Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Неравенства для гармонических мер относительно неналежающих областей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 5, 47–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8313>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:45:12

УДК 517.54

В. Н. Дубинин

Неравенства для гармонических мер относительно неналегающих областей

Пусть области B_1 и B_2 являются компонентами дополнения замкнутой жордановой кривой $\Gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$, и пусть $E(r) = \{z: |z - z_0| \leq r\}$, где $z_0 \in \Gamma$. Известное неравенство для гармонических мер множества $\Gamma \cap E(r)$ относительно областей B_1, B_2 распространяется на случай произвольного числа попарно неналегающих областей B_k , $k = 1, \dots, n$. Доказываются аналогичные неравенства для гармонических мер множеств, сосредоточенных в нескольких кругах либо континуумах $E_l(r)$, $l = 1, \dots, m$, заданной логарифмической емкости. Кроме того, для указанных мер устанавливаются неравенства, включающие производные Шварца функций, отображающих конформно области B_k на единичный круг.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: гармоническая мера, емкость конденсатора, логарифмическая емкость, производная Шварца.

DOI: 10.4213/im8313

Введение

Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть z_0 – произвольная конечная точка этой кривой, $E(r) = \{z: |z - z_0| \leq r\}$. Обозначим через B_1 и B_2 области, на которые кривая Γ разбивает сферу $\overline{\mathbb{C}}$. Пусть $z_k \in B_k$, $k = 1, 2$, – фиксированные конечные точки и ω_k – гармоническая мера множества $\Gamma \cap E(r)$ относительно области B_k , вычисленная в точке z_k , $k = 1, 2$. В работе [1] установлено неравенство

$$\omega_1 \omega_2 \leq A r^2, \quad r < r', \quad (1)$$

где константы A , r' зависят только от расстояний $\text{dist}(z_k, \Gamma)$, $k = 1, 2$. Доказательство неравенства (1) восходит в идейном плане к Бейрлингу [2] (см. [1, с. 234]). Неравенство (1) существенно используется в [1] для доказательства критерия “взаимной сингулярности” мер (т. е. нахождения условий на кривую Γ , необходимых и достаточных для существования двух непересекающихся множеств $E_1, E_2 \subset \Gamma$ таких, что гармонические меры $\omega(z_k, E_k, B_k)$, $k = 1, 2$, равны единице). Пусть функции f_1 и f_2 конформно и однолистно отображают области B_1, B_2 на единичный круг $U = \{w: |w| < 1\}$ так, что $f_k(z_k) = 0$, $f'_k(z_k) > 0$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00022).

положим $\Gamma_k = f_k(\Gamma \cap E(r))$, $k = 1, 2$. В [3, с. 214] приводится уточнение неравенства (1):

$$\omega_1 \omega_2 \leq \text{cap } \Gamma_1 \text{ cap } \Gamma_2 \leq M r^2, \quad r < r'', \quad (1')$$

где константы M , r'' зависят только от функций f_1 и f_2 . Естественно поставить вопросы: насколько существенна зависимость констант в (1) и (1') от областей B_k (функций f_k), $k = 1, 2$; каковы точные значения этих констант; каковы оценки гармонических мер относительно трех и более попарно непересекающихся областей B_k , $k = 1, \dots, n$ (не обязательно разделенных жордановыми кривыми); каковы оценки гармонических мер множеств, сосредоточенных в двух и более кругах $E_l(r)$, $l = 1, \dots, m$? В настоящей работе даются ответы на некоторые из этих вопросов. В частности, показывается, что для точек z_k , $k = 1, \dots, n$, расположенных на одинаковом расстоянии от точки z_0 , имеют место точные оценки, близкие к (1) и (1'), с константами, зависящими только от этого расстояния (см. теоремы 2, 3 и замечание 1). Мы приводим также верхние оценки произведений гармонических мер множеств, часть которых расположена в одном круге, а часть – в другом. В этом случае оценки не зависят от вида областей B_k и выбора точек z_k , $k = 1, \dots, n$ (теоремы 4 и 5). В теореме 4 рассматривается ситуация, когда вместо кругов $E_l(r)$ берутся континуумы с заданным поведением логарифмической емкости, а множества B_k и точки z_k также зависят от параметра r ($l = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$). Наконец, в § 4 устанавливаются неравенства для гармонических мер, включающие производные Шварца функций $f_k: B_k \rightarrow U$ (теорема 6). Полученные результаты можно рассматривать как дополнение к известным задачам об экстремальном разбиении [4], [5], в котором наряду с приведенными модулями разных типов оценивается гармоническая мера. Доказательство основных утверждений настоящей статьи опирается на применение асимптотических формул для емкостей обобщенных конденсаторов [5], [6]. Для удобства читателя в § 1 приводятся необходимые определения и вспомогательные утверждения.

§ 1. Асимптотические формулы для емкостей конденсаторов

Пусть B – открытое множество на комплексной сфере $\bar{\mathbb{C}}$. *Обобщенный конденсатор* (далее *конденсатор*) в $\bar{B}$ есть тройка $C = (B, \mathcal{E}, \Delta)$, где $\mathcal{E} = \{E_k\}_{k=1}^n$ – совокупность замкнутых непустых попарно непересекающихся множеств $E_k \subset \bar{B}$, $k = 1, \dots, n$, а $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел δ_k , $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$. Множества E_k называются пластинами конденсатора C , а числа δ_k – уровнями потенциала или, короче, потенциалами пластин E_k , $k = 1, \dots, n$. *Емкость* $\text{cap } C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$\iint_B |\nabla v(x, y)|^2 dx dy$$

по всем вещественнозначным функциям v , непрерывным в $\bar{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B и равным δ_k на E_k , $k = 1, \dots, n$. Пусть $U(z_0, r)$ – открытый круг с центром в конечной точке z_0 радиуса r ,

и пусть $U(\infty, r) = \{z: |z| > 1/r\}$. Параметрическое семейство областей $D(z_0, r)$, $0 < r < r_0$, называется асимптотически круговым, если выполняются включения

$$U(z_0, s(r)) \subset D(z_0, r) \subset U(z_0, t(r))$$

для некоторых положительных функций $s(r)$ и $t(r)$, $0 < r < r_0$, удовлетворяющих условиям $s(r) \sim t(r) \sim r$ при $r \rightarrow 0$. Элемент асимптотически кругового семейства $D(z_0, r)$ (а также его замыкание $\overline{D(z_0, r)}$) принято называть почти кругом с центром в точке z_0 радиуса r . Следующее утверждение взято из книги [5].

