{K}} \simeq \mathcal{H}(\mathcal{V})$ – это $\mathrm{We}(\theta_W^V)$. Следовательно,

$$\bar{\rho}(\mathfrak{g}) = s' \mathrm{We}(\theta_W^V) \mathrm{We}(\sigma(r^{-1})\iota(g)\sigma(r)) \mathrm{We}(\theta_W^V)$$

является оператором $L^2(\mathcal{E}_{\alpha+k\infty})^{\mathbf{K}} \rightarrow L^2(\mathcal{E}_{\alpha+k\infty})^{\mathbf{K}}$. Оператор

$$\mathrm{We}(\lambda_W^V): L^2(\mathbb{Q}_p^\alpha) \rightarrow L^2(\mathcal{E}_{\alpha+k\infty})$$

является оператором изометрического вложения, его образ – пространство $\mathcal{H}(V \oplus V_{2k\infty})^{\mathbf{K}}$. Следовательно, мы можем записать $\bar{\rho}(\mathfrak{g})$ в виде

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathfrak{g}) &= s'' \mathrm{We}(\lambda_W^V)^* \mathrm{We}(\theta_W^V) \mathrm{We}(\sigma(r^{-1})\iota(g)\sigma(r)) \mathrm{We}(\theta_W^V) \mathrm{We}(\lambda_W^V) \\ &= s''' \mathrm{We}(\lambda_W^V)^* \mathrm{We}(\sigma(r^{-1})\iota(g)\sigma(r)) \mathrm{We}(\lambda_W^V) \\ &= s'''' \mathrm{We}[(\lambda_W^V)^* \sigma(r^{-1})\iota(g)\sigma(r)\lambda_W^V]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Далее, $\sigma(r)\lambda_W^V: V \rightrightarrows V \oplus Y$ является прямой суммой подпространства $1_V \subset V \oplus V$ и решетки Y , заданной формулой

$$\sigma(r)Y(\mathbb{O}) = \sigma(r)(H(\mathbb{O}) \otimes \mathbb{O}^\infty) = (rH(\mathbb{O})) \otimes \mathbb{O}^\infty.$$

Мы применяем изложенное в п. 5.12 для вычисления выражения из квадратных скобок в (7.2).

7.3. Более общая конструкция. Рассмотрим вложение

$$\iota_l: \mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathrm{Sp}(2l\alpha + 2lk\infty, \mathbb{Q}_p),$$

заданное формулой

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & g & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & g^{t-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & g^{t-1} \end{pmatrix}.$$

Это – блочная $(2l \times 2l)$ -матрица, каждый блок матрицы имеет размер $(\alpha + k\infty) \times (\alpha + k\infty)$.

Далее, для матрицы $r \in \mathrm{Sp}(2kl, \mathbb{Q}_p)$ мы полагаем

$$\sigma(r) := 1_{2\alpha l} \oplus (r \otimes 1_\infty)$$

и рассматриваем представление группы $\mathrm{GL}(\alpha + k\infty, \mathbb{Q}_p)$, заданное формулой

$$\rho_r(g) = \mathrm{We}(\sigma(r)^{-1} \iota_l(g) \sigma(r)).$$

Пусть $\alpha = 0$. Как и выше, любое представление ρ_r группы $\mathbf{G} = \mathrm{GL}(k\infty, \mathbb{Q}_p)$ содержит единственное $\mathbf{K}$ -сферическое подпредставление.

ГИПОТЕЗА 7.6. Любое $\mathbf{K}$ -сферическое представление группы $\mathrm{GL}(k\infty, \mathbb{Q}_p)$ является подпредставлением в $\varphi(\det(g))\rho_r(g)$, где $\varphi = \varphi_r: \mathbb{Q}_p^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ – некоторый характер. Множество

$$\bigcup_l \mathrm{GL}(l, \mathbb{Q}_p) \setminus \mathrm{Sp}(2kl, \mathbb{Q}_p) / \mathrm{Sp}(2kl, \mathbb{Z}_p)$$

параметризует представления ρ_r .

