Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Кузнецов, О многообразиях Кюхле с числом Пикара, большим 1, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 4, 57–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8339>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 15:49:47

УДК 512.7

А. Г. Кузнецов

О многообразиях Кюхле с числом Пикара, большим 1

Описана геометрия многообразий Кюхле (т.е. четырехмерных многообразий Фано индекса 1, представимых как схема нулей сечения эквивариантного расслоения на многообразии Грассмана) с числом Пикара, большим 1, а также структура их производных категорий.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: многообразия Фано, специальные многообразия, полуортогональные разложения производных категорий.

DOI: 10.4213/im8339

§ 1. Введение

О. Кюхле в 1995 г. в работе [1] классифицировал все многообразия Фано размерности 4 и индекса 1, которые представляются как схемы нулей сечений эквивариантных расслоений на многообразиях Грассмана. Его список, насчитывающий 21 многообразие, можно рассматривать как первый шаг в классификации четырехмерных многообразий Фано. По-прежнему этот список является главным источником примеров таких многообразий. Однако геометрия многообразий Кюхле до сих пор не исследована. Настоящая работа является первым шагом в этом направлении.

Мы ограничимся рассмотрением многообразий Кюхле с числом Пикара, большим 1. В списке присутствуют четыре таких многообразия, каждое из них является схемой нулей глобального сечения расслоения на грассманиане, а именно:

(b4) расслоения $S^2\mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{O}(2)$ на $\mathrm{Gr}(2, 6)$;

(b9) расслоения $S^2\mathcal{U}^\vee \oplus S^2\mathcal{U}^\vee$ на $\mathrm{Gr}(2, 7)$;

(c7) расслоения $\Lambda^2\mathcal{U}^\perp(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathrm{Gr}(3, 8)$;

(d3) расслоения $\Lambda^2\mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2\mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathrm{Gr}(5, 10)$.

Здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^\perp$ – тавтологические подрасслоения рангов k и $n - k$ соответственно на грассманиане $\mathrm{Gr}(k, n)$, а $\mathcal{O}(1)$ – обильная порождающая группы Пикара. Основной результат статьи – альтернативное описание этих многообразий, дающее намного лучшее понимание их геометрии. В частности, мы пользуемся им для описания структуры производной категории когерентных пучков на этих многообразиях.

На самом деле для многообразия типа (b4) альтернативное описание очевидно, а в случае (b9) оно дается недавним результатом Касагранде [2]. Далее,

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

случай (d3) также несложен и, как автор подозревает, известен экспертам, хотя никакой ссылки найти не удалось. Наконец, случай (с7) сложнее, но также вполне решаем. Описание многообразия этого типа и является главным результатом работы.

Естественно, упрощенное описание для рассматриваемых многообразий Кюхле возможно по той причине, что их группа Пикара имеет большой ранг, т. е. сами многообразия обладают дополнительной структурой, которую можно использовать. Трудно ожидать чего-либо похожего для остальных многообразий Кюхле. Их геометрия должна быть более сложной, но в то же время и более интересной.

Отметим два особенно интересных вопроса, связанных с геометрией остальных многообразий Кюхле. Первый вопрос касается двух многообразий из списка Кюхле, обладающих общим набором дискретных инвариантов. Это схемы нулей глобальных сечений векторных расслоений на грассманианах, а именно:

(b3) расслоения $\Lambda^3 \mathcal{U}^\perp(2)$ на $\mathrm{Gr}(2, 6)$;

(b7) расслоения $\mathcal{O}(1)^{\oplus 6}$ на $\mathrm{Gr}(2, 7)$.

ВОПРОС 1.1. Являются ли многообразия Кюхле типов (b3) и (b7) деформационно эквивалентными?

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Вскоре после публикации предварительной версии настоящей статьи Лоран Манивель дал в [3] положительный ответ на этот вопрос.

Второй вопрос касается еще одного многообразия:

(с5) схема нулей глобального сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{U}^\perp(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathrm{Gr}(3, 7)$.

Вычисления, приведенные в работе Кюхле, показывают, что ромб Ходжа этого многообразия содержит в себе ромб Ходжа КЗ-поверхности, поэтому можно ожидать, что это многообразие аналогично четырехмерной кубике. В частности, естественно ожидать, что его производная категория содержит некоммутативную КЗ-поверхность в качестве одной из компонент (ср. [4]) и что по схемам Гильберта рациональных кривых на этом многообразии могут быть построены гиперкэлеровы многообразия по аналогии со схемой Фано прямых [5] и схемой Гильберта скрученных кубик [6] на четырехмерной кубике. Кроме того, вопросы рациональности для данных многообразий могут быть весьма интересны.

ВОПРОС 1.3. Существует ли полуортогональное разложение производной категории многообразия Кюхле типа (с5), содержащее некоммутативную КЗ-поверхность в качестве одной из компонент? Возникает ли гиперкэлерова структура на схемах Гильберта кривых? Что можно сказать о рациональности многообразий этого типа?

Отметим, что многообразия типов (d3) и (с7), рассматриваемые в настоящей работе, также содержат ромб Ходжа КЗ-поверхности, поэтому вопрос 1.3 можно было бы адресовать и к ним. Однако упрощенное описание этих многообразий, устанавливаемое в §3, 4, отвечает (до некоторой степени) на этот вопрос. Для многообразий типа (d3) ответ тривиален (все многообразия рациональны, их производная категория содержит коммутативную КЗ-поверхность

в качестве одной из компонент, а схемы Гильберта кривых должны сводиться к многообразиям модулей пучков на ассоциированной КЗ-поверхности). Для многообразий типа (с7) вопрос сводится к аналогичному вопросу для специальных четырехмерных кубик.