ЛЕММА 1 [5, теорема 2.1]. Пусть B – открытое множество на $\overline{\mathbb{C}}$, дополнение которого имеет положительную гармоническую меру, $\{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек множества B , $\Delta = \{\delta_k\}_{k=0}^n$ – совокупность вещественных чисел, где $\delta_0 = 0$, и пусть $\mu_k, \nu_k, k = 1, \dots, n$, – произвольные положительные числа. Предположим, что для некоторого $r_0 > 0$ замыкания почти кругов $D(z_k, \mu_k r^{\nu_k})$ лежат в B и попарно не пересекаются для всех $0 < r < r_0$. Тогда для емкости конденсатора

$$C(r) = (B, \{\partial B, \overline{D(z_1, \mu_1 r^{\nu_1})}, \dots, \overline{D(z_n, \mu_n r^{\nu_n})}\}, \Delta)$$

справедлива асимптотическая формула

$$\begin{aligned} \text{cap } C(r) = & -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k \log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\delta_k^2}{\nu_k^2} \log \frac{r(B, z_k)}{\mu_k} \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{\delta_k \delta_l}{\nu_k \nu_l} g_B(z_k, z_l) \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $g_B(z_k, z)$ – функция Грина связной компоненты множества B , содержащей точку z_k , и $r(B, z_k) = \exp\{\lim_{z \rightarrow z_k} [g_B(z_k, z) + \log |z - z_k|]\}$ – внутренний радиус этой компоненты относительно точки z_k , $k = 1, \dots, n$ (при $z_k = \infty$ под внутренним радиусом понимается величина $r(B, \infty) = \exp\{\lim_{z \rightarrow \infty} [g_B(z, \infty) - \log |z|]\}$; в случае $n = 1$ двойная сумма в фигурных скобках по определению равна нулю).

Нам понадобится также асимптотическая формула для емкости конденсатора при стягивании всех его пластин в заданные точки [6]. Пусть $Z = \{z_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных конечных точек на сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $\Delta = \{\delta_k\}_{k=1}^n$ – совокупность вещественных чисел, по крайней мере два из которых различны, и пусть $\mu_k, \nu_k, k = 1, \dots, n$, – положительные числа. Рассмотрим $\{E_k(r)\}_{0 < r < r_0}$, $k = 1, \dots, n$, – семейства континуумов, удовлетворяющих следующим условиям:

(i) $E_k(r) \cap E_l(r) = \emptyset, k \neq l, k, l = 1, \dots, n, 0 < r < r_0$;

(ii) логарифмическая емкость $\text{cap } E_k(r)$ представима в виде $\mu_k r^{\nu_k} (1 + o(1))$ при $r \rightarrow 0$;

(iii) $\text{dist}(z_k, E_k(r)) \rightarrow 0, r \rightarrow 0, k = 1, \dots, n$.

Заметим, что в этих условиях континуумы $E_k(r)$ стягиваются соответственно к точкам $z_k, k = 1, \dots, n$.

ЛЕММА 2. В принятых выше обозначениях справедлива асимптотическая формула

$$\text{cap}(\overline{\mathbb{C}}, \{E_k(r)\}_{k=1}^n, \Delta) = -2\pi \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k \log r} + R \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0,$$

где

$$\delta = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\delta_k}{\nu_k} \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\nu_k} \right)^{-1},$$

$$R = 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(\delta_k - \delta)^2}{\nu_k^2} \log \mu_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{(\delta_k - \delta)(\delta_l - \delta)}{\nu_k \nu_l} \log |z_k - z_l| \right\}.$$

Доказательство леммы 2 в случае, когда континуумы $E_k(r)$ представляют собой почти круги, дано в [5]. В общем случае доказательство приводится в работе [6].

§ 2. Неравенства для гармонических мер множеств, принадлежащих заданному кругу

Всюду ниже мы используем следующие обозначения:

$$E(\zeta, r) = \{z: |z - \zeta| \leq r\}, \quad E = \{z: |z| \leq 1\};$$

$$T = \{z: |z| = 1\}, \quad U^* = \{z: |z| > 1\},$$

$\omega(z, F, B)$ – гармоническая мера множества F относительно области B , вычисленная в точке z [7]. С помощью следующей теоремы задача о нахождении верхней оценки для гармонических мер сводится к определению верхней оценки для произведения степеней внутренних радиусов неналегающих областей (т. е. к одной из задач об экстремальном разбиении [4], [5]).

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что односвязные области B_k и точки z_k на комплексной сфере $\mathbb{C}$ удовлетворяют следующим условиям: $z_k \in B_k \setminus E$, $z_k \neq \infty$, $E \cap \partial B_k \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, и $B_k \cap B_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$. Тогда для любых вещественных чисел δ_k , $k = 1, \dots, n$, имеет место неравенство

$$\prod_{k=1}^n \left[\frac{(|z_k|^2 - 1) \sin^2(\pi \omega_k / 2)}{r(B_k \cap U^*, z_k)} \right]^{\delta_k^2} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left| \frac{z_k - z_l}{1 - \bar{z}_k z_l} \right|^{\delta_k \delta_l}, \quad (2)$$

где $\omega_k = \omega(z_k, E \cap \partial B_k, B_k)$, $k = 1, \dots, n$; при $n = 1$ двойное произведение в (2) по определению равно единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\omega_k \neq 0$ и $\delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через $\tilde{B}_k$ связную компоненту открытого множества $B_k \cap U^*$, содержащую точку z_k , $k = 1, \dots, n$. Область $\tilde{B}_k$ является односвязной. Действительно, пусть γ – произвольная замкнутая жорданова кривая, лежащая в $\tilde{B}_k$, и пусть

D_1, D_2 – дополнительные области к γ , на которые она разбивает сферу $\overline{\mathbb{C}}$. Одна из них, скажем, D_1 , содержит круг E . Так как $E \cap \partial B_k \neq \emptyset$ и $\overline{\mathbb{C}} \setminus B_k$ связно, то D_1 содержит дополнение B_k . Поэтому $D_2 \subset B_k$ и $D_2 \subset \tilde{B}_k$. Ввиду произвольности γ область $\tilde{B}_k$ является односвязной. Пусть функция f_k конформно и однолистно отображает область $\tilde{B}_k$ на единичный круг $U = \{w: |w| < 1\}$ так, что $f_k(z_k) = 0$, $f'_k(z_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$. Положим $\gamma_k = T \cap \partial \tilde{B}_k$ и $\Gamma_k = f_k(\gamma_k)$ в смысле граничного соответствия, $k = 1, \dots, n$. Из принципа максимума для гармонических функций и конформной инвариантности гармонической меры вытекает, что

$$\omega(z_k, E \cap \partial B_k, B_k) \leq \omega(z_k, \gamma_k, \tilde{B}_k) = \omega(0, \Gamma_k, U). \quad (3)$$

При достаточно малом $r > 0$ определены следующие конденсаторы:

$$\begin{aligned} C(r) &= \left(U^*, \left\{ T, E\left(z_1, \frac{r}{f'(z_1)}\right), \dots, E\left(z_n, \frac{r}{f'(z_n)}\right) \right\}, \{0, \delta_1, \dots, \delta_n\} \right), \\ C_k(r) &= \left(\tilde{B}_k, \left\{ \gamma_k, E\left(z_k, \frac{r}{f'(z_k)}\right) \right\}, \{0, \delta_k\} \right), \\ f_k(C_k(r)) &= \left(U, \left\{ \Gamma_k, f_k\left(E\left(z_k, \frac{r}{f'(z_k)}\right)\right) \right\}, \{0, \delta_k\} \right), \\ C_k^*(r) &= \left(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k, \left\{ \Gamma_k, f_k\left(E\left(z_k, \frac{r}{f'(z_k)}\right)\right) \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ w: \frac{1}{w} \in f_k\left(E\left(z_k, \frac{r}{f'(z_k)}\right)\right) \right\}, \{0, \delta_k, \delta_k\} \right), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

