Общероссийский математический портал

В. В. Бавула, Классификация модулей размерности Гельфанда–Кириллова n и кратности 1 над алгеброй Вейля A_n , *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/im83>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:45:42

УДК 512.552.8

В. В. Бавула

**Классификация модулей размерности
Гельфанда–Кириллова n
и кратности 1 над алгеброй Вейля A_n**

В работе классифицируются модули над алгеброй Вейля A_n , имеющие размерность Гельфанда–Кириллова n и кратность 1.

Библиография: 12 наименований.

Введение

Описание модулей над алгеброй Вейля $A_n = A_n(K)$ (K – поле характеристики 0) представляет собой очень сложную задачу. Однако классификация (с точностью до неразложимых элементов некоторого некоммутативного евклидова кольца) простых A_1 -модулей была получена Р. Блоком [1], [2] и автором [3], [4] в случае одного класса обобщенных алгебр Вейля, включающего алгебру Вейля A_1 . Алгебра Вейля A_n является нётеровой простой некоммутативной бесконечномерной алгеброй, она имеет естественную возрастающую фильтрацию (Бернштейна) $B = \{B_i\}$ линейными конечномерными пространствами, причем ассоциированная градуированная алгебра является кольцом многочленов от $2n$ переменных (см. [12], а также п. 1.2). Именно этот факт позволил И. Н. Бернштейну применить алгебро-геометрические методы и понятия коммутативной алгебры (такие, как размерность и кратность) к изучению A_n -модулей.

Остановимся на этом несколько подробнее. По фильтрации Бернштейна на конечно порожденном A_n -модуле $M \neq 0$ строится возрастающая фильтрация $\{\Gamma_i = B_i V\}$, где V – конечномерное порождающее пространство модуля M . Тогда целочисленная функция $\dim \Gamma_i$ при достаточно больших i ведет себя как некоторый полином $H(t) = a_d t^d + \dots + a_0 \in \mathbb{Q}[t]$ с рациональными коэффициентами, т.е. $\dim \Gamma_i = H(i)$ при $i \gg 0$ [5].

Полином $H(t)$ называется *полиномом Гильберта* модуля M , его степень $d = d(M)$ – *размерностью*, натуральное число $e(M) = d!a_d$ – *кратностью* модуля M , причем константы $d(M)$ и $e(M)$ не зависят от выбора фильтрации $\{\Gamma_i\}$ на M . В [5] было показано, что для любого конечно порожденного A_n -модуля $M \neq 0$ имеет место $d(M) \geq n$ (*неравенство Бернштейна*).

В связи с неравенством Бернштейна естественно возникает задача о классификации самых “маленьких” A_n -модулей, т.е. ненулевых конечно порожденных

A_n -модулей, имеющих минимально возможную размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$. Решение этой задачи и составляет цель настоящей работы, а именно в работе доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. *Конечно порожденный A_n -модуль M имеет размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$ тогда и только тогда, когда он изоморфен ${}^T W_n$ – подкрученному на автоморфизм алгебры Вейля $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ модулю $W_n = A_n/A_n(\partial_1, \dots, \partial_n)$, где $\text{Aut}_B(A_n)$ – группа автоморфизмов алгебры Вейля A_n , сохраняющих фильтрацию Бернштейна.*

Все недостающие определения даны в § 1. Теорема А была анонсирована в [8].

ТЕОРЕМА В [6]. *Пусть $M_1, \dots, M_n$ – простые A_1 -модули. Тогда их тензорное произведение $M_1 \otimes \dots \otimes M_n$ является простым A_n -модулем (размерности n и кратности $e(M_1) \dots e(M_n)$). Верно и обратное.*

Таким образом, имея классификацию простых A_1 -модулей, по теореме В можно построить “достаточно много” простых A_n -модулей. Но, оказывается, на этом пути получаются далеко не все простые A_n -модули. Стаффорд [7] привел пример простого A_2 -модуля $M = A_2/A_2P$, $P = X_1 + X_2 + \partial_1 + X_1\partial_1\partial_2$, размерность которого $d(M) = 3 \neq 2$. Другие примеры были приведены И. Н. Бернштейном и В. Лунцем.