Список литературы

1. N. J. Wildberger, “Hypergroups, symmetric spaces, and wrapping maps”, *Probability measures on groups and related structures. XI* (Oberwolfach, 1994), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995, 406–425.
2. И. М. Гельфанд, “Сферические функции на римановых симметрических пространствах”, *Докл. АН СССР*, **70** (1950), 5–8.
3. R. Godement, “A theory of spherical functions. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73**:3 (1952), 496–556.
4. N. Iwahori, “On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, **10** (1964), 215–236.
5. N. Iwahori, H. Matsumoto, “On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p -adic Chevalley groups”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **25**:1 (1965), 5–48.
6. T. H. Koornwinder, “Jacobi functions and analysis on noncompact semisimple Lie groups”, *Special functions: group theoretical aspects and applications*, Math. Appl., Reidel, Dordrecht, 1984, 1–85.
7. G. I. Olshanskii, “Unitary representations of infinite dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe”, *Representation of Lie groups and related topics*, Adv. Stud. Contemp. Math., **7**, Gordon and Breach, New York, 1990, 269–463.
8. Ю. А. Неретин, *Категории симметрий и бесконечномерные группы*, Эдиториал УРСС, М., 1998, 431 с.; англ. пер.: Yu. A. Neretin, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **16**, Oxford Univ. Press, New York, 1996, xiv+417 pp.
9. Yu. A. Neretin, *Lectures on Gaussian integral operators and classical groups*, EMS Ser. Lect. Math., Eur. Math. Soc. (EMS), Zürich, 2011, xii+559 pp.
10. М. С. Бродский, “Унитарные операторные узлы и их характеристические функции”, *УМН*, **33**:4(202) (1978), 141–168; англ. пер.: M. S. Brodskii, “Unitary operator colligations and their characteristic functions”, *Russian Math. Surveys*, **33**:4 (1978), 159–191.

11. G. I. Ol'shanskii, "On semigroups related to infinite-dimensional groups", *Topics in representation theory*, Adv. Soviet Math., **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–101.
12. Yu. A. Neretin, *On degeneration of convolutions of double cosets at infinite-dimensional limit*, arXiv:1211.6149.
13. Р. С. Исмагилов, "Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем P , не являющимся локально компактным, относительно подгруппы матриц с целыми элементами", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:2 (1967), 361–390; англ. пер.: R. S. Ismagilov, "Elementary spherical functions on the group $SL(2, P)$ over a field P , which is not locally compact, with respect to the subgroup of matrices with integral elements", *Math. USSR-Izv.*, **1**:2 (1967), 349–380.
14. Р. С. Исмагилов, "Сферические функции над нормированным полем, поле вычетов которого бесконечно", *Функц. анализ и его прил.*, **4**:1 (1970), 42–51; англ. пер.: R. S. Ismagilov, "Spherical functions over a normed field whose residue field is infinite", *Funct. Anal. Appl.*, **4**:1 (1970), 37–45.
15. Г. И. Ольшанский, "Новые "большие" группы типа Γ ", *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат.*, **16**, ВИНТИ, М., 1980, 31–52; англ. пер.: G. I. Olshanskii, "New "large" groups of type Γ ", *J. Soviet Math.*, **18**:1 (1982), 22–39.
16. Ю. А. Неретин, "Сферичность и умножение двойных классов смежности для бесконечномерных классических групп", *Функц. анализ и его прил.*, **45**:3 (2011), 79–96; англ. пер.: Yu. A. Neretin, "Sphericity and multiplication of double cosets for infinite-dimensional classical groups", *Funct. Anal. Appl.*, **45**:3 (2011), 225–239.
17. Yu. A. Neretin, *Infinite symmetric groups and combinatorial constructions of topological field theory type*, arXiv:1502.03472.
18. Yu. A. Neretin, "Infinite tri-symmetric group, multiplication of double cosets, and checker topological field theories", *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2012**:3 (2012), 501–523.
19. Yu. A. Neretin, *Multiplication of conjugacy classes, colligations, and characteristic functions of matrix argument*, arXiv:1211.7091.
20. Yu. A. Neretin, "Multi-operator colligations and multivariate characteristic functions", *Anal. Math. Phys.*, **1**:2-3 (2011), 121–138.
21. Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 470 с.; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, Inc., New York–London, 1981, xvi+467 pp.
22. М. С. Лившиц, "Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве", *Матем. сб.*, **19**(61):2 (1946), 239–262; англ. пер.: M. S. Livshits, "On a class of linear operators in Hilbert space", Amer. Math. Soc. Transl. (2), **13**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960, 61–83.
23. В. П. Потапов, "Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций", Тр. ММО, **4**, ГИТТЛ, М., 1955, 125–236; англ. пер.: V. P. Potapov, "The multiplicative structure of J -contractive matrix functions", Amer. Math. Soc. Transl. (2), **15**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1960, 131–243.
24. Г. И. Ольшанский, "Бесконечномерные классические группы конечного R -ранга: описание представлений и асимптотическая теория", *Функц. анализ и его прил.*, **18**:1 (1984), 28–42; англ. пер.: G. I. Olshanskii, "Infinite-dimensional classical groups of finite r -rank: Description of representations and asymptotic theory", *Funct. Anal. Appl.*, **18**:1 (1984), 22–34.
25. Г. И. Ольшанский, "Унитарные представления бесконечномерных пар (G, K) и формализм Хая", *Докл. АН СССР*, **269**:1 (1983), 33–36; англ. пер.: G. I. Ol'shanskii, "Unitary representations of infinite-dimensional pairs (G, K) and the formalism of R. Howe", *Soviet Math. Dokl.*, **27** (1983), 290–294.