По теореме 1.17 из [5]

$$\text{cap } C(r) \geq \sum_{k=1}^n \text{cap } C_k(r).$$

Конформная инвариантность емкости и принцип симметрии [5, теорема 1.20] дают

$$\text{cap } C_k(r) = \text{cap } f_k(C_k(r)) = \frac{1}{2} \text{cap } C_k^*(r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Окончательно имеем

$$\text{cap } C(r) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \text{cap } C_k^*(r). \quad (4)$$

Для применения леммы 1 к обеим частям (4) необходима информация о функциях Грина и внутренних радиусах соответствующих областей. Непосредственно убеждаемся, что

$$g_{U^*}(z, z_k) = \log \left| \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right|$$

и, следовательно,

$$r(U^*, z_k) = |z_k|^2 - 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Далее, справедливы тождества

$$g_{\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k}(w, 0) + \log |w| = g_{\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k}(w, \infty), \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому

$\log r(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k, 0) = g_{\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k}(0, \infty) = g_{\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k}(\infty, 0) = \log r(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k, \infty) = -\log \operatorname{cap} \Gamma_k$,
 $k = 1, \dots, n$. Учитывая вышесказанное, из неравенства (4) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} & -2\pi \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \frac{1}{\log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \delta_k^2 \log[f'(z_k)(|z_k|^2 - 1)] + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \delta_k \delta_l \log \left| \frac{1 - \bar{z}_k z_l}{z_k - z_l} \right| \right\} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right) \\ & \geq \sum_{k=1}^n \left\{ -2\pi \delta_k^2 \frac{1}{\log r} - 4\pi \delta_k^2 [\log r(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus \Gamma_k, 0)] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{k=1}^n \left[\frac{(|z_k|^2 - 1) \operatorname{cap}^2 \Gamma_k}{1/f'_k(z_k)} \right]^{\delta_k^2} \leq \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left| \frac{z_k - z_l}{1 - \bar{z}_k z_l} \right|^{\delta_k \delta_l}. \quad (5)$$

Осталось воспользоваться соотношениями $1/f'_k(z_k) = r(\tilde{B}_k, z_k) = r(B_k \cap U^*, z_k)$, $k = 1, \dots, n$, неравенством (3) и неравенством Бейрлинга, согласно которому

$$\operatorname{cap} \Gamma_k \geq \sin \frac{\pi \omega(0, \Gamma_k, U)}{2}$$

для любого $k = 1, \dots, n$. Теорема доказана.

Напомним, что $r(U^*, z) = |z|^2 - 1$. Из теоремы 1 при $n = 1$ вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть B и D – односвязные области в $\overline{\mathbb{C}}$, $B \subset D$, и пусть $\alpha := \partial B \cap \partial D \neq \emptyset$. Тогда для любой конечной точки $z \in B$ справедливо неравенство

$$\omega(z, \alpha, B) \leq \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{r(B, z)}{r(D, z)}}.$$

Равенство достигается, например, в случае $D = U^*$, $B = U^* \setminus \{z : c \leq \operatorname{Re} z \leq -1, \operatorname{Im} z = 0\}$ для любых вещественных z и c , $1 < z < \infty$, $-\infty \leq c \leq -1$.

Если методами [4], [5] оценить произведение

$$\prod_{k=1}^n [r(B_k \cap U^*, z_k)]^{\delta_k^2}$$

сверху, можно получить из (2) неравенства для гармонических мер с константами, зависящими только от геометрии областей B_k либо только от точек z_k , $k = 1, \dots, n$. Ограничимся здесь случаем, когда точки z_k удалены от начала координат на одинаковое расстояние. При $n = 2$ данное ограничение несущественно (см. доказательство следствия 3 ниже). Более того, в отличие от теоремы 1 рассмотрим области произвольной связности.

ТЕОРЕМА 2. Пусть произвольные области B_k и точки z_k удовлетворяют следующим условиям: $z_k \in B_k \setminus E$, $|z_k| = R$ ($1 < R < \infty$), $E \cap \partial B_k \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 2$, и $B_k \cap B_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{\pi \omega_k}{2} \leq \left[\frac{4R(R^n - 1)}{n(R^2 - 1)(R^n + 1)} \right]^n \prod_{k=1}^n \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left| \frac{z_k - z_l}{1 - \bar{z}_k z_l} \right| \leq \left[\frac{4R^n}{(R^n + 1)^2} \right]^n, \quad (6)$$

где ω_k определены в теореме 1, $k = 1, \dots, n$. Равенство в обоих неравенствах (6) достигается для симметричных точек $z_k^* = R \exp\{2\pi i k/n\}$ и областей $B_k^* = \{z : |z| > 1, |\arg z - 2\pi k/n| < \pi/n\}$, $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 1, обозначим через $\tilde{B}_k$ связную компоненту множества $B_k \cap U^*$, содержащую точку z_k , $k = 1, \dots, n$. Пусть F_k — связная компонента дополнения $\bar{\mathbb{C}}_z \setminus \tilde{B}_k$, содержащая круг E , и пусть $G_k = \bar{\mathbb{C}}_z \setminus F_k$, $k = 1, \dots, n$. Таким образом, область G_k получается из $\tilde{B}_k$ присоединением к ней тех компонент дополнения $\tilde{B}_k$, которые не пересекаются с E . Обозначим через f_k функцию, конформно и однолистно отображающую односвязную область G_k на круг U так, что $f_k(z_k) = 0$, $f'_k(z_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$. Положим $\gamma_k = T \cap \partial \tilde{B}_k$, $k = 1, \dots, n$. Из принципа максимума следует, что

$$\omega(z_k, E \cap \partial B_k, B_k) \leq \omega(z_k, \gamma_k, \tilde{B}_k) \leq \omega(z_k, \gamma_k, G_k). \quad (3')$$

Применяя теорему 1 к областям G_k и принимая во внимание (3'), получаем неравенство (2), где $B_k \cap U^*$ необходимо заменить на G_k , $k = 1, \dots, n$. Так как области G_k попарно не пересекаются, то

$$\prod_{k=1}^n r(G_k, z_k) \leq \left[\frac{4R(R^n - 1)}{n(R^n + 1)} \right]^n \quad (7)$$

(см. [5, следствие 6.6]). Подставляя (7) в (2), где $B_k \cap U^* = G_k$ и $\delta_k = 1$, $k = 1, \dots, n$, приходим к левому неравенству в (6). Правое неравенство в (6) вытекает из теоремы 5.1 в [5] (см. также [8, следствие 3]).