Остановимся кратко на структуре работы. В § 1 приводятся необходимые сведения, касающиеся алгебр Вейля (заинтересованного читателя отсылаем к [12]). Устанавливается структура подмодулей тензорного произведения модулей над алгеброй Вейля (теорема 1.6). § 2 посвящен доказательству теоремы А. В § 3 изучаются простые голономные A_n -модули. Напомним, что A_n -модуль M называется *голономным*, если его размерность равна $d(M) = n$. В теореме 3.1 доказывается существование для каждого простого голономного A_n -модуля M кратности $e(M)$ такого автоморфизма $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$, что (подкрученный на автоморфизм τ) A_n -модуль ${}^T M$ является A_n -подмодулем конечномерного векторного L -пространства $L \otimes_S {}^T M$ размерности $\leq e(M)$, где L – поле частных кольца многочленов $S = K[X_1, \dots, X_n]$. В доказательстве теоремы А существенно используется теорема 3.2, доказательству которой посвящен конец работы.

Автору очень приятно выразить благодарность Ю. А. Дрозду за полезные обсуждения.

§ 1. Алгебра Вейля A_n

1.1. Определение алгебры Вейля A_n . На протяжении всей работы K – поле характеристики нуль. Алгеброй Вейля $A_n = A_n(K)$ называется алгебра с $2n$ образующими $X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$[X_i, X_j] = [\partial_i, \partial_j] = [\partial_i, X_j] = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad [\partial_i, X_i] = 1.$$

Непосредственно из соотношений видно, что любой элемент $u \in A_n$ однозначно записывается в виде конечной суммы:

$$u = \sum \lambda_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta, \tag{1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – мультииндексы, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$, $\partial^\beta = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n}$, $\lambda_{\alpha\beta} \in K$.

Перечислим основные свойства A_n (многие из которых нам в дальнейшем не понадобятся):

- 1) A_n – простая алгебра;
- 2) A_n право- и левонётерова;
- 3) A_n имеет глобальную размерность [9] и размерность Крулля n [10];
- 4) каждый A_n -модуль конечной длины является циклическим (теорема Стаффорда);
- 5) отображение $X_i \rightarrow \partial_i$, $\partial_i \rightarrow -X_i$, задает автоморфизм A_n (формальное преобразование Фурье), сохраняющий фильтрацию Бернштейна B из п. 1.2.

1.2. Фильтрация Бернштейна. На алгебре Вейля A_n существует фильтрация (по степени) конечномерными линейными подпространствами, а именно *фильтрация Бернштейна* B :

$$B_j = \sum_{\alpha, \beta} \{ \lambda_{\alpha\beta} X^\alpha \partial^\beta : |\alpha| + |\beta| \leq j \}, \quad j \geq 0,$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\lambda_{\alpha\beta} \in K$.

Очевидно, $A_n = \bigcup B_j$, $B_i B_j \subset B_{i+j} \quad \forall i, j$ и пространства B_i конечномерны. Ассоциированное градуированное кольцо

$$\text{gr}(A_n) = \text{gr}_B(A_n) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} B_i / B_{i-1}$$

(мы считаем $B_{-1} = 0$) является кольцом многочленов

$$\text{gr}(A) = K[\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n, \bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n]$$

от $2n$ переменных $\bar{X}_i, \bar{\partial}_j \in B_1 / B_0$.

1.3. Группа автоморфизмов, сохраняющих фильтрацию Бернштейна. Обозначим через $G = \text{Aut}_B(A_n)$ группу автоморфизмов $\tau \in \text{Aut}(A_n)$, сохраняющих фильтрацию Бернштейна:

$$\tau(B_i) \subset B_i \quad \forall i \geq 0.$$

Эта группа естественным образом отождествляется с подгруппой обратимых операторов $(2n + 1)$ -мерного пространства

$$B_1 = \langle 1, X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle,$$

сохраняющих (вырожденную) кососимметрическую форму $[\ast, \ast] : B_1 \times B_1 \rightarrow K$, $[u, v] = uv - vu$. Очевидно, G содержит полную линейную группу $\text{GL}(V_1)$ подпространства $V_1 = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Формальное преобразование Фурье ($X_i \rightarrow \partial_i$, $\partial_i \rightarrow -X_i$) принадлежит G .

Группа автоморфизмов $\text{Aut}(A_n)$ алгебры Вейля A_n описана только в случае $n = 1$ [11].

