Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Лорэ, Изомонодромные деформации связностей Ламе, уравнение Пенлеве VI и симметрия Окамото, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 1, 119–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8310>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 16:56:22

УДК 514.763.8

Ф. Лорей

Изомонодромные деформации связностей Ламе, уравнение Пенлеве VI и симметрия Окамото

Связностью Ламе называется логарифмическая $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность (E, ∇) над эллиптической кривой $X: \{y^2 = x(x-1)(x-t)\}$, $t \neq 0, 1$, имеющая простой полюс на бесконечности. Показано, что если такая связность неприводима, то она инвариантна относительно стандартной инволюции и опускается до логарифмической $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности на $\mathbb{P}^1$ с полюсами в точках $0, 1, t$ и ∞ . Поэтому изомонодромная деформация (E_t, ∇_t) неприводимой связности Ламе, при которой эллиптическая кривая X_t меняется в семействе Лежандра, параметризуется некоторым решением $q(t)$ шестого дифференциального уравнения Пенлеве P_{VI} . Вариация векторного расслоения E_t при такой деформации вычислена в терминах отображения модулей Tu : она задается другим решением $\tilde{q}(t)$ уравнения P_{VI} , связанным с $q(t)$ посредством симметрии Окамото $s_2 s_1 s_2$ (в обозначениях Ноуми–Ямада). Поставлен мотивированный задачей Римана–Гильберта для классического уравнения Ламе вопрос о том, имеют ли трансценденты Пенлеве полюсы. Часть результатов работы была анонсирована в [6].

Библиография: 35 наименований.

Ключевые слова: комплексные обыкновенные дифференциальные уравнения, изомонодромные деформации, дифференциальное уравнение Ламе, уравнение Пенлеве.

DOI: 10.4213/im8310

Памяти Андрея Болибруха

Мотивировки

Классическое уравнение Ламе (представленное в форме Лежандра)

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-t} \right) \frac{du}{dx} + \frac{c - n(n+1)x}{4x(x-1)(x-t)} u = 0, \quad (1)$$

где $t, n, c \in \mathbb{C}$, $t \neq 0, 1$, определяет проективную структуру на эллиптической кривой

$$X: \{y^2 = x(x-1)(x-t)\}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\},$$

имеющую фуксову особенность в бесконечно удаленной точке ω_∞ . Проективные карты на аффинной части кривой являются локальными записями отображений

$$\phi: X \setminus \{\omega_\infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1; \quad (x, y) \mapsto \frac{u_1(x)}{u_2(x)},$$

где u_1 и u_2 пробегают все независимые решения уравнения (1). Положим $\vartheta := 2n$. Тогда существует локальная координата z с центром в точке ω_∞

такая, что одна из проективных карт с центром в этой точке имеет вид

- $\phi = z^\vartheta$ при $\vartheta \notin \mathbb{Z}$,
- $\phi = z^m$ или $\phi = 1/z^m + \log(z)$ при $\vartheta = \pm m$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$,
- $\phi = z$ (регулярность) при $\vartheta = 0$.

Монодромия любой проективной карты $\phi = u_1/u_2$ при аналитическом продолжении вдоль произвольной петли γ имеет вид $\rho(\gamma) \circ \phi$, где

$$\rho: \pi_1(X \setminus \{\omega_\infty\}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \quad (2)$$

есть проективное представление монодромии уравнения (1), вычисленной в базисе (u_1, u_2) . Следующий естественный вопрос восходит к Пуанкаре (см. [1]): *какие топологические представления*

$$\rho: \pi_1(\text{тор с одним проколом}) \rightarrow \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \quad (3)$$

возникают в качестве монодромии фуксовой проективной структуры?

Всякая фуксова проективная структура на торе с одним проколом (т. е. имеющая умеренный рост в точке прокола) имеет указанный выше вид: параметр t описывает подлежащую комплексную структуру, число n (или $\vartheta = 2n + 1$) – фуксов тип прокола, а s является аксессуарным параметром. Число параметров совпадает с размерностью пространства топологических представлений по модулю сопряжения (см. [2]). Поэтому ожидается, что представление общего положения является монодромией некоторого уравнения Ламе. Ответ на аналогичный вопрос для регулярных проективных структур на полных кривых был дан лишь недавно в [3] с помощью разложения на панты и склеивания. Нашей исходной задачей, из которой выросла настоящая работа, была попытка дать ответ с помощью изомонодромных методов хотя бы в тестовом случае уравнений Ламе. Как будет видно далее, мы фактически сводим поставленный выше вопрос к задаче о существовании полюсов у трансцендентов Пенлеве VI. Последняя задача выглядит трудной, но это трудности иной природы.

Уравнение Ламе можно рассматривать как логарифмическую $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность на тривиальном векторном расслоении $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ над эллиптической кривой X , имеющую простой полюс в точке ω_∞ : каждый собственный вектор матрицы-вычета нашей связности в точке ω_∞ дает циклический вектор при возвращении к скалярному эллиптическому виду. С другой стороны, соответствие Римана–Гильберта утверждает, что всякое представление

$$\rho: \pi_1(X \setminus \{\omega_\infty\}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

является представлением монодромии некоторой логарифмической $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности ∇ на некотором векторном расслоении E ранга 2 над X , имеющей простой полюс в точке ω_∞ . Наш исходный вопрос теперь звучит так: *можно ли по данному топологическому представлению (3) выбрать комплексную структуру на X так, чтобы реализующая это представление связность (E, ∇) была определена на тривиальном расслоении?* В такой постановке наш вопрос идеально вписывается в контекст теории изомонодромных деформаций.

Начав со “связности Ламе” (E_0, ∇_0) на X_{t_0} , рассмотрим ее изомонодромную деформацию (E_t, ∇_t) , возникающую при изменении комплексной структуры

кривой X_t (здесь параметр деформации t рассматривается как элемент универсального накрытия $T \simeq \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$, представляющего собой пространство Тейхмюллера тора с одним проколом). Если полюс связности Ламе не является ложной особенностью, то указанная деформация единственна и характеризуется тем, что ее представление монодромии локально постоянно. Эквивалентно, эта деформация индуцирована единственной интегрируемой логарифмической связностью на универсальной кривой $X \rightarrow T$ со следующими свойствами: эта связность имеет простой полюс вдоль сечения $t \mapsto \omega_\infty \in X_t$ и ее сужение на начальный слой X_{t_0} совпадает с (E_0, ∇_0) . Наш исходный вопрос принимает такой вид: *для каких связностей (или представлений) можно гарантировать, что векторное расслоение E_t будет тривиально при надлежащем значении параметра t изомонодромной деформации связности Ламе?*

В настоящей работе вычисляется вариация векторного расслоения E_t вдоль изомонодромной деформации исходной связности Ламе. Эта вариация задается некоторым решением уравнения Пенлеве VI с надлежащими параметрами, причем расслоение E_t тривиально, только если этот трансцендент Пенлеве имеет полюс (отличный от 0, 1 и ∞). В итоге мы приходим к следующему, по-видимому широко открытому, вопросу: *имеют ли трансценденты Пенлеве полюсы?*

На самом деле гораздо больший интерес представляет аналог этого вопроса для регулярных связностей над кривыми рода $g > 1$. В этом случае, согласно [4], регулярные проективные структуры соответствуют регулярным связностям на максимально нестабильном неразложимом $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -расслоении ($\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -опер в терминологии [5, § 2.7]). Основной результат работы [3] можно переформулировать так: *указанное специальное расслоение возникает в процессе изомонодромной деформации тогда и только тогда, когда монодромия неприводима и не лежит в $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ (с точностью до $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряжения)*. Можно ли доказать это прямым вычислением вариации расслоения?

Еще один интересный вопрос для случая $g > 1$ состоит в том, можно ли реализовать данное топологическое представление $\pi_1(X^{\mathrm{top}}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ как представление монодромии некоторой связности на тривиальном расслоении при надлежащем выборе комплексной структуры на X . В случае, когда образ Γ указанного представления является дискретной подгруппой, это дает вложение $X \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\Gamma$: фундаментальная матрица ассоциированной линейной системы определяет эквивариантное отображение $\tilde{X} \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ (где $\tilde{X} \rightarrow X$ есть универсальное накрытие). Существование компактных кривых в факторах группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ является на данный момент открытым вопросом. Таким образом, изомонодромный подход объединяет в рамках единой геометрической теории вопросы, возникающие в весьма различных контекстах.

Часть результатов работы была анонсирована в [6].

§ 1. Основной результат

Изомонодромные деформации мероморфных связностей на римановой сфере изучались очень интенсивно (см. [7], [8]). В этой ситуации подлежащее векторное расслоение постоянно на открытом по Зарискому подмножестве пространства параметров (см. [9]), что позволяет явно выписать условие изомо-

подромности в виде уравнений Шлезингера. Уравнения Пенлеве возникают при дальнейшей редукции в простейшем случае связностей ранга 2 с четырьмя полюсами. Чтобы увидеть непрерывные деформации подлежащего расслоения, надо перейти к связностям на кривых рода $g > 0$. Простейший нетривиальный случай (регулярные связности ранга 1 на эллиптической кривой) изучался в [10], [11]. Там было отмечено, что вариация подлежащего линейного расслоения при изомонодромной деформации – это трансцендент Пенлеве. В настоящей работе изучается следующий по трудности случай, отвечающий логарифмическим связностям ранга 2 с единственным полюсом на эллиптической кривой.

В дальнейшем под *связностью Ламе* понимается пара (E, ∇) , состоящая из локально тривиального голоморфного векторного расслоения E ранга 2 над эллиптической кривой, принадлежащей семейству Лежандра:

$$X: \{y^2 = x(x-1)(x-t)\}, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, \quad (4)$$

и из логарифмической бесследовой связности ∇ , имеющей (не более чем) простой полюс в бесконечно удаленной точке ω_∞ :

$$\nabla: E \rightarrow E \otimes \Omega_X^1([\omega_\infty]), \quad \det(E) = \mathcal{O}_X, \quad \text{tr}(\nabla) = d: \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1$$

(здесь векторные расслоения E и Ω отождествляются с соответствующими пучками голоморфных сечений). С этого момента такие связности (E, ∇) будут рассматриваться с точностью до голоморфного изоморфизма расслоений. Показатель $\vartheta \in \mathbb{C}$ связности (E, ∇) определен с точностью до знака как разность собственных значений $\pm\vartheta/2$ матрицы-вычета этой связности в точке ω_∞ .

Подлежащее векторное расслоение связности Ламе имеет тривиальное детерминантное расслоение благодаря условию бесследовости. Согласно работе М. Атья [12], почти все векторные расслоения ранга 2 с тривиальным детерминантом на X разложимы, т. е. имеют вид

$$E = L \oplus L^{-1}, \quad \text{где } L \in \text{Pic}(X). \quad (5)$$

Полный список получается добавлением еще четырех расслоений E_i , $i = 0, 1, t, \infty$. Полустабильными являются разложимые расслоения с $L \in \text{Pic}^0(X)$, т. е. расслоения вида

$$E = L \oplus L^{-1}, \quad \text{где } L = \mathcal{O}_X([\omega] - [\omega_\infty]), \quad \omega = (x, y) \in X, \quad (6)$$

а также все четыре неразложимых расслоения. Соответствующее пространство модулей есть $\mathbb{P}^1$ (см. [13]), причем проекция на него имеет вид

$$\lambda: \begin{cases} E \mapsto x & \text{в обозначениях (6),} \\ E_i \mapsto i, & i = 0, 1, t, \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим через $\omega_i = (i, 0) \in X$ точки 2-кручения, где $i = 0, 1, t, \infty$. Тогда E_i является единственным нетривиальным расширением

$$0 \rightarrow L_i \rightarrow E_i \rightarrow L_i \rightarrow 0, \quad \text{где } L_i = \mathcal{O}([\omega_i] - [\omega_\infty]), \quad (8)$$

а отображение модулей λ отождествляет E_i с тривиальным расширением $L_i \oplus L_i$. В частности, точка $\lambda = \infty$ соответствует как тривиальному векторному расслоению, так и расслоению E_∞ .

Изомонодромная деформация связности Ламе определяется так. Рассмотрим универсальное накрытие $T \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ (пространство Тейхмюллера проколотого тора) и универсальную кривую Лежандра $\mathbf{X} \rightarrow T$ над этим пространством параметров: слой X_t над каждой точкой t есть не что иное, как кривая $\{y^2 = x(x-1)(x-t)\}$ (здесь через t обозначается как точка пространства T , так и ее проекция на $\mathbb{P}^1$). Бесконечно удаленная точка ω_∞ задает сечение $T \rightarrow \mathbf{X}$ этого слоения. Для каждой связности Ламе (E_0, ∇_0) на X_{t_0} существует единственная плоская логарифмическая связность (E, ∇) на тотальном пространстве $\mathbf{X}$, для которой сечение ω_∞ является полярным множеством и сужение которой на X_{t_0} индуцирует исходную связность (E_0, ∇_0) на X_{t_0} (см. [7], [14], [15]). Деформация $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$, индуцированная семейством $t \mapsto X_t$, есть не что иное, как изомонодромная деформация связности (E_0, ∇_0) . Если полюс связности ∇_0 не является ложной особой точкой (т. е. точкой с локальной монодромией $\pm I$), то $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$ есть единственная деформация, имеющая постоянное представление монодромии. Показатель ϑ связности Ламе постоянен вдоль такой деформации. Наконец, можно говорить о вариации подлежащего векторного расслоения E_t вдоль указанной деформации, просто рассматривая определенное выше отображение модулей $t \mapsto \lambda(E_t)$. Вот наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (E_t, ∇_t) – изомонодромная деформация неприводимой связности Ламе. Тогда векторное расслоение E_t полустабильно для открытого по Зарискому подмножества пространства параметров T (см. [15]) и его инвариант $Ty \ t \mapsto \lambda(E_t) \in \mathbb{P}^1$, определенный формулой (7), является решением дифференциального уравнения Пенлеве VI:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{\lambda-t} \right) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right) \\ & + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2} \left(\frac{\kappa_\infty^2}{2} - \frac{\kappa_0^2}{2} \frac{t}{\lambda^2} + \frac{\kappa_1^2}{2} \frac{t-1}{(\lambda-1)^2} + \frac{1-\kappa_t^2}{2} \frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

с параметрами $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (\vartheta/4, \vartheta/4, \vartheta/4, \vartheta/4)$, где ϑ есть показатель исходной связности Ламе.

Под “открытостью по Зарискому” здесь понимается то, что исключительные значения t образуют дискретное подмножество пространства параметров T . Указанное свойство непосредственно вытекает из [15].

То, что изомонодромные деформации связностей Ламе общего положения параметризуются уравнением Пенлеве VI с указанными выше параметрами, уже было известно. А именно, уравнения изомонодромной деформации на эллиптической кривой были напрямую вычислены в [16], [17], а эллиптическая форма записи уравнения Пенлеве VI упоминалась в [18].

Наш подход к этим результатам совершенно иной. Сначала мы покажем с помощью соответствия Римана–Гильберта, что всякая неприводимая связность Ламе опускается посредством 2-листного накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ до логариф-

мической связности ранга 2 с четырьмя полюсами на $\mathbb{P}^1$, причем полюсы расположены в точках ветвления 0, 1, t и ∞ . Тем самым, мы опять оказываемся в классической ситуации Фукса: изомонодромная деформация параметризуется некоторым решением (обозначим его через $q(t)$) уравнения Пенлеве VI с параметрами $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (1/2, 1/2, 1/2, (\vartheta - 1)/2)$. Уже этим объясняется, откуда возникает уравнение Пенлеве VI в случае Ламе. Вплоть до этого момента никаких вычислений не требовалось. С помощью элементарной би-рациональной геометрии мы возвращаемся к исходной деформации (E_t, ∇_t) , причем модули λ векторных расслоений E_t выражаются через $q(t)$: мы узнаем в функции $\lambda(E_t)$ образ решения $q(t)$ при симметрии Окамото $s_1 s_2 s_1$ (см. [19]). Отсюда автоматически вытекает, что $\lambda(E_t)$ также является решением уравнения Пенлеве VI, но с новыми параметрами $(\vartheta/4, \vartheta/4, \vartheta/4, \vartheta/4)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для классической интерпретации уравнения Пенлеве VI в терминах логарифмических $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей с четырьмя полюсами на $\mathbb{P}^1$, когда рассматривается параболическое расслоение, заданное собственными направлениями матрицы-вычета изучаемой связности (см. [20], [21]).

Более общо, можно начать с изомонодромной деформации логарифмической связности ранга 2 с четырьмя полюсами на $\mathbb{P}^1$, параметризованной произвольным решением $q(t)$ уравнения Пенлеве VI. Тогда эта деформация поднимается на эллиптическую кривую X_t в форме Лежандра до логарифмической связности ранга 2 с полюсами в точках разветвления ω_i , причем модули $\lambda(E_t)$ соответствующих векторных расслоений получаются из $q(t)$ симметрией Окамото $s_1 s_2 s_1$. Тем самым дается новая геометрическая интерпретация этой странной симметрии. Кроме того, мы естественно получаем задачу изомонодромной деформации (пару Лакса) для общей эллиптической формы уравнения Пенлеве VI, просто рассматривая эти бесследовые логарифмические связности ранга 2 на X_t с полюсами в точках 2-го порядка ω_i , которые еще и коммутируют с эллиптической инволюцией $(x, y) \mapsto (x, -y)$. Последнее рассматривалось также в [22].

В случае $\vartheta = 0$ все связности Ламе с нулевым показателем приводимы. Но те из них, которые являются регулярными, все еще опускаются на $\mathbb{P}^1$. Таким образом, наш результат остается верным и в этом случае, и мы приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 2 [10], [11]. Пусть $t \mapsto (L_t, \nabla_t)$ есть изомонодромная деформация регулярной связности ранга 1 на деформации Лежандра X_t , причем подлежащее векторное расслоение имеет вид $E_t = \mathcal{O}([\omega(t)] - [\omega_\infty])$, где $\omega(t) = (x(t), y(t)) \in X_t$. Тогда функция $t \mapsto x(t)$ является решением уравнения Пенлеве VI с параметрами $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (0, 0, 0, 0)$.

В этом случае можно явно вычислить вариацию линейного расслоения L_t с помощью эллиптических функций и получить следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 3 (Пикар [23], см. [24]). Общее решение уравнения Пенлеве VI с параметрами $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (0, 0, 0, 0)$ имеет вид

$$t \mapsto x(t), \quad \text{где } (x(t), y(t)) := \pi(c_0 \cdot \omega_0 + c_1 \cdot \omega_1), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{C},$$

причем $\pi: \mathbb{C} \rightarrow X_t$ означает универсальное накрытие, а $\omega_i(t)$ – полупериоды кривой X_t .

Трансценденты Пенлеве, описанные в следствии 3, имеют полюсы тогда и только тогда, когда либо c_0 , либо c_1 не вещественно.

Структура статьи. Настоящая работа замкнута в том смысле, что ряд ее разделов посвящен изложению основ предмета или носит характер обзора, а именно:

- § 8 (приложение) содержит основные сведения о расслоениях, связностях, пространствах модулей, параболических структурах, элементарных преобразованиях;

- § 4 описывает появление уравнения Пенлеве VI в качестве условия изомонодромности для линейных дифференциальных уравнений;

- § 5 дает геометрическое и модулярное описание фазового портрета уравнения Пенлеве VI, а также описывает пространство начальных условий Окамoto.

Новые результаты работы сосредоточены в следующих разделах:

- § 2: построение связностей Ламе посредством эллиптического поднятия некоторых систем с $\mathbb{P}^1$;

- § 3: как найти инвариант Ту данного расслоения с помощью параболической структуры системы вниз;

- § 6: почему большинство связностей Ламе являются эллиптическими поднятиями (подход Римана–Гильберта);

- § 7: окончание доказательства основной теоремы.

§ 2. Основная конструкция: эллиптическое поднятие

Здесь мы строим связности Ламе, поднимая на эллиптическое двулистное накрытие $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1$ некоторые $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности, имеющие логарифмические полюсы в критических значениях отображения π . Позже будет показано, что этот способ дает все неприводимые связности Ламе. Мы будем пользоваться этим фактом для явной параметризации их изомонодромных деформаций с помощью решений уравнения Пенлеве VI.

Зафиксируем набор показателей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$ и рассмотрим логарифмическую $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность (E, ∇) на $\mathbb{P}^1$ с полюсами $0, 1, t, \infty$ и с предписанными показателями (т. е. собственные значения матрицы-вычета в точке i равны $\pm\theta_i/2$ для $i = 0, 1, t, \infty$). Такая связность называется *связностью Гойна*.

Важным для дальнейшего набором данных является параболическая структура $l = (l_0, l_1, l_t, l_\infty)$. Она задается собственными прямыми $l_i \in \mathbb{P}(E|_i)$ вычета связности ∇ в точке i , отвечающими собственным значениям $-\theta_i/2$, где $i = 0, 1, t, \infty$. Если ∇ действительно имеет полюсы во всех точках ω_i , то параболическая структура однозначно определяется связностью и выбором показателей θ_i (последние определены только с точностью до знака). Однако нам важно допустить и неособые точки, чтобы наша конструкция была совместима с обычным фазовым пространством для уравнения Пенлеве VI (см. [25]): если $\theta_i = 0$ и соответствующая точка неособа, то каждая прямая $l_i \in \mathbb{P}(E|_i)$ является собственной прямой, и для нашей конструкции надо выбрать одну

из них. Набор данных $(E, \nabla, \mathbf{l})$ с указанными выше свойствами называется *параболической связностью Гойна* с параметром θ .

ПРИМЕР 4. Если E – тривиальное расслоение, то связность ∇ задается фуксовой системой

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t} \right) Y, \quad A_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (10)$$

Матрица-вычет в точке $x = i$ равна A_i при $i = 0, 1, t, \infty$, где A_∞ определяется формулой

$$A_0 + A_1 + A_t + A_\infty = 0. \quad (11)$$

Ограничения на показатели выражаются равенствами $\det(A_i) = -\theta_i^2/4$, а на параболическую структуру – равенствами $l_i = \ker(A_i + (\theta_i/2)I)$.

