Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Голышев, Д. Загир, Доказательство гамма-гипотезы для трехмерных многообразий Фано с решеткой Пикара ранга 1, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 1, 27–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:21:06

УДК 512.776+515.178.1+517.926.4

В. В. Голышев, Д. Загир

Доказательство гамма-гипотезы для трехмерных многообразий Фано с решеткой Пикара ранга 1

Памяти Андрея Андреевича Болибруха

Для всех 17 деформационных классов трехмерных многообразий Фано ранга 1 проверена (первая) гамма-гипотеза, связывающая гамма-класс многообразия Фано и асимптотику на бесконечности решений Фробениуса квантового дифференциального уравнения, ассоциированного с этим многообразием. В ходе доказательства вычислены соответствующие пределы (“пределы Фробениуса”) для дифференциальных уравнений Пикара–Фукса типа Аперри, ассоциированных с семействами многообразий Фано при зеркальной симметрии. Предложены два подхода к доказательству: комбинаторный и основанный на модулярных свойствах дифференциальных уравнений. Формулировка гамма-гипотезы для трехмерного многообразия Фано всегда содержит рациональное кратное числа $\zeta(3)$. Приведены численные данные, позволяющие предположить, что высшие пределы Фробениуса дифференциальных уравнений типа Аперри могут быть связаны с кратными дзета-значениями.

Библиография: 31 наименование.

Ключевые слова: гамма-класс, гамма-гипотеза, уравнение Пикара–Фукса, трехмерные многообразия Фано.

DOI: 10.4213/im8343

Введение

Цель настоящей работы двоякая. С одной стороны, мы вычислим некоторые коэффициенты матрицы перехода (или матрицы центральной связности) преобразования Лапласа некоторых дифференциальных уравнений типа Аперри и найдем коэффициенты разложения решения с наибольшим ростом на бесконечности по базису Фробениуса в точке $z = 0$. С другой стороны, эти вычисления, результаты которых всякий раз содержат число $\zeta(3)$, позволяют проверить одно из предсказаний зеркальной симметрии: так называемую (первую) гамма-гипотезу для каждого из 17 деформационных классов из классификации Исковских гладких трехмерных многообразий Фано с решеткой Пикара ранга 1.

Мы изложим два подхода к вычислению изучаемых пределов. Один из них будет проведен подробно только для дифференциального уравнения, которому удовлетворяет производящая функция чисел, использованных Р. Аперри в его знаменитом доказательстве иррациональности $\zeta(3)$. Этот подход основан на

Исследование В. В. Голышева выполнено в ИПИ РАН за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

явной гипергеометрической формуле Апері для указанных чисел и обладает тем недостатком, что в нем используются сложные экспериментально найденные формулы с несколько искусственными доказательствами. Тем не менее мы излагаем его, так как он применим и в немодулярных ситуациях (к которым относится, например, большинство дифференциальных уравнений, ассоциированных с четырехмерными многообразиями Фано). Также этот подход переносится почти автоматически на все случаи, когда дифференциальное уравнение принадлежит к гипергеометрическому типу, что имеет место для 10 из 17 элементов списка Исковских. Второй метод опирается на модулярную параметризацию рассматриваемого дифференциального уравнения, которая для случая Апері была уже давно найдена Ф. Бейкерсом. Этот метод гораздо красивее и объясняет появление ключевой константы $\zeta(3)$ как периода некоторого ряда Эйзенштейна. Он единообразно применяется ко всем дифференциальным уравнениям, допускающим модулярную параметризацию, что имеет место для 15 из 17 семейств, включая все не гипергеометрические семейства. Отсюда вытекает наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Гамма-гипотеза справедлива для всех трехмерных многообразий Фано с решеткой Пикара ранга 1.*

Так как в статье затрагивается широкий круг тем и читатель может быть знаком не со всеми из них, то мы для полноты приводим в § 1 обзор основных понятий (многообразия Фано, классификация Исковских, квантовые дифференциальные уравнения, гамма-класс, гамма-гипотеза). Однако само вычисление пределов, содержащееся в § 2, использует только классические средства из теории чисел, и его можно читать независимо от предыдущего материала. В оставшейся части введения мы скажем еще несколько слов об основах предмета и явно сформулируем гамма-гипотезу для случая Апері.