1.4. Размерность и кратность модуля. Доказательства приводимых ниже утверждений можно найти у Бьёрка [12]. Фильтрация $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ A_n -модуля M ($B_i\Gamma_j \subset \Gamma_{i+j} \ \forall i, j$) называется *хорошей*, если ассоциированный градуированный $\text{gr}(A_n)$ -модуль $\text{gr}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \Gamma_i / \Gamma_{i-1}$ конечно порожден. Каждый конечно порожденный A_n -модуль обладает хорошей фильтрацией; верно и обратное. Пусть $\Gamma = \{\Gamma_i\}$ и $\Omega = \{\Omega_i\}$ – две хорошие фильтрации на M ; тогда существует такое k , что $\Gamma_{i-k} \subset \Omega_i \subset \Gamma_{i+k}$ для всех i .

ТЕОРЕМА 1 [12]. Пусть Γ – хорошая фильтрация на конечно порожденном A_n -модуле M . Тогда существуют целое $d \geq 0$ и рациональные числа $a_0, \dots, a_d$ такие, что

$$\dim(\Gamma_i) = a_d i^d + \dots + a_0 \quad \text{для всех } i \gg 0.$$

Числа $d = d(M)$ и $e = e(M) := d!a_d \in \mathbb{Z}$ не зависят от хорошей фильтрации на M и называются соответственно *размерностью* и *кратностью* модуля M .

ЛЕММА 1 [6]. Пусть M и N являются A_n - и A_m -модулями соответственно. Тогда их тензорное произведение $M \otimes N$ является A_{n+m} -модулем размерности $d(M \otimes N) = d(M) + d(N)$ и кратности $e(M \otimes N) = e(M)e(N)$.

Как мы уже отмечали во введении, И.Н. Бернштейн [5] показал, что *размерность ненулевого конечно порожденного A_n -модуля не меньше чем n* . Поэтому естественно рассмотреть самые “маленькие” (ненулевые) A_n -модули.

1.5. Крайние A_n -модули. A_n -модуль называется *крайним*, если он имеет размерность $d(M) = n$ и кратность $e(M) = 1$. Совокупность крайних A_n -модулей обозначим через $\mathcal{K}_n$; это самые “маленькие” (ненулевые) A_n -модули.

ЛЕММА 2. 1) *Крайний A_n -модуль всегда прост.*

2) $\mathcal{K}_n \otimes \mathcal{K}_m \subset \mathcal{K}_{n+m}$ для всех $n, m \in \mathbb{N}$.

3) Если $M \in \mathcal{K}_n$, $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$, то ${}^\tau M \in \mathcal{K}_n$, где ${}^\tau M$ – модуль, подкрученный на автоморфизм τ .

4) A_n -модуль $W_n := A_n/A_n(\partial_1, \dots, \partial_n) = (K[X_1, \dots, X_n], \partial_j(F) = \partial F / \partial X_j - \text{формальная производная, } X_j(F) = X_j F - \text{умножение на } X_j) \text{ является крайним.}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Простота крайнего модуля непосредственно следует из следующего свойства размерности и кратности (см. [12, предложение 3.6]): пусть $0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow L \rightarrow 0$ – точная последовательность конечно порожденных A_n -модулей; тогда $d(M) = \{d(N), d(L)\}$, и если $d(N) = d(L) = d(M)$, то $e(M) = e(N) + e(L)$.

Утверждение 2) следует из леммы 1.4, а 3) очевидно.

4) A_n -модуль W_n является тензорным произведением n экземпляров A_1 -модуля W_1 . Очевидно, $d(W_1) = e(W_1) = 1$. Теперь осталось применить лемму 1. Лемма доказана.

Другим примером крайнего A_n -модуля является $V_n := A_n/A_n(X_1, \dots, X_n)$.

1.6. Свойства тензорных произведений модулей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A_n -модуль $M = \otimes_{i=1}^n M_i$ является тензорным произведением простых A_1 -модулей, N – произвольный A_m -модуль. Тогда любой A_{n+m} -подмодуль $L \subset M \otimes N$ имеет вид $L = M \otimes N_1$ для некоторого A_m -подмодуля $N_1 \subset N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $n = 1$. В доказательстве теоремы В из [6] (формулировка во введении) было установлено, что для любого $u \neq 0 \in M = M_1 \otimes N$ существует $d \in A_1$ такое, что $du = m \otimes n \neq 0$ для некоторых $m \in M_1$, $n \in N$, т.е. каждый ненулевой подмодуль L из M содержит ненулевой подмодуль вида $M_1 \otimes N_2$ для некоторого A_m -подмодуля $N_2 \subset N$.