С помощью простых вычислений убеждаемся, что в случае симметричных точек и областей, указанных в теореме 2, выполняется равенство

$$\sin^2 \frac{\pi \omega_k}{2} = \frac{4R^n}{(R^n + 1)^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

В этом случае в обоих неравенствах (6) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательств теорем 1, 2 видно, что неравенства (2) и (6) остаются справедливыми, если в них заменить $\sin(\pi \omega_k/2)$ на большую величину $\text{сар } \Gamma_k$, $1 \leq k \leq n$ (см. неравенство (5)).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть B_1 и B_2 — непересекающиеся области на сфере $\bar{\mathbb{C}}$, имеющие общую конечную граничную точку z_0 . Тогда для любых двух точек

$z_k \in B_k$, $k = 1, 2$, расположенных от точки z_0 на одинаковом расстоянии ρ , справедливо неравенство

$$\omega(z_1, E(z_0, r) \cap \partial B_1, B_1) \omega(z_2, E(z_0, r) \cap \partial B_2, B_2) \leq \left(\frac{4}{\pi \rho} \right)^2 r^2 (1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0.$$

Постоянная $(4/(\pi \rho))^2$ не может быть улучшена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить итоговое неравенство в (6) при $n = 2$ к областям и точкам, полученным из исходных с помощью линейного отображения $z' = (z - z_0)/r$ ($R = \rho/r$). Если $\partial B_1 = \partial B_2$ — мнимая ось и $z_1 = -z_2 = \rho$, то в полученном неравенстве имеет место знак равенства. Следствие доказано.

В случае односвязных областей итоговое неравенство в теореме 2 допускает следующее уточнение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в условиях теоремы 2 области B_k , $k = 1, \dots, n$, односвязные. Тогда

$$\prod_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{\pi \omega(z_k, E \cap \partial B_k, B_k)}{4} \leq R^{-n^2/2}. \quad (8)$$

Равенство в (8) достигается в том и только том случае, когда области B_k и точки z_k совпадают с областями B_k^* и точками z_k^* из теоремы 2 с точностью до поворота вокруг начала координат (не зависящего от k), $k = 1, \dots, n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что достаточно рассмотреть случай, когда области B_k , $k = 1, \dots, n$, принадлежат множеству U^* . В работе [9] установлен следующий результат. Пусть γ — континуум в E , разбивающий круг $|z| < 1$ на $n \geq 2$ попарно неналегающих односвязных областей D_k так, что $D_k \cap \{z: |z| = \rho\} \neq \emptyset$ при некотором ρ , $0 < \rho < 1$. Тогда для любых точек $a_k \in D_k$, лежащих на окружности $|z| = \rho$, справедливо неравенство

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \frac{1 + \sin(\pi \omega_k/2)}{1 - \sin(\pi \omega_k/2)} \geq -n \log \rho, \quad (9)$$

где $\omega_k = \omega(a_k, \gamma \cap \partial D_k, D_k)$, $k = 1, \dots, n$. Равенство в (9) достигается тогда и только тогда, когда при некотором вещественном θ

$$\gamma = \{z: (e^{i\theta} z)^n \in [-1, 0]\}, \quad D_k = \left\{ z: |z| < 1, \left| \arg(ze^{i\theta}) - \frac{2\pi(k-1)}{n} \right| < \frac{\pi}{n} \right\},$$

$$a_k = \rho \exp \left\{ i \left(-\theta + \frac{2\pi i(k-1)}{n} \right) \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Положим в (9) $D_k = \{z: 1/\bar{z} \in B_k\}$, $\gamma = E \setminus \bigcup_{k=1}^n D_k$, $a_k = 1/\bar{z}_k$, $k = 1, \dots, n$, $\rho = 1/R$. Ясно, что $\omega_k = 1 - \omega(z_k, E \cap \partial B_k, B_k)$, $k = 1, \dots, n$. После несложных вычислений приходим к неравенству (8). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3 (ср. [1], [3, с. 214]). Пусть γ – жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, разбивающая комплексную сферу на две односвязные области B_1 и B_2 , и пусть конечная точка z_0 принадлежит γ . Тогда для любых двух точек $z_k \in B_k$, $k = 1, 2$, и для любого $r < \min(|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{\omega(z_1, \gamma \cap E(z_0, r), B_1) \omega(z_2, \gamma \cap E(z_0, r), B_2)} \\ & \leq \frac{4}{\pi} \frac{|z_1 - z_2| r}{|r^2 - (z_1 - z_0)(z_2 - z_0)| + \sqrt{(|z_1 - z_0|^2 - r^2)(|z_2 - z_0|^2 - r^2)}}. \end{aligned} \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $z_0 = 0$ и $r = 1$. Обозначим через φ дробно-линейный автоморфизм сферы $\overline{\mathbb{C}}$, оставляющий на месте круг E и переводящий точки z_1 и z_2 в точки R и $-R$ соответственно ($R > 1$). Значение R находим из соотношения

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right| = \left| \frac{\varphi(z_1) - \varphi(z_2)}{1 - \overline{\varphi(z_1)} \varphi(z_2)} \right| = \frac{2R}{R^2 + 1}.$$

После несложных вычислений получаем

$$R = \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + \sqrt{(|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)}}{|z_1 - z_2|}.$$

Осталось воспользоваться неравенством (8) и конформной инвариантностью гармонической меры. Следствие доказано.

Заметим, что если точки z_1, z_2 расположены от точки z_0 на одинаковом расстоянии $\rho > r$, то правая часть неравенства (10) не превосходит $4r/(\pi\rho)$ (см. [8, следствие 3]).

§ 3. Неравенства для множеств, принадлежащих двум и более континуумам

В этом параграфе рассматриваются оценки гармонических мер множеств, часть которых расположена на одном континууме, а часть – на другом. Любопытно, что полученные при этом неравенства не зависят от расположения точек, в которых вычисляется гармоническая мера.

ТЕОРЕМА 4. Пусть a_l , $l = 1, \dots, t$, $t \geq 2$, – различные конечные точки, и δ_l , $l = 1, \dots, t$, – вещественные числа, каждое из которых равно $+1$ либо -1 и по крайней мере два из которых различны. Пусть $\{E_l(r)\}_{0 < r < r_0}$ – семейство континуумов, для которых $\text{cap } E_l(r) = \mu_l r^{\nu_l}(1 + o(1))$ и $\text{dist}(a_l, E_l(r)) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$, где μ_l, ν_l – положительные числа, $l = 1, \dots, t$, и пусть $B_k(r)$, $l = k, \dots, n$, – односвязные попарно непересекающиеся области на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$, $0 < r < r_0$. Предположим, что для любых k , $1 \leq k \leq n$, и r , $0 < r < r_0$, существуют два континуума $E_{l'}(r)$ и $E_{l''}(r)$ такие, что $\delta_{l'} = -\delta_{l''} = 1$ и $F_k^+(r) := E_{l'}(r) \cap \partial B_k(r) \neq \emptyset$, $F_k^-(r) := E_{l''}(r) \cap \partial B_k(r) \neq \emptyset$. Тогда для гармонических мер $\omega_k^\pm(r) = \omega(z_k(r), F_k^\pm(r), B_k(r))$, $k = 1, \dots, n$, справедливо

неравенство

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \omega_k^+(r) \omega_k^-(r)} \leq Ar^{2n\nu}(1 + o(1)), \quad r \rightarrow 0,$$