Зеркальная симметрия, в частности, предсказывает, что с каждым из 17 семейств рассматриваемых многообразий Фано связано некоторое семейство $\mathcal{E}$ КЗ-поверхностей над $\mathbb{P}^1$ (соответствующее посредством изогении так называемой модели Ландау–Гинзбурга) таким образом, что “квантовое дифференциальное уравнение” на стороне Фано совпадает с преобразованием Лапласа дифференциального уравнения Пикара–Фукса, которому удовлетворяют периоды семейства $\mathcal{E}$. Квантовые дифференциальные уравнения, определение которых приводится в п. 1.4, возникают при подсчете числа вложенных голоморфных кривых (инвариантов Громова–Виттена) и, следовательно, образуют “А-сторону” на языке теории струн (где обычно изучаются семейства трехмерных многообразий Калаби–Яу), тогда как модель Ландау–Гинзбурга и наше второе семейство $\mathcal{E}$ вместе с его уравнением Пикара–Фукса образуют “В-сторону”. При этом ожидается, что пикаровские ранги многообразия Фано и общего слоя семейства $\mathcal{E}$ в сумме дают 20. Для всех 17 рассматриваемых случаев эти предсказания зеркальной симметрии были уточнены в [1] и доказаны в [1] и [2]. Семейство $\mathcal{E}$ во всех случаях оказывается семейством типа Куги–Сато, база которого есть модулярная кривая $^1 X_0^*(N) = X_0(N)/W_N$, классифицирующая неупорядоченные пары (E, E') всех N -изогенных эллиптических кривых для некоторого N , а слой есть гладкое разрешение особенностей фактора $E \times E'$ по подгруппе (-1) и, как и ожидалось, имеет число

¹Или ее d -листное накрытие, где d – “индекс”. Во введении мы считаем, что $d = 1$.

Пикара $19 = 20 - 1$ (а именно, 16 алгебраических циклов появляются при разрешении 16 особых точек, а еще три – из классов E , E' и графика изогении). Принадлежность этих семейств к типу Куги–Сато означает в точности то, что решения ассоциированных с ними дифференциальных уравнений Пикара–Фукса допускают модулярную параметризацию. А именно, каждое из этих дифференциальных уравнений имеет единственное голоморфное решение вида $\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$ с $A_0 = 1$ в точке $t = 0$, где t – некоторая координата на базе $\mathbb{P}^1$, а модулярная параметризация состоит в том, что $\Phi(t(\tau))^2$ есть модулярная форма веса 4 на $\Gamma_0^*(N)$ для некоторой главной модулярной функции $t(\tau)$ на $X_0^*(N)$. Гамма-гипотеза связывает асимптотику на бесконечности четырех решений Фробениуса дифференциального уравнения, которому удовлетворяет функция $\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n / n!$, с так называемым гамма-классом (характеристическим классом в когомологиях с вещественными коэффициентами, определение которого приводится в п. 1.5) соответствующего трехмерного многообразия Фано.

Опишем теперь подробнее всю картину в случае Апери, соответствующем $N = 6$. Здесь

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2, \quad \Phi(t) = 1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + \dots \quad (0.1)$$

Соответствующие рекуррентная формула и дифференциальное уравнение имеют вид

$$(n+1)^3 A_{n+1} - P(n) A_n + n^3 A_{n-1} = 0, \quad (D^3 - tP(D) + t^2(D+1)^3)\Phi(t) = 0, \quad (0.2)$$

где $D = t d/(dt)$, а через $P(n)$ обозначен полином

$$34n^3 + 51n^2 + 27n + 5 = (2n+1)(17n^2 + 17n + 5).$$

Модулярная параметризация, найденная Ф. Бейкерсом [3], имеет вид

$$t = \left(\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \right)^{12} = q - 12q^2 + 66q^3 + \dots,$$

$$\Phi(t) = \frac{(\eta(2\tau)\eta(3\tau))^7}{(\eta(\tau)\eta(6\tau))^5} = 1 + 5q + 13q^2 + \dots,$$

где $\eta(\tau)$ – эта-функция Дедекинда и, как обычно, $q = e^{2\pi i \tau}$. Чтобы сформулировать гамма-гипотезу, мы рассмотрим вместо решения $\Phi(t)$ связанный с ним степенной ряд²

$$\Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{z^n}{n!} = 1 + 5z + \frac{73}{2}z^2 + \frac{1445}{6}z^3 + \dots$$

Он также удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению, на этот раз порядка 4, без особенностей на $\mathbb{C}^*$, имеющему регулярную особую точку в нуле и иррегулярную на бесконечности. (Именно эту функцию мы называли выше “преобразованием Лапласа”, хотя термин “преобразование Бореля”

²Отметим, что в литературе часто рассматривается ряд от переменной $1/z$.

