Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Митчи, Некоторые приложения параметрической теории Пикара–Вессю, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 1, 177–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8340>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:46:01

УДК 517.927.7

К. Митчи

Некоторые приложения параметрической теории Пикара–Вессю

В настоящей обзорной статье описаны некоторые приложения параметрической теории Пикара–Вессю. Этот вариант теории Галуа для семейств линейных дифференциальных уравнений был предложен Ф. Касиди и М. Зингером в сборнике, посвященном памяти А. А. Болибруха. Главные из описываемых результатов были получены в совместных работах автора и М. Зингера о семействах обыкновенных дифференциальных уравнений с регулярными параметрическими особенностями. Среди них – параметрические версии теоремы Шлезингера и решения слабой проблемы Римана–Гильберта, а также алгебраическое описание одного частного случая деформаций с изменением монодромии, иллюстрируемого на примере классического уравнения Дарбу–Альфана. Некоторые из наших результатов были недавно применены разными авторами к решению обратной задачи параметрической теории Пикара–Вессю, а также обобщены на случай иррегулярных особенностей. Эти результаты других авторов частично отражены в обзоре. Статья содержит также краткую справку об истории уравнения Дарбу–Альфана и приложение о дифференциально замкнутых полях.

Библиография: 55 наименований.

Ключевые слова: комплексные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, дифференциальная теория Галуа, параметрическая теория Пикара–Вессю, монодромия, изомонодромность, деформации с изменением монодромии, уравнение Дарбу–Альфана, обратные задачи.

DOI: 10.4213/im8340

*Памяти Андрея Болибруха,
дорогого коллеги и друга*

§ 1. Параметрическая теория Пикара–Вессю

Классическая теория Пикара–Вессю (сокращенно ПВ-теория) или дифференциальная теория Галуа сопоставляет каждой линейной дифференциальной системе

$$\partial Y = AY, \quad (1)$$

где элементы квадратной матрицы A принадлежат дифференциальному полю k характеристики нуль с дифференцированием ∂ и алгебраически замкнутым полем констант, так называемое расширение Пикара–Вессю поля k . Это дифференциальное расширение поля k порождено элементами фундаментальной матрицы решений и не содержит новых констант, а дифференцирование

в нем задается формулой (1). Распирение Пикара–Вессии единственно с точностью до дифференциальных k -изоморфизмов, а его группа дифференциальных k -автоморфизмов называется группой Пикара–Вессии или дифференциальной группой Галуа. Эта линейная алгебраическая группа отражает многие свойства исходного уравнения: разрешимость, приводимость, существование алгебраических решений и так далее.

Ф. Кассиди и М. Зингер в работе [1] из сборника, посвященного памяти А. А. Болибуха, развили *параметрическую теорию Пикара–Вессии* (сокращенно ППВ-теорию), опираясь на работы Ф. Кассиди, Э. Колчина и П. Ландесмана. В ППВ-теории основное дифференциальное поле k снабжено набором коммутирующих дифференцирований $\Delta = \{\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_m\}$. Как и в ПВ-теории, каждой (квадратной) дифференциальной системе

$$\partial_0 Y = AY \quad (2)$$

с коэффициентами из k сопоставляется единственное *параметрическое расширение Пикара–Вессии*, т. е. Δ -дифференциальное расширение поля k , порожденное элементами фундаментальной матрицы решений системы (2) (порожденное как расширение поля посредством этих элементов и их Δ -производных любого порядка) и не содержащее новых ∂_0 -констант. *Параметрическая группа Пикара–Вессии* такого ППВ-расширения определяется как группа его Δ -дифференциальных k -автоморфизмов. Ожидается, что она обладает обычными свойствами, такими как параметрическая версия “соответствия Галуа”. Но следующий пример [1, с. 118] показывает, что без дополнительных предположений это не так.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{x}y. \quad (3)$$

При каждом фиксированном $t \in \mathbb{C}$ применима классическая ПВ-теория над дифференциальными полями $\mathbb{C}(x)$ или $\mathbb{Q}(x)$. Легко находимое решение x^t показывает, что ПВ-группа уравнения (3) над $\mathbb{C}(x)$ (или $\mathbb{Q}(x)$) равна $\mathbb{C}^*$ (или $\mathbb{Q}^*$) для $t \notin \mathbb{Q}$, а в противном случае она является циклической подгруппой (корней из единицы).

Рассмотрим теперь уравнение (3) как параметрическое семейство уравнений над дифференциальным полем $k = \mathbb{C}(x, t)$ рациональных функций от x и t с дифференцированиями $\{\frac{d}{dx}, \frac{d}{dt}\}$. Его ППВ-расширение имеет вид

$$K = \mathbb{C}(x, t, x^t, \log x).$$

Покажем, что соответствующая ППВ-группа G совпадает с $\mathbb{C}^*$ и что элемент $\log x$ поля K инвариантен относительно G (если бы для G выполнялось соответствие Галуа, то подполе K^G всех элементов поля K , инвариантных относительно G , должно было бы совпадать с основным полем k). Действительно, так как всякий автоморфизм $\sigma \in G$ однозначно определяется элементами $\sigma(x^t)$ и $\sigma(\log x)$ и коммутирует со всеми дифференцированиями, то он имеет вид

$$\sigma(x^t) = a_\sigma x^t, \quad \sigma(\log x) = \log x + c_\sigma,$$

где c_σ есть логарифмическая производная от a_σ , а коэффициенты $a_\sigma \in \mathbb{C}^*$, $c_\sigma \in \mathbb{C}$ зависят только от t . Легко вычислить, что

$$G = \{a \in \mathbb{C}(t)^*, a''a - a'^2 = 0\} = \mathbb{C}^*,$$

где a' , a'' – это первая и вторая производные по t , причем $G = \mathbb{C}^*$ в силу рациональности a как функции от t . В частности, отсюда вытекает, что $c_\sigma = 0$ для всех $\sigma \in G$ и, следовательно, $\sigma(\log x) = \log x$ для всех $\sigma \in G$.

Чтобы в примере 1.1 выполнялось равенство $K^G = k$, группа G должна содержать непостоянные элементы. Предполагая, что поле $k_0 = k^{\partial_0}$ всех ∂_0 -констант *дифференциально замкнуто* (см. приложение), Кассиди и Зингер [1, с. 116] показали, что для всякого уравнения (2) существует единственное ППВ-расширение поля k и что его ППВ-группа является линейной *дифференциальной алгебраической группой* над k_0 , т. е. подгруппой в $\mathrm{GL}(n, k_0)$, заданной полиномиальными дифференциальными уравнениями. Иными словами, эта подгруппа замкнута в топологии Колчина, элементарными замкнутыми множествами которой являются множества нулей $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$ -дифференциальных полиномов. Дальнейшие факты о дифференциальных алгебраических группах можно найти в работе Ф. Кассиди [2], где эти объекты были впервые введены, а также в [3], [4]. Имеет место соответствие Галуа между замкнутыми дифференциальными подгруппами ППВ-группы и промежуточными Δ -дифференциальными расширениями поля k , содержащимися в ППВ-расширении.

Заметим, что, поскольку поле k_0 предполагается дифференциально замкнутым, оно, в частности, алгебраически замкнуто и к уравнению (2) применима обычная ПВ-теория. При этом ППВ-группа, замкнутая в топологии Колчина на $\mathrm{GL}(n, k_0)$, не является, вообще говоря, замкнутой в (более слабой) топологии Зариского и ее замыкание в смысле топологии Зариского есть не что иное, как ПВ-группа.

В дальнейшем рассматриваются только такие семейства дифференциальных уравнений, у которых коэффициенты являются комплексно-аналитическими функциями, зависящими аналитически от комплексных параметров. В параметрическом случае прежде всего следует уточнить понятие регулярной особой точки.

§ 2. Параметрические особые точки

Рассмотрим семейство линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, t)Y \quad (4)$$

с параметром t , где $A \in \mathrm{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(\{x - \alpha(t)\}))$ аналитически зависит от x и t , как объясняется в обозначениях 2.1.

В дальнейшем термины “система” и “уравнение” употребляются с равным правом и для матричных уравнений, т. е. систем уравнений.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 2.1. Пусть $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^r$ – открытое связное подмножество, содержащее 0. Через $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ обозначается кольцо аналитических функций на $\mathcal{U}$ от переменного t . Элементы $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ с $\alpha(0) = 0$ можно рассматривать как подвижные особенности вблизи 0. Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}((x - \alpha(t)))$ кольцо формальных рядов Лорана вида

$$f(x, t) = \sum_{i \geq m} a_i(t)(x - \alpha(t))^i$$

с коэффициентами из кольца $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$, где $m \in \mathbb{Z}$ не зависит от t , а через $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(\{x - \alpha(t)\})$ – кольцо таких рядов $f(x, t) \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}((x - \alpha(t)))$, которые при каждом фиксированном $t \in \mathcal{U}$ сходятся в проколотом круге $0 < |x - \alpha(t)| < R_t$ для некоторого $R_t > 0$. Заметим, что в каждой компактной окрестности $\mathcal{N} \subset \mathcal{U}$ точки 0 можно выбрать R_t не зависящим от t при $t \in \mathcal{N}$.