Выражаю благодарность А. Илиеву, рассказавшему мне о работе Кюхле и заинтересовавшему меня изучением геометрии этих многообразий, а также Ч. Касагранде и С. Галкину за обсуждения геометрии многообразия типа (b9).

§ 2. Многообразие типов (b4) и (b9)

2.1. Тип (b4). Напомним, что многообразие Кюхле типа (b4) является схемой нулей глобального сечения расслоения $S^2\mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{O}(2)$ на грассманиане $\mathrm{Gr}(2, 6)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Гладкое многообразие Кюхле X_{b4} типа (b4) является пересечением дивизоров бистепени $(1, 1)$ и $(2, 2)$ в $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Глобальное сечение расслоения $S^2\mathcal{U}^\vee$ на $\mathrm{Gr}(2, 6)$ задается квадратичной формой на соответствующем 6-мерном векторном пространстве $V = \mathbb{C}^6$, а его схема нулей есть не что иное, как схема Фано прямых на ассоциированной квадрике в $\mathbb{P}(V)$. В случае вырожденной квадрики данная схема нулей имеет особенности размерности не меньше 3, поэтому соответствующее многообразие X_{b4} также особо. Следовательно, можно считать, что квадратика невырождена. Однако невырожденная квадратика в $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^5$ может быть отождествлена с грассманианом $\mathrm{Gr}(2, W) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 W)$ для 4-мерного векторного пространства $W = \mathbb{C}^4$, а схема Фано прямых на $\mathrm{Gr}(2, W)$ отождествляется с многообразием частичных флагов $\mathrm{Fl}(1, 3; W)$. В свою очередь многообразие флагов $\mathrm{Fl}(1, 3; W)$ является дивизором бистепени $(1, 1)$ в $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W^\vee)$ (соответствующим естественному спариванию между W и $W^\vee$), причем при этом отождествлении ограничение образующей группы $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}(2, V))$ соответствует классу дивизоров бистепени $(1, 1)$ на $\mathrm{Fl}(1, 3; W) \subset \mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(W^\vee)$. Следовательно, дополнительная схема нулей сечения линейного расслоения $\mathcal{O}(2)$ на $\mathrm{Gr}(2, V)$ эквивалентна схеме нулей сечения линейного расслоения $\mathcal{O}(2, 2)$ на $\mathrm{Fl}(1, 3; W)$. Предложение доказано.

Обозначим через h обратный образ относительно проекции $X_{b4} \rightarrow \mathbb{P}(W)$ положительной образующей группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(W))$.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Многообразие Кюхле X_{b4} типа (b4) обладает структурой расслоения на коники над $\mathbb{P}^3$. Для общего многообразия X_{b4} дискриминант этого расслоения на коники является поверхностью степени 8 в $\mathbb{P}^3$ с 80 обыкновенными двойными точками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция $\mathrm{Fl}(1, 3; W) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ является проективизацией расслоения $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$, а дивизор бистепени $(2, 2)$ задает на $\Omega_{\mathbb{P}(W)}$ квадратичную форму, т.е. симметрическое отображение $\Omega_{\mathbb{P}(W)} \rightarrow T_{\mathbb{P}(W)}$. Согласно [7] классы дискриминанта и схемы точек коранга 2 для такого отображения представляют классы когомологий $2c_1(T_{\mathbb{P}(W)})$ и $4(c_1(T_{\mathbb{P}(W)})c_2(T_{\mathbb{P}(W)}) - c_3(T_{\mathbb{P}(W)}))$ соответственно. Подставляя сюда $c_1(T_{\mathbb{P}(W)}) = 4h$, $c_2(T_{\mathbb{P}(W)}) = 6h^2$ и $c_3(T_{\mathbb{P}(W)}) = 4h^3$,

закключаем, что дискриминант является поверхностью степени 8, а ее множество особенностей представляет класс $4(4h \cdot 6h^2 - 4h^3) = 4(24h^3 - 4h^3) = 80h^3$. Для общего многообразия X_{b_4} отсюда следует, что схема точек коранга 2 состоит из 80 точек, которые являются единственными особенностями дискриминанта. Следствие доказано.

Пользуясь данным описанием, легко построить разложение производной категории.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Пусть $X = X_{b_4}$. Тогда существует полуортогональное разложение*

$$\mathbf{D}(X_{b_4}) = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(h), \mathcal{O}_X(2h), \mathcal{O}_X(3h), \mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0) \rangle,$$

где

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(W)} \oplus \Omega_{\mathbb{P}(W)}^2$$