равномерно по всем $z_k(r) \in B_k(r)$, $k = 1, \dots, n$. Здесь

$$A = \frac{16}{\pi^2} \left\{ \left[\prod_{l=1}^m \mu_l^{(\delta_l - \delta)^2 / \nu_l^2} \right] \left[\prod_{l=1}^m \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m |a_l - a_j|^{(\delta_l - \delta)(\delta_j - \delta) / (\nu_l \nu_j)} \right] \right\}^{2n\nu^2},$$

$$\delta = \left(\sum_{l=1}^m \frac{\delta_l}{\nu_l} \right) \left(\sum_{l=1}^m \frac{1}{\nu_l} \right)^{-1}, \quad \nu = \left(\sum_{l=1}^m \frac{(\delta_l - \delta)^2}{\nu_l} \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $\omega_k^\pm(r) \neq 0$, $k = 1, \dots, n$. Обозначим через f_{kr} функцию, которая конформно и однолистно отображает область $B_k(r)$ на единичный круг U так, что $f_{kr}(z_k(r)) = 0$, $f'_{kr}(z_k(r)) > 0$, $k = 1, \dots, n$. Положим $\Gamma_{kr}^\pm = f_{kr}(F_k^\pm(r))$, $k = 1, \dots, n$. При достаточно малом $r > 0$ определены конденсаторы:

$$\begin{aligned} C(r) &= (\overline{\mathbb{C}}, \{E_l(r)\}_{l=1}^m, \{\delta_l\}_{l=1}^m), \\ C_k(r) &= (B_k(r), \{F_k^+(r), F_k^-(r)\}, \{1, -1\}), \\ f_{kr}(C_k(r)) &= (U, \{\Gamma_{kr}^+, \Gamma_{kr}^-\}, \{1, -1\}), \\ C_k^*(r) &= (U, \{w \in T: |\arg w - \pi| \leq \pi\omega_k^+(r)\}, \\ &\quad \{w \in T: |\arg w| \leq \pi\omega_k^-(r)\}, \{1, -1\}), \\ \tilde{C}_k(r) &= \left(\{\zeta: \operatorname{Im} \zeta > 0\}, \left\{ \left\{ \zeta: \operatorname{Im} \zeta = 0, |\operatorname{Re} \zeta| \geq \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_k^+(r)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_k^-(r)}{2} \right\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \{\zeta: \operatorname{Im} \zeta = 0, |\operatorname{Re} \zeta| \leq 1\} \right\}, \{1, -1\} \right), \quad k = 1, \dots, n, \\ C^*(r) &= \left(\{\zeta: \operatorname{Im} \zeta > 0\}, \left\{ \left\{ \zeta: \operatorname{Im} \zeta = 0, |\operatorname{Re} \zeta| \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_k^+(r)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi\omega_k^-(r)}{2}} \right\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \{\zeta: \operatorname{Im} \zeta = 0, |\operatorname{Re} \zeta| \leq 1\} \right\}, \{1, -1\} \right). \end{aligned}$$

По теореме 1.17 из [5]

$$\operatorname{cap} C(r) \geq \sum_{k=1}^n \operatorname{cap} C_k(r).$$

Заметим, что конденсатор $f_{kr}(C_k(r))$ является образом конденсатора $C_k(r)$ при отображении f_{kr} , а конденсатор $\tilde{C}_k(r)$ есть образ конденсатора $C_k^*(r)$ при отображении

$$\zeta = i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi\omega_k^-(r)}{2} \right) \frac{1-w}{1+w}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Из конформной инвариантности емкости и принципа круговой симметризации [5, теорема 4.2] следует, что

$$\operatorname{cap} C_k(r) = \operatorname{cap} f_{kr}(C_k(r)) \geq \operatorname{cap} C_k^*(r) = \operatorname{cap} \tilde{C}_k(r), \quad k = 1, \dots, n.$$

Применяя теорему Маркуса [10] (см. также [5, теорема 3.13]) и принцип симметрии [5, теорема 1.20], легко получаем

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \operatorname{cap} \tilde{C}_k(r) \geq \operatorname{cap} C^*(r).$$

Окончательно имеем

$$\operatorname{cap} C(r) \geq n \operatorname{cap} C^*(r). \quad (11)$$

Чтобы вычислить емкость конденсатора $C^*(r)$, рассмотрим функцию

$$w = \int_0^\zeta \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2 t^2)}}, \quad \tau = \tau(r) = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_k^+(r)}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_k^-(r)}{2}},$$

которая отображает конденсатор $C^*(r)$ на конденсатор, расположенный в прямоугольнике с вершинами $\pm K(\tau)$, $\pm K(\tau) + iK'(\tau)$, конформно, однолистно и так, что $\pm 1 \mapsto \pm K(\tau)$, $\pm 1/\tau \mapsto \pm K(\tau) + iK'(\tau)$, где $K(\tau)$, $K'(\tau)$ – полные эллиптические интегралы первого рода [11, § 47]. Ввиду конформной инвариантности емкости имеет место равенство

$$\operatorname{cap} C^*(r) = 8 \frac{K(\tau)}{K'(\tau)}.$$

Заметим, что при $r \rightarrow 0$ левая часть в (11) стремится к нулю (лемма 2). Следовательно, правая часть (11) также стремится к нулю и $\tau \rightarrow 0$ равномерно по всем $z_k(r) \in B_k(r)$, $k = 1, \dots, n$. Из разложений эллиптических интегралов [11, § 32] легко следует, что

$$8 \frac{K(\tau)}{K'(\tau)} = \frac{4\pi}{-\log \tau} \left(1 + \frac{\log 4}{\log \tau} + o\left(\frac{1}{\log \tau}\right) \right), \quad r \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\operatorname{cap} C^*(r)} = \frac{1}{4\pi} (-\log \tau + \log 4 + o(1)), \quad r \rightarrow 0. \quad (12)$$

С другой стороны, лемма 2 дает

$$\frac{1}{\operatorname{cap} C(r)} = -\frac{\nu}{2\pi} \log r + M + o(1), \quad r \rightarrow 0,$$

где

$$M = -\frac{\nu^2}{2\pi} \left\{ \sum_{l=1}^m \frac{(\delta_l - \delta)^2}{\nu_l^2} \log \mu_l + \sum_{l=1}^m \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^m \frac{(\delta_l - \delta)(\delta_j - \delta)}{\nu_l \nu_j} \log |a_l - a_j| \right\}.$$

Учитывая этот факт, а также (11) и (12), приходим к неравенству

$$-\frac{n\nu}{2\pi} \log r + nM \leq \frac{1}{4\pi} (-\log \tau + \log 4) + o(1), \quad r \rightarrow 0.$$

Отсюда вытекает, что $\tau \leq [4 \exp\{-4n\pi M\}] r^{2n\nu} (1+o(1))$, $r \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \omega_k^+(r) \omega_k^-(r)} \leq \frac{4}{\pi^2} \tau \leq \left[\frac{16}{\pi^2} \exp\{-4n\pi M\} \right] r^{2n\nu} (1+o(1)),$$