Для мотивировки следующей конструкции отметим, что в случае специального набора показателей

$$\theta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right)$$

она дает связность Ламе с показателем ϑ на бесконечности.

Шаг 1. Поднимем связность (E, ∇) на эллиптическое накрытие

$$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1; \quad (x, y) \mapsto x.$$

Получаем логарифмическую $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность на X вида

$$(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) := \pi^*(E, \nabla)$$

с полюсами в точках разветвления $\omega_0, \omega_1, \omega_t, \omega_\infty$ и с удвоенными исходными показателями $2\theta_i$. Параболическая структура $\tilde{\mathbf{l}} := \pi^*\mathbf{l}$ соответствует собственным прямым с собственными значениями $-\theta_i$. Точка i имеет унипотентную монодромию (или является неособой) для ∇ тогда и только тогда, когда точка ω_i является таковой для $\tilde{\nabla}$. Мы уже отмечали, что в случае показателей $\theta_i = 1/2$, $i = 0, 1, t$, соответствующие особые точки ω_i связности $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ являются проективно ложными, так как имеют локальную монодромию $-I$. На следующих двух шагах они исчезнут.

Заметим, что мы могли бы выбрать исходную связность на $\mathbb{P}^1$ имеющей простой полюс на ∞ , так что ее поднятие было бы типа Ламе. Но в этом случае монодромия была бы тривиальной, а связность Ламе – “очень приводимой”.

Шаг 2. Построим бирациональную модификацию расслоений

$$\phi: \tilde{E} \dashrightarrow \tilde{E}'$$

так, чтобы новая связность

$$(\tilde{E}', \tilde{\nabla}') := \phi_*(\tilde{E}, \tilde{\nabla}),$$

оставаясь логарифмической, имела в точках ω_i полюсы с собственными значениями θ_i и $1 - \theta_i$ при всех $i = 0, 1, t, \infty$. Это делается последовательностью

элементарных преобразований elm^+ относительно параболической структуры $\tilde{l}$ над каждой особой точкой (определение и свойства преобразований elm_l^+ см. в п. 8.10):

$$\phi = \text{elm}_{l_0}^+ \circ \text{elm}_{l_1}^+ \circ \text{elm}_{l_t}^+ \circ \text{elm}_{l_\infty}^+.$$

Новая связность уже не бесследовая: мы имеем

$$\det(\tilde{E}') = \mathcal{O}_X([\omega_0] + [\omega_1] + [\omega_t] + [\omega_\infty]) \simeq \mathcal{O}_X(4[\omega_\infty]),$$

а след $\text{tr}(\tilde{\nabla}')$ – это единственная логарифмическая связность на $\mathcal{O}_X(4[\omega_\infty])$, имеющая в каждой точке ω_i полюс с вычетом $+1$ и тривиальной монодромией. В аффинной карте X^* связность $\text{tr}(\tilde{\nabla}')$ имеет в надлежащей тривиализации линейного расслоения вид

$$d - \left(\frac{dx}{x} + \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{x-t} \right).$$

Шаг 3. Подкрутим $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$ на надлежащую связность ранга 1, чтобы восстановить свойство бесследовости. Для этого *выберем* единственный квадратный корень (L, ζ) связности $(\det(\tilde{E}'), \text{tr}(\tilde{\nabla}'))$, определенный на линейном расслоении $L = \mathcal{O}_X(2[\omega_\infty])$: ζ представляется в аффинной карте выражением

$$d - \left(\frac{dx}{2x} + \frac{dx}{2(x-1)} + \frac{dx}{2(x-t)} \right).$$

Полученная $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность

$$(\tilde{E}'', \tilde{\nabla}'') := (\tilde{E}', \tilde{\nabla}') \otimes (L, \zeta)^{\otimes (-1)}$$

имеет показатель $2\theta_i - 1$ в точке ω_i , $i = 0, 1, t, \infty$. При специальном выборе параметров

$$\theta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right)$$

$(\tilde{E}'', \tilde{\nabla}'')$ является связностью Ламе (т.е. имеет простой полюс на ∞) с показателем ϑ (в точке ω_∞). Как мы увидим, все неприводимые связности Ламе получаются таким образом. При нечетном целом ϑ заметим, что ω_∞ является унипотентной сингулярной точкой для $\tilde{\nabla}''$ тогда и только тогда, когда ∞ унипотентна для ∇ . При четном ϑ точка ω_∞ всегда является ложной особой точкой для связности Ламе $\tilde{\nabla}''$ (не может быть унипотентной, но нетривиальной).

§ 3. Вычисление векторного расслоения эллиптического поднятия

В обозначениях § 2 мы хотим найти векторное расслоение $\tilde{E}''$ над эллиптической кривой X в терминах исходной связности (E, ∇) . На самом деле построение $\tilde{E}''$ зависит только от E и от параболической структуры $l = (l_0, l_1, l_t, l_\infty)$. Для простоты мы ограничимся неприводимыми связностями, хотя общий случай покрывается теми же рассуждениями. Нашей целью в этом параграфе является доказательство следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $(E, \nabla, \mathbf{l})$ – неприводимая параболическая связность, а $(\tilde{E}'', \tilde{\nabla}'')$ – ее эллиптическое поднятие. Тогда расслоение $\tilde{E}''$ полустабильно и имеет место один из следующих случаев.

1) Расслоение E тривиально и никакие три прямые l_i не совпадают. В частности, двойное отношение

$$c = \frac{l_t - l_0}{l_1 - l_0} \frac{l_1 - l_\infty}{l_t - l_\infty} \in \mathbb{P}^1$$

корректно определено и мы имеем

$$\lambda(\tilde{E}'') = t \frac{c - 1}{c - t}.$$

Точнее, расслоение $\tilde{E}''$ неприводимо тогда и только тогда, когда

- либо $c = t$ (диагональный случай),
- либо $c = 0, 1, \infty$ и ровно две из прямых l_i совпадают (а остальные две различны).

2) $E = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ и ни одна из прямых l_i не совпадает с линейным подрасслоением $\mathcal{O}(1)$. Тогда расслоение $\tilde{E}''$ либо тривиально, либо совпадает с неразложимым расслоением E_0 в зависимости от того, лежат все прямые l_i на линейном подрасслоении $\mathcal{O}(-1) \hookrightarrow E$ или нет.

Для наших приложений важно, что при изомонодромной деформации (E_t, ∇_t) такой связности (E, ∇) множество тех значений t , для которых расслоение E_t нетривиально, всегда является собственным (возможно, пустым) аналитическим подмножеством в пространстве параметров T (см. [15]).

Доказательство теоремы 5 начнем с обоснования ограничений на E и $\mathbf{l}$. Они вытекают из следующей леммы.

ЛЕММА 6. Пусть X – кривая рода g , E – векторное расслоение, $\nabla: E \rightarrow E \otimes \Omega(D)$ – логарифмическая связность с приведенным эффективным дивизором D , а $L \subset E$ – линейное расслоение, не являющееся ∇ -инвариантным. Тогда целое число

$$\nu := \deg(E) + \deg(D) + 2g - 2 - 2\deg(L) \geq 0$$

является оценкой для числа тех полюсов связности ∇ , в которых L является собственной прямой.

Здесь имеется в виду собственная прямая матрицы-вычета связности ∇ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиция

$$L \xrightarrow{\text{включение}} E \xrightarrow{\nabla} E \otimes \Omega(D) \xrightarrow{\text{фактор}} E/L \otimes \Omega(D) =: L'$$

задает гомоморфизм линейных расслоений $L \rightarrow L'$ и, тем самым, сечение

$$\phi \in H^0(X, L' \otimes L^{-1}) = H^0(X, \det(E) \otimes \Omega(D) \otimes L^{-2}).$$

Если подрасслоение L не ∇ -инвариантно, то сечение ϕ нетривиально и имеет нули только в следующих точках:

- неособые точки для ∇ , в которых L стабилизируется: $\nabla(L) \subset L \otimes \Omega(D)$;
- полюсы ∇ , в которых L совпадает с собственной прямой вычета ∇ .

Отсюда вытекает требуемый результат. Лемма доказана.

У нас $g = 0$ и $\deg(D) = 4$. Следовательно, $2 - 2\deg(L) \geq 0$ для всякого линейного расслоения $L \subset E$ (так как ∇ неприводима, то никакое линейное расслоение L не может быть ∇ -инвариантным). Поэтому расслоение E либо тривиально, либо равно $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$. В первом случае всякое вложение $\mathcal{O} \hookrightarrow E$ проходит не более чем через две собственные прямые, а во втором случае $L = \mathcal{O}(1)$ совсем не проходит через собственные прямые.

3.1. Проективные расслоения. Чтобы вычислить модулярный инвариант $\lambda(\tilde{E}'')$ эллиптического поднятия, удобнее работать с ассоциированным проективным расслоением. Для всякого векторного расслоения E на кривой X обозначим ассоциированное с ним $\mathbb{P}^1$ -расслоение через $\mathbb{P}(E)$. Другое векторное расслоение E' даст то же самое $\mathbb{P}^1$ -расслоение тогда и только тогда, когда $E' = L \otimes E$ для некоторого линейного расслоения L . Если E и E' бездетерминантны, то L является точкой 2-кручения на якобиане. Тем самым, имеется не более 2^{2g} бездетерминантных векторных расслоений E' с одним и тем же $\mathbb{P}^1$ -расслоением, где g – это род кривой X . Линейные расслоения $L \subset E$ находятся во взаимно однозначном соответствии с сечениями $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}(E)$. Тотальное пространство S расслоения $\mathbb{P}(E)$ является линейчатой поверхностью, и всякое сечение σ задает кривую на S , которую мы для простоты обозначим опять через σ . Нормальное расслоение к σ в S отождествляется с линейным расслоением $\det(E) \otimes L^{-2}$, где $L \subset E$ – соответствующее линейное расслоение. Поэтому индекс самопересечения выражается формулой

$$\sigma \cdot \sigma = \deg(E) - 2\deg(L).$$

Напомним, что векторное расслоение E полустабильно тогда и только тогда, когда $\deg(E) - 2\deg(L) \geq 0$ для любого линейного расслоения $L \subset E$. Если L' – любое отличное от L линейное расслоение, то композиция

$$L' \rightarrow E \rightarrow E/L \simeq \det(E) \otimes L^{-1}$$

является нетривиальным гомоморфизмом линейных расслоений. Этим задается нетривиальное голоморфное сечение расслоения $\det(E) \otimes L^{-1} \otimes L'^{-1}$, обращающееся в нуль в тех точках, где L и L' совпадают. Отсюда вытекает формула для индекса пересечения соответствующих сечений σ и σ' :

$$\sigma \cdot \sigma' = \deg(E) - \deg(L) - \deg(L') = \frac{1}{2}(\sigma \cdot \sigma + \sigma' \cdot \sigma') \geq 0.$$

Векторное расслоение E разложимо (т.е. имеет вид $E = L \oplus L'$) тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}(E)$ допускает два непересекающихся сечения σ и σ' (они соответствуют L и L') или, эквивалентно, два сечения σ и σ' с противоположными индексами самопересечения. В этом случае $\mathbb{P}^1$ -расслоение $\mathbb{P}(E)$ можно рассматривать как послойную компактификацию $L' \otimes L^{-1}$ линейного расслоения $L' \otimes L^{-1}$, полученную добавлением бесконечно удаленного сечения. Точнее, σ является нулевым сечением, а σ' – бесконечно удаленным сечением в $\mathbb{P}(E) \simeq L' \otimes L^{-1}$.

Если X – эллиптическая кривая (например, $X: \{y^2 = x(x-1)(x-t)\}$) и $\det(E) = \mathcal{O}_X$, то E полустабильно тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}(E)$ имеет сечение с нулевым индексом самопересечения. Четыре неразложимых расслоения из формулы (8) отвечают одному и тому же $\mathbb{P}^1$ -расслоению $\mathbb{P}(E_0)$, заданному единственным нетривиальным расширением

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow E_0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0.$$

Соответствующая линейчатая поверхность S_0 характеризуется тем, что имеет одно и ровно одно сечение с нулевым индексом самопересечения. Согласно результатам М. Атьи [12] (см. также [13]), все остальные полустабильные бездетерминантные векторные расслоения разложимы: соответствующие им $\mathbb{P}^1$ -расслоения имеют вид

$$\mathbb{P}(E) = \overline{\mathcal{O}_X([\omega] - [-\omega])},$$

где $\pm\omega \in X$ – это обе точки слоя $\pi^{-1}(\lambda(E))$ (см. определение (7)). Заметим, что модулярный инвариант $\lambda(E)$ определяется расслоением $\mathbb{P}(E)$ с точностью до точек 2-кручения эллиптической кривой X : бездетерминантные векторные расслоения с $\mathbb{P}^1$ -расслоением $\mathbb{P}(E)$ – это в точности четыре полустабильных расслоения с модулярными инвариантами

$$\lambda, \quad \frac{t}{\lambda}, \quad \frac{\lambda-t}{\lambda-1} \quad \text{и} \quad t \frac{\lambda-1}{\lambda-t}.$$

3.2. Линейчатые поверхности и эллиптические поднятия. Опишем конструкцию § 2 в терминах линейчатых поверхностей. Начнем с рациональной линейчатой поверхности $p: S = \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^1$, снабженной параболической структурой $\mathbf{l}$, которая определяется выбором точки l_i на слое $S|_i = p^{-1}(i)$ при $i = 0, 1, t, \infty$.

Шаг 1. Эллиптическая линейчатая поверхность $\tilde{p}: \tilde{S} = \mathbb{P}(\tilde{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ получается как двулистное разветвленное накрытие $\Pi: \tilde{S} \rightarrow S$, ветвящееся вдоль четырех слоев $S|_i$. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\Pi} & S \\ \tilde{p} \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Определим на $\tilde{S}$ параболическую структуру $\tilde{\mathbf{l}}$, выбрав $\tilde{l}_i = \Pi^{-1}(l_i) \in \tilde{S}|_{\omega_i} = \tilde{p}^{-1}(\omega_i)$ для $i = 0, 1, t, \infty$.

Шаг 2 (и 3). Бирациональное преобразование

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{S} & \overset{\phi}{\dashrightarrow} & \tilde{S}' & \xrightarrow{\text{шаг 3}} & \tilde{S}'' \\ & \searrow \tilde{p} & \swarrow \tilde{p} & & \\ & X & & & \end{array}$$

получается раздутием четырех точек $\tilde{l}_i$ с последующим стягиванием собственных прообразов четырех отмеченных слоев. Шаг 3 не важен с проективной точки зрения, так как достаточно умножить $\tilde{E}'$ на линейное расслоение, чтобы получить $\tilde{E}''$. Поэтому $\tilde{S}'' = \tilde{S}'$.

3.3. Эллиптические линейчатые поверхности и элементарные преобразования. По лемме 6 параболическая линейчатая поверхность (S, l) , с которой мы начинаем, имеет следующий вид:

- либо $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и никакие три точки $l_i \in S$ не лежат на одной горизонтальной прямой;
- либо $S = \mathbb{F}_2$ есть вторая поверхность Хирцебруха, т.е. тотальное пространство расслоения $\mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$, и ни одна из точек l_i не лежит на “отрицательном” сечении σ , соответствующем прямому слагаемому $\mathcal{O}(1)$.

В любом случае мы обозначаем через $\tilde{S}'$ соответствующее эллиптическое поднятие, построенное в п. 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. В случае $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ выберем координату w и рассмотрим двойное отношение

$$c = \frac{w_t - w_0}{w_1 - w_0} \frac{w_1 - w_\infty}{w_t - w_\infty} \in \mathbb{P}^1,$$

где w_i определяются формулой $l_i = (i, w_i)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- Если $c \neq 0, 1, t, \infty$, то $\tilde{S}'$ есть разложимая линейчатая поверхность

$$\tilde{S}' = \overline{\mathcal{O}_X([\omega] - [-\omega])},$$

где $\pm\omega = (x, \pm y) \in X$ – это обе точки, лежащие над $x = t(c-1)/(c-t)$.

- Если $c = t$ (все четыре точки l_i лежат на одной неприводимой кривой бистепени $(1, 1)$), то $\tilde{S}'$ совпадает с неразложимой линейчатой поверхностью S_0 .

- Если $c = 0, 1, \infty$, то по крайней мере две точки l_i лежат на одной горизонтальной прямой. Если оставшиеся две точки лежат на другой горизонтальной прямой, то $\tilde{S}'$ – тривиальное расслоение. В противном случае $\tilde{S}'$ совпадает с неразложимой линейчатой поверхностью S_0 .

В случае $S = \mathbb{F}_2$ справедливы следующие утверждения.

- Если все четыре точки l_i лежат на одном сечении с индексом самопересечения $+2$ (т.е. на сечении, индуцированном произвольным вложением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$), то $\tilde{S}'$ – тривиальное расслоение.
- В противном случае $\tilde{S}'$ совпадает с неразложимой линейчатой поверхностью S_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай общего положения, когда $S = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и $c \neq 0, 1, t, \infty$. Тогда можно выбрать вертикальную координату w так, что

$$l_0 = (0, 0), \quad l_1 = (1, 1), \quad l_t = (t, c) \quad \text{и} \quad l_\infty = (\infty, \infty).$$

Легко проверяется прямым вычислением, что существует единственная кривая $C \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ бистепени $(2, 2)$, пересекающая каждый слой $x = i$ в точке l_i с кратностью 2. Уравнение кривой C имеет вид $F = 0$, где

$$F(x, w) = ((c-t)x - t(c-1))w^2 + 2(t-1)cwx - cx((c-1)x - (c-t)). \quad (12)$$

Дискриминант по переменной w имеет вид

$$\text{disc}_w(F) = 4c(c-1)(c-t)x(x-1)(x-t).$$

Так как он не равен тождественно нулю и его корни простые, то кривая C является приведенной, неприводимой и гладкой. Ее поднятие $\tilde{C}$ на тривиальное расслоение $X \times \mathbb{P}^1$ распадается в объединение двух различных сечений: $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_\infty$, пересекающихся ровно в четырех точках $\tilde{l}_i$ без учета кратностей. После элементарных преобразований с центрами $\tilde{l}_i$ получаем два непересекающихся сечения σ_0 и σ_∞ расслоения $\tilde{S}'$. Мы уже видели, что $\tilde{S}'$ – это компактификация некоторого линейного расслоения. Чтобы найти это линейное расслоение, рассмотрим горизонтальное сечение $w = \infty$ расслоения $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, проходящее через точку l_∞ . Оно пересекает $(2, 2)$ -кривую C в двух точках (а именно, в точке l_∞ и точке $s = (x, \infty)$ с координатами $x = t(c-1)/(c-t)$) и поднимается до сечения $\tilde{\sigma}$ расслоения $X \times \mathbb{P}^1$, пересекающего $\tilde{\sigma}_0$ над 0 и, скажем, ω , и тогда пересекающего $\tilde{\sigma}_\infty$ над 0 и $-\omega$, где $\pm\omega \in X$ – это обе точки из X , лежащие над x . После элементарных преобразований с центрами $\tilde{l}_i$ получаем сечение σ расслоения $\tilde{S}'$, пересекающее σ_0 в точке ω и σ_∞ в точке $-\omega$. Таким образом, $\tilde{S}' = \mathcal{O}([\omega] - [-\omega])$. Это рассуждение подытожено на рис. 1.

В случае $c = t$ кривая $F = 0$ вырождается в дважды пройденную $(1, 1)$ -кривую, содержащую все точки l_i , а именно в диагональное сечение $\sigma(x) = x$. Ее поднятие на $\tilde{S}$ – это график $\tilde{\sigma}$ двулистного накрытия $X \rightarrow \mathbb{P}^1$, имеющий индекс самопересечения $+4$. После элементарных преобразований получаем сечение $\tilde{\sigma}'$ расслоения $\tilde{S}'$, имеющее нулевой индекс самопересечения. Точнее, нормальное расслоение кривой $\tilde{\sigma}'$ тривиально. Действительно, сечение $\tilde{\sigma}$ индуцируется в $\tilde{S} = \mathbb{P}(\tilde{E})$, где $\tilde{E} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X$, линейным расслоением $\tilde{L} \subset \tilde{E}$, порожденным его мероморфным сечением $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, дивизор которого равен $-2[\omega_\infty]$. Поэтому нормальное расслоение кривой $\tilde{\sigma}$ в $\tilde{S}$ имеет вид

$$\mathcal{N}_{\tilde{\sigma}} = \det(\tilde{E}) \otimes \tilde{L}^{-2} = \mathcal{O}_X \otimes \mathcal{O}_X(-2[\omega_\infty])^{-2} = \mathcal{O}_X(4[\omega_\infty]).$$

После элементарных преобразований получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\tilde{\sigma}'} &= \det(\tilde{E}') \otimes L'^{-2} \\ &= \mathcal{O}_X([\omega_0] + [\omega_1] + [\omega_t] + [\omega_\infty]) \otimes \mathcal{O}_X([\omega_0] + [\omega_1] + [\omega_t] - [\omega_\infty])^{-2} = \mathcal{O}_X. \end{aligned}$$

Если бы расслоение $\tilde{S}'$ было разложимо, то оно было бы тривиальным $\mathbb{P}^1$ -расслоением, и эту возможность нам теперь надо исключить. Рассмотрим центры $\tilde{l}_i' \in \tilde{S}'$ обратных элементарных преобразований. Если бы поверхность $\tilde{S}'$ была тривиальным $\mathbb{P}^1$ -расслоением, то большинство горизонтальных сечений не проходили бы через четыре точки $\tilde{l}_i'$ и определяли бы при возвращении на $\tilde{S} = X \times \mathbb{P}^1$ сечения с индексом самопересечения -4 , что невозможно. Таким образом, $\tilde{S}'$ является неразложимым расслоением S_0 .