был бы уместнее.) Пространство решений преобразованного уравнения вблизи точки $z = 0$ имеет стандартный базис Фробениуса $\Psi_j(z)$, $0 \leq j \leq 3$, причем каждая функция $\Psi_j(z)$ имеет в начале координат особенность типа $(\log z)^j/j!$. Определим *пределы Фробениуса* κ_j по формуле

$$\kappa_j := \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi_j(z)}{\Psi(z)}. \quad (0.3)$$

Гамма-гипотеза выражает эти пределы через $\zeta(3)$ и числа Чжэня одного из многообразий Фано, входящих в список Исковских (и обозначаемого там через V_{12}). А именно, она предсказывает, что

$$\kappa_1 = -\gamma, \quad \kappa_2 = \frac{\gamma^2}{2} - \frac{3}{2}\zeta(2), \quad \kappa_3 = -\frac{\gamma^3}{6} + \frac{3}{2}\gamma\zeta(2) + \frac{5}{2}\zeta(3), \quad (0.4)$$

где γ – константа Эйлера. (Нетрудное явное вычисление гамма-класса как для этого случая, так и для 16 оставшихся, содержится в п. 1.5, предложение 2.) Мы докажем эти формулы как частный случай нашей основной теоремы (п. 1.3, теорема 3), дающей пределы Фробениуса во всех 17 случаях.

В заключение заметим, что базис Фробениуса является частью бесконечного набора функций $\Psi_j(z)$, $j \geq 0$, с особенностью типа $(\log z)^j$ в начале координат и таких, что функции Ψ_j , $j \geq 4$, удовлетворяют некоторым неоднородным версиям дифференциального уравнения для $\Psi(z)$. Пределы κ_j , определенные формулой (0.3), существуют и могут быть найдены численно с высокой точностью с помощью метода, изложенного в п. 2.4. Мы обнаружили, что при $j \leq 10$ каждое из этих отношений опять является полиномом от γ и римановых дзета-значений, но для κ_{11} это уже не так: появляются *кратные* дзета-значения. Хотя эти наблюдения остаются пока чисто экспериментальными, мы считаем их заслуживающими внимания и опишем их подробнее в п. 2.4 статьи.

Поскольку основной составляющей в настоящей работе является монодромия фуксовых дифференциальных уравнений, мы сочли, что статью уместно посвятить памяти Андрея Андреевича Болибруха, внесшего столь глубокий вклад в этот предмет.

§ 1. Многообразие Фано, дифференциальные уравнения типа Апер и зеркальная симметрия

В этом параграфе вкратце описана гамма-гипотеза (подробнее см. [4] и [5]) и полностью сформулированы все ее предсказания для трехмерных многообразий Фано, группы Пикара которых имеют ранг 1. Описаны также ассоциированные уравнения Пикара–Фукса и их модулярные параметризации согласно [1].

1.1. Многообразие Фано и классификация Исковских. Под *многообразием Фано* X в настоящей работе понимается гладкое проективное алгебраическое многообразие с обильным антиканоническим классом. Проективная прямая $\mathbb{P}^1$ является единственным многообразием Фано размерности 1. Многообразия Фано размерности 2 называются поверхностями дель Пеццо; это либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, либо раздутия $\mathbb{P}^2$ в d точках, $0 \leq d \leq 8$. Согласно результатам Мори

и Мукаи [6] имеется 105 деформационных семейств трехмерных многообразий Фано.

Нас интересуют трехмерные многообразия Фано, решетки Пикара которых имеют ранг 1. (Поскольку здесь все когомологические классы степени 2 являются алгебраическими, это условие означает, что $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.) Согласно В. А. Исковских [7], [8] (см. также [9]) существует ровно 17 таких многообразий с точностью до деформации. Важными для этой классификации численными инвариантами являются *индекс* $d = [H^2(X, \mathbb{Z}) : \mathbb{Z}c_1]$, где c_1 – антиканонический дивизор, и *уровень* $N = \frac{1}{2d^2} \langle c_1^3, [X] \rangle$, всегда равный некоторому положительно-му целому числу. Список 17 возможных пар инвариантов (N, d) следующий:

$$(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1), (9, 1), (11, 1), \\ (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (3, 3), (2, 4). \quad (1.1)$$