Пусть $N_1 := \sum \{N_2 | M \otimes N_2 \subset L - A_{m+1}\text{-подмодуль}\}$; тогда $L_1 := M_1 \otimes N_1 \subset L$. Покажем, что $L_1 = L$. Предположим противное; тогда $0 \neq \bar{L} = L/L_1$ является подмодулем в $M/L_1 \simeq M_1 \otimes N/N_1$, и по доказанному выше $\bar{L}$ содержит ненулевой подмодуль вида $M_1 \otimes N_3/N_1$ для некоторого A_m -подмодуля $N_3 \subset N$ такого, что $N_1 \subsetneq N_3$. Отсюда $L \supset M \otimes N_3$. Это противоречит выбору N_1 , следовательно, $L = L_1$, что и завершает доказательство теоремы.

В дальнейшем эта теорема нам понадобится только в случае A_n -модуля $M = W_n$ (в этом случае доказательство теоремы 2 несложно провести непосредственно).

§ 2. Доказательство теоремы А

Достаточность теоремы А очевидна в силу леммы 2, п. 3).

Необходимость. Пусть M – крайний A_n -модуль; тогда в силу теоремы 4 (см. ниже) существуют автоморфизм $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ и левый идеал I алгебры A_n такие, что ${}^\tau M = A_n/I$ и $I_1 = I \cap B_1 \neq 0$, где $B_1 = \langle 1, X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$. Обозначим через $v = 1 + I$ образующий модуля M . Выберем произвольный ненулевой элемент $u \in I_1$; тогда u не скаляр, так как в противном случае $1 \in I$ и $M = 0$. Противоречие. Подкручивая модуль ${}^\tau M$ на подходящий автоморфизм $\sigma \in \text{Aut}_B(A_n)$, мы можем считать, что $u = \partial_1$ (доказательство этого факта приведено в конце доказательства теоремы 4). Поскольку $\partial_1 v = 0$ в ${}^{\sigma\tau} M$, то $A_1 = K[X_1, \partial_1]$ – подмодуль $A_1 v$ в ${}^{\sigma\tau} M$, изоморфный A_1 -модулю $A_1 v = W_1$ (и теорема в случае $n = 1$ доказана).

Поскольку алгебра Вейля A_n является тензорным произведением алгебр Вейля $A_n = A_1 \otimes A_{n-1}$, то в модуле ${}^{\sigma\tau} M$ содержится A_{n-1} -подмодуль $N = A_{n-1}v$. Тогда в силу теоремы 2 (примененной для случая $M = A_1 v$, $N = A_{n-1}v$ в обозначениях теоремы 2) и в силу простоты A_n -модуля ${}^{\sigma\tau} M$ следует, что A_n -модуль ${}^{\sigma\tau} M = W_1 \otimes N$ является тензорным произведением A_1 -модуля W_1 и A_{n-1} -модуля N , причем A_{n-1} -модуль N прост. Тогда в силу леммы 1 A_{n-1} -модуль N является крайним, и доказательство завершается индукцией по n . Теорема доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 4. Простые голономные модули

3.1. Ненулевой A_n -модуль M называется *голономным*, если его размерность равна $d(M) = n$. Пусть $S = K[X_1, \dots, X_n]$ – кольцо многочленов от n переменных и $L = K(X_1, \dots, X_n)$ – поле рациональных функций (поле частных кольца S).

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – простой голономный A_n -модуль кратности $e(M)$. Тогда существует автоморфизм $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ такой, что подкрученный на автоморфизм τ A_n -модуль ${}^\tau M$ является A_n -подмодулем в $L \otimes_S {}^\tau M$ и $\dim_L(L \otimes_S {}^\tau M) \leq e(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in M$ – образующий A_n -модуля M ($M = A_n v$). На модуле M рассмотрим хорошую фильтрацию $\Gamma = \{\Gamma_i = B_i v\}$. Тогда ассоциированный градуированный модуль $\text{gr}(M)$ является циклическим модулем над кольцом многочленов $S_{2n} = \text{gr}(A_n) = K[\bar{X}_1, \dots, \bar{\partial}_n]$ от $2n$ независимых переменных и имеет размерность n и кратность $e(M)$. Очевидно, $\text{gr}(M) \cong S_{2n}/J$ для некоторого однородного идеала J кольца S_{2n} , и поскольку $d(\text{gr}(M)) = n$, то среди образующих $\tilde{X}_1 = \bar{X}_1 + J, \dots, \tilde{\partial}_n = \bar{\partial}_n + J$ кольца S_{2n}/J существует ровно n алгебраически независимых элементов над полем K .