Допустим теперь, что $c = \infty$ (оставшиеся случаи $c = 0$ или 1 рассматриваются аналогично). Имеет место один из следующих трех случаев:

- 1) $w_0 = 0$, $w_1 = 1$ и $w_t = w_\infty = \infty$;
- 2) $w_0 = w_1 = 0$, $w_t = 1$ и $w_\infty = \infty$;
- 3) $w_0 = w_1 = 0$ и $w_t = w_\infty = \infty$.

Последний случай легко разбирается, так как три горизонтальных сечения σ_0 , σ_1 и σ_∞ (которые заданы соответственно равенствами $w = 0$, $w = 1$ и $w = \infty$)

 Рис. 1. Поднятие $\mathbb{P}(\nabla)$ на эллиптическую кривую E_t

преобразуются на эллиптическом поднятии $\tilde{S}'$ в два непересекающихся сечения $\tilde{\sigma}'_0$ и $\tilde{\sigma}'_\infty$ и третье сечение $\tilde{\sigma}'_1$, пересекающее $\tilde{\sigma}'_0$ в точках ω_t и ω_∞ , а $\tilde{\sigma}'_\infty$ — в точках ω_0 и ω_1 . Отсюда легко выводится, что

$$\tilde{S}' = \overline{\mathcal{O}_X([\omega_t] + [\omega_\infty] - [\omega_0] - [\omega_1])} = X \times \mathbb{P}^1.$$

Изучим теперь первый случай, где совпадают только w_t и w_∞ (это аналог диагонального случая). Сечение $w = \infty$ поверхности S определяет сечение $\tilde{\sigma}'_\infty$

поверхности $\tilde{S}'$, имеющее тривиальное нормальное расслоение. Если бы $\tilde{S}'$ была разложима, то она была бы тривиальным расслоением и общее постоянное сечение $\tilde{\sigma}'$ давало бы сечение $\tilde{\sigma}$ тривиального расслоения $\tilde{S}$, имеющее индекс сампересечения -4 : противоречие. Таким образом, $\tilde{S}'$ является неразложимым расслоением S_0 .

Наконец, рассмотрим случай, когда $S = \mathbb{F}_2$. Как и выше, легко видеть, что исключительное сечение σ_∞ , индуцированное расслоением $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$, порождает сечение $\tilde{\sigma}'_\infty$ поверхности $\tilde{S}'$, имеющее тривиальное нормальное расслоение. Опять, как и в диагональном случае, рассмотрим центры $l'_i \in \tilde{S}'$ элементарных преобразований, обратных к ϕ : они содержатся в $\tilde{\sigma}'_\infty$. Если $\tilde{S}'$ – тривиальное расслоение, то его постоянные сечения $\tilde{\sigma}'$ дают нам пучок сечений $\tilde{\sigma}$ поверхности $\tilde{S}$, для которого все четыре точки $\tilde{l}_i$ являются базисными. Особая кривая этого пучка задается объединением $\tilde{\sigma}_\infty$ и четырех слоев над точками ω_i , а сам пучок состоит из всех сечений поверхности $\tilde{S}$, проходящих через все четыре точки $\tilde{l}_i$ и не пересекающих $\tilde{\sigma}_\infty$ (плюс особая кривая). Эллиптическая инволюция $\tau: (x, y) \mapsto (x, -y)$ переставляет эти сечения, действуя тем самым на пространстве параметров $\mathbb{P}^1$. У этого действия есть по крайней мере две неподвижные точки, а именно $\tilde{\sigma}_\infty$ и еще одно сечение $\tilde{\sigma}_0$, которое опускается до сечения σ_0 поверхности S . По построению, σ_0 проходит через все точки l_i и не пересекает σ_∞ : оно является $+2$ -кривой, что и требовалось. Обратно, если все l_i лежат на некоторой $+2$ -кривой σ_0 , то мы получаем второе сечение $\tilde{\sigma}'_0$ расслоения $\tilde{S}'$, что и дает тривиализацию. Отметим, что рассмотренный выше пучок происходит из пучка, состоящего не из сечений расслоения S , а из кривых, дважды пересекающих каждый слой. Предложение доказано.

§ 4. Изомонодромные деформации и уравнение Пенлеве VI

В этом параграфе напомним, каким образом изомонодромные деформации логарифмических $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей (E_t, ∇_t) над сферой, проколотой в четырех точках, параметризуются решениями уравнения Пенлеве VI и как можно использовать эту параметризацию для вычисления вариации расслоения E_t'' на соответствующем эллиптическом поднятии. Напомним сначала, что такое изомонодромная деформация.

4.1. Изомонодромные деформации и плоские связности. Пусть X_0 – комплексная проективная кривая, а (E_0, ∇_0) – векторное расслоение ранга 2 над X_0 , снабженное (плоской) логарифмической $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностью с (приведенным) эффективным дивизором полюсов D_0 . Для любой топологически тривиальной аналитической деформации (X_t, D_t) нашей проколотой кривой существует единственная деформация (E_t, ∇_t) векторного расслоения и связности, сохраняющая данные монодромии постоянными. Это сразу вытекает из соответствия Римана–Гильберта (предложение 24 с параметрами). Данные монодромии состоят из представления монодромии, дополненного “параболической структурой” в ложных особых точках. Эквивалентно, если обозначить тотальное пространство деформации через $\mathbf{X}$, а соответствующий (гладкий) дивизор через $\mathbf{D} \subset \mathbf{X}$, то деформация (E_t, ∇_t) индуцируется единственной

плоской логарифмической $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностью (E, ∇) с дивизором полюсов D , индуцирующей (E_0, ∇_0) на срезе X_0 .

В настоящей работе рассматривается случай сферы с четырьмя проколами и тора с одним проколом. Их деформации параметризуются соответствующими пространствами Тейхмюллера, которые оба изоморфны полуплоскости Пуанкаре $\mathbb{H}$. Таким образом, мы начинаем с изомонодромной деформации некоторой логарифмической $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности (E_t, ∇_t) над сферой Римана с полюсами в точках $0, 1, t$ и ∞ , где t пробегает универсальное накрытие $T \simeq \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$. Рассмотрим деформацию $(\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ соответствующего эллиптического поднятия, построенного в § 2. Легко видеть, что $(\tilde{E}_t, \tilde{\nabla}_t)$ остается изомонодромной деформацией некоторой логарифмической связности над семейством Лежандра эллиптических кривых X_t с полюсами, содержащимися в множестве точек ветвления $\{\omega_0, \omega_1, \omega_t, \omega_\infty\}$ изучаемой эллиптической кривой. Под пространством параметров T теперь понимается пространство Тейхмюллера тора. При специальном выборе параметров $\theta = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2 + \vartheta/2)$ получаем изомонодромную деформацию связности Ламе.

4.2. Уравнение Пенлеве VI и фуксовы уравнения. Хотя нам это не понадобится, интересно напомнить историю вывода уравнения Пенлеве VI как изомонодромного уравнения для фуксовых проективных структур на сфере с четырьмя проколами и одной дополнительной точкой ветвления. С помощью преобразований Мёбиуса можно нормализовать особые точки, считая их равными $0, 1, t$ и ∞ , после чего изучаемое фуксово дифференциальное уравнение 2-го порядка $u_{xx} + f(x)u_x + g(x)u = 0$ принимает вид

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \kappa_0}{x} + \frac{1 - \kappa_1}{x - 1} + \frac{1 - \kappa_t}{x - t} - \frac{1}{x - q}, \\ g(x) = \frac{-\frac{t(t-1)H}{x-t} + \frac{q(q-1)p}{x-q} + \rho(\kappa_\infty + \rho)}{x(x-1)}. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $q \notin \{0, 1, t, \infty\}$ – точка ветвления, κ_i означает локальный показатель в точке $i = 0, 1, t, \infty$, а ρ определяется соотношением

$$\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t + \kappa_\infty + 2\rho = 1. \quad (14)$$

Заметим, что параметры p и H являются вычетами функции g :

$$H = -\mathrm{Res}_{x=t} g(x) \quad \text{и} \quad p = \mathrm{Res}_{x=q} g(x). \quad (15)$$

Особая точка q имеет показатель 2. Она является ложной (т. е. точкой ветвления проективной карты) тогда и только тогда, когда параметр H имеет вид

$$H = \frac{q(q-1)(q-t)}{t(t-1)} \left(p^2 - \left(\frac{\kappa_0}{q} + \frac{\kappa_1}{q-1} + \frac{\kappa_t-1}{q-t} \right) p + \frac{\rho(\kappa_\infty + \rho)}{q(q-1)} \right). \quad (16)$$

В этих предположениях локальные карты $\phi = u_1/u_2$, где u_1 и u_2 пробегают все независимые решения уравнения (13), задают проективный атлас на дополнении к точкам $0, 1, t, q$ и ∞ в сфере Римана. В каждой особой точке $i = 0, 1, t, \infty$ одна из проективных карт принимает вид $\phi = z^{\kappa_i}$ (или, возможно,

$\phi = 1/z^m + \log(z)$ – в случае, когда $\kappa_i = \pm m \in \mathbb{Z}_{>0}$) при надлежащем выборе локальной координаты z в точке i . В точке q одна из проективных карт принимает вид $\phi = z^2$ (простая точка ветвления). Обратно, всякая проективная структура на сфере Римана, имеющая пять особых точек умеренного роста, одна из которых является простой точкой ветвления, переводится в некоторый элемент указанного выше семейства сопряжением посредством преобразования Мёбиуса. Такие проективные структуры характеризуются следующими данными:

- положения t и q особых точек,
- показатели $\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty)$ и
- представление монодромии проективной карты ϕ с точностью до сопряжения.

Малая деформация уравнения (13) с подвижными особыми точками t и q называется изомонодромной, если проективные карты имеют при этой деформации постоянное представление монодромии (с точностью до сопряжения). Такие деформации характеризуются следующей классической теоремой.

ТЕОРЕМА 8 (Фукс–Мальмквист). *Деформация уравнения (13), параметризованная положением особой точки t , является изомонодромной тогда и только тогда, когда показатели κ_i остаются фиксированными, а параметры $(p(t), q(t))$ удовлетворяют неавтономной гамильтоновой системе*

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad u \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (17)$$

Первое гамильтоново уравнение системы (17) имеет вид

$$p = \frac{1}{2} \left(\frac{t(t-1)}{q(q-1)(q-t)} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\theta_0}{q} + \frac{\theta_1}{q-1} + \frac{\theta_t-1}{q-t} \right). \quad (18)$$

Подставляя (18) во второе уравнение системы (17), получаем уравнение Пенлеве VI вида (9) с параметрами κ . С исторической точки зрения уравнение Пенлеве VI было впервые выведено Фуксом, а гамильтонова форма записи была открыта позднее Мальмквистом.

4.3. Уравнение Пенлеве VI и фуксовы системы. Напомним, как уравнение Пенлеве VI связано с изомонодромными деформациями логарифмических $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей (E_t, ∇_t) с особыми точками $0, 1, t$ и ∞ на сфере Римана. Пусть (E_t, ∇_t) – такая деформация. Допустим, что она неприводима (это условие зависит только от монодромии, но не от значения t). По лемме 6 подлежащее расслоение E_t либо тривиально, либо равно $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$; но оказывается, что расслоение E_t должно быть тривиально для всех значений параметра t вне некоторого дискретного множества: не существует нетривиальных неприводимых изомонодромных деформаций таких связностей на расслоении $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ (см. [15]). Поэтому достаточно рассматривать изомонодромные деформации $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -фуксовых систем

$$\frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t} \right) Y, \quad A_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}). \quad (19)$$

Матрица-вычет в особой точке $x = \infty$ равна

$$A_0 + A_1 + A_t + A_\infty = 0. \quad (20)$$

Обозначим собственные значения матрицы A_i через $\pm\theta_i/2$. Тогда

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_i^2 + b_i c_i = \frac{\theta_i^2}{4}, \quad i = 0, 1, t, \infty. \quad (21)$$

После замены переменной $Y := MY$, где $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, приходим к нормировке

$$A_\infty = \begin{pmatrix} \frac{\theta_\infty}{2} & 0 \\ * & -\frac{\theta_\infty}{2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Случай $A_\infty = 0$ мы исключаем: связность ∇ должна быть особой на ∞ . Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9. *Малая деформация $A_i = A_i(t)$ системы (10), нормированная требованием (22), является изомонодромной тогда и только тогда, когда все собственные значения $\pm\theta_i/2$ постоянны и функция $q := tb_0/(tb_0 + (t-1)b_1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{dq}{dt} = -2a_0 \frac{q-1}{t-1} - 2a_1 \frac{q}{t} + (1-\theta_\infty) \frac{q(q-1)}{t(t-1)} \quad (23)$$

и уравнению Пенлеве VI вида (9) с параметрами

$$\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty - 1).$$

Сначала выведем теорему 9 из теоремы Фукса–Мальмквиста (теоремы 8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором с собственным значением $-\theta_\infty/2$ на ∞ . В силу неприводимости системы (10) он не инвариантен и может быть выбран в качестве циклического вектора при выводе скалярного фуксова уравнения. А именно, если $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ – произвольное решение системы (10), то функция

$$u := \sqrt{x^{\theta_0}(x-1)^{\theta_1}(x-t)^{\theta_t}} y_1$$

удовлетворяет скалярному уравнению (13) с показателями

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty - 1) \quad (24)$$

и параметрами

$$q = \frac{tb_0}{tb_0 + (t-1)b_1}, \quad (25)$$

$$p = \frac{a_0 + \theta_0/2}{q} + \frac{a_1 + \theta_1/2}{q-1} + \frac{a_t + \theta_t/2}{q-t}. \quad (26)$$

На самом деле координаты Дарбу допускают следующую интерпретацию. Точка $x = q$ — это единственная вторая точка, в которой $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ также является собственным вектором системы (10). Соответствующее собственное значение равно

$$-p + \frac{\theta_0}{2q} + \frac{\theta_1}{2(q-1)} + \frac{\theta_t}{2(q-t)}.$$

Из теоремы 8 вытекает, что деформация системы (10) изомонодромна тогда и только тогда, когда вспомогательные переменные p и q , определенные формулами (25) и (26), удовлетворяют гамильтоновой системе (17) с неавтономным гамильтонианом $H(t, p, q)$, заданным равенством (16). Теорема доказана.

Покажем теперь, как однозначно (с точностью до калибровочного преобразования) восстановить систему (10) по решению $q(t)$ уравнения Пенлеве VI. Сначала введем вспомогательную переменную p по формуле (18). Этим задается единственное скалярное уравнение (13), по которому фуксова система восстанавливается стандартным образом. Полученная система определяется (с точностью до калибровочного преобразования) формулой (10) с уравнениями (21) и

$$\begin{cases} a_0 = \frac{\mathbf{p}}{t} - \frac{\kappa_0}{2}, \\ a_1 = -\frac{\mathbf{p}}{t-1} - \frac{q-1}{t-1}(\rho + \kappa_\infty) - \frac{\kappa_1}{2}, \\ a_t = \frac{\mathbf{p}}{t(t-1)} + \frac{q-t}{t-1}(\rho + \kappa_\infty) - \frac{\kappa_t}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} b_0 = -\frac{q}{t}, \\ b_1 = \frac{q-1}{t-1}, \\ b_t = -\frac{q-t}{t(t-1)}, \end{cases} \quad (27)$$

где $\mathbf{p} = q(q-1)(q-t)p$, а ρ определено в (14). Коэффициенты c_i этой системы немедленно выводятся из уравнений (21). В стандартных формулах Джимбо и Мивы (см. [26, с. 199, 200]) считается, что $\theta_\infty \neq 0$, так что матрицу A_∞ можно дальнейшим калибровочным преобразованием нормировать до диагональной матрицы. Получаемые формулы намного сложнее, чем выше. Способ, которым мы получили формулы (27), описан в пп. 5.3–5.5.

4.4. Векторное расслоение эллиптического поднятия. Возвращаясь к нашей исходной задаче и намереваясь применить теорему 5, мы хотели бы параметризовать параболическую структуру $\mathbf{l}$, индуцированную связностью ∇_t (или, эквивалентно, системой (10)), с помощью трансцендента Пенлеве VI $q(t)$, параметризующего деформацию. Из формул (21) и (27) получаем, что собственная прямая l_i , ассоциированная с собственным значением $-\theta_i/2$ над полюсом $i = 0, 1, t$, имеет вид

$$l_i = \left(-b_i : a_i + \frac{\theta_i}{2} \right),$$

откуда

$$\begin{cases} l_0 = \left(1 : \frac{p}{q}\right), \\ l_1 = \left(1 : \frac{p}{q-1} + \rho + \kappa_\infty\right), \\ l_t = \left(1 : \frac{p}{q-t} + (\rho + \kappa_\infty)t\right), \\ l_\infty = (0 : 1) \end{cases} \quad (28)$$

(напомним, что l_∞ нормирована формулой (22)). Эти выражения для l_i уже не верны для калибровочно эквивалентной системы (10), например полученной нормировкой Джимбо–Мивы, но их двойное отношение

$$c = \frac{l_t - l_0}{l_1 - l_0} \frac{l_1 - l_\infty}{l_t - l_\infty} = t \frac{(q-1)p + \rho + \kappa_\infty}{(q-t)p + \rho + \kappa_\infty} \quad (29)$$

зависит только от системы (22) с точностью до калибровочного преобразования. Отметим, что формула (29) дает элегантное определение вспомогательного переменного p в терминах параболической структуры связности, q и t .

СЛЕДСТВИЕ 10. Пусть (E_t, ∇_t) – изомонодромная деформация, заданная решением $q(t)$ уравнения Пенлеве VI, как выше, и пусть $(\tilde{E}_t'', \tilde{\nabla}_t'')$ – эллиптическое поднятие этой деформации. Тогда расслоение $\tilde{E}_t''$ полустабильно и имеет инвариант

$$\lambda(\tilde{E}_t'') = q(t) + \frac{\rho + \kappa_\infty}{p(t)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению расслоение E_t тривиально. Согласно теореме 5 расслоение $\tilde{E}_t''$ полустабильно и имеет инвариант

$$\lambda(\tilde{E}_t'') = t \frac{c-1}{c-t} = q + \frac{\rho + \kappa_\infty}{p}.$$

Следствие доказано.

Все проведенные вычисления справедливы лишь при условии общего положения $q \neq 0, 1, t, \infty$. С другой стороны, хорошо известно, что постоянные решения $q(t) \equiv 0, 1, t$ или ∞ отвечают изомонодромным деформациям приводимых связностей. Таким образом, следствия 10 достаточно для доказательства теоремы 1. Мы, однако, можем уточнить его и проверить для специальных значений q и p , будет расслоение $\tilde{E}''$ неразложимым или нет.

§ 5. Геометрия уравнений Пенлеве VI

Здесь вводится пространство модулей $\mathcal{M}_{t_0}^\theta$ некоторых $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей с полюсами в точках $0, 1, t_0$ и ∞ и собственными значениями θ . Оно содержит все неприводимые связности. Это пространство впервые использовалось в работе Окамото [27] для построения хорошего пространства начальных условий для уравнения Пенлеве VI, из которого свойство Пенлеве могло бы быть усмотрено геометрически. В работе [25] это пространство было отождествлено

с некоторым пространством модулей связностей, что расширяет словарь, описанный в п. 4.3. Мы напомним эту конструкцию, а затем используем ее для нахождения векторного расслоения $\tilde{E}_t$ эллиптического поднятия для специальных значений p и q .

5.1. Пространство Окамото начальных условий. Свойство Пенлеве, выделяющее уравнения Пенлеве среди всех дифференциальных уравнений вида $\lambda'' = F(t, \lambda, \lambda')$, состоит в том, что *все решения уравнения Пенлеве VI аналитически продолжаются как мероморфные решения вдоль любого пути, не проходящего через 0, 1 и ∞* . Таким образом, решения уравнения Пенлеве VI являются глобальными мероморфными функциями на универсальном накрытии сферы с тремя проколами.

Наивное пространство начальных условий $\mathbb{C}^2 \ni (q(t_0), q'(t_0))$ для уравнения Пенлеве VI в точке $t_0 \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ не описывает всех решений в окрестности этой точки. Решения уравнения Пенлеве VI мероморфны, и некоторые из них имеют полюс в точке t_0 ; мы должны добавить их. Хорошим пространством начальных условий является

$$\mathcal{M}_t^\theta := \{\text{ростки мероморфных } P_{VI}^\theta\text{-решений в точке } t\}. \quad (30)$$

Чтобы построить его, Окамото рассматривает фазовый портрет уравнения Пенлеве VI в переменных

$$(t, q, q') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \times \mathbb{C}^2$$

(вводя вспомогательное уравнение $dq/dt = q'$): он задается рациональным векторным полем и определяет голоморфное слоение с особенностями на всякой рациональной компактификации. Например, можно начать с $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ и заметить, что особенности слоения находятся на специальных слоях $t = 0, 1, \infty$ (о которых мы не заботимся) и на бесконечности множителя $\mathbb{P}^2$. В последнем случае они вырождены и расположены вдоль некоторого одномерного сечения проекции на ось t ; надо раздуть это сечение, чтобы уменьшить вырожденность особых точек. После девяти таких последовательных раздутий Окамото получает расслоение

$$t: \overline{\mathcal{M}}^\theta \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} \quad (31)$$

(мы игнорируем все происходящее над точками $t = 0, 1, \infty$), которое не является локально тривиальным в аналитическом смысле (но является таковым как топологическое расслоение). Имеется некоторый невертикальный дивизор $Z \subset \overline{\mathcal{M}}^\theta$, состоящий из вертикальных слоев (относительно t -проекции) и особых точек. На дополнении $\mathcal{M}^\theta := \overline{\mathcal{M}}^\theta \setminus Z$ к этому дивизору слоение Пенлеве трансверсально к оси t и индуцирует локальную аналитическую тривиализацию расслоения

$$t: \mathcal{M}^\theta \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}. \quad (32)$$

По построению слой $\mathcal{M}_t^\theta$ над каждой точкой $t \neq 0, 1, \infty$ можно интерпретировать как множество ростков мероморфных P_{VI}^θ -решений. На самом деле для специальных значений параметров θ некоторые слои остаются на бесконечности аффинной карты (q, q') и их нельзя рассматривать как мероморфные решения, но следует считать “постоянными решениями $q \equiv \infty$ ”. Дивизор Z

в действительности совпадает с приведенным дивизором полюсов замкнутой 2-формы, определяемой в аффинной карте как

$$dt \wedge dH + dp \wedge dq,$$

где H определено в (16). Ядро этой 2-формы и задает слоение Пенлеве.