В этих предположениях и обозначениях матрица A из (4) имеет разложение вида

$$A(x, t) = \frac{A_{-m}(t)}{(x - \alpha(t))^m} + \frac{A_{-m+1}(t)}{(x - \alpha(t))^{m-1}} + \cdots = \sum_{i \geq -m} (x - \alpha(t))^i A_i(t),$$

где $A_i(t) \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}})$ для всех $i \geq -m$, причем $m \in \mathbb{N}$ не зависит от t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Параметрические уравнения

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = AY, \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = BY$$

с матрицами $A, B \in \mathfrak{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(\{x - \alpha(t)\}))$ называются *эквивалентными*, если для некоторой обратимой матрицы $P \in \mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(\{x - \alpha(t)\}))$ выполнено равенство

$$B = \frac{\partial P}{\partial x} P^{-1} + P A P^{-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. В тех же обозначениях, что и выше, скажем, что

- (1) уравнение (4) имеет *простые особые точки вблизи 0*, если $m = 1$ и $A_{-1} \neq 0$ как элемент $\mathfrak{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}})$;
- (2) уравнение (4) имеет *регулярные параметрические особые точки вблизи 0* (обозначение: $\mathrm{pr} s_0$), если оно эквивалентно уравнению с простыми особыми точками вблизи 0.

ПРИМЕР 2.4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(x - t)^2} + \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t - 2 \end{pmatrix} \frac{1}{x - t}, \quad B = \begin{pmatrix} t - 1 & 0 \\ 0 & t - 1 \end{pmatrix} \frac{1}{x - t}.$$

Эти уравнения эквивалентны посредством матрицы

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{x - t} & \frac{-1}{(x - t)^2} \\ 0 & x - t \end{pmatrix}.$$

Так как второе уравнение имеет простые особые точки вблизи 0, то первое уравнение имеет регулярные особые точки вблизи 0.

По аналогии с непараметрическим случаем решения уравнения (4) с параметрическими регулярными особенностями вблизи 0 имеют “равномерно” умеренный рост при стремлении x к $\alpha(t)$, а t к 0 (см. [5, следствие 2.6]). Это выражается следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Допустим, что уравнение (4) имеет регулярные особые точки вблизи 0. Тогда найдется открытое связное подмножество $\mathcal{U}'$ области $\mathcal{U}$ такое, что*

1) *уравнение (4) имеет решение Y вида*

$$Y(x, t) = \left(\sum_{i \geq i_0} (x - \alpha(t))^i Q_i(t) \right) (x - \alpha(t))^{\tilde{A}(t)} \quad (5)$$

с матрицами $\tilde{A} \in \mathrm{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}'})$ и $Q_i \in \mathrm{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}'})$ для всех $i \geq i_0$;

2) *для любого набора $(m_1, \dots, m_r)$ из r неотрицательных целых чисел существует целое число N такое, что при каждом фиксированном $t \in \mathcal{U}'$ для любого лежащего на комплексной плоскости сектора $\mathcal{S}_t$ с вершиной $\alpha(t)$ и раствором, меньшим чем 2π , имеем*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha(t) \\ x \in \mathcal{S}_t}} (x - \alpha(t))^N \frac{\partial^{m_1 + \dots + m_r} Y(x, t)}{\partial^{m_1} t_1 \dots \partial^{m_r} t_r} = 0.$$

Решения параметрических дифференциальных уравнений с *иррегулярными* особенностями изучались в [6], [7] и в недавней работе [8]. Предполагая, что 0 – (неподвижная) иррегулярная особая точка, авторы указанных работ нашли условия на экспоненциальную часть формального решения, записанного в обычном виде

$$\hat{Y}(z) = \hat{H}(z) z^J e^Q,$$

гарантирующие, что коэффициенты формального ряда $\hat{H}(z)$ аналитически зависят от многомерного параметра t .

§ 3. ППВ-теория и монодромия

С самого появления теории Пикара–Вессио в девятнадцатом столетии монодромия была тесно связана с “группой преобразований” (сейчас называемой группой Пикара–Вессио) линейного дифференциального уравнения. Подробнее об истории группы монодромии и группы Пикара–Вессио см. [9] и [10].

3.1. Классическая теория Пикара–Вессио и монодромия. В классической ПВ-теории принято считать, что “матрицы монодромии принадлежат дифференциальной группе Галуа”. Это верно для дифференциального уравнения (1) над основным полем $\mathbb{C}(x)$, но неверно над $\overline{\mathbb{Q}}(x)$. При этом если уравнение (1) имеет только регулярные особые точки, то по теореме Шлезингера (см. [11, § 159, 160], [12, теорема 5.8]) матрицы монодромии порождают плотную по Зарискому подгруппу дифференциальной группы Галуа над $\mathbb{C}(x)$. Так, в примере 1.1 уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{x} y$$

с постоянным ненулевым комплексным числом t имеет две регулярные особые точки: 0 и ∞ . “Матрицами” монодромии решения x^t (при фиксированном выборе $\log x$) в точках 0 и ∞ являются скаляры $m_0 = e^{2\pi it}$ и $m_\infty = e^{-2\pi it}$. Легко видеть, что замыкание по Зарискому подгруппы $\mathbb{C}^*$, порожденной m_0 (или m_∞), действительно совпадает с найденной выше ПВ-группой над $\mathbb{C}$ (равной либо $\mathbb{C}^*$, либо конечной циклической группе).

Что происходит над дифференциальным полем $\overline{\mathbb{Q}}(x)$, если $t \in \overline{\mathbb{Q}}$? Скаляры монодромии $e^{\pm 2\pi it}$ могут в этом случае быть трансцендентными, и тогда они не принадлежат ПВ-группе, которая является подгруппой в $\overline{\mathbb{Q}}^*$. Но из описанных выше результатов вытекает, что ПВ-группа задается одним и тем же уравнением в $\mathbb{C}^*$ или $\overline{\mathbb{Q}}^*$ для $t \in \mathbb{C}^*$ или $t \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ соответственно. Следующий пример также иллюстрирует важность выбора основного поля.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} 1/x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

Это уравнение имеет две регулярные особые точки (фуксову в 0 и еще одну в ∞). Матрица монодромии фундаментального решения

$$\begin{pmatrix} x & x \log x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в точке 0 равна

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если уравнение рассматривается над $\overline{\mathbb{Q}}(x)$, то M не принадлежит ПВ-группе над $\overline{\mathbb{Q}}(x)$, так как имеет трансцендентный матричный элемент.

Чтобы получить аналог теоремы Шлезингера в этом случае, воспользуемся следующим результатом (см. [5, предложение 3.1 и следствие 3.2]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть поля $C_0 \subset C_1$ алгебраически замкнуты. Рассмотрим дифференциальные поля $k_0 = C_0(x)$ и $k_1 = C_1(x)$, где $c' = 0$ для всех $c \in C_1$ и $x' = 1$, и дифференциальное уравнение

$$Y' = AY, \tag{6}$$

где $A \in \mathfrak{gl}_n(k_0)$. Если $G(C_0) \subset \mathrm{GL}_n(C_0)$ есть ПВ-группа уравнения (6) над k_0 относительно некоторого фундаментального решения, где G – линейная алгебраическая группа, определенная над C_0 , то $G(C_1)$ есть ПВ-группа уравнения (6) над k_1 относительно некоторого фундаментального решения.

Так, в примере 3.1 легко видеть, что ПВ-группа над $\overline{\mathbb{Q}}(x)$ равна

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \overline{\mathbb{Q}} \right\},$$

а ПВ-группа над $\mathbb{C}(x)$ есть группа $\mathbb{C}$ -точек группы G :

$$G(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Матрицы монодромии всегда принадлежат ПВ-группе после расширения поля скаляров.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Рассмотрим уравнение (6) с $A \in \mathrm{gl}_n(C_0(x))$, где C_0 – алгебраически замкнутое подполе поля $\mathbb{C}$. Считая точку 0 неособой, возьмем ее за базисную точку группы $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{S})$, где $\mathcal{S}$ есть множество всех особых точек уравнения (6) на $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Пусть $G(C_0)$ есть ПВ-группа уравнения (6) над $C_0(x)$, где G – линейная алгебраическая группа, определенная над C_0 . Если C_1 есть любое алгебраически замкнутое подполе поля $\mathbb{C}$, содержащее C_0 и все матричные элементы матриц монодромии, то матрицы монодромии принадлежат ПВ-группе $G(C_1)$ уравнения (6) над $C_1(x)$.*

3.2. Матрицы монодромии в ППВ-группе. В ППВ-теории тоже бывает так, что уравнение имеет коэффициенты в некотором дифференциально замкнутом поле, а матричные элементы параметрических матриц монодромии не принадлежат этому полю.