Если $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ алгебраически независимы над K , то M содержит свободный S -подмодуль $Sv \cong S$ ранга 1. Тогда в силу простоты A_n -модуль M вкладывается в A_n -модуль $L \otimes_S M$, который является локализацией $T^{-1}M = L \otimes_S M$ A_n -модуля M по мультипликативно замкнутому множеству $T = S - \{0\}$ из A_n . Неравенство $\dim_L(L \otimes_S M) \leq e(M)$ очевидно.

Подкручивая A_n -модуль M на автоморфизм из $\text{Aut}_B(A_n)$ вида $\omega_i: X_i \rightarrow \partial_i$, $\partial_i \rightarrow -X_i$ (остальные символы не изменяются), с точностью до нумерации переменных можно считать, что элементы из множества $H = \{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, \tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_s\}$ являются алгебраически независимыми над K для некоторых $s \leq t$, $s + t = n$, и $s \geq 0$ – минимально возможное число. Покажем, что $s = 0$. Предположим, что это не так, т.е. $s \geq 1$. Пусть $H_1 = H - \{\partial_1\}$; покажем, что среди элементов из $F = \{\tilde{X}_i, \tilde{\partial}_i : t < i \leq n\}$ существует хотя бы один элемент $y \in F$ такой, что элементы из множества $H_2 = H_1 \cup \{y\}$ алгебраически независимы над K .

Пусть это не так, т.е. элементы из H_2 алгебраически зависимы для любого $y \in F$. Обозначим через C подалгебру в A_n , порожденную символами из $H_1 \cup F$. Она изоморфна алгебре $C = D \otimes A_m$, где $D = K[X_1, X_{s+1}, \dots, X_t]$ и $m = n - t + s - 1$. Пусть $E = K(X_1, X_{s+1}, \dots, X_t)$ – поле частных кольца D ; тогда модуль $N = E \otimes_D C v$ является ненулевым $A_m(E)$ -модулем (над полем E) размерности $d(N) = (n - 1) - (t - s + 1) = m - 1$, что противоречит неравенству Бернштейна $d(N) \geq m$. Следовательно, существует хотя бы один элемент y такой, что элементы из H_2 алгебраически независимы.

Если $y = \tilde{\partial}_j$ (соответственно $y = \tilde{X}_j$), то в случае подкрученного A_n -модуля $\omega_j M$ (соответственно модуля M) множество H_2 имеет $s - 1$ дифференциал, что противоречит выбору $s \geq 1$. Теорема доказана.

3.2. Основная цель настоящего параграфа – доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть M – крайний A_n -модуль. Тогда существуют автоморфизм $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ и левый идеал I алгебры A_n такие, что ${}^\tau M \cong A_n/I$ и $I_1 := I \cap B_1 \neq 0$, где $B_1 = \langle 1, X_1, \dots, X_n, \partial_1, \dots, \partial_n \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку крайний модуль является простым и голономным, то в силу теоремы 3 существует автоморфизм $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ такой, что ${}^\tau M$ является A_n -подмодулем в $L \otimes_S {}^\tau M = L$ (ибо $e(M) = 1$). Для простоты записи положим $\tau = \text{id}$, сохранив все обозначения и определения из п. 3.1 и доказательства теоремы 3. Отождествим модуль M со своим вложением в L , и пусть, как и раньше, v – образующий A_n -модуля M . Тогда для любого $k \geq 1$ имеем $\partial_1^k v = \gamma_k v$ для некоторого $\gamma_k \in L$. Кроме того, последовательность $\{\gamma_k\}$ подчиняется следующим рекуррентным соотношениям:

$$\gamma_k = \gamma'_{k-1} + \gamma_{k-1}\gamma_1, \quad (2)$$

где штрих означает частную производную по X_1 .