– пучок четных частей алгебр Клиффорда, ассоциированный с расслоением на коники $X \rightarrow \mathbb{P}(W)$. Категория $\mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0)$ является скрученной категорией Калаби–Яу размерности 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [8, теорема 4.2] структура расслоения на коники многообразия X дает двухкомпонентное полуортогональное разложение $\mathbf{D}(X) = \langle \mathbf{D}(\mathbb{P}(W)), \mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0) \rangle$. Принимая во внимание стандартный исключительный набор в производной категории проективного пространства $\mathbb{P}(W)$, получаем первое утверждение. Явная формула для пучка четных частей алгебр Клиффорда в данном случае получается применением [8, формула (12)]. Наконец, чтобы проверить свойство Калаби–Яу для категории $\mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0)$, воспользуемся [9, теорема 5.3]. Заметим, что многообразие $\text{Fl}(1, 3; W)$ является $\mathbb{P}^2$ -расслоением над $\mathbb{P}(W)$ и поэтому обладает прямоугольным лешфещевым разложением

$$\mathbf{D}(\text{Fl}(1, 3; W)) = \langle \mathbf{D}(\mathbb{P}(W)), \mathbf{D}(\mathbb{P}(W)) \otimes \mathcal{O}(1, 1), \mathbf{D}(\mathbb{P}(W)) \otimes \mathcal{O}(2, 2) \rangle.$$

Применяя [9, теорема 5.3], заключаем, что квадрат функтора Серра категории $\mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0)$ изоморфен сдвигу на 6. Следовательно, композиция функтора Серра со сдвигом на -3 является некоторой инволюцией τ , поэтому категория может быть рассмотрена как скрученная на эту инволюцию τ категория Калаби–Яу.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Можно рассмотреть эквивариантную относительно заданного инволюцией τ действия группы $\mathbb{Z}/2$ категорию $\mathbf{D}(\mathbb{P}(W), \mathcal{E}_0)^\tau$ (в смысле работы [10]). Данная категория будет уже нескрученной категорией Калаби–Яу размерности 3. Было бы интересно изучить ее свойства.

2.2. Тип (b9). Многообразия данного типа были недавно изучены в работе [2]; в частности, доказана следующая

ТЕОРЕМА 2.5 [2, § 3.2]. *Пусть X_{b_9} – четырехмерное многообразие Кюхле типа (b9). Тогда существуют семь точек общего положения $x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{P}^4$,*

так что X_{b9} получается из раздутия $\text{Bl}_{x_1, \dots, x_7} \mathbb{P}^4$ в этих семи точках применением 22 антифлипов в собственных прообразах 21 прямой L_{ij} , проходящих через точки x_i и x_j , и собственного прообраза рациональной нормальной кривой C , проходящей через все семь точек.

Данный результат имеет следствие для структуры производной категории.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Категория $\mathbf{D}(X_{b9})$ обладает полным исключительным набором длины 48.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проективное пространство $\mathbb{P}^4$ обладает исключительным набором длиной 5. При раздутии семи точек согласно теореме Орлова о раздутии добавятся по три исключительных объекта для каждой из этих точек, что в целом дает еще $7 \cdot 3 = 21$ исключительный объект. Наконец, для каждого из 22 антифлипов согласно [11] мы должны добавить еще один исключительный объект. Итого получается полный исключительный набор длиной $5 + 21 + 22 = 48$.

§ 3. Многообразие типа (d3)

По определению четырехмерное многообразие Кюхле типа (d3) является схемой нулей общего сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\text{Gr}(5, 10)$. Тем самым, оно является гиперплоским сечением пятимерного многообразия M , определяемого как схема нулей сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee$ на $\text{Gr}(5, 10)$. Сначала мы опишем это многообразие. На самом деле мы докажем даже более общий результат, заменив $\text{Gr}(5, 10)$ на $\text{Gr}(n, 2n)$ с произвольным n .

3.1. Лагранжевы пространства для пучка кососимметрических форм. Пусть V – векторное пространство размерности $2n$, а $\lambda: \mathbb{C}^2 \rightarrow \Lambda^2 V^\vee$ – пучок кососимметрических форм. Пусть M_λ – схема нулей глобального сечения векторного расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee$ на $\text{Gr}(n, V)$, соответствующего этому пучку. Ясно, что она параметризует подпространства половинной размерности в V , являющиеся лагранжевыми для всех косых форм в пучке.

ТЕОРЕМА 3.1. Если M_λ гладко, то $M_\lambda \cong (\mathbb{P}^1)^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим прямую $L_\lambda \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^\vee)$, заданную пучком λ , и дискриминантную гиперповерхность $D \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^\vee)$, параметризующую вырожденные косые формы. Поскольку условие вырожденности косой формы описывается занулением ее детерминанта, который в свою очередь равен квадрату пфаффиана, мы видим, что D является гиперповерхностью степени n . Следовательно, пересечение $L_\lambda \cap D$ состоит из n точек (посчитанных с учетом кратностей), если, конечно, прямая не содержится в D целиком. Для каждой точки $\lambda_i \in L_\lambda \cap D$ обозначим через $K_i \subset V$ ядро косой формы λ_i . Покажем, что гладкость M_λ эквивалентна следующим двум условиям:

- 1) пересечение $L_\lambda \cap D = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ состоит из n различных точек;
- 2) для каждого $1 \leq i \leq n$ выполнено $\dim K_i = 2$, причем $V = K_1 \oplus \dots \oplus K_n$ – разложение в прямую сумму.

Для доказательства сначала заметим, что для данной косой формы λ_0 схема нулей соответствующего сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee$ на $\text{Gr}(n, V)$ особа в точке, соответствующей n -мерному подпространству $U \subset V$, тогда и только тогда, когда $\dim(U \cap \text{Ker } \lambda_0) \geq 2$, что проверяется простым локальным вычислением.