В [5] мы доказали аналог предложения 3.2 для параметрических расширений Пикара–Вессьо. Рассмотрим уравнения вида

$$\partial_x Y = A(x, t)Y, \quad (7)$$

где $A(x, t) \in \mathrm{gl}_n(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}(x))$ и $t = (t_1, \dots, t_r) \in \mathcal{U}$ для некоторой области $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^r$. Обозначая дифференцирования по $x, t_1, \dots, t_r$ через $\partial_x, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}$ соответственно, положим $\Delta = \{\partial_x, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$ и $\Delta_t = \{\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$.

Пусть C есть Δ_t -дифференциально замкнутое расширение некоторого поля функций, аналитических на некоторой области в $\mathbb{C}^r$. При каждом i обозначим дифференцирование, продолжающее ∂_{t_i} , опять через ∂_{t_i} . Зададим структуру Δ -дифференциального поля на $k = C(x)$, полагая $\partial_x(x) = 1$, $\partial_{t_i}(x) = 0$ для всех i и $\partial_x(c) = 0$ для всех $c \in C$, и допустим, что $A \in \mathrm{gl}_n(k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Рассмотрим дифференциально замкнутые Δ_t -поля $C_0 \subset C_1$ (такие, как C выше), индуцирующие структуру Δ -поля на $k_0 = C_0(x)$ и $k_1 = C_1(x)$, и дифференциальное уравнение*

$$\partial_x Y = AY, \quad (8)$$

где $A \in \mathrm{gl}_n(k_0)$. Если $G(C_0) \subset \mathrm{GL}_n(C_0)$ есть ППВ-группа уравнения (8) над k_0 относительно некоторого фундаментального решения, где G – линейная дифференциальная алгебраическая группа над дифференциальным Δ_t -полем C_0 , то $G(C_1)$ есть ППВ-группа уравнения (8) над k_1 относительно некоторого фундаментального решения.

Определим параметрические матрицы монодромии, принадлежащие ППВ-группе в том же смысле, что и в непараметрическом случае (т. е. после расширения основного поля).

Пусть $\mathcal{D}$ – открытое подмножество в $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, причем $0 \in \mathcal{D}$, а дополнение $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}$ является объединением m непересекающихся кругов D_i таких, что при каждом $t \in \mathcal{U}$ уравнение (7) имеет ровно одну особую точку в D_i . Обозначим через γ_i , $i = 1, \dots, m$, элементарные петли, порождающие $\pi_1(\mathcal{D}, 0)$. Фиксируем фундаментальное решение Z_0 уравнения (7) в окрестности точки 0 и при каждом фиксированном $t \in \mathcal{U}$ рассмотрим матрицы монодромии этого решения уравнения (7) относительно путей γ_i . Эти матрицы (зависящие от t) по определению называются *параметрическими матрицами монодромии* уравнения (7).

Как и в непараметрическом случае, чтобы доказать, что матрицы монодромии принадлежат ППВ-группе, надо выполнить “аналитическое продолжение” полиномиального выражения $P(Z_0)$ от матричных элементов решения Z_0 , где P – полином с коэффициентами из $C_0(x)$, над некоторым дифференциально замкнутым полем C_0 , не содержащимся в $\mathbb{C}$. Следующий результат А. Зайденберга [13], [14] позволяет рассматривать эти коэффициенты, а значит, и выражение $P(Z_0)$, как некоторые аналитические функции.

ТЕОРЕМА 3.5 (Зайденберг). Пусть $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{K}_1$ – конечно порожденные дифференциальные расширения поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, причем $\mathcal{K}$ состоит из функций, мероморфных на некоторой области $\Omega \in \mathbb{C}^r$. Тогда $\mathcal{K}_1$ изоморфно некоторому полю $\mathcal{F}$ функций, мероморфных на области $\Omega_1 \subset \Omega$ такой, что $\mathcal{K}|_{\Omega_1} \subset \mathcal{F}$.

Это приводит к ожидаемому аналогу следствия 3.3.

ТЕОРЕМА 3.6. Рассмотрим уравнение (7) с $A \in \mathrm{gl}_n(C_0(x))$, где C_0 – любое дифференциально замкнутое Δ_t -поле, содержащее $\mathbb{C}$, и пусть C_1 – любое дифференциально замкнутое Δ_t -поле, содержащее как C_0 , так и все матричные элементы параметрических матриц монодромии некоторого фундаментального решения уравнения (7). Тогда параметрические матрицы монодромии принадлежат $G(C_1)$, где G есть ППВ-группа уравнения (7) над Δ -полем $C_0(x)$.

3.3. Параметрическая версия теоремы Шлезингера. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = A(x, t)Y, \quad (9)$$

где матричные элементы матрицы A рациональны по x и аналитичны по t на некотором открытом подмножестве $\mathcal{U}$ пространства $\mathbb{C}^r$. Пусть, как и выше, $\mathcal{D}$ – открытое подмножество в $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, причем $0 \in \mathcal{D}$ и $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}$ состоит из m непересекающихся кругов D_i таких, что при каждом $t \in \mathcal{U}$ уравнение (9) имеет ровно одну особую точку $\alpha_i(t)$ в каждом D_i и не имеет никаких других особых точек. Обозначим через γ_i , $i = 1, \dots, m$, элементарные петли, порождающие $\pi_1(\mathcal{D}, 0)$. Локально в точке 0 можно фиксировать фундаментальное решение Z_0 , аналитическое на $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$, где $\mathcal{V}$ – окрестность точки 0 в $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, а $\mathcal{U}$ – окрестность точки 0 в $\mathbb{C}^r$. Как и выше, положим $\Delta = \{\partial_x, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$ и $\Delta_t = \{\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$.

В [5] мы доказали следующий параметрический аналог теоремы Шлезингера.

ТЕОРЕМА 3.7. В указанных выше обозначениях и предположениях допустим, что уравнение (9) имеет только регулярные параметрические особенности вблизи каждой из точек $\alpha_i(0)$, $i = 1, \dots, t$. Пусть k – дифференциально замкнутое Δ_t -поле, содержащее x -коэффициенты всех матричных элементов матрицы A , особенности $\alpha_i(t)$ уравнения (9) и все матричные элементы параметрических матриц монодромии решения Z_0 . Тогда параметрические матрицы монодромии порождают плотную в топологии Колчина подгруппу группы $G(k)$, где G есть ППВ-группа уравнения (9) над $k(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соответствия Галуа из ППВ-теории достаточно показать, что каждый элемент ППВ-расширения $k(x)\langle Z_0 \rangle$ (Δ -дифференциально порожденного фундаментальным решением Z_0), являющийся инвариантным под действием параметрических матриц монодромии, принадлежит основному полю $k(x)$. Фиксируем такой элемент $f \in k(x)\langle Z_0 \rangle$, инвариантный относительно всех параметрических матриц монодромии. Пусть $\mathcal{F}_0$ – дифференциальное Δ_t -подполе поля k , порожденное над $\mathbb{Q}$ всеми x -коэффициентами матрицы A , особыми точками $\alpha_i(t)$ и матричными элементами параметрических матриц монодромии относительно элементарных петель вокруг точек $\alpha_i(t)$. Пусть, далее, $\mathcal{F}_1$ – любое Δ_t -подполе поля k , содержащее $\mathcal{F}_0$ и такое, что $f \in \mathcal{F}_1(x)\langle Z_0 \rangle$. По теореме Зайденберга (теорема 3.5) можно рассматривать f как мероморфную функцию на подходящей области (x, t) -пространства. Так как при каждом фиксированном t функция f инвариантна относительно матриц монодромии, а также имеет по предложению 2.5 умеренный рост в каждой особой точке, то она является рациональной функцией от x при каждом фиксированном t (см. [55], доказательство теоремы 2.28). Как и в непараметрическом случае, из однозначности f вытекает, что она имеет изолированный полюс в каждой особой точке уравнения (см. [15, подготовительная теорема 18.2, с. 118]). Чтобы показать, что она глобально является рациональной функцией от x , применяем следующую лемму, вдохновленную результатом Р. Пале [16].