Для каждой рациональной функции $\gamma = f/g \in L$ ($f, g \in S$) определим ее степень $\deg(\gamma) = \deg(f) - \deg(g)$. Если $\gamma, \delta \in L$, то

$$\begin{aligned} \deg(\gamma\delta) &= \deg(\gamma) + \deg(\delta), \\ \deg(\gamma + \delta) &\leq \sup\{\deg(\gamma), \deg(\delta)\}, \quad \deg(\partial\gamma/\partial X_1) < \deg(\gamma). \end{aligned}$$

На кольце многочленов $S = K[X_1, \dots, X_n]$ рассмотрим обычную фильтрацию по степеням $\{S_i\}$. Пусть $\gamma_1 = f/g$ – несократимая дробь из L . Если $\gamma_1 \in K$, то все доказано, ибо $(\partial_1 - \gamma_1)v = 0$, следовательно, $\partial_1 - \gamma_1 \in I_1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\gamma \notin K$.

Случай 1: $\deg(\gamma_1) > 1$. Тогда в силу (2) имеем $\deg(\gamma_k) = k \deg(\gamma_1)$ для любого $k \geq 1$. Покажем, что при $i = [k/\deg(\gamma_1)] + 1$ выполняется равенство

$$S_k v \cap S_{k-i} \partial_1^i v = 0 \quad \forall k \geq 1, \quad (3)$$

где $[a]$ – целая часть числа a . Ввиду вложения $M \subset L$ (3) равносильно равенству $S_k g_i \cap S_{k-i} f_i = 0$ в кольце S ($\gamma_i = f_i/g_i$, $f_i, g_i \in S$), которое очевидно, ибо степень ненулевого элемента из $S_{k-i} f_i$ не меньше чем $\deg(f_i)$, а степень любого элемента из $S_k g_i$ не превосходит $k + \deg(g_i)$. Но $\deg(f_i) - \deg(g_i) - k = i \deg(\gamma_1) - k > 0$ в силу выбора i , откуда следует (3).

Поскольку $\Gamma_k \supset S_k v \oplus S_{k-i} \partial_1^i v$ где $\{\Gamma_k = B_k v\}$ – хорошая фильтрация на M , то

$$\dim \Gamma_k \geq \dim S_k + \dim S_{k-i} = \{k^n + (k - [k/\deg(\gamma_1)] - 1)^n\}/n! + \dots,$$

где многоточием обозначены члены меньшего порядка. Так как $\deg(\gamma_1) \geq 2$, то $e(M) \geq (1 + 1/2^n) > 1$, что противоречит $e(M) = 1$, и, следовательно, случай 1 невозможен.

Случай 2: $\deg(\gamma_1) < 0$. Покажем, что этот случай тоже невозможен. Действительно, в силу рекуррентного соотношения (2) $\deg(\gamma_k) \leq -k$ для любого $k \geq 1$. Докажем, что при $i = [k/2] + 1$

$$S_k v \cap S_{k-i} \partial_1^i v = 0. \quad (4)$$

Это равносильно равенству $S_k g_i \cap S_{k-i} f_i = 0$ в кольце S . Тогда степень ненулевого многочлена из $S_k g_i$ (соответственно $S_{k-i} f_i$) не меньше чем $\deg(g_i)$ (соответственно не больше чем $\deg(f_i) + k - i$). Поскольку $\deg(g_i) - \deg(f_i) - k + i \geq 2i - k > 0$ в силу выбора i , то (4) очевидно. Отсюда, как и в случае 1, имеем $e(M) \geq (1 + 1/2^n) > 1$. Противоречие.

Случай 3: $\deg(\gamma_1) = 0, 1$. Поскольку характеристика поля K равна нулю, то при подходящем выборе скаляров $\lambda_i \in K$ с помощью автоморфизма $\tau \in \text{Aut}_B(A_n)$ вида

$$X_i \rightarrow X_i + \lambda_i X_1 \quad (i = 2, \dots, n), \quad \partial_1 \rightarrow \partial_1 - \lambda_2 \partial_2 - \dots - \lambda_n \partial_n$$

мы можем привести f и g к виду

$$\begin{aligned} f &= \mu X_1^m + \alpha_{m-1} X_1^{m-1} + \dots + \alpha_0, & \deg(f) &= m, \\ g &= X_1^n + \beta_{n-1} X_1^{n-1} + \dots + \beta_0, & \deg(g) &= n, \end{aligned}$$

где $\alpha_i, \beta_j \in K[X_2, \dots, X_n]$, $\mu \neq 0 \in K$ и $n = m$ ($\deg(\gamma_1) = 0$) либо $n = m - 1$ ($\deg(\gamma_1) = 1$). И, кроме того, в разложении $g = q_1^{n(1)} \dots q_t^{n(t)}$ на неразложимые многочлены в кольце многочленов S каждый неразложимый многочлен q_i содержит в своей записи переменную X_1 , т.е. $q_i \notin K[X_2, \dots, X_n]$. Поэтому, заменяя модуль M на подкрученный ${}^{\tau}M$, будем считать, что f и g имеют приведенный выше вид.