Опишем теперь пространство параметров $\mathcal{M}_t^\theta$, начиная с линейчатой поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2$. Определим приведенный дивизор $Z_t \subset \mathbb{F}_2$ как объединение сечения $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_2$, имеющего индекс самопересечения -2 , с четырьмя слоями: над 0 , 1 , t_0 и ∞ . Выберем по две точки на каждой вертикальной компоненте дивизора Z_t так, чтобы ни одна из них не лежала на горизонтальной компоненте. Раздувая эти восемь точек, получим компактное пространство $\mathcal{M}_t^\theta$. Сохраним обозначение Z_t для собственного прообраза этого дивизора. Дополнение $\mathcal{M}_t^\theta := \overline{\mathcal{M}_t^\theta} \setminus Z_t$ – это и есть пространство начальных условий. Остается лишь определить положение этих восьми точек в зависимости от θ и t (см. п. 5.6).

5.2. Проективные структуры и слоения Риккати. Вернемся к подходу Р. Фукса, в котором трансценденты Пенлеве параметризуют изомонодромные деформации фуксовых проективных структур с $4 + 1$ особыми точками (см. п. 4.2). Такую структуру можно задать фуксовым дифференциальным уравнением 2-го порядка (13). Ее можно также описать данными, задающими логарифмическую $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность (E, ∇) вместе с линейным не инвариантным относительно ∇ подрасслоением $L \subset E$, играющим роль циклического вектора (см. п. 4.3). В [5] для таких данных принято название “ $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -опер”. Более геометрическая картина, проистекающая из подхода Ш. Эресмана, использует понятие “проективный опер” – это тройка $(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(\nabla), \sigma)$, где $\mathbb{P}(E)$ – ассоциированное $\mathbb{P}^1$ -расслоение, $\mathbb{P}(\nabla)$ – индуцированная проективная связность, а $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}(E)$ – сечение, отвечающее подрасслоению L . Например, система (10) определяет уравнение Риккати

$$\frac{dy}{dx} = -b(x)y^2 - 2a(x)y + c(x) \quad (33)$$

на тривиальном $\mathbb{P}^1$ -расслоении по формуле $(1 : y) = (y_1 : y_2)$, где

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Мы в основном рассматриваем ассоциированный фазовый портрет, т.е. голоморфное слоение $\mathcal{F}_0$ (с особенностями), индуцированное данным уравнением на линейчатой поверхности $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ и называемое также слоением Риккати (см. [28] или п. 8.8). Особые точки этого слоения расположены в полюсах уравнения Риккати. Точнее, в обозначениях (21), особые точки имеют вид

$$\begin{cases} l_i = \left(-b_i : a_i + \frac{\theta_i}{2} \right) = \left(a_i - \frac{\theta_i}{2} : c_i \right), \\ l'_i = \left(-b_i : a_i - \frac{\theta_i}{2} \right) = \left(a_i + \frac{\theta_i}{2} : c_i \right). \end{cases}$$

С точки зрения слоений¹ мы говорим, что l_i и l'_i имеют *показатели* θ_i и $-\theta_i$ соответственно; они отвечают собственным прямым системы с собственными значениями $-\theta_i/2$ и $\theta_i/2$ (обратите внимание на знак!). Если $\theta_i = 0$, то либо особая точка системы – логарифмическая и две особые точки слоения $\mathcal{F}_1$ совпадают, либо особая точка системы – ложная и слоение Риккати неособо. Для последнего случая мы ниже введем дополнительную параболическую структуру. Сечение σ , заданное формулой $y = \infty$, играет роль циклического вектора. Оно имеет две точки касания со слоением Риккати, а именно при $x = q$ и $x = \infty$ (где σ проходит через особую точку слоения), см. нижнюю часть рис. 2.

Рис. 2. От $\mathbb{F}_2$ к $\mathbb{F}_0$

¹Например, $1/\theta_i$ есть индекс Камачо–Сада слоения $\mathcal{F}_1$ вдоль слоя $x = i$ в точке l_i (см. [28]).

В этой картине слоение $\mathcal{F}_0$ регулярно, трансверсально к $\mathbb{P}^1$ -слою над точкой x общего положения и, следовательно, является трансверсально проективным (см. [29]). Тем самым оно индуцирует проективную структуру на сечении σ , которая проектируется на базу $\mathbb{P}^1$. Ясно, что полученная проективная структура на (открытом по Зарискому подмножестве пространства) $\mathbb{P}^1$ сохраняется при бирациональных преобразованиях расслоений, и потому было бы естественно найти ее простейшую бирациональную модель. В изучаемой выше тройке $(\mathbb{F}_0, \mathcal{F}_0, \sigma)$ точка $x = \infty$ играет искусственно выделенную роль, поскольку нормировкой (22) мы потребовали, чтобы сечение σ проходило через особую точку $(x, y) = (\infty, \infty)$ нашего слоения. Выполняя элементарное преобразование в этой точке, получаем следующую более симметричную картину (см. [30]): слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ на линейчатой поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ имеет особые точки над $0, 1, t$ и ∞ , а сечение σ имеет теперь только простое касание со слоением в точке $x = q$. На самом деле $\sigma: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ есть единственное отрицательное (т. е. имеющее индекс самопересечения -1) сечение. Показатели (собственные значения) слоения имеют теперь вид

$$\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) := (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty - 1).$$

Над каждым полюсом $x = i$ уравнения Риккати слоение $\mathcal{F}_1$ имеет одну или две особые точки в зависимости от показателя κ_i ; при $q = i$ одна из особых точек случайно попадает на σ (см. центральную часть рис. 2).

Теперь мы введем дополнительную параболическую структуру, которая будет удобна в дальнейшем при применении элементарных преобразований. Она необходима для того, чтобы пространство модулей было гладким в случае, когда один из показателей κ_i обращается в нуль.

Пространство Окамoto $\mathcal{M}_t^\theta$ начальных условий можно рассматривать как пространство модулей таких слоений Риккати $\mathcal{F}_1$. Точнее, зафиксируем показатели κ и параметр t и рассмотрим наборы данных $(\mathbb{F}_1, \mathcal{F}_1, \sigma, l)$, где

- $\mathbb{F}_1$ является линейчатой поверхностью Хирцебруха с линейчатой структурой $\mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$,
- $\mathcal{F}_1$ является слоением Риккати на $\mathbb{F}_1$, которое регулярно и трансверсально к линейчатой структуре вне $x = 0, 1, t, \infty$,
- над каждой из точек $i = 0, 1, t, \infty$ либо слой $x = i$ инвариантен и для каждого показателя $\pm\kappa_i$ имеется одна особая точка, либо $\kappa_i = 0$ и слоение регулярно и трансверсально к линейчатой структуре,
- $l = (l_0, l_1, l_t, l_\infty)$, где либо l_i есть особая точка с показателем κ_i над $x = i$, либо $\kappa_i = 0$, слоение $\mathcal{F}_i$ регулярно над $x = i$, а l_i — любая точка слоя.

Такие наборы данных в точности соответствуют проективизациям полустабильных параболических связностей, рассмотренных в [25] для построения пространства модулей $\mathcal{M}_t^\theta$.

5.3. Слоения Риккати на $\mathbb{F}_2$. Полагая $y = x(x-1)(x-t)u'/u$ в скалярном уравнении (13), получаем уравнение Риккати

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & -\frac{y^2}{x(x-1)(x-t)} + \left(\frac{\kappa_0}{x} + \frac{\kappa_1}{x-1} + \frac{\kappa_t}{x-t} + \frac{1}{x-q} \right) y \\ & - \frac{q(q-1)(q-t)p}{x-q} - q(q-1)p + t(t-1)H - \rho(\kappa_\infty + \rho)(x-t). \end{aligned} \quad (34)$$

Напомним, что $\kappa_0 + \kappa_1 + \kappa_t + \kappa_\infty + 2\rho = 1$, а H задается формулой (16). Уравнение (34) определяет слоение Риккати $\mathcal{F}_2$, которое естественно компактифицируется на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2$, заданной двумя картами

$$(x, y) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^1 \quad \text{и} \quad (x, \tilde{y}) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1$$

с функцией перехода $\tilde{y} = y/x^2$. Особые точки слоения лежат на пяти листах:

$$x = 0, 1, t, q \text{ и } \infty,$$

причем соответствующие показатели (с точностью до знака) равны

$$\kappa_0, \quad \kappa_1, \quad \kappa_t, \quad \kappa_q = 1 \quad \text{и} \quad \kappa_\infty.$$

Точнее, особые точки в первой карте (x, y) имеют вид

$$\begin{cases} s_0 = (0, 0), \\ s'_0 = (0, t\kappa_0), \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = (1, 0), \\ s'_1 = (1, (1-t)\kappa_1), \end{cases} \quad \begin{cases} s_t = (t, 0), \\ s'_t = (t, t(t-1)\kappa_t), \end{cases} \quad (35) \\ \begin{cases} s_q = (q, \mathbf{p}), \\ s'_q = (q, \infty). \end{cases}$$

Здесь s_i (соответственно s'_i) – особая точка с показателем κ_i (соответственно $-\kappa_i$) и $\mathbf{p} = q(q-1)(q-t)p$. При $x = \infty$ особые точки задаются в карте $(x, \tilde{y})$ уравнениями

$$\begin{cases} s_\infty = (\infty, -\rho), \\ s'_\infty = (\infty, -\rho - \kappa_\infty). \end{cases} \quad (36)$$

“Циклический вектор” задается сечением σ , определяемым в картах формулами $y = \infty$ и $\tilde{y} = \infty$ соответственно.

5.4. Слоения Риккати на $\mathbb{F}_1$. После элементарного преобразования с центром в нодальной особой точке $s_q = (q, \mathbf{p})$ слоения $\mathcal{F}_0$ получаем слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ с полюсами $x = 0, 1, t, \infty$ и соответствующими показателями $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty$, как в п. 5.2. Ложная особая точка исчезла.

Если мы зададим $\mathbb{F}_1$ обычными картами

$$(x, y) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^1 \quad \text{и} \quad (x, \tilde{y}) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^1$$

с функцией перехода $\tilde{y} = y/x$, то отрицательное сечение σ задается в них формулами $y = \infty$ и $\tilde{y} = \infty$ соответственно, а слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ индуцируется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & \frac{(qy - \mathbf{p})(qy - \mathbf{p} + t\kappa_0)}{tx} \\ & - \frac{((q-1)y - \mathbf{p})((q-1)y - \mathbf{p} + (1-t)\kappa_1)}{(t-1)(q-1)(x-1)} \\ & + \frac{((q-t)y - \mathbf{p})((q-t)y - \mathbf{p} + t(t-1)\kappa_t)}{t(t-1)(q-t)(x-t)} - \rho(\kappa_\infty + \rho). \end{aligned} \quad (37)$$

Это уравнение выведено из (34) подстановкой $y := (x - q)y + p$. Особые точки в первой карте (x, y) имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} s_0 = \left(0, \frac{p}{q}\right), \\ s'_0 = \left(0, \frac{p - t\kappa_0}{q}\right), \end{cases} & \begin{cases} s_1 = \left(1, \frac{p}{q-1}\right), \\ s'_1 = \left(1, \frac{p - (1-t)\kappa_1}{q-1}\right), \end{cases} \\ & \begin{cases} s_t = \left(t, \frac{p}{q-t}\right), \\ s'_t = \left(t, \frac{p - t(t-1)\kappa_t}{q-t}\right), \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

а особые точки при $x = \infty$ описываются в карте $(x, \tilde{y})$ формулами

$$\begin{cases} s_\infty = (\infty, -\rho), \\ s'_\infty = (\infty, -\rho - \kappa_\infty) \end{cases} \quad (39)$$

(здесь снова s_i имеет показатель κ_i).

5.5. Слоения Риккати на $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Наконец, выполняя последнее элементарное преобразование с центром в особой точке s'_∞ слоения $\mathcal{F}_1$, получаем слоение Риккати $\mathcal{F}_0$ с собственными значениями

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty) = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty + 1).$$

Подлежащая линейчатая поверхность зависит от взаимного расположения особой точки s'_∞ слоения $\mathcal{F}_1$ и отрицательного сечения σ_{-1} : слоение Риккати $\mathcal{F}_0$ определено на

- $\mathbb{F}_0$, если $s'_\infty \notin \sigma_{-1}$ (случай общего положения),
- $\mathbb{F}_2$, если $s'_\infty \in \sigma_{-1}$ (случай коразмерности 1).

В частности, $q = \infty$ в последнем случае.

Если $q \neq \infty$, то уравнение Риккати, определяющее слоение $\mathcal{F}_0$ на $\mathbb{F}_0$, можно вывести из (37) с помощью подстановки $y := y - (\kappa_\infty + \rho)$. Получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & \frac{(qy - p)(qy - p + t\kappa_0)}{tqx} \\ & - \frac{((q-1)(y - \rho - \kappa_\infty) - p)((q-1)(y - \rho - \kappa_\infty) - p + (1-t)\kappa_1)}{(t-1)(q-1)(x-1)} \\ & + \frac{((q-t)(y - t(\kappa_\infty + \rho)) - p)((q-t)(y - t(\kappa_\infty + \rho)) - p + t(t-1)\kappa_t)}{t(t-1)(q-t)(x-t)}. \end{aligned} \quad (40)$$

Это в точности проективизация фуксовой системы, определенной в (27). Особые точки s_i с собственными значениями κ_i соответствуют параболической

структуре $\mathbf{l}$, определенной формулами (28):

$$\begin{cases} s_0 = \left(0, \frac{\mathbf{p}}{q}\right), \\ s_1 = \left(1, \frac{\mathbf{p}}{q-1} + \rho + \kappa_\infty\right), \\ s_t = \left(t, \frac{\mathbf{p}}{q-t} + (\rho + \kappa_\infty)t\right), \\ s_\infty = (\infty, \infty), \end{cases} \quad \begin{cases} s'_0 = \left(0, \frac{\mathbf{p} - t\kappa_0}{q}\right), \\ s'_1 = \left(1, \frac{\mathbf{p} - (1-t)\kappa_1}{q-1} + \rho + \kappa_\infty\right), \\ s'_t = \left(t, \frac{\mathbf{p} - t(t-1)\kappa_t}{q-t} + (\rho + \kappa_\infty)t\right) \end{cases} \quad (41)$$

и

$$s'_\infty = -\frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} - t\kappa_0)}{tq(\kappa_\infty + 1)} + \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} - (1-t)\kappa_1)}{(t-1)(q-1)(\kappa_\infty + 1)} - \frac{\mathbf{p}(\mathbf{p} - t(t-1)\kappa_t)}{t(t-1)(q-t)(\kappa_\infty + 1)} - \frac{\kappa_\infty + \rho}{\kappa_\infty + 1}((\kappa_\infty + \rho)(q-t-1) - \kappa_1 - t\kappa_t). \quad (42)$$

5.6. Пространство модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$. С каждой парой $(p, q) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\})$ мы ассоциировали слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ с полюсами $0, 1, t, \infty$ и показателями κ .

Обратно, пусть дано такое слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ на $\mathbb{F}_1$ с полюсами $0, 1, t$ и ∞ . Тогда единственная точка касания $x = q$ отрицательного сечения $\sigma_{-1}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_1$ и слоения $\mathcal{F}_1$ однозначно определяет $q \in \mathbb{P}^1$. Далее, если $q \neq 0, 1, t, \infty$, то, применяя элементарное преобразование в этой точке касания, мы определяем слоение Риккати $\mathcal{F}_2$ на $\mathbb{F}_2$. Существует единственное сечение $\sigma_2: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{F}_2$ с индексом самопересечения $+2$, проходящее через особые точки s_0, s_1 и s_t слоения $\mathcal{F}_2$. Выберем карту $(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1$, в которой сечение σ_2 и отрицательное сечение σ_{-2} задаются уравнениями $y = 0$ и $y = \infty$ соответственно. На самом деле y однозначно определяется, если нормировать коэффициент при y^2 в уравнении Риккати так, как в формуле (34). Теперь заметим, что все особые точки s_i и s'_i при $i = 0, 1, t, \infty$ зависят только от параметров κ и t ; только особая точка s_q , заданная формулой $(x, y) = (q, \mathbf{p})$, зависит от вида слоения $\mathcal{F}_1$. Определим $\mathbf{p}$ формулой $\mathbf{p} = q(q-1)(q-t)p$. Заметим, что слоение Риккати $\mathcal{F}_1$ характеризуется положением нодальной особой точки слоения $\mathcal{F}_2$ на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2$ (после указанной выше нормировки).

ТЕОРЕМА 11 [25]. Зафиксируем параметры

$$\kappa = (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty)$$

и рассмотрим слоения Риккати на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$, имеющие не более чем простые полюсы в точках $0, 1, t$ и ∞ , с показателями $\pm\kappa_i$ над $x = i$ такие, что отрицательное сечение σ_{-1} поверхности $\mathbb{F}_1$ не является $\mathcal{F}$ -инвариантным (условие полустабильности). Добавим также параболическую структуру $\mathbf{l} = (l_0, l_1, l_t, l_\infty)$, состоящую над каждой точкой $i = 0, 1, t, \infty$ из следующих данных:

– либо из особой точки $l_i \in \mathbb{F}_1$ с показателем κ_i ;

– либо – когда $\kappa_i = 0$ и особой точки на самом деле нет – из любой точки слоя $x = i$ (только в этом случае параболическая структура существенна, т.е. не определяется однозначно самим слоением).

Пространство модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$ таких пар $(\mathcal{F}, \mathbf{l})$ с точностью до автоморфизмов расслоений является квазипроективной рациональной поверхностью, допускающей следующее описание. Начнем с поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2$ и обозначим через Z_t приведенный дивизор, состоящий из четырех слоев $x = i$ вместе с отрицательным сечением σ_{-2} . Определим восемь точек s_i и s'_i формулами

$$\begin{cases} s_0 = (0, 0), \\ s'_0 = (0, t\kappa_0), \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = (1, 0), \\ s'_1 = (1, (1-t)\kappa_1), \end{cases} \quad \begin{cases} s_t = (t, 0), \\ s'_t = (t, t(t-1)\kappa_t) \end{cases} \quad (43)$$

в первой карте (x, y) и

$$\begin{cases} s_\infty = (\infty, -\rho), \\ s'_\infty = (\infty, -\rho - \kappa_\infty) \end{cases} \quad (44)$$

в карте $(x, \tilde{y} = y/x^2)$. Для $i = 0, 1, t, \infty$ проделаем следующее:

– если $\kappa_i \neq 0$, то раздуем точки s_i и s'_i ;

– если $\kappa_i = 0$, то раздуем точку $s_i = s'_i$, а затем раздуем точку пересечения исключительного дивизора с собственным прообразом слоя $x = i$.

Обозначим полученное восьмиточечное раздутие поверхности $\mathbb{F}_2$ через $\overline{\mathcal{M}_t^\kappa}$. Тогда пространство модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$ является дополнением в $\overline{\mathcal{M}_t^\kappa}$ к собственному прообразу дивизора Z_t .

Определенные в этой теореме восемь точек s_i и s'_i суть не что иное, как особые точки слоения на $\mathbb{F}_2$, описанного в п. 5.3. Если нодальная особая точка $(x, y) = (q, p)$ стремится к s_i (соответственно s'_i), то особая точка s'_i (соответственно s_i) соответствующего слоения на $\mathbb{F}_1$ (см. п. 5.4) стремится к отрицательному сечению σ_{-1} . Сам предел зависит от того, как именно нодальная точка стремится к s_i или s'_i . Если $\kappa_i \neq 0$, то слой $\mathcal{M}_t^\kappa$ над точкой $x = i$ состоит из двух непересекающихся экземпляров S_i и S'_i аффинной прямой $\mathbb{C}$, содержащих s_i и s'_i соответственно: они представляют собой пространства модулей тех слоений $\mathcal{F}$, у которых особые точки s'_i (соответственно s_i) лежат на отрицательном сечении σ_{-1} . Если $\kappa_i = 0$, то слой $\mathcal{M}_t^\kappa$ над точкой $x = i$ есть объединение аффинной прямой $S_i \simeq \mathbb{F}$ и проективной прямой $S'_i \simeq \mathbb{P}^1$, которые пересекаются трансверсально в одной точке и проектируются в точку $s_i = s'_i$. Компонента S_i состоит из тех слоений, для которых точка s_i лежит на отрицательном сечении σ_{-1} , а компактная компонента S'_i – из тех параболических слоений $(\mathcal{F}, \mathbf{l})$, у которых на самом деле нет полюса над $x = i$. Если пренебречь параболической структурой, то рациональная кривая S'_i стягивается в квадратичную особую точку.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 11. Пусть $\mathcal{F}$ – слоение Риккати на $\mathbb{F}_1$, имеющее не более чем простые полюсы над $x = 0, 1, t, \infty$ и такое, что отрицательное сечение σ_{-1} не инвариантно (полустабильность). В стандартной карте (x, y) слоение задается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(a_1x + a_0)y^2 + (b_2x^2 + b_1x + b_0)y + (c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0)}{x(x-1)(x-t)},$$

где $a_k, b_k, c_k \in \mathbb{C}$, а коэффициенты a_0 и a_1 не обращаются в нуль одновременно. Автоморфизмы расслоений задаются заменами координат вида $y := ay + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Простая точка касания слоения $\mathcal{F}$ и отрицательного сечения σ_{-1} имеет вид $x = q := -a_0/a_1$. С помощью замены координат $y := ay$ можно достичь следующей нормировки:

$$\text{либо } a_1x + a_0 = x - q, \quad \text{либо } a_1x + a_0 = \tilde{q}x - 1,$$

где $\tilde{q} = 1/q$. Сначала предположим, что $q \neq \infty$, так что мы можем считать, что $a_1x + a_0 = x - q$. Используя замену переменной вида $y := y + bx + c$, можно также предполагать, что $b_1 = b_2 = 0$. Заметим, что, сделав предположение $q \neq \infty$, мы получаем единственную нормальную форму

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-q)y^2 + b_0y}{x(x-1)(x-t)} + \frac{c_0}{tx} + \frac{c_1}{(1-t)(x-1)} + \frac{c_t}{t(t-1)(x-t)} + c_\infty. \quad (45)$$

Из формулы (37) получаем, что

$$b_0 = -2p + (q-1)(q-t)\kappa_0 + q(q-t)\kappa_1 + q(q-1)\kappa_t.$$

Вычет в точке $x = 0$ находится из формулы

$$dy = \frac{-qy^2 + b_0y + c_0}{t} \frac{dx}{x} + (\text{форма, голоморфная при } x = 0), \quad (46)$$

а показатели $\pm\kappa_0$ определяются дискриминантом

$$\Delta_0 := \frac{b_0^2 + 4qc_0}{t^2} = \kappa_0^2.$$

Аналогично,

$$\Delta_1 := \frac{b_0^2 + 4(q-1)c_1}{(t-1)^2} = \kappa_1^2, \quad \Delta_t := \frac{b_0^2 + 4(q-t)c_t}{t^2(t-1)^2} = \kappa_t^2, \\ \Delta_\infty := 1 - 4c_\infty = \kappa_\infty^2.$$

Как только параметр κ зафиксирован, можно однозначно выразить c_0, c_1, c_t и c_∞ как функции от κ, q и b_0 (т.е. p) при условии, что $q \neq 0, 1, t, \infty$. В окрестности точки $q = 0$ все еще можно выразить c_1, c_t и c_∞ как функции от κ, q и b_0 , и пространство модулей таких слоений локально изоморфно поверхности

$$\{(q, b_0, c_0) \in \mathbb{C}^3, b_0^2 + 2qc_0 = (t\kappa_0)^2\}.$$

Легко видеть, что это пространство модулей состоит, над $q = 0$, из аффинной прямой, параметризованной переменной c_0 , над каждой точкой $b_0 = \pm t\kappa_0$.