26. G. Olshanski, “The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group”, *J. Funct. Anal.*, **205**:2 (2003), 464–524.
27. A. Borodin, G. Olshanski, “Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes”, *Ann. of Math.* (2), **161**:3 (2005), 1319–1422.
28. Г. И. Ольшанский, “Унитарные представления (G, K) -пар, связанных с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ ”, *Алгебра и анализ*, **1**:4 (1989), 178–209; англ. пер.: G. I. Olshanskii, “Unitary representations of (G, K) -pairs connected with the infinite symmetric group $S(\infty)$ ”, *Leningrad Math. J.*, **1**:4 (1990), 983–1014.
29. S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, “Harmonic analysis on the infinite symmetric group”, *Invent. Math.*, **158**:3 (2004), 551–642.
30. A. M. Vershik, S. V. Kerov, “Four drafts on the representation theory of the group of infinite matrices over a finite field”, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **344** (2007), 5–36; *J. Math. Sci.* (N. Y.), **147**:6 (2007), 7129–7144.
31. Yu. A. Neretin, “The space L^2 on semi-infinite Grassmannian over finite field”, *Adv. Math.*, **250** (2014), 320–350.
32. V. Gorin, S. Kerov, A. Vershik, “Finite traces and representations of the group of infinite matrices over a finite field”, *Adv. Math.*, **254** (2014), 331–395; arXiv:1209.4945.
33. M. Nazarov, “Oscillator semigroup over a non-Archimedean field”, *J. Funct. Anal.*, **128**:2 (1995), 384–438.
34. M. Nazarov, Yu. Neretin, G. Olshanskii, “Semi-groupes engendrés par la représentation de Weil du groupe symplectique de dimension infinie”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **309**:7 (1989), 443–446.
35. Ю. А. Неретин, “Меры Хуа на пространстве p -адических матриц и обратные пределы грассманианов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 95–108; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Hua measures on the space of p -adic matrices and inverse limits of Grassmannians”, *Izv. Math.*, **77**:5 (2013), 941–953.
36. Yu. A. Neretin, “Hua-type integrals over unitary groups and over projective limits of unitary groups”, *Duke Math. J.*, **114**:2 (2002), 239–266.
37. Ю. А. Неретин, “О комбинаторных аналогах группы диффеоморфизмов окружности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **56**:5 (1992), 1072–1085; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “Combinatorial analogues of the group of diffeomorphisms of the circle”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **41**:2 (1993), 337–349.
38. Yu. A. Neretin, *On p -adic colligations and ‘rational maps’ of Bruhat–Tits trees*, arXiv:1301.5453.
39. M. Baker, “An introduction to Berkovich analytic spaces and non-Archimedean potential theory on curves”, *p -adic geometry*, Univ. Lecture Ser., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 123–174.
40. B. Conrad, “Several approaches to non-Archimedean geometry”, *p -adic geometry*, Univ. Lecture Ser., **45**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 9–63.
41. А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972, 408 с.; пер. с англ.: A. Weil, *Basic number theory*, Grundlehren Math. Wiss., **144**, Springer-Verlag, New York, 1967, xviii+294 pp.
42. P. Garrett, *Buildings and classical groups*, Chapman & Hall, London, 1997, xii+373 pp.
43. Ю. А. Неретин, “О сжатии ансамблей Брюа–Титса”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные и алгоритмические методы*. XII, Зап. научн. сем. ПОМИ, **325**, ПОМИ, СПб., 2005, 163–170; англ. пер.: Yu. A. Neretin, “On compression of Bruhat–Tits buildings”, *J. Math. Sci.* (N. Y.), **138**:3 (2006), 5722–5726.

- 44. A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002, xii+544 pp.
- 45. А. Н. Ширяев, *Вероятность*, Наука, М., 1980, 576 с.; англ. пер.: A. N. Shiryaev, *Probability*, Grad. Texts in Math., **95**, Springer-Verlag, New York, 1984, xi+577 pp.

Юрий Александрович НЕРЕТИН
(YURI A. NERETIN)

Mathematical Department, University of Vienna,
Austria;

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, механико-математический
факультет;

Институт теоретической и экспериментальной
физики им. А. И. Алиханова, г. Москва

E-mail: hepetuh@yandex.ru

Поступило в редакцию
21.09.2014