Теперь предположим, что $\dim K_i > 2$ для какого-то i . Выберем косую форму λ_0 в пучке λ , отличную от λ_i . Пусть $K_0 \subset K_i$ – двумерное подпространство, изотропное для λ_0 (оно существует, так как $\dim K_i > 2$). Пусть $K_0^\perp \subset V$ – ортогональное дополнение к K_0 относительно формы λ_0 . Тогда $K_0 \subset K_0^\perp$, так как K_0 изотропно для λ_0 . Пусть $V' := K_0^\perp / K_0$, так что $\dim V' = 2n - 4$. Заметим, что K_0 лежит в ядре ограничения на $K_0^\perp$ как формы λ_i , так и формы λ_0 , поэтому обе формы индуцируют косые формы λ'_i и λ'_0 на V' . Пусть $U' \subset V'$ – подпространство размерности $n - 2$, изотропное как для λ'_i , так и для λ'_0 (оно существует по соображениям размерности). Пусть $U \subset K_0^\perp \subset V$ – прообраз U' при проекции $K_0^\perp \rightarrow K_0^\perp / K_0 = V'$. По построению U – n -мерное подпространство в V , изотропное для обеих форм λ_i и λ_0 . Более того, $\dim(U \cap K_i) \geq 2$, поэтому схема нулей сечения λ_i на $\text{Gr}(n, V)$ особа в точке U , причем в то же время точка U содержится в схеме нулей сечения λ_0 . Следовательно, она является особой точкой пересечения схем нулей, т. е. особой точкой многообразия M_λ . Тем самым показано, что для гладкого многообразия M_λ выполнены равенства $\dim K_i = 2$ для всех i .

Заметим, что приведенное выше рассуждение также доказывает, что ядро K_i формы λ_i не изотропно по отношению к другим формам пучка (иначе бы мы могли взять $K_0 = K_i$ и повторить рассуждение), а это влечет трансверсальность прямой L_λ по отношению к D . Действительно, касательное пространство к D в точке λ_i есть пространство всех косых форм, зануляющихся на K_i , и, как мы только что заметили, прямая L_λ в нем не лежит. Трансверсальность означает, что имеется ровно n различных точек пересечения L_λ с D .

Остается установить разложение в прямую сумму. Возьмем невырожденную форму λ_0 в пучке. Покажем, что ядра K_i взаимно ортогональны относительно λ_0 , т. е. $\lambda_0(K_i, K_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Для этого заметим, что λ_0 является линейной комбинацией форм λ_i и λ_j , поэтому достаточно проверить, что $\lambda_i(K_i, K_j) = 0$ и $\lambda_j(K_i, K_j) = 0$. Оба эти равенства очевидны, поскольку K_i – ядро формы λ_i , а K_j – ядро формы λ_j . Поскольку, кроме того, ограничение формы λ_0 на каждое из подпространств K_i невырождено, разложение в прямую сумму доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. На самом деле мы доказали, что M_λ гладко тогда и только тогда, когда пучок косых форм в подходящем базисе записывается в блочно-диагональном виде

$$\lambda = u \operatorname{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ + v \operatorname{diag} \left(\begin{pmatrix} 0 & -a_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -a_2 \\ a_2 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & -a_n \\ a_n & 0 \end{pmatrix} \right),$$

где u и v – подходящие координаты в пучке, а числа $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ попарно различны. Это является аналогом стандартного вида пучка квадрик.

Покажем наконец, что M_λ изоморфно произведению

$$\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(K_n) \cong (\mathbb{P}^1)^n.$$

Для этого зададим отображение $M_\lambda \rightarrow \prod \mathbb{P}(K_i)$ следующим образом. Пусть $U \subset V$ – n -мерное векторное подпространство, изотропное относительно пучка λ . Пучок косых форм λ задает пучок отображений $\lambda: U \rightarrow U^\perp$. Пфаффиан косой формы λ в этом пучке выражается как детерминант соответствующего отображения $U \rightarrow U^\perp$, следовательно, все отображения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вырождены. Это означает, что пространство U нетривиально пересекается с каждым из ядер K_i , откуда имеем равенство

$$U = (U \cap K_1) \oplus (U \cap K_2) \oplus \cdots \oplus (U \cap K_n) \quad (3.1)$$

и $\dim(U \cap K_i) = 1$ для всех i . В самом деле, каждое из слагаемых в правой части (3.1) как минимум одномерно, а их сумма является прямой, поэтому размерность правой части в (3.1) не меньше n . С другой стороны, правая часть, очевидно, содержится в левой, а ее размерность равна n . Следовательно, обе части совпадают, и размерность каждого из слагаемых в правой части (3.1) в точности равна 1. Таким образом,

$$M \rightarrow \mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(K_n), \quad U \mapsto (U \cap K_1, U \cap K_2, \dots, U \cap K_n),$$

является корректно определенным отображением. Обратное отображение задается формулой

$$\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \cdots \times \mathbb{P}(K_n) \rightarrow M, \quad (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto \mathbb{C}u_1 \oplus \mathbb{C}u_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}u_n.$$

Чтобы проверить, что оно корректно определено, мы должны показать, что $\lambda(u_i, u_j) = 0$ для всех косых форм λ в пучке, а также для всех $u_i \in K_i$, $u_j \in K_j$. Это следует из того, что λ является линейной комбинацией форм λ_i и λ_j , а $\lambda_i(u_i, u_j) = \lambda_j(u_i, u_j) = 0$, так как $u_i \in K_i = \text{Ker } \lambda_i$ и $u_j \in K_j = \text{Ker } \lambda_j$ (мы уже использовали это рассуждение выше).