ЛЕММА 3.8. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое Δ -поле функций, мероморфных на $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$, где $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}$ и $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^r$ – открытые связные множества, и пусть

$$\mathcal{C}_x = \{u \in \mathcal{F} \mid \partial_x u = 0\}.$$

Допустим также, что $x \in \mathcal{F}$. Пусть функция $f \in \mathcal{F}$ такова, что $f(x, t) \in \mathbb{C}(x)$ при каждом $t \in \mathcal{U}$. Тогда для некоторого $m \in \mathbb{N}$ существуют $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_m \in \mathcal{C}_x$ такие, что

$$f(x, t) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i x^i}{\sum_{i=0}^m b_i x^i}.$$

§ 4. ППВ-характеризация изомонодромности

Напомним, что классическая дифференциальная теория Галуа (или ПВ-теория) легко и естественно обобщается на дифференциальные поля с несколькими дифференцированиями. Точнее, рассмотрим Δ -дифференциальное поле k

с дифференцированиями $\Delta = \{\partial_0, \partial_1, \dots, \partial_r\}$ и линейную систему уравнений

$$\begin{cases} \partial_0 Y = A_0 Y, \\ \partial_1 Y = A_1 Y, \\ \dots\dots\dots \\ \partial_r Y = A_r Y, \end{cases} \quad (10)$$

где $A_0, A_1, \dots, A_r \in \text{gl}(n, k)$.

Если подполе Δ -констант C поля k алгебраически замкнуто, то для каждой системы (10) существует единственное ПВ-расширение K поля k , т. е. Δ -дифференциальное расширение поля k , порожденное матричными элементами фундаментального решения системы (10) и не содержащее новых Δ -констант. Соответствующая ПВ-группа дифференциальных k -автоморфизмов поля K есть линейная алгебраическая группа $G \subset \text{GL}(n, C)$, единственная с точностью до дифференциального изоморфизма и удовлетворяющая соответствию Галуа.

4.1. Интегрируемые системы. Понятие интегрируемости хорошо интерпретируется в терминах ППВ-теории. Интегрируемость над абстрактными дифференциальными полями определяется так же, как и над полями аналитических функций (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Во введенных выше обозначениях

(1) дифференциальная система (10) называется *интегрируемой*, если

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = [A_i, A_j]$$

для всех $0 \leq i, j \leq r$, где через $[\cdot, \cdot]$ обозначается скобка Ли;

(2) уравнение

$$\partial_0 Y = AY, \quad A \in \text{gl}(n, k),$$

называется *вполне интегрируемым*, если его можно дополнить до системы (10) с $A_0 = A$.

Для вполне интегрируемых уравнений ПВ-теория и ППВ-теория сближаются (см. [1, лемма 9.9]).

ЛЕММА 4.2. Во введенных выше обозначениях допустим, что подполе ∂_0 -констант k_0 поля k является Δ -дифференциально замкнутым, и пусть вполне интегрируемая система

$$\partial_0 Y = AY, \quad A \in \text{gl}(n, k), \quad (11)$$

дополняется до интегрируемой системы (10). Тогда всякое ПВ-расширение поля k для (10) является ППВ-расширением поля k для (11).

Доказательство леммы основано на том, что всякое дифференциально замкнутое поле алгебраически замкнуто и что поле констант алгебраически замкнутого дифференциального поля само алгебраически замкнуто. С помощью этой леммы Ф. Кассиди и М. Зингер дали следующую ППВ-характеризацию интегрируемости [1, предложение 3.9].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3 (Кассиди–Зингер). *Во введенных выше обозначениях допустим, что поле k_0 дифференциально замкнуто и обозначим через $C \subset k_0$ подполе Δ -констант поля k .*

(1) *Уравнение (11) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда его ППВ-группа над k сопряжена в $\mathrm{GL}(n, k_0)$ группе $G(C)$ всех C -точек некоторой линейной алгебраической группы, определенной над C .*

(2) *В частности, условия пункта (1) выполнены для $A \in \mathfrak{gl}(C)$.*

4.2. Изомонодромность. Вернемся к случаю дифференциальных полей, содержащих аналитические функции. Как и в п. 3.3, рассмотрим параметрическую систему

$$\partial_x Y = A(x, t)Y, \quad (12)$$

считая элементы матрицы A аналитическими на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ для некоторого открытого полидиска $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^r$, содержащего 0, и некоторого открытого подмножества $\mathcal{D}$ в $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, содержащего 0, причем группа $\pi_1(\mathcal{D}, 0)$ порождена элементарными петлями $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Точнее, предполагается, что $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \mathcal{D}$ есть объединение m непересекающихся кругов D_i и что при каждом $t \in \mathcal{U}$ уравнение (12) имеет ровно одну особую точку $\alpha_i(t)$ в каждом круге D_i и не имеет других особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Уравнение (12) называется *изомонодромным* на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$, если найдутся постоянные матрицы $M_1, \dots, M_m \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ такие, что при каждом фиксированном $t \in \mathcal{U}$ уравнение (12) имеет в точке 0 локальное фундаментальное решение Y_t , чьи аналитические продолжения $Y_t^{\gamma_i}$ вдоль γ_i удовлетворяют равенствам

$$Y_t^{\gamma_i} = Y_t M_i$$

при $i = 1, \dots, m$.

Заметим, что решение Y_t не обязано быть аналитическим по t . Тем не менее, следуя доказательству А. А. Болибруха в фуксовом случае (см. [17]), можно показать, что существует аналитическое по t решение Y_t . Здесь, в частности, используется тот факт, что $\mathcal{U}$ является многообразием Штейна, на котором всякое топологически тривиальное аналитическое расслоение аналитически тривиально (см. [18]).

Вот полезный критерий изомонодромности.

ТЕОРЕМА 4.5 (Сибуйа [19]). *Рассмотрим уравнение (12) в тех же обозначениях и предположениях, что и выше.*

(1) *Уравнение (12) изомонодромно на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда оно вполне интегрируемо, т. е. является частью интегрируемой системы*

$$\begin{cases} \partial_0 Y = A_0 Y, \\ \partial_1 Y = A_1 Y, \\ \dots\dots\dots \\ \partial_r Y = A_r Y \end{cases}$$

с $A_0 = A$ и с матрицами A_i , аналитическими на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ для всех i .

(2) Пусть уравнение (12) изомонодромно и имеет только регулярные параметрические особые точки, а матрица A рациональна по x . Тогда все матрицы A_i рациональны по x .

Кассиди и Зингер [1] дали алгебраический критерий изомонодромности с помощью ППВ-теории. Пусть, как и выше, $\Delta = \{\partial_x, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$ и $\Delta_t = \{\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$ – наборы частных дифференцирований по x и по компонентам многомерного параметра t .

ТЕОРЕМА 4.6 (Кассиди–Зингер). *Как и выше, рассмотрим уравнение*

$$\partial_x Y = A(x, t)Y$$

с матрицей A , аналитической на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ и рациональной по x , имеющее только регулярные параметрические особые точки, по одной в каждом круге D_i . Положим $k = C_0(x)$, где C_0 есть Δ_t -дифференциальное замыкание поля, порожденного над $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_r)$ всеми x -коэффициентами матричных элементов (являющихся рациональными функциями от x) матрицы A . Уравнение изомонодромно тогда и только тогда, когда его ППВ-группа над k сопряжена в $\mathrm{GL}(n, C_0)$ некоторой линейной алгебраической подгруппе группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.

Доказательство опирается на критерий Сibuя и предложение 4.3.

§ 5. Проективная изомонодромность

Как и выше, рассмотрим параметрическое уравнение

$$\partial_x Y = A(x, t)Y \quad (13)$$

на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ с m изолированными особыми точками, по одной в каждом круге D_i , где $\mathcal{D} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \bigcup_{i=1}^m D_i$. Нас интересует следующий частный случай деформаций с изменением монодромии, который изучался в [20]–[22] на классическом примере уравнений Дарбу–Альфана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Уравнение (13) называется *проективно изомонодромным*, если найдутся постоянные матрицы $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ и аналитические функции $c_1, \dots, c_m \in \mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ такие, что при каждом фиксированном $t \in \mathcal{U}$ уравнение (13) имеет в точке 0 локальное фундаментальное решение Y_t , параметрические матрицы монодромии которого относительно петель γ_i равны $c_i(t)\Gamma_i$.

Как и в изомонодромном случае, решение Y_t может быть не аналитическим по t . В работе [23] мы следовали доказательству Болибруха, чтобы показать, что существует частное решение, аналитическое по t . Такое решение необходимо для алгебраической интерпретации проективной изомонодромности в терминах ППВ-теории.