Если $\kappa_0 \neq 0$, то график

$$c_0 = -\frac{(b_0 - t\kappa_0)(b_0 + t\kappa_0)}{4q}$$

очевидно получается раздутием обеих указанных точек с последующим удалением уровня $c_0 = \infty$, т.е. собственного прообраза точки $q = 0$. Из формулы для вычета (46) получаем, что следующие условия эквивалентны над $q = 0$:

- $b_0 = t\kappa_0$ (соответственно $b_0 = -t\kappa_0$),
- $\mathbf{p} = 0$ (соответственно $\mathbf{p} = t\kappa_0$),
- у соответствующего слоения $\mathcal{F}_1$ его особая точка s'_0 (соответственно s_0) лежит на отрицательном сечении $y = \infty$.

Если $\kappa_0 = 0$, то график

$$c_0 = -\frac{b_0^2}{4q}$$

получается на этот раз двумя раздутиями, а аффинная прямая, параметризованная переменной c_0 , представляет собой множество тех слоений $\mathcal{F}_1$, у которых особая точка $s_0 = s'_0$ лежит на отрицательном сечении $y = \infty$. Поверхность, заданная уравнением $b_0^2 + 4qc_0 = 0$, имеет особую точку при $(q, b_0, c_0) = (0, 0, 0)$. Это соответствует случаю, когда вычет (46) равен нулю, т.е. $\mathcal{F}_1$ фактически не имеет особых точек при $x = 0$. Параболические данные при $x = 0$ дают десингуляризацию поверхности. Действительно, модули пар $(\mathcal{F}_1, \mathbf{l})$ локально параметризуются в окрестности точки $q = 0$ множеством

$$\{(q, b_0, c_0, s_0) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{P}^1, b_0^2 + 2qc_0 = 0, 2qs_0 = b_0\}$$

(точнее было бы записать $2qu_0 = b_0v_0$, где $(u_0 : v_0) = s_0$). Параболические данные $s_0 = b_0/(2q)$ параметризуют исключительный дивизор S'_0 (тем самым осуществляя раздутие). Пересечение $S_0 \cap S'_0$ наших двух компонент задается значениями $(q, b_0, c_0, s_0) = (0, 0, 0, \infty)$ и является слоением без особой точки при $x = 0$, параболическая структура которого лежит на отрицательном сечении $y = \infty$.

Изучение точек $q = 1, t, \infty$ аналогично, за тем исключением, что в случае $q = \infty$ надо выбрать другую нормировку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\tilde{q}x - 1)y^2 + \tilde{b}_2x^2y}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\tilde{c}_0}{x} + \frac{\tilde{c}_1}{x-1} + \frac{\tilde{c}_t}{x-t} + \tilde{c}_\infty,$$

где $(\tilde{q}, \tilde{b}_2) = (1/q, b_0/q^2)$ – вторая карта поверхности $\mathbb{F}_2$. Этим мы завершаем набросок доказательства теоремы 11.

Деформация $t \mapsto \mathcal{M}_t^\kappa$ аналитически (но не алгебраически) тривиальна, причем тривиализация задается потоком Пенлеве (см. [31], [25]). Хорошее фазовое пространство для уравнения Пенлеве VI является (локально аналитически тривиальным) слоением

$$t: \mathcal{M}^\kappa \rightarrow \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}.$$

Отображение $q: \mathcal{M}_t^\kappa \rightarrow \mathbb{P}^1$ регулярно (если только никакое κ_i не равно нулю) и наделяет $\mathcal{M}_t^\kappa$ (при фиксированном t) структурой аффинного $\mathbb{A}^1$ -расслоения с двойными слоями над $0, 1, t, \infty$. Наконец, заметим, что формула (37) определяет явное сечение (универсальное слоение Риккати)

$$(t, q, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbb{F}_1, \mathcal{F}_1)$$

над $\mathcal{M}^\kappa \setminus \{q = 0, 1, t, \infty\}$.

5.7. Множество $\mathcal{M}_t^\theta$ как пространство модулей $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей. Согласно п. 5.5 имеем изоморфизм

$$\mathrm{elm}_{s'_\infty} : \mathcal{M}_t^\kappa \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_t^\theta$$

введенного в предыдущем пункте пространства модулей на пространство модулей $\mathcal{M}_t^\theta$ всех $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей (E, ∇) с показателями

$$\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty) := (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty + 1).$$

Напомним, что в каждой точке этого пространства модулей подлежащее векторное расслоение E либо тривиально, либо равно $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$; фактически оно тривиально на открытом по Зарискому подмножестве множества $\mathcal{M}^\theta$. Геометрическим местом точек, отвечающих нетривиальным расслоениям, является тета-дивизор Мальгранжа $\Theta \subset \mathcal{M}^\theta$, определяемый при фиксированном t как исключительный дивизор S_∞ , возникающий при раздутии точки s_∞ . Действительно, точки последнего дивизора соответствуют тем слоениям $\mathcal{F}_1$, для которых s'_∞ лежит на отрицательном сечении σ_{-1} ; применение элементарного преобразования $\mathrm{elm}_{s'_\infty}$ дает слоение $\mathcal{F}_0$ на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2 = \mathbb{P}(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$. Фактически в этом случае мы имеем $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_2$ и возвращаемся к слоению из п. 5.3, где $s_q \rightarrow s_\infty$. А именно, если в формуле (13) положить

$$p = \frac{\lambda - \rho q}{(q-1)(q-t)}$$

и устремить q к ∞ , мы получим уравнение Гойна

$$g(x) = \frac{\rho(\rho + \kappa_\infty + 1)x - \lambda\kappa_\infty - \rho((t+1)\rho + \kappa_1 + t\kappa_t)}{x(x-1)(x-t)}.$$

При специальном выборе параметров $\theta = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2 + \vartheta/2)$ получаем уравнение Ламе (1) с $n = \vartheta/2$ и $c = 2\lambda(\vartheta - 1) + (t+1)\vartheta/2(\vartheta/2 - 1)$.

Наконец, открытое множество $\mathcal{M}^\theta \setminus \Theta$ (соответственно замкнутое подмножество Θ) можно рассматривать как пространство модулей слоений Риккати $\mathcal{F}_0$ на $\mathbb{F}_0$ (соответственно на $\mathbb{F}_2$) с простыми полюсами $(0, 1, t, \infty)$ и показателями $(\theta_0, \theta_1, \theta_t, \theta_\infty)$, исключая те слоения, для которых сечение, проходящее через s_∞ (соответственно исключительное сечение), является $\mathcal{F}_0$ -инвариантным.

5.8. Симметрии Окамото. Имеется много бирациональных преобразований

$$(\kappa, t, p, q) \mapsto (\tilde{\kappa}, \tilde{t}, \tilde{p}, \tilde{q}),$$

индуцирующих бирегулярные диффеоморфизмы пространств модулей

$$\mathcal{M}^\kappa \rightarrow \mathcal{M}^{\tilde{\kappa}},$$

эквивариантные относительно проекции на ось t . Эти преобразования изучались в работе [32]. Некоторые из них являются классическими, известны как преобразования Шлезингера и возникают из геометрических преобразований связностей (или слоений Риккати). Вместе со странной добавочной симметрией они порождают полную группу симметрий Окамото.

5.8.1. *Смена знаков.* Прежде всего, можно менять “спин-структуру”, т. е. знаки параметров $\pm\kappa_i$. Это не оказывает влияния ни на слоение Риккати, ни на коэффициенты t , q , b_0 нормальной формы (45), но переменное p при этом модифицируется следующим образом:

$$\begin{aligned} (-, +, +, +): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (-\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(q, p - \frac{\kappa_0}{q}\right), \end{cases} \\ (+, -, +, +): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0, -\kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(q, p - \frac{\kappa_1}{q-1}\right), \end{cases} \\ (+, +, -, +): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0, \kappa_1, -\kappa_t, \kappa_\infty), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(q, p - \frac{\kappa_t}{q-t}\right), \end{cases} \\ (+, +, +, -): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, -\kappa_\infty), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto (q, p). \end{cases} \end{aligned}$$

5.8.2. *Перестановка полюсов.* Можно переставлять четыре полюса слоения Риккати. Получаем группу порядка 24, порожденную элементами

$$\begin{aligned} (01): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_1, \kappa_0, \kappa_t, \kappa_\infty), \\ t \mapsto 1-t, \\ (q, p) \mapsto (1-q, -p), \end{cases} \\ (1t): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0, \kappa_t, \kappa_1, \kappa_\infty), \\ t \mapsto \frac{1}{t}, \\ (q, p) \mapsto \left(\frac{q}{t}, tp\right), \end{cases} \\ (0\infty)(1t): & \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_\infty, \kappa_t, \kappa_1, \kappa_0), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(\frac{t}{q}, -\frac{q(qp+\rho)}{t}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

(замена переменных осуществляется формулами $\tilde{x} = 1 - x$, x/t и t/x соответственно; при этом $\tilde{b}_0 = b_0$, b_0/t^2 и $(t(q-1)(q-t) - tb_0)/q^2$ соответственно).

Вместе со сменами знаков мы уже получаем линейную группу порядка 384, действующую на пространстве модулей.

5.8.3. *Элементарные преобразования.* Пусть $\mathcal{F}$ – слоение Риккати на $\mathbb{F}_1$, представляющее точку из $\mathcal{M}_t^\kappa$. Элементарное преобразование с центром в одной из особых точек (например, s_0) слоения $\mathcal{F}$ дает новое слоение Риккати

с простыми полюсами над $0, 1, t, \infty$ и со сдвинутыми параметрами $\tilde{\kappa} = (\kappa_0 - 1, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty)$. Получаемое при этом расслоение есть либо тривиальное расслоение $\mathbb{F}_0$, либо поверхность Хирцебруха $\mathbb{F}_2$. Но после двух (или вообще четного числа) таких элементарных преобразований мы возвращаемся на $\mathbb{F}_1$. Действительно, поскольку тип n поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_n$ сдвигается на ± 1 при каждом элементарном преобразовании, нам надо лишь исключить возможность того, что (например)

$$(\mathbb{F}_1, \mathcal{F}) \underset{\text{elm}_{s_0}}{-} \underset{\text{elm}_{s_0}}{-} \succ (\mathbb{F}_2, \mathcal{F}') \underset{\text{elm}_{s_\infty}}{-} \underset{\text{elm}_{s_\infty}}{-} \succ (\mathbb{F}_3, \mathcal{F}'') .$$

Это означало бы, что каждое из двух последовательных элементарных преобразований имеет центр, лежащий на отрицательном сечении. В таком случае отрицательное сечение σ_{-3} поверхности $\mathbb{F}_3$ является собственным преобразованием сечения σ_{-1} . Поскольку σ_{-1} не $\mathcal{F}$ -инвариантно, получаем, что σ_{-3} не $\mathcal{F}''$ -инвариантно. Но тогда предположение 26 (см. п. 8.8) дает отрицательную кратность касания: противоречие. Итак, мы определили бирегулярное преобразование

$$\text{elm}_{s_\infty} \circ \text{elm}_{s_0} : \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0 - 1, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty - 1), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}). \end{cases}$$

Опуская громоздкую формулу для этого преобразования, отметим, что $\tilde{q}$ задается единственной точкой касания слоения $\mathcal{F}$ и единственного сечения σ поверхности $\mathbb{F}_1$, имеющего индекс самопересечения $+1$ и проходящего через s_0 и s_∞ .

Вообще, для любой четверки целых чисел

$$\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_t, n_\infty) \in \mathbb{Z}^4, \quad n = n_0 + n_1 + n_t + n_\infty \in 2\mathbb{Z},$$

имеем бирегулярное преобразование

$$\text{elm}_t^{\mathbf{n}} : \begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0 - n_0, \kappa_1 - n_1, \kappa_t - n_t, \kappa_\infty - n_\infty), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto (\tilde{q}, \tilde{p}), \end{cases}$$

где

$$\text{elm}_t^{\mathbf{n}} = \text{elm}_{s_0}^{n_0} \circ \text{elm}_{s_1}^{n_1} \circ \text{elm}_{s_t}^{n_t} \circ \text{elm}_{s_\infty}^{n_\infty}$$

с учетом соглашения о том, что $\text{elm}_{s_i}^{n_i} := \text{elm}_{s_i'}^{-n_i}$ при $n_i < 0$. Как и выше, существует единственное сечение σ с индексом самопересечения $\sigma \cdot \sigma = n - 1$ и кратностью касания n_i с нашим слоением в каждой точке s_i ; дополнительная точка касания $\mathcal{F}$ и σ находится при $x = \tilde{q}$.

Итак, получаем бесконечную аффинную группу преобразований, которую обозначим через H .

5.8.4. *Симметрия Окамoto.* Для порождения полной группы G бигеулярных преобразований, описанной в [32], требуется еще одна симметрия

$$\begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0 + \rho, \kappa_1 + \rho, \kappa_t + \rho, \kappa_\infty + \rho), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(q + \frac{\rho}{p}, p\right) \end{cases}$$

(обозначаемая в [19] через s_2) или одна из сопряженных к ней. До сих пор неизвестна геометрическая интерпретация этой симметрии при рассмотрении $\mathcal{M}^\kappa$ как пространства модулей связностей ранга 2 (или слоений Риккати). Чтобы вывести полную группу Окамoto из естественных преобразований связностей, приходится рассматривать изомонодромные деформации связностей ранга 3 (см. [26]) или выше (см. [19]).

Сопряжение указанной выше симметрии Окамoto посредством смены знака $(+, +, +, -)$, равное $s_2 s_1 s_2$ в обозначениях работы [19], имеет вид

$$\begin{cases} (\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) \mapsto (\kappa_0 + \rho + \kappa_\infty, \kappa_1 + \rho + \kappa_\infty, \kappa_t + \rho + \kappa_\infty, -\rho), \\ t \mapsto t, \\ (q, p) \mapsto \left(q + \frac{\rho + \kappa_\infty}{p}, p\right). \end{cases}$$

В величине $\tilde{q} = q + (\rho + \kappa_\infty)/p$ мы узнаем инвариант Ту подлежащего расслоения эллиптического поднятия (см. следствие 10).

5.9. Специальные конфигурации. Для частных значений параметров κ пространство модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$ содержит полные рациональные кривые (независимо от t). Они возникают из кривых на $\mathbb{F}_2$, не пересекающих отрицательное сечение и проходящих через s_i или s'_i для каждого значения $i = 0, 1, t, \infty$, и представляют собой либо множество приводимых связностей, либо множество связностей с ложной особой точкой. Оказывается, что других полных кривых в $\mathcal{M}_t^\kappa$ нет (см. [25]). В частности, таких кривых нет для κ общего положения. Приведем несколько примеров.

Пусть $\kappa_t = 1$ и слоение $\mathcal{F}$ имеет ложную особую точку при $x = t$. Тогда этот полюс исчезает после одного элементарного преобразования с центром s_t . Получаем слоение Риккати $\mathcal{F}_0$ гипергеометрического типа на $\mathbb{F}_0$ (не на $\mathbb{F}_1$ – по предложению 26), т. е. слоение с полюсами $0, 1, \infty$ и показателями $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty)$. Обратно, слоение $\mathcal{F}$ восстанавливается по $\mathcal{F}_0$ применением элементарного преобразования в любой точке слоя $x = t$. Это дает нам рациональное семейство слоений $\mathcal{F}$ (параметризованных слоем $x = t$). Соответствующая рациональная кривая C в пространстве модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$ задается уравнением

$$q(q-1)p^2 - ((q-1)\kappa_0 + q\kappa_1)p + \frac{(\kappa_0 + \kappa_1)^2 - \kappa_\infty^2}{4}.$$

Это единственная кривая C на $\mathbb{F}_2$, удовлетворяющая следующим условиям:

- отображение $q: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет степень 2;
- C не пересекает отрицательное сечение σ_{-2} ;
- C пересекает слой $q = i$ как в точке s_i , так и в точке s'_i при $i = 0, 1, \infty$;

- C дважды пересекает слой $q = t$ в точке s_t ;
- C имеет особенность в точке s_t : она состоит там из двух гладких ветвей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы вычислить это семейство в пространстве модулей, начнем со слоения Риккати $\mathcal{F}_0$, которое можно нормировать к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 - (\kappa_0 + x\kappa_\infty)y + cx}{x(x-1)}, \quad c = \frac{\kappa_1^2 - (\kappa_0 + \kappa_\infty)^2}{4}$$

(мы исключаем здесь некоторые приводимые случаи), и выберем параболическую структуру $s_t = (t, \lambda)$ над $x = t$. Горизонтальное сечение $y = \lambda$ переводится элементарным преобразованием $\text{elm}_{s_t}: \mathbb{F}_0 \dashrightarrow \mathbb{F}_1$ в отрицательное сечение. Соответствующее значение $q = (\lambda^2 + \kappa_0\lambda)/(c - \kappa_\infty\lambda)$ отвечает единственной точке касания $\mathcal{F}_0$ и $y = \infty$. Мы уже отмечали, что отображение $\lambda \mapsto q(\lambda)$ имеет степень 2. Заметим теперь, что слоение $\mathcal{F} = \text{elm}_{s_t}\mathcal{F}_0$ определяет точку над s_0 (соответственно над s'_0) в пространстве модулей $\mathcal{M}_t^\kappa$ тогда и только тогда, когда параболическая структура $s_t = (t, \lambda)$ и особая точка s'_0 (соответственно s_0) слоения $\mathcal{F}_0$ лежат на одном горизонтальном сечении, а именно на $y = \lambda$. Действительно, указанное сечение переходит при elm_{s_t} в отрицательное сечение поверхности $\mathbb{F}_1$. Таким образом, кривая C проходит по одному разу через каждую из точек s_0, s'_0 . То же самое верно и над точками $q = 1$ и ∞ . Наконец, если особая точка s_t – ложная для $\mathcal{F}_1$, то она не может лежать на отрицательном сечении σ_{-1} ; в противном случае применение elm_{s_t} дало бы гипергеометрическое слоение на $\mathbb{F}_2$, имеющее по предложению 26 касание кратности -1 с отрицательным сечением, что невозможно. Теперь мы можем вывести уравнение кривой C . Так как C имеет степень 2 и не пересекает отрицательное сечение поверхности $\mathbb{F}_2$, то уравнение C имеет вид $P^2 + A(q)P + B(q)$, где A и B – полиномы степеней 2 и 4 соответственно. Условие прохождения C через все точки s_i и s'_i , кроме s'_t , определяет не C , а целый пучок кривых; все они гладки и вертикальны в точке s_t (и потому выпадают из $\mathcal{M}_t^\kappa$ над этой точкой), кроме одной, которая имеет в точке s_t особенность с нормальными пересечениями. Доказательство свойств кривой C закончено.

В случае, когда $\kappa_t = 2$, слоения $\mathcal{F}$ с ложными особыми точками при $x = t$ получаются так. Возьмем гипергеометрическое слоение $\mathcal{F}_0$ на $\mathbb{F}_1$ с показателями $(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_\infty)$, выберем параболическую структуру s_t при $x = 0$ и дважды применим преобразование elm_{s_t} . Мы снова получаем рациональную кривую на пространстве модулей, которая проектируется на кривую $C \subset \mathbb{F}_2$, обладающую следующими свойствами:

- отображение $q: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет степень 4;
- C не пересекает отрицательное сечение σ_{-2} ;
- C пересекает слой $q = i$ как в точке s_i , так и в точке s'_i при $i = 0, 1, \infty$;
- C пересекает слой $q = t$ трижды в точке s_t и один раз в точке s'_t .