Например, пара $(N, d) = (2, 4)$ соответствует многообразию Фано $X = \mathbb{P}^3$ (так что в этом случае семейство деформаций имеет нульмерную базу), для которого ассоциированное дифференциальное уравнение Пикара–Фукса гипергеометрично. Пара $(N, d) = (6, 1)$ задает семейство, обозначаемое через V_{12} (его геометрическое определение не играет для нас никакой роли и упоминаться не будет) и соответствующее обсуждаемому во введении дифференциальному уравнению Аперри. В дальнейшем будем называть этот случай “случаем Аперри”.

1.2. Дифференциальные уравнения типа Аперри. В этом пункте мы опишем дифференциальные уравнения Пикара–Фукса, ассоциированные со всеми 17 случаями, в следующем – их модулярные свойства, а в п. 1.4 – связь их преобразований Лапласа с квантовыми когомологиями многообразий Фано.

Возникающие здесь дифференциальные операторы относятся к типу D3. Под “типом Dn ” (полное название: “детерминантные дифференциальные уравнения порядка n ”) понимается введенный в [10] класс линейных дифференциальных уравнений, в который входят уравнения Пикара–Фукса некоторых семейств многообразий Калаби–Яу размерности $n - 1$. Если применить к ним преобразование Лапласа, мы приходим к классу уравнений, в который входят квантовые дифференциальные уравнения некоторых n -мерных многообразий Фано. Операторы типа D2 имеют вид

$$D^2 + t(a_1 D(D+1) + b_1) + a_2 t^2 (D+1)^2 + a_3 t^3 (D+1)(D+2), \quad D = t \frac{d}{dt},$$

и именно они изучались как “дифференциальные уравнения типа Аперри” в [11] и [12]. Их прототипом было дифференциальное уравнение второго порядка, коэффициенты решений которого использовались Р. Аперри в его новом доказательстве иррациональности $\zeta(2)$. Поскольку класс D3 содержит дифференциальное уравнение порядка 3, отвечающее доказательству Аперри для иррациональности $\zeta(3)$, мы будем использовать термин “уравнения типа Аперри порядка n ” как другое название класса Dn . Операторы класса D3, которые мы будем изучать здесь, имеют общий вид

$$\mathcal{L} = D^3 + t \left(D + \frac{1}{2} \right) (a_1 D(D+1) + b_1) + t^2 (D+1) (a_2 (D+1)^2 + b_2) \\ + a_3 t^3 (D+1) \left(D + \frac{3}{2} \right) (D+2) + a_4 t^4 (D+1)(D+2)(D+3). \quad (1.2)$$

Их можно также записать как tL , где L – дифференциальный оператор вида

$$L = t^2 Q \frac{d^3}{dt^3} + \frac{3}{2} (t^2 Q)' \frac{d^2}{dt^2} + \left(\frac{t^2}{2} Q'' + 3tQ' + R \right) \frac{d}{dt} + \left(\frac{t}{2} Q'' + \frac{1}{2} R' \right), \quad (1.3)$$

причем полиномы

$$Q = Q(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4, \quad R = R(t) = 1 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (1.4)$$

степеней ≤ 4 и ≤ 2 описывают соответственно положение особенностей уравнения и так называемые акцессорные параметры.

В общем случае уравнение типа Dn получается из $(n+1) \times (n+1)$ -матрицы $\mathcal{A} = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$, коэффициенты которой (в ситуации квантовых кохомологий интерпретируемые как корреляторы, о чем напомним в п. 1.4) удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= 0 \quad \text{при } j < i-1, & a_{i,j} &= 1 \quad \text{при } j = i-1, \\ a_{i,j} &= a_{n-j,n-i}, & 0 &\leq i, j \leq n, \end{aligned}$$

так что это семейство уравнений зависит от $n^2/4 + O(n)$ параметров. Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$, отвечающий матрице $\mathcal{A}$, и его преобразование Лапласа $\tilde{\mathcal{L}}$ (связанное с $\mathcal{L}$ условием: $\tilde{\mathcal{L}}\Psi = 0 \Leftrightarrow \mathcal{L}\Phi = 0$ при $\Phi(t) = \sum A_n t^n$ и $\Psi(z) = \sum A_n z^n / n!$) тогда задаются формулами

$$\mathcal{L} = D^{-1} \det_R((\delta_{i,j} D - a_{i,j} (Dt)^{j-i+1})_{0 \leq i,j \leq n}) \quad (1.5)$$