(i) g имеет кратные сомножители. Для определенности положим $n(i) \geq 2$ при $i = 1, \dots, s$; в остальных случаях $n(i) = 1$. Пусть $h = q_1^{n(1)} \dots q_s^{n(s)}$; тогда $l = \deg(h) \geq 1$, так как $s \geq 1$. Пусть $\gamma_k = f_k/g_k$ — несократимая дробь, $f_k, g_k \in S$, $a = q_1 \dots q_t$; тогда, записывая рекуррентное соотношение (2) более подробно:

$$\gamma_k = \left(f'_{k-1} a - f_{k-1} \sum_{i=1}^t n_i q_1 \dots q'_i \dots q_t \right) / g_{k-1} a + f_{k-1} f / g_{k-1} g, \quad (5)$$

видим, что $g_k = h^k b_k$ для некоторого $b_k \in S$. Следовательно, $\deg(g_k) = kl + \deg(b_k)$. Покажем, что при $i = [m/2] + 1$

$$S_m v \cap S_{m-i} \partial_1^i v = 0 \quad \forall m \geq 1. \quad (6)$$

Очевидно, это равенство равносильно $S_m \cap S_{m-i} \gamma_i = 0$ в L .

Пусть вначале $\deg(\gamma_1) = 0$ и $\alpha = \beta \gamma_i \in S_m \cap S_{m-i} \gamma_i$ для некоторых $\alpha \in S_m$, $\beta \in S_{m-i}$; тогда $\deg(\alpha) = \deg(\beta) + \deg(\gamma_i) \leq \deg(\beta)$ (из (2) следует, что $\deg(\gamma_i) = 0$

$\forall i \geq 1$), т.е. $\alpha \in S_{m-i}$. Из равенства $\alpha g_i = \beta f_i$, однозначности разложения на неразложимые в кольце многочленов S и несократимости дроби f_i/g_i следует, что $\alpha = c f_i$ для некоторого $c \in S$. Тогда, учитывая, что $\deg(f_i) = \deg(g_i)$ и $l \geq 1$, имеем

$$\deg(c) = \deg(\alpha) - \deg(f_i) = \deg(\alpha) - \deg(g_i) \leq m - i - il - \deg(b_i) \leq m - 2i < 0,$$

что доказывает (6). Пусть теперь $\deg(\gamma_1) = 1$; тогда в силу (2) $\deg(\gamma_i) = i \ \forall i \geq 1$. Пусть α и β те же; тогда из $\alpha g_i = \beta f_i$ следует, что $\alpha = c f_i$ для некоторого $c \in S$. Тогда, учитывая, что $\deg(\gamma_i) = i$ и $l \geq 1$, имеем

$$\deg(c) = \deg(\alpha) - \deg(f_i) \leq m - i - \deg(g_i) \leq m - i - il - \deg(b_i) \leq m - 2i < 0,$$

что доказывает (6).

Поскольку $\Gamma_k \supset S_k v \oplus S_{k-i} \partial_1^i v$, то

$$\dim(\Gamma_k) \geq \dim(S_k) + \dim(S_{k-i}) = (1 + 1/2^n) k^n / n! + \dots,$$

следовательно, $e(M) \geq 1 + 1/2^n > 1$, что противоречит $e(M) = 1$. Поэтому g не может иметь кратных сомножителей.

(ii) g не имеет кратных сомножителей. Тогда $g = q_1 \dots q_t$. Пусть, как и раньше, $\gamma_k = f_k/g_k$ – несократимая дробь, причем в силу (5) g_k содержит в своем разложении только сомножители q_i с некоторыми степенями $n(k, i) \geq 0$. Пусть до некоторого момента $\nu > 1$ все $g_k = g^\nu$ при $k = 1, \dots, \nu - 1$ и $g_\nu \neq g^\nu$, т.е. числитель и знаменатель дроби γ_ν из (5) сократились на некоторый элемент q_j . Но из (5) следует, что тогда

$$-q_1 \dots q_j' \dots q_t + f = q_j \alpha_j \quad \text{для некоторого } \alpha_j \in S,$$

и это условие не зависит от шага ν , следовательно, сокращение произойдет уже в случае γ_2 ($\nu = 2$).