5.10. Теорема трансверсальности Болибруха–Ю. Замечательный результат А. А. Болибруха [9, п. 5.2, предложение 5.6] гласит в нашем контексте, что изомонодромная деформация $t \mapsto (E_t, \nabla_t) \in \mathcal{M}_t^\theta$ неприводимой $\text{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности определена “в основном” на тривиальном расслоении.

ТЕОРЕМА 12 (Болибрух). Пусть $t \mapsto (E_t, \nabla_t) \in \mathcal{M}_t^\theta$ – локальная изомонодромная деформация. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- вне дискретного подмножества пространства параметров T подлежащее расслоение E_t тривиально;
- $E_t \equiv \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ и дестабилизирующий подпучок $\mathcal{O}(1)$ является ∇_t -инвариантным.

В частности, если связность (E_t, ∇_t) неприводима, то имеет место первый случай. А. А. Болибрух доказал более общий результат для некоторых логарифмических связностей произвольного ранга на сфере Римана. Случай ранга 2 в полной общности (для регулярных или иррегулярных $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей на произвольной римановой поверхности) был рассмотрен В. Ю [15]. Нам понадобится такое следствие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть $t \mapsto (E_t, \nabla_t) \in \mathcal{M}_t^\theta$ – локальная изомонодромная деформация $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности. Предположим, что расслоение E_t тривиально и некоторые собственные прямые l_i и l_j , $i, j \in \{0, 1, t, \infty\}$, совпадают друг с другом в ходе всей деформации. Тогда связность (E_t, ∇_t) приводима: постоянное линейное расслоение $L_t \subset E_t$, определяемое прямыми $l_i = l_j$, является ∇_t -инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя $\text{elm}_{s_i} \circ \text{elm}_{s_j}$ к нашей деформации, получим изомонодромную деформацию на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_2$, что по теореме 12 возможно, только если связность приводима. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Справедливо следующее более общее утверждение. Рассмотрим неприводимое слоение Риккати $\mathcal{F}_0$ из $\mathcal{M}_t^\theta$, определенное на тривиальном расслоении $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Сечения σ_d с индексом самопересечения $d \geq 0$ (d четно) образуют $(d+1)$ -мерное семейство. Гладкая кривая σ_d имеет ровно $d+2$ точек касания с $\mathcal{F}_0$ с учетом кратностей. Утверждается, что множество точек касания может лежать целиком в слоях над $\{0, 1, t, \infty\}$ только для изолированных точек из пространства параметров T . При $d = 0$ это дает предыдущее предложение. При $d = 2$ получаем, например, что все четыре элемента параболической структуры не могут лежать на кривой бистепени $(1, 1)$ в течение всей деформации.

§ 6. Связности Ламе

Цель этого параграфа – дать грубое описание пространства модулей связностей Ламе с точностью до бирегулярных преобразований расслоений, пользуясь соответствием Римана–Гильберта. Зафиксируем эллиптическую кривую

$$X: \{y^2 = x(x-1)(x-t)\}.$$

Ниже будет указано, какие связности Ламе инвариантны относительно эллиптической инволюции

$$\sigma: X \rightarrow X; \quad (x, y) \mapsto (x, -y).$$

В § 7 мы увидим, что σ -инвариантные связности Ламе опускаются посредством двулистного накрытия

$$\pi: X \rightarrow \mathbb{P}^1; \quad (x, y) \mapsto x$$

до логарифмических связностей с полюсами в четырех точках разветвления $i = 0, 1, t, \infty$.

Пусть (E, ∇) – связность Ламе на эллиптической кривой X , имеющая, таким образом, простой полюс в точке ω_∞ . Если показатель ϑ не целый, то связность можно привести к следующему матричному виду:

$$\nabla: W \mapsto dW - \Omega W, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \frac{\vartheta}{2} \frac{dz}{z} & 0 \\ 0 & -\frac{\vartheta}{2} \frac{dz}{z} \end{pmatrix},$$

где $z \in (\mathbb{C}, 0)$ – любая локальная координата на X в точке ω_∞ , а $W \in \mathbb{C}^2$ – надлежащая локальная голоморфная тривиализация расслоения E . С другой стороны, если $\vartheta \in \mathbb{Z}$ (скажем, $\vartheta = n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$), то полюс называется *резонансным* и матричная форма может быть сведена (локальным калибровочным преобразованием, как выше) к виду

$$\text{либо } \Omega = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \frac{dz}{z}, \quad \text{либо } \Omega = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & z^n \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \frac{dz}{z}. \quad (47)$$

В первом случае точка ω_∞ называется *ложной* особой точкой для ∇ (фактически регулярной при $n = 0$), а во втором – *логарифмической* особой точкой.

Связность ∇ регулярна на аффинной части $X^* = X \setminus \{\omega_\infty\}$ кривой X и наследует представление монодромии

$$\rho: \pi_1(X^*) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}),$$

которое корректно определено парой (E, ∇) с точностью до $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряжения. Зафиксируем петлю $\delta \in \pi_1(X^*)$, идущую в точку ω_∞ , обходящую ее один раз и возвращающуюся в исходную точку. Тогда матрица $\rho(\delta)$ называется *локальной монодромией* связности (E, ∇) *вокруг* точки ω_∞ . Она сопряжена к

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\vartheta} \end{pmatrix} \quad \left(\text{или } \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ в логарифмическом случае} \right).$$

Все это, очевидно, не зависит от выбора отмеченной точки в определении фундаментальной группы. Заметим, что ω_∞ является ложной особой точкой тогда и только тогда, когда локальная монодромия $\rho(\delta)$ равна $\pm I$, т. е. принадлежит центру группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$; это возможно только при $\vartheta \in \mathbb{Z}^*$.

6.1. Соответствие Римана–Гильберта. Для любого показателя $\vartheta \in \mathbb{C}$ имеем аналитическое отображение

$$\begin{aligned} RH: \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{связности Ламе на } X \\ \text{с показателем } \vartheta \end{array} \right\} / \sim &\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho: \pi_1(X^*) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}), \\ \mathrm{tr}(\rho(\delta)) = 2 \cos(\pi\vartheta) \end{array} \right\} / \sim, \\ (E, \nabla) &\mapsto \rho, \end{aligned}$$

которое ставит в соответствие каждой связности Ламе (рассматриваемой с точностью до голоморфного изоморфизма расслоений) ее представление монодромии (определенное с точностью до $SL(2, \mathbb{C})$ -сопряжения). Это отображение почти взаимно однозначно: оно сюръективно, а его сужение на множество всех связностей, не имеющих ложных особых точек (т.е. таких связностей, у которых $\rho(\delta) \neq \pm I$), инъективно.

Если (E, ∇) имеет ложную особую точку ω_∞ , причем $\vartheta = n \in \mathbb{Z}_{>0}$, то все горизонтальные сечения допускают мероморфное продолжение в точку ω_∞ . Те из них, которые голоморфны, содержатся в некотором линейном подрасслоении (скажем, L) расслоения E вблизи точки ω_∞ . В терминах нормальной формы (47), L есть постоянное линейное расслоение, порожденное вектором $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. За исключением очень специальных случаев, L не продолжается до линейного подрасслоения $L \subset E$ на всем X , а определено лишь локально в окрестности точки ω_∞ . Слой L в точке ω_∞ совпадает с собственной прямой матрицы-вычета, ассоциированной с положительным собственным значением $n/2$. Согласно соответствию Римана–Гильберта на проколотой кривой X^* , любые две связности Ламе с одинаковым представлением монодромии сопряжены друг с другом посредством калибровочного преобразования над X^* . Это сопряжение продолжается до глобального калибровочного преобразования тогда и только тогда, когда оно сопрягает соответствующие локальные линейные расслоения, определенные выше. Восстановить инъективность отображения Римана–Гильберта можно так. Рассмотрим преобразование монодромии ρ как действие фундаментальной группы $\pi_1(X^*, p)$ на пространстве $E_p \simeq \mathbb{C}^2$ ростков решений в отмеченной точке p . Тогда аналитическое продолжение локальных голоморфных решений из точки ω_∞ в отмеченную точку p вдоль (половины) пути δ определяет одномерное подпространство $L_p \subset E_p$. Иными словами, L_p получается аналитическим продолжением L (как ∇ -инвариантного линейного расслоения) вдоль δ . Связность Ламе (имеющая ложную особую точку) характеризуется парой

$$(\rho, L_p) \in \text{Hom}(\pi_1(X^*, p), SL(E_p)) \times \mathbb{P}(E_p)$$

с точностью до сопряжения:

$$(\rho, L_p) \sim (M^{-1}\rho M, M^{-1}L_p), \quad M \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Это – некий аналог параболической структуры для пространства представлений.

6.2. Пространство модулей Фрике. Напомним описание пространства модулей представлений, следуя Р. Фрике (см. [2]). Зафиксируем стандартные порождающие элементы $\alpha, \beta \in \pi_1(X^*)$ фундаментальной группы так, что их коммутатор $\delta := [\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ представляет собой, как и выше, обход один раз вокруг проколотой точки. Мы пренебрегаем отмеченной точкой, которая не играет никакой роли в наших рассуждениях. Представление ρ определяется образами порождающих элементов

$$A := \rho(\alpha) \quad \text{и} \quad B := \rho(\beta).$$

Кольцо полиномиальных функций на $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, инвариантных относительно $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряжения, порождается функциями

$$a := \mathrm{tr}(A), \quad b := \mathrm{tr}(B) \quad \text{и} \quad c := \mathrm{tr}(AB).$$

Например, след коммутатора $\delta = [\alpha, \beta]$ имеет вид

$$d := \mathrm{tr}([A, B]) = a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2,$$

откуда получаем, что

$$\rho \text{ приводимо} \iff a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 = 2.$$

Геометрический фактор пространства $\mathrm{Hom}(\pi_1(X_t^*), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}))$ по действию группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ сопряжением отождествляется с $\mathbb{C}^3$ посредством композиции

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\pi_1(X^*), \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})) &\rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^3, \\ \rho &\mapsto (A, B) \mapsto (a, b, c). \end{aligned}$$

Точнее (см. [33], [2]), если $a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 \neq 2$, то слой над (a, b, c) состоит из единственного класса $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряженности неприводимых представлений, заданного матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^{-1} \\ -\gamma & b \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \gamma + \gamma^{-1} = c.$$

Эта нормальная форма получается в любом базисе вида $(v, -\gamma B \cdot v)$, где v – собственный вектор произведения $A \cdot B$ с собственным значением γ . Она зависит только от выбора корня γ . Поэтому коммутатор имеет вид

$$[A, B] = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma^2 + 1}{\gamma^2} & \frac{a - b\gamma}{\gamma^2} \\ \frac{a\gamma - b}{\gamma} & \frac{1}{\gamma^2} \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением проверяется, что матрицы A и B указанного выше вида имеют общий собственный вектор тогда и только тогда, когда $d = 2$.

СЛЕДСТВИЕ 15. *Связность Ламе приводима тогда и только тогда, когда $\vartheta \in \mathbb{Z}$.*

Эллиптическая инволюция $\sigma: X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto (x, -y)$, действует на нашем пространстве модулей, переводя $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -класс, заданный матрицами (A, B) , в такой же класс, заданный (A^{-1}, B^{-1}) . В этом можно убедиться, выбрав неподвижную точку инволюции σ в качестве отмеченной точки фундаментальной группы. Следующая лемма – один из ключевых моментов нашей конструкции.

ЛЕММА 16. *Класс $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряженности стабилизируется эллиптической инволюцией σ тогда и только тогда, когда он состоит либо из неприводимых, либо из абелевых представлений. Иными словами, для всякой пары (A, B) , порождающей либо неприводимую, либо абелеву подгруппу группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, найдется матрица $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ такая, что*

$$M^{-1}AM = A^{-1} \quad \text{и} \quad M^{-1}BM = B^{-1}.$$

В неприводимом случае M единственна с точностью до знака и $\mathrm{tr}(M) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В $SL(2, \mathbb{C})$ выполнены равенства $\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr}(A)$ и

$$\text{tr}(A^{-1}B^{-1}) = \text{tr}(B^{-1}A^{-1}) = \text{tr}((AB)^{-1}) = \text{tr}(AB),$$

так что инволюция действует тривиально на факторе, т. е. на тройках (a, b, c) . Так как неприводимые $SL(2, \mathbb{C})$ -классы характеризуются соответствующими им тройками (a, b, c) , то они σ -инвариантны. Еще один способ доказать это использует то, что матрица M , указанная в утверждении леммы, должна переставлять оба собственных вектора каждой из матриц A, B . Ищем в $PSL(2, \mathbb{C})$ элемент $\bar{M}$, переставляющий соответствующие точки в $\mathbb{P}^1$, т. е. переводящий четверку (a_1, a_2, b_1, b_2) в четверку (a_2, a_1, b_2, b_1) . Поскольку двойные отношения этих четверок равны, такой элемент $\bar{M}$ существует. Более того, $\bar{M}$ – инволюция, так как его квадрат оставляет неподвижными указанные четыре точки. Поэтому $\text{tr}(M) = 0$. Надо отдельно рассмотреть вырожденные случаи, когда $a_1 = a_2$ и/или $b_1 = b_2$. Мы опускаем эти рассуждения. В приводимом случае мы имеем, например, $a_1 = b_1$ и $\bar{M}$ существует тогда и только тогда, когда $a_2 = b_2$, откуда вытекает абелевость. Наконец, σ меняет местами верхнетреугольные и нижнетреугольные $SL(2, \mathbb{C})$ -представления, но стабилизирует диагональные. Лемма доказана.

Если матрицы A и B записаны в указанной выше нормальной форме, то матрица M из леммы задается, с точностью до знака, формулой

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} & \frac{a - b\gamma}{2\gamma} \\ \frac{a\gamma - b}{2} & -\frac{\gamma^2 - 1}{2\gamma} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Подытожим наше обсуждение нерезонансного случая.

СЛЕДСТВИЕ 17. Пусть X – эллиптическая кривая и $\vartheta \notin \mathbb{Z}$. Тогда связности Ламе на X с показателем ϑ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками гладкой аффинной гиперповерхности

$$S_d := \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3; a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 = d\}, \quad d = 2 \cos(\pi\vartheta).$$

Они неприводимы и σ -инвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти связности неприводимы ($\vartheta \notin \mathbb{Z}$) и не имеют ложных особых точек. Поэтому отображение Римана–Гильберта инъективно и сделанные утверждения вытекают из леммы 16. Следствие доказано.

6.3. Резонансные случаи. Дополним картину изучением случая резонансных параметров $\vartheta \in \mathbb{Z}$.

6.3.1. $\vartheta \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$. Представление монодромии неприводимо и характеризуется соответствующей тройкой (a, b, c) . Локальная монодромия вокруг точки ω_∞ унипотентна, имеет двукратное собственное значение -1 и задается коммутатором

$$[A, B] = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + \gamma^2 - abc & \gamma^{-2}(a - b\gamma) \\ a - b\gamma^{-1} & \gamma^{-2} \end{pmatrix}, \quad \gamma + \gamma^{-1} = c.$$

Имеем $\text{tr}([A, B]) = a^2 + b^2 + c^2 - abc - 2 = -2$ и $[A, B] = -I$ в точности тогда, когда $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ есть единственная особая точка поверхности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Связности Ламе с показателем $\vartheta \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$, имеющие логарифмическую особую точку, находятся во взаимно однозначном соответствии с гладкими точками аффинной гиперповерхности Маркова*

$$S_{-2} = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3; a^2 + b^2 + c^2 - abc = 0\}.$$

Они неприводимы и σ -инвариантны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО совпадает с доказательством следствия 17.

При $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ образ представления монодромии есть группа диэдра порядка 8 (т. е. кватернионная),

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

а особая точка ω_∞ изучаемой связности – ложная: $[A, B] = -I$. В этом случае связности Ламе не характеризуются своим представлением монодромии, что ясно из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Связности Ламе над особой точкой $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{P}^1$. Они имеют одно и то же представление монодромии в диэдральной подгруппе порядка 8 группы $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ и потому неприводимы. Все они σ -инвариантны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связность Ламе определяется своим представлением монодромии ρ , действующим на пространстве решений $E_\rho \simeq \mathbb{C}^2$, и прямой $L_\rho \subset E_\rho$, отвечающей решениям, голоморфным в точке ω_∞ после аналитического продолжения вдоль δ . Иными словами, связность определяется тройкой

$$(A, B, L) \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \text{SL}(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1.$$

Другая тройка $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{L})$ задает связность, калибровочно эквивалентную первой, тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{L}) = (M^{-1}AM, M^{-1}BM, M^{-1}L), \quad M \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

Представление монодромии, будучи в этой ситуации неприводимым, имеет централизатор $\pm I$, действующий тривиально на $\mathbb{P}^1$: если представление монодромии (A, B) фиксировано, то классы калибровочной эквивалентности связностей находятся во взаимно однозначном соответствии с $\mathbb{P}^1 \supset L$.

Легко проверяется, что действие инволюции σ на связностях Ламе индуцирует следующее действие на соответствующих тройках:

$$\sigma: (A, B, L) \mapsto (A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}L).$$

Оказывается, что при $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ (и, например, при $\gamma = i$) матрица M из леммы 16 (см. (48)) имеет вид

$$M = A \cdot B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

и сопрягает $\sigma(A, B, L)$ с (A, B, L) , тем самым давая неожиданное доказательство σ -инвариантности соответствующей связности. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 20. На самом деле пространство модулей связностей Ламе с фиксированным показателем $\vartheta \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ можно рассматривать как минимальное разрешение поверхности $S_{-2}: \{a^2 + b^2 + c^2 - abc = 0\}$, полученное однократным раздутием особой точки $(0, 0, 0)$, причем исключительный дивизор отвечает связностям с ложной особой точкой, рассмотренным в предложении 19. Это немедленно вытекает из полученного в [25] аналогичного результата для связностей над $\mathbb{P}^1$ после нашей конструкции спуска. Приведем также следующее прямое доказательство. Над гладкой частью аффинной поверхности S_{-2} определено одномерное подпространство $L_p \subset E_p$ всех решений, голоморфных в точке ω_∞ после аналитического продолжения вдоль δ . Пользуясь локальной моделью (47) в логарифмическом случае, можно проверить, что L_p совпадает с собственным пространством локальной монодромии $[A, B]$, а именно,

$$L = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} \gamma^2 + 1 \\ -a\gamma^2 + b\gamma \end{pmatrix}.$$

Исключительный дивизор поверхности S_{-2} задается уравнением $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ в однородных координатах $(a : b : c)$ и допускает параметризацию

$$\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2; \quad s \mapsto (i(s^2 + 1) : s^2 - 1 : 2s).$$

Легко проверяется, что прямая L_p стремится к $\mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$ при стремлении представления ρ к точке s в указанной выше параметризации.

6.3.2. $\vartheta \in 2\mathbb{Z}$. В этом случае в пространствах модулей как представлений, так и связностей наблюдается ряд нехаусдорфовых явлений. Хаусдорфов фактор задается аффинной гиперповерхностью Кэли

$$S_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3; a^2 + b^2 + c^2 - abc = 4\}.$$

Особые точки поверхности S_2 суть

$$(a, b, c) = (2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2) \text{ и } (-2, -2, 2).$$

Они играют одинаковую роль в том смысле, что переходят друг в друга при смене знака образующих:

$$(A, B), (A, -B), (-A, B) \text{ и } (-A, -B).$$

Над каждой гладкой точкой $(a, b, c) \in S_2$ имеются три различных класса $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряженности представлений, а именно:

$$(A, B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \lambda \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & \mu \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \lambda & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ \mu & \beta^{-1} \end{pmatrix} \right) \\ \text{(настоящие верхне- и нижнетреугольные) и} \\ \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \right), \quad \text{где} \quad \begin{cases} \alpha + \alpha^{-1} = a, \\ \beta + \beta^{-1} = b, \\ \alpha\beta + (\alpha\beta)^{-1} = c. \end{cases}$$

В треугольных случаях можно выбирать λ и μ произвольно при условии, что $[A, B] \neq I$, т. е. $b\lambda + a\mu \neq 0$.

Каждое из двух треугольных представлений отвечает единственной связности Ламе (с логарифмической особой точкой). Они переходят друг в друга при σ и, тем самым, не являются σ -инвариантными. Пространство модулей таких треугольных связностей – это двухлистное накрытие гладкой части S_2^* поверхности S_2 , два листа которого меняются местами при обходе каждой из четырех особых точек.

При $\vartheta = 0$ диагональное представление отвечает единственной (регулярной) связности Ламе и эта связность σ -инвариантна.

При $\vartheta \neq 0$ связности Ламе, лежащие над диагональным представлением, имеют ложную особую точку. Есть ровно три класса эквивалентности таких связностей, отвечающие следующим способам выбора линейного расслоения L (см. доказательство предложения 19):

$$\mathbb{P}^1 \ni L = (1 : 0), (0 : 1) \text{ или } (1 : 1)$$

(всякий выбор $L = (1 : s)$, $s \in \mathbb{C}^*$, эквивалентен $L = (1 : 1)$). Инволюция σ переставляет первые две связности, но оставляет на месте “общую” третью: в обеих ситуациях достаточно выбрать матрицу

$$M = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^{-1} \\ i\gamma & 0 \end{pmatrix}$$

(см. опять доказательство предложения 19). Между прочим, множество связностей Ламе с диагональной монодромией распадается в объединение еще одного двулистного накрытия поверхности S_2^* , имеющего инволюцию Галуа σ , и отдельного экземпляра S_2^* , на котором σ действует тривиально.

Наконец, над каждой гладкой точкой $(a, b, c) \in S_2^*$ имеется ровно пять связностей Ламе (или три, если $\vartheta = 0$), только одна из которых σ -инвариантна.