Построенные отображения, очевидно, взаимно обратны, что и доказывает теорему.

3.2. Гиперплоское сечение. В п. 3.1 было показано, что гладкая схема нулей сечения векторного расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee$ на $\text{Gr}(n, 2n)$ изоморфна $(\mathbb{P}^1)^n$. Теперь опишем ее гиперплоское сечение.

ЛЕММА 3.3. *Изоморфизм теоремы 3.1 отождествляет линейное расслоение $\mathcal{O}_{\text{Gr}(n, 2n)}(1)|_{M_\lambda}$ с линейным расслоением $\mathcal{O}(1, 1, \dots, 1)$ на $(\mathbb{P}^1)^n$. В частности, схема нулей общего сечения векторного расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\text{Gr}(n, 2n)$ изоморфна дивизору мультистепени $(1, 1, \dots, 1)$ в $(\mathbb{P}^1)^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Явный вид изоморфизма теоремы 3.1 показывает, что ограничение тавтологического расслоения $\mathcal{U}$ с $\text{Gr}(n, 2n)$ на $(\mathbb{P}^1)^n$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathcal{U}|_{(\mathbb{P}^1)^n} = \bigoplus_{i=1}^n p_i^* \mathcal{O}(-1),$$

где p_i – проекция $(\mathbb{P}^1)^n$ на i -й сомножитель. Теперь из равенства

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(n,2n)}(-1) = \det \mathcal{U}$$

следует, что его ограничение на $(\mathbb{P}^1)^n$ изоморфно

$$\bigotimes_{i=1}^n p_i^* \mathcal{O}(-1) = \mathcal{O}(-1, -1, \dots, -1),$$

что доказывает первое утверждение. Второе утверждение очевидно.

Рассмотрим дивизор мультистепени $(1, 1, \dots, 1)$ в произведении $\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_n)$, где $K_1, K_2, \dots, K_n$ – двумерные векторные пространства. Такой дивизор задается мультилинейной формой $s \in K_1^\vee \otimes K_2^\vee \otimes \dots \otimes K_n^\vee$, которую можно рассматривать как линейное отображение

$$s: K_n \rightarrow K_1^\vee \otimes K_2^\vee \otimes \dots \otimes K_{n-1}^\vee.$$

Оно дает пучок сечений линейного расслоения $\mathcal{O}(1, 1, \dots, 1)$ на $\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_{n-1})$. Обозначим через $Z \subset \mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_{n-1})$ пересечение соответствующих дивизоров.

ЛЕММА 3.4. *Проекция*

$$\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_n) \rightarrow \mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_{n-1})$$

отождествляет схему нулей X сечения s расслоения $\mathcal{O}(1, 1, \dots, 1)$ с раздутием $\mathbb{P}(K_1) \times \mathbb{P}(K_2) \times \dots \times \mathbb{P}(K_{n-1})$ в Z .

В частности, X рационально.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Рассматривая случай $n = 5$, получаем описание четырехмерного многообразия Кюхле типа (d3).

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Четырехмерное многообразие Кюхле X_{d3} изоморфно раздутию $(\mathbb{P}^1)^4$ в КЗ-поверхности Z , определенной как пересечение двух дивизоров мультистепени $(1, 1, 1, 1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Единственное, что необходимо проверить, – то, что многообразие Z , определенное выше, является КЗ-поверхностью. Однако это немедленно следует из формулы присоединения и теоремы Лефшеца.

Обозначим через h_i обратный образ на X_{d3} обильной образующей группы Пикара проективной прямой $\mathbb{P}(K_i)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. *Существует полуортогональное разложение*

$$\mathbf{D}(X_{d3}) = \langle \{ \mathcal{O}_X(k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 + k_4 h_4) \}_{0 \leq k_i \leq 1}, \mathbf{D}(Z) \rangle,$$

состоящее из 16 исключительных линейных расслоений и производной категории КЗ-поверхности Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является следствием теоремы Орлова о раздутии, примененной к стандартному исключительному набору на произведении проективных прямых.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Можно было бы предсказать появление КЗ-категории в $\mathbf{D}(X_{d3})$, воспользовавшись [9, теорема 5.3]. В самом деле, $\mathbf{D}(M)$, очевидно, обладает прямоугольным лефшецевым разложением длиной 2, поэтому, применяя теорему, немедленно получаем искомое утверждение.

§ 4. Многообразие типа (с7)

По определению четырехмерное многообразие Кюхле типа (с7) является схемой нулей общего сечения векторного расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\perp(1) \oplus \mathcal{O}(1)$ на $\mathrm{Gr}(3, 8)$. Так же, как и в случае (d3), мы сначала рассмотрим пятимерное многообразие M , определяемое как схема нулей сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}^\perp(1)$. Для удобства мы заменим грассманиан $\mathrm{Gr}(3, 8)$ на $\mathrm{Gr}(5, 8)$. Поскольку расслоение $\mathcal{U}^\perp$ на первом грассманиане изоморфно расслоению $\mathcal{U}$ на втором, пятимерное многообразие M является схемой нулей общего сечения расслоения $\Lambda^2 \mathcal{U}(1) \cong \Lambda^3 \mathcal{U}^\vee$ на $\mathrm{Gr}(5, 8)$.