В частном случае фуксова параметрического уравнения

$$\partial_x Y = \sum_{i=1}^m \frac{A_i(t)}{x - \alpha_i(t)} Y \quad (14)$$

проективная изомонодромность естественно связана с изомонодромностью (см. [23]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Уравнение (14) проективно изомонодромно тогда и только тогда, когда при каждом i можно записать*

$$A_i(t) = B_i(t) + b_i(t)I,$$

где скаляры b_i и матрицы B_i аналитичны на $\mathcal{U}$ и уравнение

$$\partial_x Y = \sum_{i=1}^m \frac{B_i(t)}{x - \alpha_i(t)} Y$$

является изомонодромным.

Для общих уравнений (13) с регулярными параметрическими особенностями мы даем в работе [23] алгебраическую характеристику проективной изомонодромности в терминах ППВ-группы.

ТЕОРЕМА 5.3. *В предыдущих обозначениях рассмотрим параметрическое уравнение*

$$\partial_x Y = A(x, t)Y \quad (15)$$

с матрицей A , аналитической на $\mathcal{D} \times \mathcal{U}$ и рациональной по x , имеющее только регулярные параметрические особые точки, по одной в каждом круге D_i . Положим $k = k_0(x)$, где k_0 есть Δ_t -дифференциальное замыкание поля, порожденного над $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_r)$ всеми x -коэффициентами рациональных функций, являющихся матричными элементами матрицы A . Уравнение (15) проективно изомонодромно тогда и только тогда, когда его ППВ-группа над k сопряжена в $\mathrm{GL}(n, k_0)$ некоторой подгруппе группы

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) \cdot k_0 I \subset \mathrm{GL}(n, k_0),$$

где $k_0 I$ означает подгруппу всех скалярных матриц в $\mathrm{GL}(n, k_0)$.

Пользуясь топологическими рассуждениями в топологиях Колчина и Зариского, а также леммой Шура, получаем следствие этого результата, касающееся абсолютно неприводимых уравнений над k , т. е. таких уравнений, которые неприводимы над любым конечным расширением поля k . Напомним, что уравнение называется неприводимым, если соответствующий ему дифференциальный полином неприводим (не имеет делителей строго меньшего порядка) или, эквивалентно, если его дифференциальная группа Галуа действует неприводимо на пространстве его решений в любом расширении Пикара–Вессио.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *Пусть A , k_0 и k – те же, что и в теореме 5.3. Если уравнение (15) абсолютно неприводимо, то оно проективно изомонодромно тогда и только тогда, когда коммутант (G, G) его ППВ-группы G сопряжен в $\mathrm{GL}(n, k_0)$ некоторой подгруппе группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.*

§ 6. Уравнение Дарбу–Альфана

Результаты предыдущего параграфа хорошо иллюстрируются примером уравнения Дарбу–Альфана. Это уравнение описывает проективную изомонодромность в том же смысле, в каком уравнение Шлезингера описывает изомонодромность (шлезингеровского типа) параметрических фуксовых систем. Уравнение Дарбу–Альфана V

$$(DH\ V) \begin{cases} \omega'_1 = \omega_2\omega_3 - \omega_1(\omega_2 + \omega_3) + \phi^2, \\ \omega'_2 = \omega_3\omega_1 - \omega_2(\omega_3 + \omega_1) + \theta^2, \\ \omega'_3 = \omega_1\omega_2 - \omega_3(\omega_1 + \omega_2) - \theta\phi, \\ \phi' = \omega_1(\theta - \phi) - \omega_3(\theta + \phi), \\ \theta' = -\omega_2(\theta - \phi) - \omega_3(\theta + \phi) \end{cases}$$

возникает в физике как редукция уравнения автодуальности полей Янга–Миллса (SDYM). При $\theta = \phi$ уравнение (DH V) эквивалентно автодуальным уравнениям Эйнштейна в вакууме. При $\theta = \phi = 0$ оно совпадает с исходным уравнением Альфана (H II), решающим геометрическую задачу Дарбу об ортогональных поверхностях.

В отличие от других редукций SDYM (таких, как уравнения Пенлеве) уравнение (DH V) не обладает свойством Пенлеве, так как имеет целую границу подвижных существенных особенностей. Поэтому маловероятно, чтобы оно описывало изомонодромность.

6.1. История уравнения DH. Уравнение Альфана (H II) восходит к работам Дарбу [24], [25] об ортогональных системах поверхностей. Дарбу поставил следующую задачу.

Задача 1. При каких условиях на пару $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ ортогональных семейств поверхностей в $\mathbb{R}^3$ существует семейство $\mathcal{F}_3$ такое, что $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ есть триортогональная система попарно ортогональных семейств?

В работе [24] Дарбу дал необходимые и достаточные условия на $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, решающие эту задачу: пересечение любых поверхностей $S_1 \in \mathcal{F}_1$ и $S_2 \in \mathcal{F}_2$ должно быть линией кривизны как для $\mathcal{F}_1$, так и для $\mathcal{F}_2$. Необходимость этого условия была к тому времени уже известна из теоремы Дюпена (1813 г.).

Задача 2. При каких условиях на параметр $u = \varphi(x, y, z)$ однопараметрическое семейство $\mathcal{F}$ поверхностей в $\mathbb{R}^3$ принадлежит *триортогональной* системе $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ попарно ортогональных семейств?

В работе [25] Дарбу нашел и решил уравнение с частными производными третьего порядка, которому должна удовлетворять функция u , и получил, опираясь на более ранние результаты Бонне и Кэли, общее решение из некоторого специального семейства линейчатых геликоидальных поверхностей. Позднее Э. Картан [26] доказал с помощью своего внешнего дифференциального исчисления, что задача 2 имеет решение. При этом он обобщил постановку задачи,

заменяв ортогональность на любой предписанный угол и рассматривая p ортогональных семейств гиперповерхностей в p -мерном пространстве.

Дарбу поставил еще одну задачу об ортогональных поверхностях.

ЗАДАЧА 3. Даны два семейства: $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, каждое из которых состоит из параллельных поверхностей. Существует ли семейство $\mathcal{F}$, ортогональное как к $\mathcal{F}_1$, так и к $\mathcal{F}_2$?

Легко показать, что решение должно состоять либо из плоскостей, либо из линейчатых квадратик. Если $\mathcal{F}$ состоит из квадратик с центром, то их уравнения одновременно приводимы к виду

$$\frac{x^2}{a(u)} + \frac{y^2}{b(u)} + \frac{z^2}{c(u)} = 1,$$

зависящему от параметра $u = \varphi(x, y, z)$ семейства $\mathcal{F}$. Можно показать, что $\mathcal{F}$ является решением задачи 3 тогда и только тогда, когда функции a , b , c удовлетворяют уравнениям Дарбу

$$a(b' + c') = b(c' + a') = c(a' + b'),$$

где через a' , b' , c' обозначены производные по u . Однако проинтегрировать эти уравнения Дарбу не удалось: “*Не похоже, чтобы эти уравнения интегрировались каким-либо из известных способов*” (Дарбу, 1878 г.).

Оставив эту часть задачи, он ограничился изучением квадратик без центра. Он решил частный случай этой задачи для семейства $\mathcal{F}$ параболоидов

$$\frac{y^2}{\alpha + u} + \frac{z^2}{\alpha - u} = 2x + \alpha \log u$$

и заявил, что некоторые поверхности вращения также являются решениями.

В 1881 г. Ж. Альфан [27], [28] полностью решил вторую задачу Дарбу в виде

$$(H I) \begin{cases} \omega'_1 + \omega'_2 = \omega_1 \omega_2, \\ \omega'_2 + \omega'_3 = \omega_2 \omega_3, \\ \omega'_3 + \omega'_1 = \omega_3 \omega_1, \end{cases}$$

известном как *уравнение Альфана I*. Фактически он решил в гипергеометрических функциях более общую квадратичную однородную дифференциальную систему (КОДС) вида

$$(H II) \begin{cases} \omega'_1 = a_1 \omega_1^2 + (\lambda - a_1)(\omega_1 \omega_2 + \omega_3 \omega_1 - \omega_2 \omega_3), \\ \omega'_2 = a_2 \omega_2^2 + (\lambda - a_2)(\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_2 - \omega_3 \omega_1), \\ \omega'_3 = a_3 \omega_3^2 + (\lambda - a_3)(\omega_3 \omega_1 + \omega_2 \omega_3 - \omega_1 \omega_2), \end{cases}$$

известную как *уравнение Альфана II*, и рассмотрел еще более общие КОДС вида

$$\{\omega'_r = \psi_r(\omega_1, \dots, \omega_l)\}_{r=1, \dots, l}$$

с квадратичными формами ψ_r при некоторых дополнительных условиях симметрии. Примерами таких КОДС являются уравнение (DH V) выше и его частный случай (H II), к рассмотрению которого и переходим.