что в итоге дает неравенство теоремы 4. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть γ – жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, разбивающая комплексную сферу на две односвязные области B_1 и B_2 , и пусть a_1, a_2 – различные конечные точки на кривой γ . Тогда

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{l=1}^2 \omega(z_k, \gamma \cap E(a_l, r), B_k) \leq \left(\frac{4}{\pi|a_1 - a_2|} \right)^4 r^4 (1+o(1)), \quad r \rightarrow 0,$$

равномерно по всем $z_k \in B_k$, $k = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В теореме 4 полагаем $m = 2$, $\delta_1 = -\delta_2 = 1$, $E_l(r) = E(a_l, r)$, $\mu_l = \nu_l = 1$, $l = 1, 2$, $B_k(r) = B_k$, $k = 1, 2$. Тогда $\delta = 0$, $\nu = 1/2$ и требуемое неравенство вытекает из неравенства теоремы 4. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 5. Пусть точки a_1, a_2 и числа r_1, r_2 таковы, что круги $E(a_1, r_1)$ и $E(a_2, r_2)$ не пересекаются, и пусть B_k , $k = 1, \dots, n$, – односвязные попарно неналегающие области сферы $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющие условию $E(a_l, r_l) \cap \partial B_k \neq \emptyset$, $l = 1, 2$, $k = 1, \dots, n$. Тогда

$$\frac{K(\tau^*)}{K'(\tau^*)} \leq \frac{\pi}{n \log R}, \quad (13)$$

где K, K' – полные эллиптические интегралы первого рода,

$$\tau^* = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^2 \operatorname{tg} \frac{\pi \omega(z_k, E(a_l, r_l) \cap \partial B_k, B_k)}{2}}, \quad (14)$$

z_k – произвольная точка области B_k , $k = 1, \dots, n$, и

$$R = \frac{\sqrt{|a_1 - a_2|^2 - (r_1 - r_2)^2} + \sqrt{|a_1 - a_2|^2 - (r_1 + r_2)^2}}{\sqrt{|a_1 - a_2|^2 - (r_1 - r_2)^2} - \sqrt{|a_1 - a_2|^2 - (r_1 + r_2)^2}}. \quad (15)$$

Равенство в (13) имеет место для тех кругов $E(a_l, r_l)$, $l = 1, 2$, областей B_k и точек z_k , которые являются образами соответственно множеств $\{\zeta: |\zeta| \leq 1\}$, $\{\zeta: |\zeta| \geq R\}$ ($R > 1$), областей $\{\zeta: 1 < |\zeta| < R, |\arg \zeta - 2\pi k/n| < \pi/n\}$ и точек $\rho \exp\{2\pi i k/n\}$ ($1 < \rho < R$), $k = 1, \dots, n$, при одном и том же дробно-линейном автоморфизме сферы $\overline{\mathbb{C}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим доказательство неравенства (11) при $m = 2$, сделав в нем следующие замены: $\delta_1 \mapsto 1$, $\delta_2 \mapsto -1$, $E_l(r) \mapsto E(a_l, r_l)$, $l = 1, 2$, $B_k(r) \mapsto B_k$, $F_k^+(r) \mapsto E(a_1, r_1) \cap \partial B_k$, $F_k^-(r) \mapsto E(a_2, r_2) \cap \partial B_k$, $z_k(r) \mapsto z_k$, $k = 1, \dots, n$, $C(r) \mapsto (\mathbb{C}, \{E(a_1, r_1), E(a_2, r_2)\}, \{1, -1\})$ и убрав во всех обозначениях зависимость от r . Правая часть неравенства (11), как и в доказательстве теоремы 4, примет вид

$$n \operatorname{cap} C^* = 8n \frac{K(\tau^*)}{K'(\tau^*)},$$

где τ^* определено равенством (14). Для вычисления левой части (11) отобразим двусвязную область $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{E(a_1, r_1) \cup E(a_2, r_2)\}$ на круговое кольцо $1 < |\zeta| < R$. Известно, что величина R находится по формуле (15) [12, раздел А, § 7.5]. Осталось воспользоваться конформной инвариантностью емкости и тем фактом, что емкость конденсатора, для которого полем является кольцо $1 < |\zeta| < R$, а уровни потенциалов суть ± 1 , равна $8\pi / \log R$. Утверждение о равенстве в (13) вытекает из того, что в описанном в формулировке теоремы 5 случае во всех емкостных неравенствах и, следовательно, в неравенстве (11) имеет место знак равенства. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть γ – жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, разбивающая комплексную сферу на две односвязные области B_1 и B_2 , и пусть a_1, a_2 – различные конечные точки на кривой γ . Тогда при фиксированном $r_1 < |a_1 - a_2|$ равномерно по всем $z_k \in B_k$, $k = 1, 2$, выполняется асимптотическое неравенство

$$\prod_{k=1}^2 \prod_{l=1}^2 \omega(z_k, \gamma \cap E(a_l, r_l), B_k) \leq \left[\frac{16r_1}{\pi^2(|a_1 - a_2|^2 - r_1^2)} \right]^2 r_2^2 (1 + o(1)), \quad r_2 \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя в (13) при $n = 2$ асимптотические разложения для эллиптических интегралов [11, § 32], приходим к неравенству

$$\tau^* \leq \frac{4}{R} (1 + o(1)),$$

где τ^* и R определены равенствами (14) и (15). Элементарными вычислениями получаем отсюда требуемое неравенство. Следствие доказано.

§ 4. Гармоническая мера и производная Шварца

Для голоморфной в области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функции f производная Шварца в конечной точке z такой, что $f'(z) \neq 0$, определяется равенством

$$S_f(z) = \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2.$$

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что односвязные области B_k и точки z_k на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяют следующим условиям: $z_k \in B_k \setminus E$, $z_k \neq \infty$, $E \cap \partial B_k \neq \emptyset$, $k = 1, \dots, n$, $n \geq 1$, и $B_k \cap B_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$.

Пусть функция f_k конформно и однолистно отображает область B_k на единичный круг U так, что $f_k(z_k) = 0$, $f'_k(z_k) > 0$, $k = 1, \dots, n$. Тогда для любых вещественных φ_k , $k = 1, \dots, n$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{2i\varphi_k} \left[\frac{1}{3} S_{f_k}(z_k) - (f'_k(z_k))^2 \sin^2(\pi\omega_k) \right] \right) - (f'_k(z_k))^2 \cos(\pi\omega_k) \right\} \\ \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{e^{i(\varphi_l - \varphi_k)}}{(1 - \bar{z}_k z_l)^2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \frac{e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(z_k - z_l)^2}, \quad (16) \end{aligned}$$