Пусть $\lambda \in \Lambda^3 V^\vee$ – общая 3-форма на векторном пространстве V размерности 8. Пусть $M \subset \mathrm{Gr}(5, V)$ – схема нулей 3-формы λ , рассмотренной как сечение векторного расслоения $\Lambda^3 \mathcal{U}^\vee$. Иначе говоря, M – многообразие всех пятимерных подпространств $U \subset V$ таких, что ограничение формы λ на U равно нулю (можно сказать, что такие U изотропны). Ниже мы покажем, что M изоморфно раздутию $\mathbb{P}^5$ в поверхности Веронезе.

4.1. Раздутие $\mathbb{P}^5$ в поверхности Веронезе. Пусть W – векторное пространство размерности 3. Рассмотрим вложение Веронезе $\mathbb{P}(W) \rightarrow \mathbb{P}(S^2 W)$. Пусть Y – раздутие $\mathbb{P}(S^2 W)$ с центром в $\mathbb{P}(W)$.

ЛЕММА 4.1. *Существует вложение $Y \subset \mathbb{P}(S^2 W) \times \mathbb{P}(S^2 W^\vee)$ такое, что*

$$Y = \{(C, C') \in \mathbb{P}(S^2 W) \times \mathbb{P}(S^2 W^\vee) \mid C \cdot C' = t \cdot 1_W \text{ для некоторого } t \in \mathbb{C}\},$$

где $C \cdot C' \in \mathbb{P}(W \otimes W^\vee)$ – образ $C \otimes C'$ относительно естественного отображения $S^2 W \otimes S^2 W^\vee \rightarrow W \otimes W^\vee$. Проекции $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}(S^2 W)$ и $\pi': Y \rightarrow \mathbb{P}(S^2 W^\vee)$ являются раздутиями поверхностей Веронезе $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(S^2 W)$ и $\mathbb{P}(W^\vee) \subset \mathbb{P}(S^2 W^\vee)$. Группа Пикара многообразия Y порождается прообразами H и H' положительных образующих групп $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(S^2 W))$ и $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}(S^2 W^\vee))$ соответственно. Исключительные дивизоры E и E' раздутий π и π' имеют вид

$$E = 2H - H', \quad E' = 2H' - H,$$

а канонический класс выражается формулой

$$K_Y = 2E - 6H = 2E' - 6H' = -2(H + H').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим рациональное отображение

$$\mathbb{P}(S^2 W) \rightarrow \mathbb{P}(S^2 W^\vee),$$

заданное формулой $C \mapsto \widehat{C}$, где $\widehat{C}$ – присоединенная матрица к C . Можно проверить, что Y является графиком этого отображения. Кроме того, Y может быть отождествлено с пространством полных квадратик в $\mathbb{P}(W)$. Все свойства многообразия Y хорошо известны. Лемма доказана.

Рассмотрим естественное действие группы $\mathrm{GL}(W)$ на Y .

ЛЕММА 4.2. *Действие группы $\mathrm{GL}(W)$ на Y имеет ровно четыре орбиты:*

$$Y_0 = \{(C, C') \mid r(C) = 3, r(C') = 3, C' = \widehat{C}\},$$

$$y_0 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$Y_1 = \{(C, C') \mid r(C) = 2, r(C') = 1, C' = \widehat{C}\},$$

$$y_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$Y_2 = \{(C, C') \mid r(C) = 1, r(C') = 2, C = \widehat{C'}\},$$

$$y_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$Y_3 = \{(C, C') \mid r(C) = 1, r(C') = 1, C \cdot C' = 0\},$$

$$y_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

а точки $y_0, y_1, y_2, y_3 \in Y$ являются представителями соответствующих орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится прямым вычислением.

Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned} c: \Lambda^2 W^\vee \otimes \mathcal{O}_Y(-H) &\rightarrow W \otimes W^\vee \otimes \mathcal{O}_Y, & \xi' &\mapsto C \cdot \xi', \\ c': \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_Y(-H') &\rightarrow W \otimes W^\vee \otimes \mathcal{O}_Y, & \xi &\mapsto \xi \cdot C'. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4.3. *Сумма отображений c и c'*

$$\Lambda^2 W^\vee \otimes \mathcal{O}_Y(-H) \oplus \Lambda^2 W \otimes \mathcal{O}_Y(-H') \xrightarrow{c+c'} W \otimes W^\vee \otimes \mathcal{O}_Y$$

имеет постоянный ранг, равный 3. Образ $\mathfrak{g} := \mathrm{Im}(c+c')$ этой суммы является векторным подрасслоением ранга 3 в $\mathfrak{sl}(W) \otimes \mathcal{O}_X$, причем каждый его слой является подалгеброй Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение, очевидно, $\mathrm{GL}(W)$ -эквивариантно, поэтому достаточно вычислить его в точках y_0, y_1, y_2, y_3 . Прямое вычисление показывает, что образами в каждой из этих точек являются следующие пространства (3×3) -матриц:

$$\begin{aligned} g_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \right\}, & g_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ g_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{pmatrix} \right\}, & g_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

соответственно. Каждое из этих пространств трехмерно и состоит из матриц со следом, равным нулю, откуда следует первое утверждение. Кроме того, каждое из этих подпространств является подалгеброй Ли в $\mathfrak{sl}(W)$, что дает второе утверждение.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(W, C')$ – является специальной ортогональной алгеброй Ли (относительно соответствующей формы C').