6.2. Применение ППВ-теории к уравнению Дарбу–Альфана. Как показано в [21], уравнение (Н II) эквивалентно системе

$$x'_i = Q_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3,$$

где $Q_i(x_1, x_2, x_3) = x_i^2 + a(x_1 - x_2)^2 + b(x_2 - x_3)^2 + c(x_3 - x_1)^2$ для некоторых констант a, b, c .

Уравнение (Н II) является условием интегрируемости пары Лакса

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\frac{\mu I}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)} + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i C}{x - x_i} \right) Y, \quad (16)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \left(\nu I + \sum_{i=1}^3 \lambda_i x_i C \right) Y - Q(x) \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad (17)$$

где

$$Q(x) = x^2 + a(x_1 - x_2)^2 + b(x_2 - x_3)^2 + c(x_3 - x_1)^2,$$

через $x_i = x_i(t)$ обозначены параметрические (простые) особенности, C – постоянная (2×2) -матрица с нулевым следом, I – единичная матрица, $\mu \neq 0$ и λ_i – константы со свойством $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (так что на ∞ нет особой точки), а функция ν – это решение уравнения

$$\frac{\partial \nu}{\partial x} = -\mu \frac{x + x_1 + x_2 + x_3}{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}.$$

Поскольку решения последнего уравнения не рациональны по x , из критерия Сибья вытекает, что уравнение (16) не является изомонодромным. Для описания монодромии этого уравнения фиксируем фундаментальное решение Y пары Лакса в некоторой точке x_0 , лежащей вне фиксированных кругов D_i с центрами $x_i(t)$. Заметим, что решение Y должно быть аналитично как по x , так и по t . Вычисление показывает, что параметрическая матрица монодромии решения Y уравнения (16) в точке $x_i(t)$ равна

$$M_i(t) = \exp \left\{ -2\pi\sqrt{-1}\mu \int_{t_0}^t \beta_i(t) dt \right\} \exp \{ 2\pi\sqrt{-1} L_i(t_0) \},$$

где $L_i(t)$ – такая аналитическая функция от t , что для некоторого фундаментального решения Y_0 уравнения (16) в окрестности фиксированной неособой точки x_0 его аналитическое продолжение в окрестность точки $x_i(t)$ записывается в виде

$$Y(t, x) = Y_i(t, x - x_i(t))(x - x_i(t))^{L_i(t)}$$

с однозначной функцией Y_i . Коэффициенты $\beta_i(t)$ задаются формулой

$$\frac{x + \sum_{i=1}^3 x_i}{\prod_{i=1}^3 (x - x_i(t))} = \sum_{i=1}^3 \frac{\beta_i(t)}{x - x_i(t)}.$$

Так как эта матрица монодромии при каждом i имеет вид

$$M_i(t) = c_i(t)M_i(t_0),$$

где

$$c_i(t) = \exp\left\{-2\pi\sqrt{-1}\mu \int_{t_0}^t \beta_i(t) dt\right\}, \quad M_i(t_0) = \exp\{2\pi\sqrt{-1}L_i(t_0)\},$$

то уравнение (16) проективно изомонодромно. Оно также является примером фуксова проективно изомонодромного уравнения, к которому применимо предложение 5.2, так как оно записывается в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{A_i(t)}{(x-x_i)}\right)Y,$$

где

$$A_i(t) = B_i(t) + b_i(t)I, \quad B_i(t) = \lambda_i C, \quad b_i(t) = \frac{\mu}{\prod_{j \neq i}(x_i - x_j)},$$

и где уравнение

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\lambda_i C}{(x-x_i)}\right)Y$$

очевидно является изомонодромным.

§ 7. Обратные задачи

7.1. Параметрическая версия слабой проблемы Римана–Гильберта.

В работе [5] мы перенесли на параметрический случай технику А. А. Болибруха, связанную с построением голоморфных расслоений (см. [29]–[34]), и получили теорему о разрешимости следующей параметрической версии слабой проблемы Римана–Гильберта.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $S = \{a_1, \dots, a_s\}$ – конечное подмножество $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, D – открытый полидиск в $\mathbb{C}^r$, $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ – образующие группы $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S; a_0)$ для некоторой фиксированной базисной точки $a_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus S$, и пусть заданы аналитические отображения $M_i: D \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $i = 1, \dots, s$, удовлетворяющие соотношению $M_1 \cdots M_s = I_n$. Тогда существует параметрическая линейная дифференциальная система

$$\partial_x Y = A(x, t)Y$$

с матрицей $A \in \mathrm{gl}_n(\mathcal{O}_{D'}(x))$ для некоторого открытого полидиска $D' \subset D$, имеющая только регулярные особые точки, причем все они принадлежат S , и такая, что параметрическая матрица монодромии некоторого параметрического фундаментального решения вдоль каждого пути γ_i равна M_i . При этом для каждого фиксированного $a_i \in \{a_1, \dots, a_s\}$ можно выбрать матрицу A так, что все ее матричные элементы имеют не более чем простые полюсы во всех точках $a_j \neq a_i$.

Доказательство, как и в непараметрическом случае, основано на параметрической версии теоремы Биркгофа–Гротендика¹ (см. [35, предложение 4.1], [36, теорема 2], [37, теорема A.1]).

7.2. Обратная задача ППВ-теории. Также по аналогии с непараметрическим случаем мы вывели в [5] формулируемое ниже следствие из параметрических вариантов теоремы Шлезингера (см. теорему 3.7) и теоремы о разрешимости слабой проблемы Римана–Гильберта (см. теорему 7.1). Пусть, как и выше, $t = (t_1, \dots, t_r)$ – многомерный параметр, а $\Delta_t = \{\partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$ – соответствующий ему набор частных дифференцирований. Рассмотрим дифференциальное поле $k = k_0(x)$, где k_0 есть Δ_t -дифференциально замкнутое поле, содержащее $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_r)$, и снабдим поле k набором дифференцирований $\Delta = \{\partial_x, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_r}\}$.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть G – любая линейная Δ_t -дифференциальная алгебраическая группа, определенная над k_0 и такая, что $G(k_0)$ содержит некоторую конечно порожденную плотную в топологии Колчина подгруппу H . Тогда $G(k_0)$ является ППВ-группой некоторого ППВ-расширения поля $k = k_0(x)$.*

Условие теоремы 7.2 о том, что $G(k_0)$ содержит некоторую конечно порожденную плотную в топологии Колчина подгруппу H , дает на самом деле полное описание множества тех линейных дифференциальных алгебраических групп над k_0 , которые реализуются как ППВ-группы. Необходимость этого условия была доказана Т. Дрейфусом [8] как следствие его параметрической версии теоремы Рамиса о плотности (см., например, [12, с. 238]). Теорема Рамиса гласит, что локальная (в точке 0) дифференциальная группа Галуа над $\mathbb{C}(\{x\})$ любой линейной дифференциальной системы порядка n равна замыканию по Зарискому подгруппы в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, конечно порожденной так называемыми формальными данными монодромии, матрицами Стокса и экспоненциальным тором (все это вместе называется *обобщенными данными монодромии* и обобщает на случай иррегулярных особых точек понятие матриц монодромии из теории регулярных особых точек). Можно также показать, что (глобальная) дифференциальная группа Галуа над $\mathbb{C}(x)$ такой линейной дифференциальной системы равна замыканию по Зарискому подгруппы, порожденной конечным числом упомянутых “локальных” дифференциальных групп Галуа, допускающих одновременное вложение в виде подгрупп глобальной ПВ-группы. Дрейфус [8] определяет параметрический вариант обобщенных данных монодромии и дает параметрическую версию этой теоремы, откуда в свою очередь вытекает теорема 7.2.

В непараметрическом случае решение обратной задачи дифференциальной теории Галуа над $\mathbb{C}(x)$, данное в работе [38], опирается на доказанный там же результат о том, что над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль всякая линейная алгебраическая группа является замыканием по Зарискому некоторой конечно порожденной подгруппы. Однако этот результат не

¹31 марта 1998 г. А. А. Болибрух начал свою очередную лекцию для старшекурсников в Страсбурге поэтическим предписанием “*Récoltons les fruits de ce théorème*”, имея в виду классическую теорему Биркгофа–Гротендика.