Рассмотрим теперь одну из особых точек, например $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ (напомним, что все четыре особые точки играют одинаковую роль). Над этой точкой лежит бесконечно много различных классов $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -сопряженности, определенных унитарными парами

$$(A, B) = \left(\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad (r : s) \in \mathbb{P}^1,$$

и центральной парой $(A, B) = (I, I)$ (когда $(r, s) = (0, 0)$). При $\vartheta = 0$ эти представления биективно соответствуют связностям Ламе, которые при этом σ -инвариантны. При $\vartheta \neq 0$ для каждого унитарного представления имеется ровно две связности Ламе, заданные прямыми $L = (1 : 0)$ и $L = (s : 1)$ (все $s \in \mathbb{C}$ эквивалентны), а также еще одна связность Ламе с тривиальной монодромией; все они σ -инвариантны.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. При наличии ложной особой точки направление L , фиксированное заданием монодромии, порождает ∇ -инвариантное линейное расслоение (обозначим его также через L) положительной степени, откуда вытекает неустойчивость расслоения E . Действительно, в этом случае мы имеем

$\vartheta = \pm 2m$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, и ∇ -горизонтальные сечения расслоения L голоморфны и имеют нуль порядка m в точке ω_∞ . Тогда $\deg(L) = m$ в силу соотношения Фукса. Деформации такого рода не будут рассматриваться в настоящей работе.

Подытожим проведенную выше часть обсуждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *Если $\vartheta = 2m \in \mathbb{Z}$, то все полустабильные и σ -инвариантные связности Ламе имеют ложную особенность (или регулярны при $m = 0$) в точке ω_∞ , а их данные монодромии входят в следующий список:*

- $(A, B) = \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^{-1} \end{pmatrix} \right)$, где $(\alpha, \beta) \neq (\pm 1, \pm 1)$, и $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $m \neq 0$;
- $(A, B) = \left(\pm \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, где $(s, t) \in \mathbb{P}^1$, и $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ при $m \neq 0$.

Если $m = 0$, то сюда надо добавить также все четыре связности с монодромией $(A, B) = (\pm I, \pm I)$.

6.4. Неприводимые связности Ламе являются эллиптическими поднятиями. Проверим, что σ -инвариантные представления действительно получаются эллиптическим поднятием представлений сферы с четырьмя проколами. Точнее, изучим конструкцию эллиптического поднятия из § 2 с точки зрения представлений монодромии. Рассмотрим связность $(E, \nabla) \in \mathcal{M}_t^\theta$ с показателями

$$\theta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Ее представление монодромии

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

определяется матрицами $(M_0, M_1, M_t, M_\infty)$, удовлетворяющими соотношениям

$$(M_0)^2 = (M_1)^2 = (M_t)^2 = -I \quad \text{и} \quad \mathrm{tr}(M_\infty) = -2 \sin \frac{\pi \vartheta}{2}. \quad (49)$$

Поэтому монодромия ее эллиптического поднятия задается матрицами

$$A = M_0 M_1 \quad \text{и} \quad B = M_1 M_t$$

(см. детали в [34, § 2]), коммутатор которых равен

$$[A, B] = -M_0 (M_\infty)^2 M_0^{-1}$$

и имеет след

$$\mathrm{tr}([A, B]) = -\mathrm{tr}((M_\infty)^2) = 2 - (\mathrm{tr}(M_\infty))^2 = 2 \cos(\pi \vartheta).$$

Ясно, что это представление σ -инвариантно, так как для $M := \pm M_1$ мы получаем из (49), что

$$M^{-1} A M = A^{-1} \quad \text{и} \quad M^{-1} B M = B^{-1}.$$

Обратно, пусть пара (A, B) определяет монодромию некоторой σ -инвариантной связности Ламе. Тогда имеется матрица M , сопрягающая (A, B) с (A^{-1}, B^{-1}) . Из предыдущего видно, что матрицу M можно считать имеющей нулевой след: $M^2 = -I$. В этой ситуации непосредственно проверяется, что (A, B) есть эллиптическое поднятие следующего представления:

$$M_0 = -AM, \quad M_1 = M, \quad M_t = -MB \quad \text{и} \quad M_\infty = B^{-1}MA^{-1}.$$

Если монодромия (A, B) является неприводимой, то $(M_0, M_1, M_t, M_\infty)$ – единственная (с точностью до знака) четверка, эллиптическое поднятие которой задает представление (A, B) .

СЛЕДСТВИЕ 23. Пусть (E, ∇) – неприводимая связность Ламе с показателем $\vartheta \notin 2\mathbb{Z}$. Тогда существует единственная (с точностью до изоморфизма) связность $(\underline{E}, \underline{\nabla}) \in \mathcal{M}_t^\theta$ с показателями

$$\theta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\vartheta}{2} \right)$$

такая, что (E, ∇) является эллиптическим поднятием $(\underline{E}, \underline{\nabla})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим представление монодромии (A, B) связности (E, ∇) . Существует единственная четверка $(M_0, M_1, M_t, M_\infty)$, поднимаемая до представления (A, B) и такая, что $\text{tr}(M_\infty) = -2\sin(\pi\vartheta/2)$ (надо правильно выбрать знак матрицы M и, тем самым, всей четверки). Допустим, что выполнено условие нерезонансности $\vartheta \notin \mathbb{Z}$. Согласно соответствию Римана–Гильберта существует единственная (с точностью до изоморфизма) связность $(\underline{E}, \underline{\nabla}) \in \mathcal{M}_t^\theta$ с предписанной монодромией и показателями. По построению эллиптическое поднятие связности $(\underline{E}, \underline{\nabla})$ должно иметь тот же показатель ϑ и то же представление голономии (A, B) , что и (E, ∇) . Тогда, согласно свойству единственности при соответствии Римана–Гильберта, эллиптическое поднятие связности $(\underline{E}, \underline{\nabla})$ должно быть изоморфно (E, ∇) , что и доказывает утверждение следствия в нерезонансном случае. При $\vartheta \in \mathbb{Z} \setminus 2\mathbb{Z}$ то же самое доказательство проходит в случае, когда особая точка – логарифмическая (т.е. имеет бесконечную монодромию). Если же полюс связности (E, ∇) является ложной особой точкой, то надо использовать параболическую структуру для восстановления инъективности соответствия Римана–Гильберта. Не останавливаясь на деталях, отметим лишь, что ключевой шаг доказательства содержится именно в предложении 19.

§ 7. Доказательство теоремы 1

Приведем детали доказательства теоремы 1. Пусть $t \mapsto (E_t, \nabla_t)$ есть изомодромная деформация неприводимой связности Ламе с показателем ϑ . Согласно следствию 23 она является эллиптическим поднятием некоторой изомодромной деформации $t \mapsto (\underline{E}_t, \underline{\nabla}_t) \in \mathcal{M}_t^\theta$, где $\theta = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2 + \vartheta/2)$. По теореме Болибруха о трансверсальности (см. п. 5.10) найдется открытое множество параметров, для которых расслоение E_t тривиально, а параболические направления $(l_0, l_1, l_t, l_\infty)$ попарно различны; при этом они не лежат ни на

какой кривой степени $(1, 1)$. Тем самым, двойное отношение

$$c = \frac{l_t - l_0}{l_1 - l_0} \frac{l_1 - l_\infty}{l_t - l_\infty} \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, t, \infty\}$$

не специально и применимы предложение 7 и следствие 10, дающие явную формулу для инварианта Ту:

$$\lambda(E_t) = q + \frac{\rho + \kappa_\infty}{p},$$

где через $t \mapsto (p(t), q(t))$ обозначены инварианты связности $(\underline{E}_t, \underline{\nabla}_t)$. В частности, функция $\lambda(E_t)$ совпадает с симметрией Окамото $s_2 s_1 s_2$ для $q(t)$ (см. п. 5.8) и, значит, сама является решением уравнения Пенлеве VI с параметрами

$$\tilde{\kappa} = \left(\frac{\vartheta}{4}, \frac{\vartheta}{4}, \frac{\vartheta}{4}, \frac{\vartheta}{4} \right).$$

§ 8. Приложение: плоские логарифмические $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности

Здесь мы напомним основные сведения о плоских логарифмических связностях. Более подробное изложение можно найти в [14], [35], [30], [15].

Мероморфной связностью ранга r над гладким комплексным многообразием X называется пара (E, ∇) , где E – локально тривиальное голоморфное векторное расслоение ранга r над X , а ∇ – $\mathbb{C}$ -линейный морфизм пучков,

$$\nabla: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}(K) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{E}$$

(через $\mathcal{E}$ обозначается пучок мероморфных сечений расслоения E , а через $\mathcal{M}(K)$ – пучок мероморфных сечений канонического расслоения K), удовлетворяющий правилу Лейбница:

$$\nabla(fv) = df \otimes v + f\nabla(v)$$

для всех сечений f структурного пучка $\mathcal{O}$ и всех сечений v векторного расслоения E . С аналитической точки зрения, если E задано картами

$$U_i \times \mathbb{C}^r \ni (x, Y_i), \quad X = \bigcup_i U_i,$$

склеенными посредством функций перехода

$$Y_i = M_{i,j} Y_j, \quad M_{i,j} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}(U_i \cup U_j)),$$

то ∇ задается в этих тривиализующих картах набором дифференциальных операторов вида

$$Y_i \mapsto dY_i - \Omega_i Y_i, \quad \Omega_i \in \mathfrak{gl}(r, \mathcal{M}(K)(U_i)),$$

удовлетворяющих условиям совместности

$$\Omega_j = M_{i,j}^{-1} \Omega_i M_{i,j} + M_{i,j}^{-1} dM_{i,j}.$$

Именно эта аналитическая точка зрения принята в нашей статье. Мероморфные связности (E, ∇) рассматриваются с точностью до голоморфных изоморфизмов векторных расслоений.

8.1. Дивизор полюсов. Будем говорить, что ∇ имеет *полюс* в точке $x \in U_i \subset X$, если хотя бы один из элементов соответствующей матрицы Ω_i имеет полюс в точке x . *Порядок* такого полюса равен максимуму его порядков по всем матричным элементам. Легко проверить, что эти определения не зависят от выбора карты U_i и локальной тривиализации Y_i . *Дивизор полюсов* $D = (\nabla)_\infty$ связности ∇ – корректно определенный положительный дивизор на X .

8.2. Плоские связности и представление монодромии. *Горизонтальным сечением* (или решением) связности (E, ∇) называется любое сечение v расслоения E со свойством $\nabla(v) = 0$. В каждой карте горизонтальные сечения $Y_i(x)$ записываются как решения пфаффовой системы $dY_i = \Omega_i Y_i$. Связность (E, ∇) называется *плоской* (или интегрируемой), если в каждой карте выполнено равенство

$$d\Omega_i + \Omega_i \wedge \Omega_i = 0$$

(достаточно его выполнения в одной карте). Это эквивалентно существованию базиса $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r)$ горизонтальных голоморфных сечений в каждой точке регулярности связности ∇ . Иными словами, связность плоская тогда и только тогда, когда она локально тривиальна в каждой точке регулярности, т. е. записывается формулой $Y_i \mapsto dY_i$ ($\Omega_i \equiv 0$) в надлежащей локальной тривиализации расслоения E . Базис $\mathcal{B}$ допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути на $X \setminus D$ (оно осуществляется склеиванием локальных тривиализаций связности ∇ с помощью функций перехода расслоения). Таким образом, фиксируя точку $x_0 \in X \setminus D$ и базис $\mathcal{B}$ указанного вида над окрестностью точки x_0 , мы получаем *представление монодромии* связности (E, ∇) относительно $\mathcal{B}$, т. е. гомоморфизм

$$\rho_{\nabla, \mathcal{B}}: \pi_1(X \setminus D, x_0) \rightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{C}); \quad \gamma \mapsto M_\gamma,$$

определяемый следующим образом. Если $\mathcal{B}_\gamma$ – новый базис горизонтальных сечений в окрестности точки x_0 , полученный аналитическим продолжением вдоль γ , то матрица M_γ задается равенством

$$\mathcal{B}_\gamma = \mathcal{B} M_\gamma.$$

При замене базиса горизонтальных сечений $\mathcal{B}$ на другой базис $\mathcal{B}' = M\mathcal{B}$, $M \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$, новое представление монодромии задается формулой

$$\rho_{\nabla, \mathcal{B}'}(\gamma) = M \cdot \rho_{\nabla, \mathcal{B}}(\gamma) \cdot M^{-1} \quad \forall \gamma \in \pi_1(X \setminus D, x_0).$$

Тем самым, представление монодромии определяется связностью ∇ однозначно с точностью до $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ -сопряжения. Мы будем использовать обозначение ρ_∇ для любого представителя указанного класса сопряженности.

8.3. Плоские логарифмические связности. Плоская связность называется *логарифмической*, если она имеет только простые полюсы (т. е. дивизор D приведен) и матрица связности Ω в каждой карте такова, что ее дифференциал $d\Omega$ также имеет только простые полюсы. Последнее условие эквивалентно тому, что в окрестности каждой гладкой точки дивизора полюсов D наша связность имеет структуру произведения: найдутся локальные координаты

$(x_1, \dots, x_n)$ на X и локальная тривиализация Y_i такие, что дивизор D задается равенствами $x_2 = \dots = x_n = 0$, а матрица связности зависит только от одного переменного $x := x_1$. Поэтому класс $GL(r, \mathbb{C})$ -сопряженности матрицы-вычета постоянен вдоль каждой неприводимой компоненты дивизора D и корректно определены *собственные значения* $\{\theta_1, \dots, \theta_r\}$ нашей связности в каждом полюсе, т. е. в каждой компоненте дивизора D . Полюс называется *резонансным*, если существуют собственные значения, отличающиеся на целое число: $\theta_i - \theta_j \in \mathbb{Z}$, $i \neq j$. В каждой гладкой точке нерезонансного полюса матрицу связности можно привести к ее главной части

$$\Omega = \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_r \end{pmatrix} \frac{dx}{x}.$$

В резонансном случае для каждой пары $\theta_i - \theta_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ можно привести (i, j) -й элемент матрицы Ω к виду резонансного монома $c \cdot x^{\theta_i - \theta_j} \cdot \frac{dx}{x}$. Для каждой неприводимой компоненты D_j дивизора D зафиксируем путь δ_j , лежащий в $X \setminus D$ и соединяющий отмеченную точку x_0 с какой-либо гладкой точкой дивизора D_j . Рассмотрим петлю γ_j в $X \setminus D$, начинающуюся в точке x_0 , подходящую очень близко к D_j вдоль пути δ_j , обходящую один раз вокруг D_j и возвращающуюся в точку x_0 по δ_j^{-1} . Класс сопряженности матрицы $\rho(\gamma_j)$ не зависит от сделанных выборов и называется *локальной монодромией* связности (E, ∇) вокруг компоненты D_j ; собственные значения имеют вид $\{e^{2i\pi\theta_1}, \dots, e^{2i\pi\theta_r}\}$. Если локальная монодромия диагонализуема, то и матрица-вычет диагонализуема; обратное неверно.

8.4. След и подкрутка. Следом связности (E, ∇) называется мероморфная связность $(\det(E), \text{tr}(\nabla))$ ранга 1, где $\det(E)$ – детерминант расслоения E , заданный в предыдущих обозначениях функциями перехода $\det(M_{i,j})$, а $\text{tr}(\nabla)$ задается формулой $y_i \mapsto dy_i - \text{tr}(\Omega_i)y_i$. Связность (E, ∇) называется *бесследовой*, если ее следом является тривиальная связность $y \mapsto dy$ (на тривиальном расслоении). Дивизор полюсов следа ограничен дивизором полюсов исходной связности. *Подкрутка* связности (E, ∇) на связность (L, ζ) ранга 1 – это связность ранга r , заданная их тензорным произведением $(L \otimes E, \zeta \otimes \nabla)$. Если связность (L, ζ) задается на том же открытом покрытии U_i формулами $y_i \mapsto dy_i - \omega_i y_i$ с функциями перехода $y_i = m_{i,j} y_j$, то подкрутка задается матрицами $\Omega_i + \omega_i \cdot I$ с функциями перехода $Y_i = m_i \cdot M_i Y_j$. Имеем

$$\det(L \otimes E) = \det(L)^{\otimes r} \otimes \det(E) \quad \text{и} \quad \text{tr}(\zeta \otimes \nabla) = \text{tr}(\zeta)^{\otimes r} \otimes \text{tr}(\nabla).$$

След плоской (или логарифмической) связности сам является плоской (или логарифмической) связностью.

8.5. $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности. Для удобства обозначений ограничимся плоскими логарифмическими $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностями (т. е. бесследовыми ранга 2). Их представление монодромии принимает значения в $SL(2, \mathbb{C})$. Для каждой неприводимой компоненты D_j дивизора полюсов D показатель $\theta_j \in \mathbb{C}$ определяется (с точностью до знака) как разность собственных значений $\pm\theta_j/2$ матрицы-вычета. Соответствующая матрица локальной монодромии имеет

след $2 \cos(\pi\theta)$. Компонента D_j является резонансной тогда и только тогда, когда $\theta_j \in \mathbb{Z}$. В этом случае (скажем, если $\theta_j = n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$) матрица связности приводится к одной из следующих форм:

$$\text{либо } \Omega = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \frac{dx}{x}, \quad \text{либо } \Omega = \begin{pmatrix} \frac{n}{2} & x^n \\ 0 & -\frac{n}{2} \end{pmatrix} \frac{dx}{x}$$

в окрестности каждой гладкой точки дивизора D_j . Матрица локальной монодромии имеет соответственно вид

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\pm := (-1)^n$. В первом случае полюс называется *ложным* (при $n = 0$ полюса нет), а во втором – *логарифмическим*. В обоих случаях ограниченные решения

$$v = \begin{pmatrix} cx^{n/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C},$$

образуют одномерное подпространство в пространстве решений.

8.6. Соответствие Римана–Гильберта. *Соответствие Римана–Гильберта* определяется как отображение

$$\begin{aligned} RH: \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{плоские логарифмические} \\ \text{sl}(2, \mathbb{C})\text{-связности на } X \\ \text{с дивизором полюсов } D \\ \text{и показателем } \theta_j \text{ над } D_j \end{array} \right\} / \sim \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{представления} \\ \pi_1(X \setminus D, x_0) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C}), \\ \text{имеющие след } 2 \cos(\pi\theta_j) \\ \text{вокруг } D_j \end{array} \right\} / \sim, \\ (E, \nabla) \mapsto \rho, \end{aligned}$$

ставящее в соответствие каждой связности (рассматриваемой с точностью до голоморфного изоморфизма расслоений) ее представление монодромии (с точностью до сопряжения). Это отображение сюръективно при условии, что D имеет нормальные пересечения [14] или X имеет размерность ≤ 2 [30]. Оно также инъективно, если ни один из показателей не является ненулевым целым числом. Фактически инъективность теряется из-за ложных особых точек. Восстановить инъективность в резонансном случае можно путем следующего расширения понятия данных монодромии. Для каждого $\theta_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ рассмотрим в базисе решений $\mathcal{B}$ вблизи x_0 одномерное подпространство $L_j \subset \mathbb{C}^2$ тех решений, которые ограничены при аналитическом продолжении вдоль пути δ_j вокруг D_j . Полные данные монодромии, описывающие связность с точностью до изоморфизма, состоят из представления монодромии ρ и набора $L_j \in \mathbb{P}^1 (= \mathbb{P}(\mathbb{C}^2))$, где j пробегает множество J^{res} всех индексов, для которых $\theta_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Замена базиса $\mathcal{B}' = M\mathcal{B}$, $M \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$, дает новые данные монодромии

$$\rho' = M \cdot \rho \cdot M^{-1} \quad \text{и} \quad L'_j = M \cdot L_j \quad \forall j \in J^{\text{res}} \quad (50)$$

(имеется в виду стандартное действие $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^2$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. *Предположим, что D – приведенный дивизор с нормальными пересечениями, а D_j, γ_j, δ_j определены выше. Тогда множество плоских логарифмических $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связностей (E, ∇) с дивизором полюсов D и показателями θ_j вокруг D_j по модулю изоморфизмов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством пар $(\rho, (L_j)_{j \in J^{\text{res}}})$, где*

- гомоморфизм $\rho \in \text{Hom}(\pi_1(X \setminus D, x_0), \text{SL}(2, \mathbb{C}))$ таков, что $\text{tr}(\rho(\gamma_j)) = 2 \cos(\pi \theta_j)$ для всех $j \in J$,
- прямая $L_j \in \mathbb{P}^1$ является $\rho(\gamma_j)$ -инвариантной для всех $j \in J^{\text{res}}$, по модулю $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -действия, определенного в (50).

8.7. Приводимые $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ -связности. Линейное подрасслоение $L \subset E$ называется ∇ -инвариантным, если оно порождается ∇ -горизонтальными сечениями. В этом случае связность ∇ индуцирует мероморфную связность $\nabla|_L$ на L . Связность (E, ∇) называется *приводимой*, если она допускает такое инвариантное линейное расслоение, и *неприводимой* в противном случае. Если связность приводима, то ее представление монодромии также приводимо: группа монодромии имеет общий собственный вектор. В логарифмическом случае с дивизором полюсов, имеющим нормальные пересечения, верно и обратное: приводимость (E, ∇) эквивалентна приводимости ρ .

8.8. Проективные $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности и слоения Риккати. Мероморфная связность (E, ∇) ранга 2 индуцирует проективную $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связность $(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(\nabla))$ на X . Если линейная связность задается в тривиализующей карте Y_i формулой

$$Y_i \mapsto dY_i - \Omega_i Y_i, \quad \Omega_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix},$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ и δ_i – мероморфные 1-формы на U_i , то проективная связность $\mathbb{P}(\nabla)$ задается в проективной тривиализующей карте $\mathbb{P}(Y_i) = (1 : z_i) \in \mathbb{P}^1$ формулой

$$z_i \mapsto dz_i + \beta_i z_i^2 + (\alpha_i - \delta_i) z_i - \gamma_i.$$

Другая линейная связность (E', ∇') определяет ту же самую проективную связность тогда и только тогда, когда она является подкруткой (E, ∇) на некоторую мероморфную связность (L, ζ) ранга 1.