Если (с точностью до перенумерации $q_i - x$) $g_2 = q_1^2 \dots q_s^2 q_{s+1} \dots q_t$ (т.е. сократятся не все $q_i - e$), то

$$g_k = (q_1 \dots q_s)^k q_{s+1} \dots q_t \quad \forall k \geq 1,$$

и, поступая, как в случае (i), придем к противоречию ($e(M) > 1$).

Осталась единственная возможность, когда все буквы q_i в g_2 сократятся, т.е. $g_2 = g$. В силу (5) это возможно тогда и только тогда, когда

$$-g' + f = \theta g \quad \text{для некоторого } \theta \in S_1,$$

т.е. $\deg(\theta) = 0$, если $\deg(\gamma_1) = 0$, $\deg(\theta) = 1$, если $\deg(\gamma_1) = 1$, откуда

$$-g'/g + f/g = \theta. \tag{7}$$

Из рекуррентных соотношений следует, что

$$\gamma_n = g^{-1}(\partial/\partial X_1 + \theta)^{n-1}f \quad \forall n \geq 1. \quad (8)$$

Расписывая более подробно, имеем

$$\gamma_n = f^{(n-1)}/g + \sum_{i=0}^{n-2} \varphi_{n,i} f^{(i)}/g \quad \text{для некоторых } \varphi_{n,i} \in S,$$

где $f^{(i)} = \partial^i f / \partial X_1^i$. Откуда, применяя индукцию по n , получаем

$$f^{(n-1)}/g = \sum_{i=1}^n \psi_{n-1,i} \gamma_i \quad \text{для некоторых } \psi_{n-1,i} \in S.$$

Следовательно, $0 \neq g^{-1}v = (\mu m!)^{-1} f^{(m)}/gv = (\mu m!)^{-1} \sum_{i=1}^{m+1} \psi_{m,i} \partial_1^i v \in M$, где $m = \deg(f)$. Тогда

$$(\partial_1 - \theta)(g^{-1}v) = (-g'/g + f/g - \theta)(g^{-1}v) = 0.$$

Поскольку A_n -модуль M простой, то, изменяя образующий модуля M с v на $g^{-1}v$, мы приходим к тому, что $\partial_1 - \theta \in I_1$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Block R. E. Classification of the irreducible representations of $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. V. 1. № 1. P. 247–250.
2. Block R. E. The irreducible representations of the Lie algebra $\mathfrak{sl}(2)$ and of the Weyl algebra // Adv. Math. 1981. V. 39. P. 69–110.
3. Бавула В. В. Обобщенные алгебры Вейля и их представления // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 1. С. 74–95.
4. Бавула В. В. Простые $D[X, Y; \sigma, a]$ -модули // Укр. матем. журн. 1992. Т. 44. № 12. С. 1628–1644.
5. Бернштейн И. Н. Модули над кольцом дифференциальных операторов. Изучение фундаментальных решений уравнений с постоянными коэффициентами // Функци. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 2. С. 1–16.
6. Бавула В. В. Крайние модули над алгеброй Вейля A_n // Укр. матем. журн. 1993. Т. 45. № 5.
7. Stafford J. T. Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras // Invent. Math. 1985. V. 92–93. P. 619–638.
8. Бавула В. В. Крайние модули над алгеброй Вейля A_n : Тез. докл. Всесоюз. школы по теории операторов в функц. протр. Нижний Новгород, 1991. С. 16.
9. Roos J. E. Sur les foncteurs derives de $\lim$. Applications // S. R. Acad. Sci. 1961. V. 252. № 24. P. 3702–3704.
10. Gabriel P., Rentschler R. Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnées // C. R. Acad. Sci. 1967. V. 265. P. 712–715.
11. Dixmier J. Sur les algèbres de Weyl // Bull. Soc. Math. France. 1968. V. 96. P. 209–242.
12. Björk J. E. Rings of differential operator. Amsterdam: North Holland, 1979.

e-mail (в Киеве):
kinr4%rigkbp@mhsgw.grs.de

Поступило в редакцию
10.IV.1992
2.IV.1993