где $\omega_k = \omega(z_k, \alpha_k, B_k)$ и α_k – произвольный континуум, принадлежащий множеству $E \cap \partial B_k$, $k = 1, \dots, n$. Равенство в (16) достигается для симметричных точек $z_k^* = R \exp\{2\pi i k/n\}$, областей $B_k^* = \{z: |z| > 1, |\arg z - 2\pi k/n| < \pi/n\}$ и $\varphi_k = 2\pi k/n$, $k = 1, \dots, n$, при любом $R > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Γ_k образ α_k при отображении f_k в смысле граничного соответствия, $k = 1, \dots, n$. При достаточно малых положительных ρ и r определены следующие конденсаторы:

$$\begin{aligned} C(r) &= (U^*, \{T, E(z_1 + \rho e^{i\varphi_1}, r), \dots, E(z_n + \rho e^{i\varphi_n}, r), \\ &\quad E(z_1 - \rho e^{i\varphi_1}, r), \dots, E(z_n - \rho e^{i\varphi_n}, r)\}, \{0, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1\}), \\ C_k(r) &= (B_k, \{\alpha_k, E(z_k + \rho e^{i\varphi_k}, r), E(z_k - \rho e^{i\varphi_k}, r)\}, \{0, 1, -1\}), \\ f_k(C_k(r)) &= (U, \{\Gamma_k, f_k(E(z_k + \rho e^{i\varphi_k}, r)), f_k(E(z_k - \rho e^{i\varphi_k}, r))\}, \{0, 1, -1\}), \\ C_k^*(r) &= \left(\mathbb{C}_w \setminus \Gamma_k, \left\{ \Gamma_k, f_k(E(z_k + \rho e^{i\varphi_k}, r)), f_k(E(z_k - \rho e^{i\varphi_k}, r)) \right\}, \right. \\ &\quad \left. \left\{ w: \frac{1}{w} \in f_k(E(z_k + \rho e^{i\varphi_k}, r)) \right\}, \left\{ w: \frac{1}{w} \in f_k(E(z_k - \rho e^{i\varphi_k}, r)) \right\} \right\}, \\ &\quad \{0, 1, -1, 1, -1\} \Big), \end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$. Так же, как при доказательстве теоремы 1, мы получаем неравенство (4). Левую часть этого неравенства вычисляем по лемме 1:

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} C(r) &= -4\pi n \frac{1}{\log r} - 2\pi \left\{ \sum_{k=1}^n \log [(|z_k + \rho e^{i\varphi_k}|^2 - 1)(|z_k - \rho e^{i\varphi_k}|^2 - 1)] \right. \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \log \left| \frac{1 - \overline{(z_k + \rho e^{i\varphi_k})}(z_l - \rho e^{i\varphi_l})}{z_k - z_l + \rho(e^{i\varphi_k} + e^{i\varphi_l})} \right| \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \log \left| \frac{[1 - \overline{(z_k + \rho e^{i\varphi_k})}(z_l + \rho e^{i\varphi_l})][1 - \overline{(z_k - \rho e^{i\varphi_k})}(z_l - \rho e^{i\varphi_l})]}{[z_k - z_l + \rho(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_l})][z_k - z_l - \rho(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_l})]} \right| \right\} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Элементарно проверяется, что имеют место следующие разложения:

$$\begin{aligned}
 & \log \left| \frac{[(z_k + \rho e^{i\varphi_k})(\overline{z_k + \rho e^{i\varphi_k}}) - 1][(z_k - \rho e^{i\varphi_k})(\overline{z_k - \rho e^{i\varphi_k}}) - 1]}{[1 - (z_k + \rho e^{i\varphi_k})(z_k - \rho e^{i\varphi_k})]^2} \right| \\
 & \quad = -\frac{4}{(|z_k|^2 - 1)^2} \rho^2 + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0; \\
 & \log \left| \frac{[1 - (\overline{z_k + \rho e^{i\varphi_k}})(z_k + \rho e^{i\varphi_l})][1 - (\overline{z_k - \rho e^{i\varphi_k}})(z_l - \rho e^{i\varphi_l})]}{[1 - (\overline{z_k + \rho e^{i\varphi_k}})(z_l - \rho e^{i\varphi_l})]^2} \right| \\
 & \quad = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{z_l e^{-i\varphi_k} - \bar{z}_k e^{i\varphi_l}}{1 - \bar{z}_k z_l} \rho - \frac{4e^{i(\varphi_l - \varphi_k)}}{(1 - \bar{z}_k z_l)^2} \rho^2 \right\} + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0; \\
 & \log \left| \frac{[z_k - z_l + \rho(e^{i\varphi_k} + e^{i\varphi_l})]^2}{[z_k - z_l + \rho(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_l})][z_k - z_l - \rho(e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_l})]} \right| \\
 & \quad = \operatorname{Re} \left\{ 2 \frac{e^{i\varphi_k} + e^{i\varphi_l}}{z_k - z_l} \rho - \frac{4e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(z_k - z_l)^2} \rho^2 \right\} + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, выражение в фигурных скобках в (17) имеет вид

$$2n \log(2\rho) - 4 \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{(|z_k|^2 - 1)^2} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \left(\frac{e^{i(\varphi_l - \varphi_k)}}{(1 - \bar{z}_k z_l)^2} + \frac{e^{i(\varphi_l + \varphi_k)}}{(z_k - z_l)^2} \right) \right] \rho^2 + o(\rho^2). \quad (18)$$

Каждое слагаемое в правой части (4) также вычисляется по лемме 1:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cap} C_k^*(r) &= -8\pi \frac{1}{\log r} - 2\pi \left\{ 2 \log \left| \frac{f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}) f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})}{f'_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}) f'_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})} \right| \right. \\
 & \quad + \log \left[r(\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k, f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k})) r(\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k, f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})) \right. \\
 & \quad \quad \times r\left(\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k, \frac{1}{f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k})}\right) r\left(\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k, \frac{1}{f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})}\right) \Big] \\
 & \quad + 2 \left[g_{\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k} \left(f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}), \frac{1}{f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k})} \right) \right. \\
 & \quad \quad + g_{\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k} \left(f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k}), \frac{1}{f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})} \right) \\
 & \quad \quad - g_{\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k} \left(f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k}), \frac{1}{f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k})} \right) \\
 & \quad \quad - g_{\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k} \left(f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}), \frac{1}{f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})} \right) \\
 & \quad \quad \left. \left. - 2g_{\overline{\mathbb{C}_w} \setminus \Gamma_k}(f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}), f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})) \right] \right\} \\
 & \quad \times \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Простые вычисления дают

$$\log \left| \frac{f_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}) f_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})}{f'_k(z_k + \rho e^{i\varphi_k}) f'_k(z_k - \rho e^{i\varphi_k})} \right| = 2 \log \rho - \operatorname{Re} \left[e^{2i\varphi_k} \left(\frac{4a_{3k}}{a_{1k}} - \frac{3a_{2k}^2}{a_{1k}^2} \right) \right] \rho^2 + o(\rho^2),$$

$$\rho \rightarrow 0,$$

где $f_k(z) = a_{1k}(z - z_k) + a_{2k}(z - z_k)^2 + a_{3k}(z - z_k)^3 + \dots$, $k = 1, \dots, n$. Используя также вычисления, проведенные в [5] при доказательстве теоремы 7.34, приходим к выводу, что выражение в фигурных скобках в (19) имеет вид

$$4 \log \rho - 2 \operatorname{Re} \left[e^{2i\varphi_k} \left(\frac{4a_{3k}}{a_{1k}} - \frac{3a_{2k}^2}{a_{1k}^2} \right) \right] \rho^2 + 4 \log 2 + 8|a_{1k}|^2 \rho^2 \cos(\pi\omega_k) + 4 \operatorname{Re} \left[\left(\frac{a_{2k}^2}{2a_{1k}^2} + a_{1k}^2 \sin^2(\pi\omega_k) \right) e^{2i\varphi_k} \right] \rho^2 + o(\rho^2), \quad \rho \rightarrow 0. \quad (20)$$