и (при $D_z = z d/(dz)$)

$$\tilde{\mathcal{L}} = \det_R((\delta_{i,j} D_z - a_{i,j} z^{j-i+1})_{0 \leq i,j \leq n}). \quad (1.6)$$

Здесь “правый определитель” $\det_R$ матрицы с некоммутирующими элементами определяется по индукции как альтернированная сумма элементов самого правого столбца, умноженных справа на правые определители соответствующих миноров. (Первая формула корректна, так как все члены самого правого столбца указанной в ней матрицы делятся слева на D .) Возможно, естественнее было бы определить эти два оператора с помощью связности, заданной в матричном виде формулой

$$D_z(\xi_0, \dots, \xi_n) = (\xi_0, \dots, \xi_n)(a_{i,j} z^{j-i+1})_{0 \leq i,j \leq n}. \quad (1.7)$$

Тогда $\tilde{\mathcal{L}}$ – это оператор, обнуляющий ξ_0 , а $\mathcal{L}$ получается из него формальным “обратным преобразованием Лапласа”. Две матрицы $\mathcal{A}$, отличающиеся на скаляр cI , будем считать эквивалентными, так как переход от одной из них к другой сводится к сдвигу $t^{-1} \mapsto t^{-1} + c$ на t -стороне или к умножению на $\exp(cz)$ на z -стороне, что не оказывает никакого влияния на пределы Фробениуса (0.3). Заметим, что операторы типа Dn автодуальны в том смысле, что коэффициент при t^i является $(-1)^{n-i}$ -симметричным относительно преобразования $D \mapsto -D - i$. Кроме того, уравнения типа D3 являются симметрическими квадратами. (Это важно для наших целей, поскольку свойство быть симметрической степенью дифференциального оператора второго порядка является необходимым условием для модулярности.) Аналог этого утверждения для

старших Dn неверен. На самом деле $D4$ -уравнения, возникающие как уравнения Пикара–Фукса семейств трехмерных многообразий Калаби–Яу, почти никогда не модулярны.

Матрицы размера 4×4 , отвечающие всем 17 семействам Исковских, были выписаны в [1]. Например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 5 & 96 & 1692 & 12816 \\ 1 & 12 & 216 & 1692 \\ 0 & 1 & 12 & 96 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 12/5 & 24 & 198 & 880 \\ 1 & 22/5 & 44 & 198 \\ 0 & 1 & 22/5 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 12/5 \end{pmatrix}$$

отвечают случаю Аперри $(N, d) = (6, 1)$ и самому сложному случаю $(N, d) = (11, 1)$, в котором дифференциальное уравнение приводит к пятичленному рекуррентному соотношению на коэффициенты голоморфных решений, а скалярные сдвиги подобраны так, чтобы решения были рядами Эйзенштейна. Не выписывая матриц, отвечающих остальным случаям, мы приведем в таблице 1 полиномы Q и R , определенные равенствами (1.4), так как эти полиномы содержат ту же информацию, а записываются гораздо компактнее. Мы приводим все данные только для $d = 1$, поскольку существует простая алгебраическая процедура для вывода дифференциального уравнения, которому удовлетворяет степенной ряд $\Phi(t^d)$, по известному уравнению для $\Phi(t)$. (В наших случаях переход от $(N, 1)$ к (N, d) сводится к замене $Q(t)$ на $Q(t^d)$, тогда как новый R -полином равен $1 + (4b_1 - a_1)t^2$ для $d = 2$ и просто 1 для $d = 3$ или 4, где a_1 и b_1 – линейные коэффициенты исходных полиномов Q и R .) В последних трех столбцах таблицы указаны некоторые инварианты $(f_M)_{M|N}$, $(h_M)_{M|N}$ и $\mu_N = \frac{1}{2} \sum_M M h_M$, которые определяются в следующем пункте (см. (1.14)) и используются в дальнейшем для доказательства гамма-гипотезы.