имеет места для линейных *дифференциальных* алгебраических групп, в чем можно убедиться на примере аддитивной группы $\mathbb{G}_a(k_0)$ (используя те же обозначения, что и выше, для дифференциального поля k_0). Последняя обладает тем неожиданным свойством, что замыкание по Колчину любой ее конечно порожденной подгруппы является собственной подгруппой в $\mathbb{G}_a(k_0)$ (см. [5]). Более того, в работах [39] и [1] показано, что ни одна из групп $\mathbb{G}_a(k_0)$, $\mathbb{G}_m(k_0)$ не является ППВ-группой никакого ППВ-расширения поля $k_0(x)$. Пользуясь следствием 7.2, Зингер [40] установил следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.3. *Во введенных выше обозначениях линейная алгебраическая группа G , определенная над k_0 , является ППВ-группой некоторого ППВ-расширения поля $k_0(x)$ тогда и только тогда, когда связная компонента единицы группы G не имеет факторгрупп, изоморфных $\mathbb{G}_a(k_0)$ или $\mathbb{G}_m(k_0)$.*

Затем Минченко, Овчинников и Зингер [41] дали полное описание тех унипотентных линейных дифференциальных алгебраических групп, которые реализуются как ППВ-группы.

ТЕОРЕМА 7.4 (Минченко, Овчинников, Зингер). *Унипотентная линейная дифференциальная алгебраическая группа G над k_0 является замыканием по Колчину некоторой конечно порожденной подгруппы тогда и только тогда, когда она имеет дифференциальный тип 0.*

Здесь условие “ G имеет дифференциальный тип 0” означает, что так называемая “дифференциальная размерность” группы G конечна. Последняя определяется как степень трансцендентности над k_0 “дифференциального поля функций” $k_0\langle G^0 \rangle$, где G^0 – связная компонента единицы группы G . Если $G \subset \mathrm{GL}(n, k_0)$, то дифференциальное поле функций $k_0\langle G^0 \rangle$ равно полю частных дифференциального координатного кольца $R/\mathcal{I}$ группы G^0 . Точнее, $R/\mathcal{I}$ есть факторкольцо кольца дифференциальных полиномов $k_0\{y_{1,1}, \dots, y_{n,n}\}$ от n^2 дифференциальных переменных (дифференциальных относительно Δ_t) по дифференциальному идеалу $\mathcal{I}$, состоящему из тех дифференциальных полиномов, которые равны нулю на G^0 .

Эти же авторы дали в [42] полное описание редутивных линейных дифференциальных алгебраических групп, возникающих как ППВ-группы над $k_0(x)$. Кроме того, в каждой из работ [41], [42] приведены алгоритмы для выяснения, имеет ли ППВ-группа требуемый вид, и вычисления этой группы в случае положительного ответа.

§ 8. Приложение

Пусть (K, ∂) – обыкновенное дифференциальное поле, а $K\{X\}$ – дифференциальное кольцо дифференциальных полиномов от одного дифференциального переменного. По определению $K\{X\}$ – это кольцо $K[X_0, X_1, \dots, X_n, \dots]$ полиномов от переменных $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$, на которые дифференцирование ∂ продолжается по формуле $\partial X_i = X_{i+1}$ для всех $i \geq 0$. В $K\{X\}$ будем также записывать X вместо X_0 , X' вместо X_1 и $X^{(i)} := \partial^{(i)} X$ для всех X_i . *Порядок* $o(f)$

элемента $f \in K\{X\}$ определяется как наименьшее целое число n , для которого $f \in K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ (если $f \notin K$), или по формуле $o(f) = -1$ (если $f \in K$). Основные факты и теоретико-модельные свойства теории дифференциально замкнутых полей приведены, например, в [43]–[47].

Следующее определение близко к определению алгебраической замкнутости. Оно принадлежит Л. Блюм [48], которая упростила более раннее определение, данное А. Робинсоном [49].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1 (Блюм). Дифференциальное поле (K, ∂) называется *дифференциально замкнутым*, если для любых $f, g \in K\{X\}$ с $f \notin K$ и $o(g) < o(f)$ найдется элемент $a \in K$ такой, что $f(a) = 0$ и $g(a) \neq 0$.

Это определение хорошо иллюстрируется приведенным выше примером 1.1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t}{x}y.$$

Покажем, что над $K(x)$, где K – любое дифференциально замкнутое поле, содержащее $\mathbb{C}(t)$, задаваемое этим примером препятствие к выполнению соответствия Галуа обращается в нуль. Напомним, что ППВ-расширение изучаемого уравнения над $K(x)$ равно $K(x, x^t, \log x)$ и что любой элемент σ ППВ-группы имеет вид

$$\sigma(x^t) = a_\sigma x^t, \quad \sigma(\log x) = \log x + c_\sigma,$$

где коэффициенты $a_\sigma \in K^*$ удовлетворяют равенствам

$$a''_\sigma a_\sigma - a'^2_\sigma = 0, \quad c_\sigma = \frac{a'_\sigma}{a_\sigma},$$

в которых через a'_σ, a''_σ обозначаются производные относительно дифференцирования, продолжающего d/dt .

Чтобы избежать инвариантности $\log x$ относительно ППВ-группы (в таком случае поле инвариантов ППВ-группы не будет совпадать с основным полем $K(x)$), нам нужно иметь хотя бы один элемент σ с $\sigma(\log x) \neq \log x$. Условие на коэффициент $a_\sigma \in K^*$ этого элемента состоит в том, что

$$a''_\sigma a_\sigma - a'^2_\sigma = 0, \quad \frac{a'_\sigma}{a_\sigma} \neq 0.$$

Поскольку поле K дифференциально замкнуто, такой элемент существует по определению 8.1, примененному к $f(X) = X''X - X'^2$ и $g(X) = X'$.

Определение общих (не обязательно обыкновенных) дифференциально замкнутых полей принадлежит Э. Колчину [50], назвавшему их “ограниченно замкнутыми”. Для обыкновенных дифференциальных полей это определение эквивалентно определению 8.1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2 (Колчин). Пусть K – любое Δ -дифференциальное поле, снабженное конечным набором Δ коммутирующих дифференцирований на K . Поле K называется *Δ -дифференциально замкнутым*, если оно не имеет собственных ограниченных расширений.

Приведем также определение ограниченного расширения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Пусть K – любое Δ -дифференциальное поле. Дифференциальное расширение L поля K называется *ограниченным*, если для любого конечного набора элементов $(\eta_1, \dots, \eta_s)$ поля L существует Δ -дифференциальный полином $P \in K\{y_1, \dots, y_s\}$ такой, что $P(\eta_1, \dots, \eta_s) \neq 0$, но $P(\zeta_1, \dots, \zeta_s) = 0$ для любой не порождающей дифференциальной специализации $(\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ набора $(\eta_1, \dots, \eta_s)$ над K .

В терминологии Колчина дифференциальная специализация $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_s)$ набора $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_s)$ в некотором расширении поля K называется *порождающей*, если определяющие идеалы наборов ζ и η в $K\{y_1, \dots, y_s\}$ совпадают. Дальнейшую информацию об этих понятиях можно почерпнуть в оригинальных работах Колчина (см. [3], [50], [51]). Дифференциальное замыкание определяется аналогично алгебраическому замыканию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. Пусть K – любое Δ -дифференциальное поле. *Дифференциальным замыканием* поля K называется такое дифференциально замкнутое дифференциальное расширение поля K , которое допускает вложение в любое дифференциально замкнутое дифференциальное расширение поля K .

ТЕОРЕМА 8.5. Каждое дифференциальное поле K имеет единственное дифференциальное замыкание.

Этот результат был доказан в работах М. Морли [52], Л. Блюм [48], С. Шелаха [53] и Э. Колчина [50]. Однако, в отличие от алгебраического замыкания, дифференциальное замыкание не обязано быть минимальным, даже в характеристике 0. Хотя некоторыми авторами выдвигалась гипотеза о минимальности (см. [54]), Колчин, Розенлихт и Шелах независимо показали, что это не так. В частности, Шелах [53] показал, что обыкновенное дифференциальное замыкание $\tilde{\mathbb{Q}}$ поля $\mathbb{Q}$ не минимально, построив бесконечную строго убывающую последовательность дифференциально замкнутых промежуточных дифференциальных расширений поля $\mathbb{Q}$ в $\tilde{\mathbb{Q}}$.

Благодарности. Автор хотела бы поблагодарить Майкла Зингера за полезные комментарии и Рената Гонцова за тщательное чтение корректур рукописи. Автор также благодарна Филлис Кассиди за ее слайды о подходе Колчина в теории дифференциально замкнутых полей.

Список литературы

1. P. J. Cassidy, M. F. Singer, “Galois theory of parameterized differential equations and linear differential algebraic groups”, *Differential equations and quantum groups*, IRMA Lect. Math. Theor. Phys., **9**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, 113–155.
2. P. J. Cassidy, “Differential algebraic groups”, *Amer. J. Math.*, **94**:3 (1972), 891–954.
3. E. R. Kolchin, *Differential algebraic groups*, Pure Appl. Math., **114**, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1985, xvii+271 pp.
4. A. Buium, *Differential algebraic groups of finite dimension*, Lecture Notes in Math., **1506**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, xvi+145 pp.