Обратно, если $H^2(X, \mathcal{O}^*) = 0$ (что всегда выполнено в случае, когда X – кривая), то всякое $\mathbb{P}^1$ -расслоение P является проективизацией $P = \mathbb{P}(E)$ некоторого векторного расслоения ранга 2. При этом из приведенных выше формул вытекает, что для каждой мероморфной проективной $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности на P и каждой мероморфной (линейной) связности ζ на линейном расслоении $L = \det(E)$ существует единственная мероморфная линейная связность ∇ на E , являющаяся поднятием проективной связности на $\mathbb{P}(E)$ с предписанным следом $\text{tr}(\nabla) = \zeta$ на $\det(E)$.

Если X – кривая, то имеются два топологических типа $\mathbb{P}^1$ -расслоений. А именно, топологический тип расслоения $\mathbb{P}(E)$ задается четностью числа $\deg(E) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Заметим, что топологическая тривиальность расслоения – это условие существования квадратного корня L из расслоения $\det(E) \in \text{Pic}(X)$. Иными словами, $\mathbb{P}^1$ -расслоение P топологически тривиально тогда и только тогда, когда P поднимается до $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -векторного расслоения: полагая

$E := E \otimes L^{\otimes(-2)}$, мы получаем $P = \mathbb{P}(E)$ с $\det(E) = \mathcal{O}$. Это $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ -поднятие зависит от выбора квадратного корня: оно определено с точностью до точек порядка два в $\mathrm{Pic}(X)$, и над кривой X рода g имеем 2^{2g} возможных поднятий. Наконец, всякая мероморфная проективная связность на P единственным образом поднимается до линейной $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$ -связности ∇ на E (с тем же дивизором полюсов).

Если X – кривая, то тотальное пространство расслоения $\mathbb{P}(E)$ представляет собой линейчатую поверхность $S \rightarrow X$, а уравнение Риккати $\mathbb{P}(\nabla) = 0$ задает на S слоение $\mathcal{F}$ с особенностями, листы которого – это графики горизонтальных сечений проективной связности. Пара $(S, \mathcal{F})$ называется *слоением Риккати* (см. [28]). Это слоение регулярно, трансверсально к линейчатой структуре вне дивизора полюсов связности ∇ . Над полюсами проективной связности $\mathbb{P}^1$ -слой равен дизъюнктивному объединению вертикального листа слоения $\mathcal{F}$ и одной или двух особых точек. А именно, для логарифмической связности ∇ (с простыми полюсами) особые точки отвечают собственным прямым линейной связности ∇ . Пусть θ и θ' – собственные значения ∇ в некотором полюсе $x \in X$. Обозначим соответствующие собственные прямые через l и l' . Показатель (или индекс Камачо–Сада вертикального листа) в особой точке l слоения Риккати равен $\kappa = \theta' - \theta$. Пусть $\sigma: X \rightarrow S$ – некоторое сечение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. Пусть X – кривая, $(S, \mathcal{F})$ – слоение Риккати с простыми полюсами над X , а σ – некоторое $\mathcal{F}$ -инвариантное сечение. Тогда

$$\sigma \cdot \sigma = \sum_i \kappa_i,$$

где κ_i – показатели особых точек, через которые проходит σ , а i пробегает множество всех инвариантных слоев слоения $\mathcal{F}$.

Это – частный случай формулы Камачо–Сада (см. [28, с. 37]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С точки зрения проективных связностей существует единственное поднятие (E, ∇) проективной связности такое, что ∇ -инвариантное линейное расслоение L , соответствующее сечению σ , тривиально и ∇ индуцирует тривиальную связность на L : собственные значения ∇ над полюсом i равны 0 и κ_i . Тогда из соотношений Фукса вытекает, что

$$\deg(E) = \sum_i \kappa_i,$$

и мы имеем

$$\sigma \cdot \sigma = \deg(E) - 2 \deg(L) = \deg(E).$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 26. Пусть X – кривая рода g , $(S, \mathcal{F})$ – слоение Риккати над X с n полюсами (с учетом кратностей), а $\sigma: X \rightarrow S$ – сечение, не являющееся $\mathcal{F}$ -инвариантным. Тогда число точек касания сечения σ со слоением (включая особые точки, лежащие на σ) задается формулой

$$\mathrm{tang}(\mathcal{F}, \sigma) = 2g - 2 + n + \sigma \cdot \sigma$$

(с учетом кратностей).

Это – частный случай предложения 2 на с. 37 книги [28].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем любое поднятие (E, ∇) проективной связности и применим лемму 6 к линейному расслоению $L \subset E$, соответствующему сечению σ . Предложение доказано.

8.9. Стабильность расслоений и связностей. Векторное расслоение ранга 2 над кривой X называется стабильным (соответственно полустабильным), если

$$\deg(E) - 2 \deg(L) > 0 \quad (\text{соответственно } \geq 0) \quad (51)$$

для всех линейных подрасслоений $L \subset E$. Это понятие инвариантно относительно проективной эквивалентности: $\mathbb{P}^1$ -расслоение $\mathbb{P}(E)$ стабильно (соответственно полустабильно), если

$$\sigma \cdot \sigma > 0 \quad (\text{соответственно } \geq 0)$$

для всех сечений $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}(E)$.

Аналогично, связность (E, ∇) называется стабильной (соответственно полустабильной), если

$$\deg(E) - 2 \deg(L) > 0 \quad (\text{соответственно } \geq 0) \quad (52)$$

для всех ∇ -инвариантных линейных подрасслоений $L \subset E$. Это понятие также инвариантно относительно проективной эквивалентности: проективная связность $(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(\nabla))$ стабильна (соответственно полустабильна), если

$$\sigma \cdot \sigma > 0 \quad (\text{соответственно } \geq 0)$$

для всех $\mathbb{P}(\nabla)$ -инвариантных сечений σ . В частности, неприводимая связность (E, ∇) стабильна, даже если расслоение E нестабильно. Однако расслоение E , снабженное полустабильной связностью, не может быть сколь угодно нестабильным: по лемме 6 индекс стабильности ограничен снизу величиной

$$\deg(E) - 2 \deg(L) \geq 2 - 2g - \deg(D),$$

где D – дивизор полюсов связности ∇ .

8.10. Мероморфные и элементарные калибровочные преобразования. Напомним, что такое *элементарное преобразование* векторного расслоения E ранга 2 над кривой X . Для каждой точки $p \in X$ и каждой прямой $l \in \mathbb{P}(E_p)$ в слое над точкой p обычно определяют два бирациональных преобразования расслоений

$$\text{elm}_{p,l}^+: E \dashrightarrow E^+ \quad \text{и} \quad \text{elm}_{p,l}^-: E \dashrightarrow E^-,$$

они определяются однозначно с точностью до последующей композиции с изоморфизмом расслоений. При сужении на проколотую кривую $X^* = X \setminus \{p\}$ оба преобразования $\text{elm}_{p,l}^\pm$ индуцируют изоморфизмы. В окрестности точки p они описываются следующим образом. Выберем локальную координату $x: U \rightarrow \mathbb{C}$ в точке p и тривиализацию $Y: E|_U \rightarrow \mathbb{C}^2$ такую, что прямая l натянута на

вектор $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В частности, этим индуцирована тривиализация сужения $E|_{X^*}$ на $U^* = U \setminus \{p\}$. Элементарные преобразования $\text{elm}_{p,l}^\pm$ можно определить с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc} E & & E|_{X^*} \longleftarrow & E|_{U^*} \xrightarrow{\sim} & U^* \times \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\text{id}} & U \times \mathbb{C}^2 \\ \text{elm}_{p,l}^\pm \downarrow & & \parallel \text{id} & \parallel \text{id} & \parallel \text{id} & \downarrow \phi^\pm \\ E^\pm & & E|_{X^*} \longleftarrow & E|_{U^*} \xrightarrow{\sim} & U^* \times \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\phi^\pm} & U \times \mathbb{C}^2 \end{array}$$

где

$$\phi^+(Y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} Y \quad \text{и} \quad \phi^-(Y) = \begin{pmatrix} 1/x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y.$$

Все три расслоения E и $E^\pm$ строятся приклеиванием локального тривиального расслоения $U \times \mathbb{C}^2$ к одному и тому же суженному расслоению $E|_{X^*}$, но посредством разных изоморфизмов расслоений (тождественного или $\phi^\pm$) над проколотой окрестностью U^* . Изоморфизмы $E|_{X^*} \rightarrow E^\pm|_{X^*}$, заданные этой конструкцией, продолжаются до бирациональных преобразований расслоений. Имеем

$$\det(E^\pm) = \det(E) \otimes \mathcal{O}(\pm[p]).$$

С другой стороны, $\text{elm}_{p,l}^\pm$ индуцируют одно и то же бирациональное преобразование $\mathbb{P}^1$ -расслоений

$$\text{elm}_{p,l}: P = \mathbb{P}(E) \dashrightarrow P',$$

поскольку ϕ^+ и ϕ^- совпадают как в $\text{PGL}(2, \mathcal{O}(U^*))$, так и в $\text{PGL}(2, \mathcal{M}(U))$.

Покажем, что наша конструкция зависит только от “параболической структуры” (p, l) , но не от выбора локальной тривиализации Y . При другом выборе

$$\tilde{Y} = M \cdot Y, \quad M \in \text{GL}(2, \mathcal{O}(U)),$$

надо проверить, что $\phi^+(\tilde{Y}) = \phi^+(M \cdot Y) = \tilde{M} \cdot \phi^+(Y)$, где $\tilde{M} \in \text{GL}(2, \mathcal{O}(U))$.

Действительно, если $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, то $\tilde{M} = \begin{pmatrix} a & b/x \\ xc & d \end{pmatrix}$; поскольку прямая l

должна быть натянута на $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, имеем $b(0) = 0$ и матрица $\tilde{M}$ голоморфна с $\det(\tilde{M}) = \det(M) \neq 0$.

Аналогичное вычисление показывает, что прямые $l^\pm \subset E_p^\pm$, определенные вектором $\phi^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ с помощью указанной выше конструкции, не зависят от сделанного выбора. Иными словами, если расслоение E снабжено параболической структурой $l \subset E_p$ над точкой p , то элементарные преобразования задают бирациональные преобразования

$$\text{elm}_p^\pm: (E, l) \dashrightarrow (E^\pm, l^\pm)$$

параболических расслоений, которые определены однозначно с точностью до левой и правой композиции с изоморфизмами параболических расслоений. Из приведенных выше вычислений также вытекает, что композиции

$$\text{elm}_p^\pm \circ \text{elm}_p^\mp: (E, l) \rightarrow (E', l')$$

являются изоморфизмами параболических расслоений. В этом смысле преобразования elm_p^+ и elm_p^- обратны друг к другу. Можно также рассмотреть общее параболическое расслоение (E, l) ранга 2 над (X, S) , где $S \subset X$ – конечное подмножество, а $l: S \rightarrow \mathbb{P}(E|_S)$ – сечение индуцированного проективного расслоения над S . Элементарные преобразования $\text{elm}_p^\pm: (E, l) \dashrightarrow (E^\pm, l^\pm)$ параболических расслоений над (X, S) определяются для $p \in S$, как выше (заметим, что $\text{elm}_{p, l(p)}^\pm$ индуцируют изоморфизмы параболических расслоений над (X^*, S^*)), а для $p \notin S$ – как тождественное преобразование. Наконец, для любых различных точек $p_1, p_2 \in S$ элементарные преобразования $\text{elm}_{p_1}^\pm$ и $\text{elm}_{p_2}^\pm$ коммутируют (с точностью до изоморфизмов параболических расслоений), так что можно определить $\text{elm}_{S'}^\pm$ для любого подмножества $S' \subset S$.

Опишем теперь действие элементарных преобразований на параболических связностях (E, ∇, l) , где (E, l) – параболическое расслоение над (X, S) во введенных выше обозначениях, а ∇ – мероморфная связность на E . Пусть $p \in S$. Обозначим через $\nabla^\pm$ прямой образ ∇ при элементарных преобразованиях $\text{elm}_p^\pm: (E, l) \dashrightarrow (E^\pm, l^\pm)$. Тогда $\nabla^\pm$ – мероморфные связности на $E^\pm$. В предыдущих обозначениях, если ∇ задается в координатах (x, Y) формулой

$$Y \mapsto dY - \Omega Y, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

то $\nabla^\pm$ задаются в локальных тривиализациях $Y^\pm = \phi^\pm(Y)$ расслоений $E^\pm$ формулами $Y^\pm \mapsto dY^\pm - \Omega^\pm Y^\pm$, где

$$\Omega^+ = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{x} \\ x\gamma & \delta + \frac{dx}{x} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Omega^- = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{dx}{x} & \frac{\beta}{x} \\ x\gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Если точка p не является полюсом ∇ , то $\nabla^\pm$ имеет логарифмический полюс в точке p . В предположении, что p – полюс порядка k для ∇ , возможны два случая:

- если $l(p)$ является собственным вектором связности ∇ в точке p (т. е. матрицы $x^k \Omega$ при $x = 0$), то $\nabla^\pm$ имеет полюс порядка k или $k - 1$ в точке p ;
- в противном случае $\nabla^\pm$ имеет полюс порядка $k + 1$ в точке p .

В любом случае $l^\pm(p)$ является собственным вектором связности $\nabla^\pm$ в точке p .

Для логарифмической связности ∇ связности $\nabla^\pm$ также являются логарифмическими тогда и только тогда, когда либо p – регулярная точка, либо p – полюс и $l(p)$ является собственной прямой для ∇ . Тогда координату Y можно выбрать так, что ∇ задается формулой $Y \mapsto dY - AY \frac{dx}{x}$ с

$$\Omega = \begin{pmatrix} \theta_1 \frac{dx}{x} & 0 \\ 0 & \theta_2 \frac{dx}{x} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\theta + n) \frac{dx}{x} & x^n \frac{dx}{x} \\ 0 & \theta \frac{dx}{x} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \theta \frac{dx}{x} & 0 \\ x^n \frac{dx}{x} & (\theta + n) \frac{dx}{x} \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\theta + n) & x^n \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ x^n & (\theta + n) \end{pmatrix}$$

(включая регулярный случай $A = 0$) с ограничением $n > 0$ в среднем случае. Тогда связности $\nabla^\pm$ задаются в координатах $Y^\pm = \phi^\pm(Y)$ формулами $Y^\pm \mapsto$

$dY^\pm - A^\pm Y^\pm \frac{dx}{x}$, где соответственно

$$A^+ = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 + 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\theta + n) & x^{n-1} \\ 0 & \theta + 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ x^{n+1} & (\theta + n + 1) \end{pmatrix},$$

$$A^- = \begin{pmatrix} \theta_1 - 1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\theta + n - 1) & x^{n-1} \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \theta - 1 & 0 \\ x^{n+1} & (\theta + n) \end{pmatrix}.$$

Подведем итог:

– Если точка p регулярна для ∇ , т. е. $A = 0$, то связности $\nabla^\pm$ – логарифмические с собственными значениями 0 и ± 1 .

– Если p – полюс и θ – собственное значение ∇ в точке p , то существует ровно одна собственная прямая $l(p)$, ассоциированная с θ , за исключением диагонального случая, когда $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Для бесследовых связностей ∇ последний случай невозможен и собственное подпространство, отвечающее каждому собственному значению, определяет параболическую структуру над p .

– Если $\{\theta_1, \theta_2\}$ – собственные значения связности ∇ в точке p , а $l(p)$ – собственная прямая, ассоциированная с θ_2 , то ∇^+ (соответственно ∇^-) имеет собственные значения $\{\theta_1, \theta_2 + 1\}$ (соответственно $\{\theta_1 - 1, \theta_2\}$). Связности $\nabla^\pm$ принадлежат диагональному типу тогда и только тогда, когда связность ∇ ему принадлежит. Параболическая структура $(E^\pm, \nabla^\pm, l^\pm)$ над p отвечает собственному значению θ_1 .

След связности меняется по формуле

$$\mathrm{tr}(\nabla^\pm) = \mathrm{tr}(\nabla) \otimes \zeta^\pm,$$

где ζ – единственная логарифмическая связность на $\mathcal{O}_X(\pm[p])$, имеющая простой полюс в точке p с вычетом ± 1 и тривиальную монодромию. Действительно, монодромия не меняется при бирациональном преобразовании расслоений.

Список литературы

1. H. Poincaré, “Sur les groupes des équations linéaires”, *Acta Math.*, **4** (1884), 201–312.
2. W. M. Goldman, “The modular group action on real $SL(2)$ -characters of a one-holed torus”, *Geom. Topol.*, **7** (2003), 443–486.
3. D. Gallo, M. Kapovich, A. Marden, “The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **151**:2 (2000), 625–704.
4. R. C. Gunning, “Special coordinate coverings of Riemann surfaces”, *Math. Ann.*, **170** (1967), 67–86.
5. A. Beilinson, V. Drinfeld, *Opers*, arXiv:math/0501398.
6. F. Loray, “Okamoto symmetry of Painlevé VI equation and isomonodromic deformation of Lamé connections”, *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B2**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007, 129–136.
7. B. Malgrange, “Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières”, *Mathematics and physics* (Paris, 1979/1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 401–426.
8. J. Palmer, “Zeros of the Jimbo, Miwa, Ueno tau function”, *J. Math. Phys.*, **40**:12 (1999), 6638–6681.

9. А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта”, *УМН*, **45**:2(272) (1990), 3–47; англ. пер.: А. А. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem”, *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 1–58.
10. N. J. Hitchin, “Twistor spaces, Einstein metrics and isomonodromic deformations”, *J. Differential Geom.*, **42**:1 (1995), 30–112.
11. F. Loray, M. van der Put, F. Ulmer, “The Lamé family of connections on the projective line”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6), **17**:2 (2008), 371–409.
12. M. F. Atiyah, “Vector bundles over an elliptic curve”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 414–452.
13. L. W. Tu, “Semistable bundles over an elliptic curve”, *Adv. Math.*, **98** (1993), 1–26.
14. P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, Lecture Notes in Math., **163**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1970, iii+133 pp.
15. V. Heu, “Stability of rank 2 vector bundles along isomonodromic deformations”, *Math. Ann.*, **344**:2 (2009), 463–490.
16. S. Kawai, “Isomonodromic deformation of Fuchsian projective connections on elliptic curves”, *Nagoya Math. J.*, **171** (2003), 127–161.
17. A. M. Levin, M. A. Olshanetsky, “Painlevé–Calogero correspondence”, *Calogero–Moser–Sutherland models* (Montréal, QC, 1997), CRM Ser. Math. Phys., Springer, New York, 2000, 313–332.
18. Yu. I. Manin, “Sixth Painlevé equation, universal elliptic curve, and mirror of $\mathbb{P}^2$ ”, *Geometry of differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **186**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 131–151.
19. M. Noumi, Y. Yamada, “A new Lax pair for the sixth Painlevé equation associated with $\widehat{\mathfrak{so}}(8)$ ”, *Microlocal analysis and complex Fourier analysis*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, 238–252.
20. D. Arinkin, S. Lysenko, “Isomorphisms between moduli spaces of $SL(2)$ -bundles with connections on $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, \dots, x_4\}$ ”, *Math. Res. Lett.*, **4**:2 (1997), 181–190.
21. F. Loray, M.-H. Saito, C. Simpson, “Foliations on the moduli space of rank two connections on the projective line minus four points”, *Geometric and differential Galois theories*, Sémin. Congr., **27**, Soc. Math. France, Paris, 2013, 117–170.
22. A. Zotov, “Elliptic linear problem for the Calogero–Inozemtsev model and Painlevé VI equation”, *Lett. Math. Phys.*, **67**:2 (2004), 153–165.
23. É. Picard, “Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables”, *J. Math. Pures et Appl.* (4), **5** (1889), 135–319.
24. M. Mazzocco, “Picard and Chazy solutions to the Painlevé VI equation”, *Math. Ann.*, **321**:1 (2001), 157–195.
25. M. Inaba, K. Iwasaki, M.-H. Saito, “Dynamics of the sixth Painlevé equation”, *Théories asymptotiques et équations de Painlevé*, Sémin. Congr., **14**, Soc. Math. France, Paris, 2006, 103–167.
26. P. Boalch, “From Klein to Painlevé via Fourier, Laplace and Jimbo”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **90**:1 (2005), 167–208.
27. K. Okamoto, “Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé”, *Japan. J. Math.* (N. S.), **5**:1 (1979), 1–79.
28. M. Brunella, *Birational geometry of foliations*, Monografías de Matemática, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2000, 138 pp.
29. D. Cerveau, A. Lins-Neto, F. Loray, J. V. Pereira, F. Touzet, “Complex codimension one singular foliations and Godbillon–Vey sequences”, *Mosc. Math. J.*, **7**:1 (2007), 21–54.
30. F. Loray, J. V. Pereira, “Transversely projective foliations on surfaces: existence of minimal form and prescription of monodromy”, *Internat. J. Math.*, **18**:6 (2007), 723–747.

31. M.-H. Saito, T. Takebe, H. Terajima,, “Deformation of Okamoto–Painlevé pairs and Painlevé equations”, *J. Algebraic Geom.*, **11**:2 (2002), 311–362.
32. K. Okamoto, “Studies on the Painlevé equations. I. Sixth Painlevé equation P_{VI} ”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **146** (1987), 337–381.
33. R. C. Churchill, “Two generator subgroups of $SL(2, \mathbb{C})$ and the hypergeometric, Riemann, and Lamé equations. Differential algebra and differential equations”, *J. Symbolic Comput.*, **28**:4-5 (1999), 521–545.
34. S. Cantat, F. Loray, “Dynamics on character varieties and Malgrange irreducibility of Painlevé VI equation”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **59**:7 (2009), 2927–2978.
35. D. Novikov, S. Yakovenko, “Lectures on meromorphic flat connections”, *Normal forms, bifurcations and finiteness problems in differential equations*, NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem., **137**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004, 387–430.

ФРАНК ЛОРЕЙ

(FRANK LORAY)

Institute of Mathematical Research of Rennes, France

E-mail: frank.loray@univ-rennes1.fr

Поступило в редакцию

18.10.2014

Перевод с английского А. В. Домрина