Подставляя в (4) разложения (17) и (19) и принимая во внимание (18) и (20), приходим к неравенству (16). Утверждение о знаке равенства вытекает из того, что в случае симметричных точек z_k^* , областей B_k^* и $\varphi_k = \arg z_k^*$, $k = 1, \dots, n$, в неравенстве для емкостей конденсаторов (4) имеет место равенство. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 6. Пусть $z = g(w)$ – голоморфная и однолистная в круге $U = \{w: |w| < 1\}$ функция, и пусть α – континуум на границе $\partial g(U)$, лежащий в круге $E(z_1, r)$, $0 < r < |z_0 - z_1|$, $z_0 = g(0)$. Тогда

$$\frac{1}{3} |S_g(0)| \leq 2 \cos(\pi\omega) + \sin^2(\pi\omega) + \frac{2|g'(0)|^2 r^2}{(r^2 - |z_0 - z_1|^2)^2}, \quad (21)$$

где $\omega = \omega(z_0, \alpha, g(U))$. Равенство в (21) достигается для функции g , которая конформно и однолистно отображает круг U на область $\mathbb{C} \setminus E(z_1, r)$ с разрезом вдоль луча $\{z = (z_1 - z_0)t: t \geq (|z_1 - z_0| + r)/|z_1 - z_0|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (16) при $n = 1$ в терминах обратной функции $h = f^{-1}$ имеет вид

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(e^{2i\varphi} \left[-\frac{1}{3} \frac{S_h(0)}{(h'(0))^2} - \frac{\sin^2(\pi\omega)}{(h'(0))^2} \right] \right) \leq \frac{\cos(\pi\omega)}{(h'(0))^2} + \frac{1}{(1 - |h(0)|^2)^2}. \quad (22)$$

Учитывая произвольность φ , получаем отсюда

$$\frac{1}{3} |S_h(0)| \leq 2 \cos(\pi\omega) + \sin^2(\pi\omega) + \frac{2|h'(0)|^2}{(1 - |h(0)|^2)^2}.$$

Осталось применить последнее неравенство к функции $h(w) = (g(e^{i\theta}w) - z_1)/r$, где вещественное число θ подобрано так, чтобы $h'(0) > 0$. Случай равенства проверяется непосредственно. Следствие доказано.

При $r \rightarrow 0$ имеет место сходимость $\omega \rightarrow 0$ и неравенство (21) дает классическую оценку

$$|S_g(0)| \leq 6.$$

Возможно, неравенство (21) представляет интерес в связи с геометрическими оценками производной Шварца, которые можно было бы получить из оценок гармонической меры и внутреннего радиуса $r(g(U), z_0) = |g'(0)|$ (ср. [7, с. 384]).

СЛЕДСТВИЕ 7. *Предположим, что голоморфная и однолистная в круге U_w функция*

$$z = g(w) = c_1 w + \dots, \quad c_1 > 0,$$

отображает этот круг на круг U_z с разрезом вдоль некоторой кривой β . Тогда

$$2 \cos(\pi\omega) - \sin^2(\pi\omega) \leq 2c_1^2 + \frac{1}{3} \operatorname{Re} S_g(0), \quad \omega = \omega(0, \beta, U_z \setminus \beta).$$

Равенство достигается, например, для функций Пика, отображающих круг U_w на круг U_z с радиальным разрезом на вещественной положительной полуоси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При любом фиксированном ρ , $0 < \rho < 1$, функция

$$\zeta = H(z) = \frac{1 - \rho z}{\rho - z}$$

конформно и однолистно отображает круг U_z на область $|\zeta| > 1$. Применяя (22) при $\varphi = 0$ к суперпозиции $h(w) = H(g(w))$, приходим к неравенству

$$-\frac{1}{3} \operatorname{Re} S_g(0) \leq 2 \cos(\pi\tilde{\omega}) + \sin^2(\pi\tilde{\omega}) + 2c_1^2,$$

где $\tilde{\omega} = \omega(1/\rho, T_\zeta, h(U_w)) = \omega(0, T_z, g(U_w)) = 1 - \omega$. Согласно теореме 6 равенство в последнем соотношении достигается для функции Пика, отображающей круг U_w на круг U_z с разрезом по отрезку $[\rho, 1]$. Следствие доказано.

Список литературы

1. C. J. Bishop, L. Carleson, J. B. Garnett, P. W. Jones, “Harmonic measures supported on curves”, *Pacific J. Math.*, **138**:2 (1989), 233–236.
2. A. Beurling, *Études sur un problème de majoration*, Thèse pour le doctorat, Almqvist & Wiekse, Uppsala, 1933, 109 pp.
3. Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, Grundlehren Math. Wiss., **299**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, x+300 pp.
4. Г. В. Кузьмина, “Методы геометрической теории функций. II”, *Алгебра и анализ*, **9**:5 (1997), 1–50; англ. пер.: G. V. Kuz'mina, “Methods of the geometric theory of functions. II”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:5 (1998), 889–930.
5. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009, 390 с.
6. В. Н. Дубинин, “О приведенном модуле комплексной сферы”, *Сиб. матем. журн.*, **55**:5 (2014), 1078–1090; англ. пер.: V. N. Dubinin, “On the reduced modulus of the complex sphere”, *Sib. Math. J.*, **55**:5 (2014), 882–892.
7. J. B. Garnett, D. E. Marshall, *Harmonic measure*, New Math. Monogr., **2**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005, xvi+571 pp.

8. В. Н. Дубинин, “Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 774–792; англ. пер.: V. N. Dubinin, “Some properties of the reduced inner modulus”, *Sib. Math. J.*, **35**:4 (1994), 689–705.
9. V. N. Dubinin, M. Vuorinen, “An extremal decomposition problem for harmonic measure”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **140**:7 (2012), 2441–2446.
10. M. Marcus, “Radial averaging of domains, estimates for Dirichlet integrals and applications”, *J. Anal. Math.*, **27**:1 (1974), 47–78.
11. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, 2-е изд., Наука, М., 1970, 304 с.; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Elements of the theory of elliptic functions*, Transl. Math. Monogr., **79**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, vii+237 pp.
12. В. Коппенфельс, Ф. Штальман, *Практика конформных отображений*, ИЛ, М., 1963, 406 с.; пер. с нем.: W. von Koppenfels, F. Stallmann, *Praxis der konformen Abbildung*, Grundlehren Math. Wiss., **100**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1959, xiii+375 pp.

Владимир Николаевич Дубинин

(VLADIMIR N. DUBININ)

Институт прикладной математики

Дальневосточного отделения

Российской академии наук, г. Владивосток;

Дальневосточный федеральный университет,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило в редакцию

06.11.2014

23.06.2015