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Каждая из подалгебр Ли, являющихся слоем $\mathfrak{g}$, обладает следующим забавным свойством: для каждого вектора в W и каждого ковектора в $W^\vee$ найдется ненулевой элемент ξ в подалгебре, аннулирующий этот вектор (ковектор).

4.2. Изотропные пятимерные подпространства для 3-формы на восьмимерном пространстве. Теперь можно связать многообразие Y , рассматривавшееся в п. 4.1, со схемой $M \subset \mathrm{Gr}(5, V)$ изотропных пятимерных подпространств в векторном пространстве V размерности 8 относительно 3-формы $\lambda \in \Lambda^3 V^\vee$. Действительно, отождествим пространство V с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(W)$. Поскольку $\mathfrak{sl}(W)$ обладает естественным невырожденным скалярным произведением (формой Киллинга), можно рассмотреть ортогональное дополнение $\mathfrak{g}^\perp$ относительно него к подрасслоению $\mathfrak{g}$, определенному в лемме 4.3. Тогда $\mathfrak{g}^\perp \subset \mathfrak{sl}(W) \otimes \mathcal{O}_Y = V \otimes \mathcal{O}_Y$ является векторным подрасслоением ранга 5 и тем самым задает морфизм

$$\varphi: Y \rightarrow \mathrm{Gr}(5, V).$$

Остается построить 3-форму на V и показать, что Y отождествляется этим отображением с подмногообразием $M \subset \mathrm{Gr}(5, V)$.

ЛЕММА 4.6. *На присоединенном представлении $\mathfrak{sl}(W)$ группы $\mathrm{SL}(W)$ существует единственная $\mathrm{SL}(W)$ -инвариантная 3-форма λ . Она задается формулой*

$$\lambda(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \mathrm{Tr}([\xi_1, \xi_2]\xi_3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что правая часть равенства является кососимметрической формой. Действительно, λ кососимметрична по первым двум аргументам, поэтому остается проверить ее инвариантность относительно циклической перестановки, что, очевидно, следует из циклической инвариантности

следа. Наконец, прямое вычисление с использованием правила Литтлвуда–Ричардсона показывает, что

$$\Lambda^3(\mathfrak{sl}(W)) \cong \Sigma^{2,0,-2}W \oplus S^3W^\vee \oplus S^3W \oplus \mathfrak{sl}(W) \oplus \mathbb{C}$$

– изоморфизм представлений группы $\mathrm{SL}(W)$. Мы видим, что тривиальное представление имеет кратность 1, поэтому инвариантная 3-форма единственна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. *Форма λ является общей 3-формой на векторном пространстве размерности 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – векторное пространство размерности 8. Напомним, что согласно [12, табл. 1] действие группы $\mathrm{SL}(V)$ на пространстве 3-форм $\mathbb{P}(\Lambda^3V^\vee)$ имеет плотную орбиту, причем алгебра Ли стабилизатора общей 3-формы изоморфна $\mathfrak{sl}_3 \subset \mathfrak{sl}(V)$, а ограничение представления V на $\mathfrak{sl}_3$ изоморфно присоединенному представлению. Следовательно, мы можем отождествить

$$V \cong \mathfrak{sl}(W),$$

так что общая 3-форма на V отождествится с $\mathrm{SL}(W)$ -инвариантной 3-формой на $\mathfrak{sl}(W)$. Поскольку, как мы показали, форма λ является единственной такой формой, предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. В подходящем базисе форма λ может быть записана явно в виде

$$\lambda = x_{238} + x_{167} - x_{247} - x_{356} - x_{148} - x_{158}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.9. *Отображение $\varphi: Y \rightarrow \mathrm{Gr}(5, V)$ является замкнутым вложением, а его образ совпадает со схемой нулей M глобального сечения λ расслоения $\Lambda^3\mathcal{U}^\vee$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что образ отображения φ содержится в M , т. е. состоит из пятимерных подпространств, изотропных относительно λ . Поскольку Y неприводимо, а условие изотропности замкнуто, достаточно проверить, что образ открытой $\mathrm{GL}(W)$ -орбиты $Y_0 \subset Y$ состоит из изотропных подпространств. Более того, так как отображение φ и форма λ инвариантны относительно $\mathrm{GL}(W)$, достаточно проверить изотропность только для образа точки y_0 . Это проверяется непосредственным вычислением. Действительно, $\varphi(y_0) = \mathfrak{g}_0^\perp$ – пространство симметрических (3×3) -матриц с нулевым следом. Рассмотрим любые $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathfrak{g}_0^\perp$. Тогда ясно, что $[\xi_1, \xi_2]$ – кососимметрическая матрица, стало быть, она лежит в $\mathfrak{g}_0$, а значит, $\mathrm{Tr}([\xi_1, \xi_2]\xi_3) = 0$.

Теперь проверим, что отображение φ является вложением открытой орбиты Y_0 . В самом деле, это ясно, так как невырожденная квадратичная форма C' восстанавливается по алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(W, C') \subset \mathfrak{sl}(W)$ как единственная $\mathfrak{g}$ -инвариантная квадратичная форма в $S^2W^\vee$.

Таким образом, мы проверили, что φ является морфизмом $Y \rightarrow M \subset \mathrm{Gr}(5, V)$, причем инъективным на открытом множестве $Y_0 \subset Y$. Поскольку многообразия Y и M пятимерны, морфизм бирационален. Так как оба многообразия гладкие и имеют число Пикара 2 (для Y это ясно из определения, а для M это проверено в [1]), морфизм является изоморфизмом.

Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 4.10. *Схема нулей M общего сечения векторного расслоения $\Lambda^3 \mathcal{U}^\vee$ на $\mathrm{Gr}(5, 8)$ изоморфна раздутию $\mathbb{P}^5$ в поверхности Веронезе $\nu_2(\mathbb{P}^2)$.*

4.3. Гиперплоское сечение. Заметим, что четырехмерное многообразие Кюхле типа (с7) является полуантиканоническим сечением многообразия M . В силу леммы 4.1 соответствующая линейная система на M – это $3H - E$, где H – обратный образ на M образующей группы $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^5)$, а E – исключительный дивизор раздутия $M \rightarrow \mathbb{P}^5$.

СЛЕДСТВИЕ 4.11. *Пусть X – четырехмерное многообразие Кюхле типа (с7). Тогда существует четырехмерная кубика Z , содержащая поверхность Веронезе $S = \nu_2(\mathbb{P}^2)$, так что X изоморфно раздутию Z с центром в S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Теперь можно описать производную категорию. Обозначим через E_X исключительный дивизор раздутия $X \rightarrow Z$ и через $i: E_X \rightarrow X$ – его вложение. Заметим, что E_X является $\mathbb{P}^1$ -расслоением над S . Обозначим через h положительную образующую группы $\mathrm{Pic}(S)$, а также ее обратный образ на E_X .

СЛЕДСТВИЕ 4.12. *Существует полуортогональное разложение*

$$\mathbf{D}(X_{c7}) = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(H), \mathcal{O}_X(2H), i_* \mathcal{O}_{E_X}, i_* \mathcal{O}_{E_X}(h), i_* \mathcal{O}_{E_X}(2h), \mathcal{A}_X \rangle,$$

где $\mathcal{A}_X$ – некоммутативная КЗ-категория, эквивалентная нетривиальной части производной категории четырехмерной кубики Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная категория кубики Z имеет разложение

$$\mathbf{D}(Z) = \langle \mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_Z(H), \mathcal{O}_Z(2H), \mathcal{A}_Z \rangle,$$

причем $\mathcal{A}_Z$ – некоммутативная КЗ-категория (см. [4]). Поскольку X является раздутием Z в S , по теореме Орлова имеем $\mathbf{D}(X) = \langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(H), \mathcal{O}_X(2H), \mathcal{A}_Z, \mathbf{D}(S) \rangle$. Перестраивая $\mathcal{A}_Z$ направо и заменяя $\mathbf{D}(S) = \mathbf{D}(\mathbb{P}^2)$ стандартным исключительным набором, получаем необходимый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.13. Можно было бы предсказать наличие КЗ-категории, пользуясь [9, теорема 5.3]. В самом деле, раздутие M проективного пространства $\mathbb{P}^5$ в поверхности Веронезе имеет исключительный набор, состоящий из шести линейных расслоений, поднятых с $\mathbb{P}^5$, и шести линейных расслоений на исключительном дивизоре. Перестраивая эти расслоения, можно организовать их в прямоугольный лефшецев набор, состоящий из двух блоков, после чего применить теорему 5.3 из [9].

Список литературы

1. O. Küchle, “On Fano 4-folds of index 1 and homogeneous vector bundles over Grassmannians”, *Math. Z.*, **218**:4 (1995), 563–575.
2. C. Casagrande, *Rank 2 quasiparabolic vector bundles on $\mathbb{P}^1$ and the variety of linear subspaces contained in two odd-dimensional quadrics*, [arXiv: 1410.3087](https://arxiv.org/abs/1410.3087).

3. L. Manivel, *On Fano manifolds of Picard number one*, [arXiv:1502.00475](#).
4. A. Kuznetsov, “Derived categories of cubic fourfolds”, *Cohomological and geometric approaches to rationality problems*, Progr. Math., **282**, Birkhäuser, Boston, MA, 2010, 219–243.
5. A. Beauville, R. Donagi, “La variété des droites d’une hypersurface cubique de dimension 4”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **301**:14 (1985), 703–706.
6. Ch. Lehn, M. Lehn, Ch. Sorger, D. van Straten, *Twisted cubics on cubic fourfolds*, [arXiv:1305.0178](#).
7. J. Harris, L. W. Tu, “On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties”, *Topology*, **23**:1 (1984), 71–84.
8. A. Kuznetsov, “Derived categories of quadric fibrations and intersections of quadrics”, *Adv. Math.*, **218**:5 (2008), 1340–1369.
9. A. Kuznetsov, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, [arXiv:1404.3143](#).
10. A. Kuznetsov, A. Perry, *Derived categories of cyclic covers and their branch divisors*, [arXiv:1411.1799](#).
11. A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decomposition for algebraic varieties*, [arXiv:alg-geom/9506012](#).
12. А. Г. Элашвили, “Канонический вид и стационарные подалгебры точек общего положения для простых линейных групп Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **6**:1 (1972), 51–62; англ. пер.: A. G. Ėlashvili, “Canonical form and stationary subalgebras of points of general position for simple linear Lie groups”, *Funct. Anal. Appl.*, **6**:1 (1972), 44–53.

АЛЕКСАНДР ГЕННАДЬЕВИЧ КУЗНЕЦОВ
(ALEXANDER G. KUZNETSOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук
E-mail: akuznet@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
19.01.2015