5. C. Mitschi, M. F. Singer, “Monodromy groups of parameterized linear differential equations with regular singularities”, *Bull. London Math. Soc.*, **44**:5 (2012), 913–930; 2011, arXiv: 1106.2664v1.
6. D. G. Babbitt, V. S. Varadarajan, *Deformations of nilpotent matrices over rings and reduction of analytic families of meromorphic differential equations*, Mem. Amer. Math. Soc., **55**, № 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985, iv+147 pp.
7. R. Schäfke, “Formal fundamental solutions of irregular singular differential equations depending upon parameters”, *J. Dynam. Control Systems*, **7**:4 (2001), 501–533.
8. T. Dreyfus, “A density theorem in parameterized differential Galois theory”, *Pacific J. Math.*, **271**:1 (2014), 87–141.
9. A. Borel, *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, Hist. Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI; London Math. Soc., Cambridge, 2001, xiv+184 pp.
10. H. Żołądek, *The monodromy group*, Monografie matematyczne. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk (New Series), **67**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006, xii+580 pp.
11. L. Schlesinger, *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, v. I, II, B. G. Teubner, Leipzig, 1895, 1897, xx+487 pp., xviii+532 pp. pp.
12. M. van der Put, M. F. Singer, *Galois theory of linear differential equations*, Grundlehren Math. Wiss., **328**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, xviii+438 pp.
13. A. Seidenberg, “Abstract differential algebra and the analytic case”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 159–164.
14. A. Seidenberg, “Abstract differential algebra and the analytic case. II”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23**:3 (1969), 689–691.
15. M. Kuga, *Galois’ dream: group theory and differential equations*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, x+150 pp.
16. R. S. Palais, “Some analogues of Hartogs’ theorem in an algebraic setting”, *Amer. J. Math.*, **100**:2 (1978), 387–405.
17. A. A. Bolibruch, “On isomonodromic deformations of Fuchsian systems”, *J. Dynam. Control Systems*, **3**:4 (1997), 589–604.
18. H. Grauert, “Holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen”, *Math. Ann.*, **133** (1957), 450–472; H. Cartan, “Espaces fibrés analytiques”, *Symposium Internacional de Topología Algebraica*, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958, 97–121; H. Grauert, “Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen”, *Math. Ann.*, **135** (1958), 263–273.
19. Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain: problems of analytic continuation*, Transl. Math. Monogr., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, xiv+267 pp.
20. S. Chakravarty, M. J. Ablowitz, “Integrability, monodromy evolving deformations, and self-dual Bianchi IX systems”, *Phys. Rev. Lett.*, **76**:6 (1996), 857–860.
21. Y. Ohyama, *Quadratic equations and monodromy evolving deformations*, 2007, arXiv: 0709.4587v1.
22. Y. Ohyama, “Monodromy evolving deformations and Halphen’s equation”, *Groups and symmetries*, CRM Proc. Lecture Notes, **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 343–348.
23. C. Mitschi, M. F. Singer, “Projective isomonodromy and Galois groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:2 (2013), 605–617.
24. G. Darboux, “Sur les surfaces orthogonales”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **3** (1866), 97–141.
25. G. Darboux, “Mémoire sur la théorie des coordonnées curvilignes, et des systèmes orthogonaux”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (2), **7** (1878), 101–150, 227–260, 275–348.

26. Э. Картан, *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения*, Изд-во МГУ, М., 1962, 240 с.; пер. с фр.: É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Actualités Sci. Ind., **994**, Hermann et Cie., Paris, 1945, 214 pp.
27. G. H. Halphen, “Sur un système d’équations différentielles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 1101–1103.
28. G. H. Halphen, “Sur certains systèmes d’équations différentielles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **92** (1881), 1404–1407.
29. D. V. Anosov, A. A. Bolibrukh, *The Riemann–Hilbert problem*, Aspects of Math., **22**, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994, x+190 pp.
30. А. А. Болибрух, “Проблема Римана–Гильберта”, *УМН*, **45:2**(272) (1990), 3–47; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The Riemann–Hilbert problem”, *Russian Math. Surveys*, **45:2** (1990), 1–58.
31. А. А. Болибрух, “О достаточных условиях положительной разрешимости проблемы Римана–Гильберта”, *Матем. заметки*, **51:2** (1992), 9–19; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “On sufficient conditions for the positive solvability of the Riemann–Hilbert problem”, *Math. Notes*, **51:2** (1992), 110–117.
32. А. А. Болибрух, “Об аналитическом преобразовании к стандартной биркгофовой форме”, *Избранные вопросы математической физики и анализа*, Сборник статей. К семидесятилетию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимиров, Тр. МИАН, **203**, Наука, М., 1994, 33–40; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “On analytic transformation to Birkhoff standard form”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **203** (1995), 29–35.
33. А. А. Болибрух, “21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем”, Тр. МИАН, **206**, Наука, М., 1994, 3–158; англ. пер.: A. A. Bolibrukh, “The 21st Hilbert problem for linear Fuchsian systems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **206** (1995), 1–145.
34. A. A. Bolibrukh, S. Malek, C. Mitschi, “On the generalized Riemann–Hilbert problem with irregular singularities”, *Expo. Math.*, **24:3** (2006), 235–272.
35. B. Malgrange, “Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières”, *Mathematics and physics* (Paris, 1979/1982), Progr. Math., **37**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, 401–426.
36. A. Bolibrukh, “Inverse problems for linear differential equations with meromorphic coefficients”, *Isomonodromic deformations and applications in physics* (Montréal, QC, 2000), CRM Proc. Lecture Notes, **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, 3–25.
37. А. А. Болибрух, А. Р. Итс, А. А. Капаев, “On the Riemann–Hilbert–Birkhoff inverse monodromy problem and the Painlevé equations”, *Алгебра и анализ*, **16:1** (2004), 121–162; *St. Petersburg Math. J.*, **16:1** (2005), 105–142.
38. C. Tretkoff, M. Tretkoff, “Solution of the inverse problem of differential Galois theory in the classical case”, *Amer. J. Math.*, **101:6** (1979), 1327–1332.
39. P. Landesman, “Generalized differential Galois theory”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **360**, 2008, 4441–4495.
40. M. F. Singer, “Linear algebraic groups as parameterized Picard–Vessiot Galois groups”, *J. Algebra*, **373** (2013), 153–161; old version, 2011, http://www4.ncsu.edu/~singer/ms_papers.html.
41. A. Minchenko, A. Ovchinnikov, M. F. Singer, “Unipotent differential algebraic groups as parameterized differential Galois groups”, *J. Inst. Math. Jussieu*, **13:4** (2014), 671–700.
42. A. Minchenko, A. Ovchinnikov, M. F. Singer, “Reductive linear differential algebraic groups and the Galois groups of parameterized linear differential equations”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **2015:7** (2015), 1733–1793.
43. A. Marcja, C. Toffaloni, *A guide to classical and modern model theory*, Trends Log. Stud. Log. Libr., **19**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, xi+369 pp.

44. D. Marker, *Model theory of differential fields*, Preprint, University of Illinois at Chicago, 2000.
45. D. Marker, “Model theory of differential fields”, *Model theory, algebra and geometry*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **39**, Cambridge Univ. Press, 2000, 53–63.
46. A. Robinson, *Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1963, ix+284 pp.
47. C. Wood, “The model theory of differential fields revisited”, *Israel J. Math.*, **25**:3-4 (1976), 331–352.
48. L. Blum, *Generalized algebraic structures: a model theoretic approach*, Ph.D. dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1968.
49. A. Robinson, “On the concept of a differentially closed field”, *Bull. Res. Council Israel Sect. F*, **8** (1959), 113–128.
50. E. R. Kolchin, “Constrained extensions of differential fields”, *Advances in Math.*, **12**:2 (1974), 141–170.
51. E. R. Kolchin, *Differential algebra and algebraic groups*, Pure Appl. Math., **54**, Academic Press, New York–London, 1973, xviii+446 pp.
52. M. D. Morley, “Categoricity in power”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **114**, 1965, 514–538.
53. S. Shelah, “Differentially closed fields”, *Israel J. Math.*, **16**:3 (1973), 314–328.
54. G. E. Sacks, “The differential closure of a differential field”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**:5 (1972), 629–634.
55. C. Mitschi, D. Sauzin, *Divergent Series, Summability and Resurgence, vol. I: Monodromy and Resurgence*, Springer Lecture Notes, **2153**, 2016 (to appear).

Клод Митчи

(CLAUDE MITSCHI)

Institut de Recherche Mathématique Avancée,

Université de Strasbourg, France

E-mail: mitschi@math.unistra.fr

Поступило в редакцию

19.01.2015

Перевод с английского А. В. Домрина