Таблица 1

N	$Q(t)$	$R(t)$	$\{f_M\}$	$\{h_M\}$	μ_N
1	$1 - 1728t$	$1 - 240t$	–	–	62
2	$1 - 256t$	$1 - 48t$	$(24, -24)$	$(-80, 80)$	40
3	$1 - 108t$	$1 - 24t$	$(12, -12)$	$(-30, 30)$	30
4	$1 - 64t$	$1 - 16t$	$(8, 0, -8)$	$(-16, 0, 16)$	24
5	$1 - 44t - 16t^2$	$1 - 12t + 4t^2$	$(6, -6)$	$(-10, 10)$	20
6	$1 - 34t + t^2$	$1 - 10t$	$(5, -1, 1, -5)$	$(-7, 1, -1, 7)$	17
7	$1 - 26t - 27t^2$	$1 - 8t + 3t^2$	$(4, -4)$	$(-5, 5)$	15
8	$1 - 24t + 16t^2$	$1 - 8t$	$(4, -2, 2, -4)$	$(-4, 1, -1, 4)$	13
9	$1 - 18t - 27t^2$	$1 - 6t$	$(3, 0, -3)$	$(-3, 0, 3)$	12
11	$1 - \frac{68}{5}t - \frac{616}{25}t^2 - \frac{252}{125}t^3 - \frac{1504}{625}t^4$	$1 - \frac{24}{5}t - \frac{56}{25}t^2$	$(\frac{12}{5}, -\frac{12}{5})$	$(-2, 2)$	10

1.3. Модулярные свойства. Изучаемые нами операторы по определению относятся к типу $D3$. Они также обладают очень специфическими свойствами модулярности, открытыми в [1], к описанию которых мы и переходим.

При каждом $N \geq 1$ имеем следующие модулярные кривые: $X_0(N)$ (определенную над $\mathbb{C}$ как $\mathbb{H}/\Gamma_0(N) \cup \{\text{вершины}\}$, т. е. пополненный фактор верхней полуплоскости по конгруэнц-подгруппе уровня N) и $X_0^*(N)$ (фактор $X_0(N)$ по инволюции Фрике W_N , переводящей $\tau \in \mathbb{H}$ в $-1/N\tau$). Обозначим группу, порожденную $\Gamma_0(N)$ и W_N , через $\Gamma_0^*(N)$. Как пространства модулей, $X_0(N)$ и $X_0^*(N)$ параметризуют (соответственно) упорядоченные и неупорядоченные пары эллиптических кривых, связанных циклической изогенией степени N . Инволюция W_N действует на пространстве $M_k(\Gamma_0(N))$ голоморфных модулярных форм веса k на $\Gamma_0(N)$ по формуле $(f|_k W_N)(\tau) = N^{k/2} \tau^k f(-1/N\tau)$ и расщепляет это пространство на два собственных подпространства $M_k^\pm(\Gamma_0(N))$, причем

$$M_k^+(\Gamma_0(N)) = M_k(\Gamma_0^*(N)), \quad M_k^-(\Gamma_0(N)) = M_k(\Gamma_0^*(N), \chi),$$

где $\chi: \Gamma_0^*(N) \rightarrow \{\pm 1\}$ есть гомоморфизм, переводящий $\Gamma_0(N)$ в $+1$, а W_N в -1 . Если $N = 1$, то $W_N = S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ принадлежит подгруппе $\Gamma_0(N) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$, так что W_N имеет только одно собственное значение $+1$. В этом случае, допуская вольность в обозначениях, мы будем записывать $F \in M_k^-(\Gamma_0(1))$, если $F\sqrt{E_4}$ является модулярной формой веса $k+2$ на $\Gamma_0(1)$, где $E_4(\tau) = 1 + 240q + \dots$ — нормализованный ряд Эйзенштейна веса 4. Тогда F не является однозначной функцией на $\mathbb{H}$ (так как E_4 имеет простой нуль при $\tau = (\pm 1 + i\sqrt{3})/2$), но корректно определена и голоморфна на объединении замкнутой стандартной фундаментальной области группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ и ее образа при S (это объединение замкнуто относительно S и содержит неподвижную точку, равную i) и удовлетворяет в этой области функциональному уравнению $(F|_k S) = -F$.

Сформулируем основной результат о модулярных свойствах дифференциальных уравнений, ассоциированных с 17 семействами из списка Исковских. Первое утверждение этой теоремы было доказано в [1], где также содержится формулировка второго утверждения и набросок его доказательства для некоторых случаев. Оставшиеся более сложные случаи были проверены В. В. Пржиялковским [2]. Для этого использовались квантовая теорема Лефшеца из работы А. Б. Гивенталя [13], вычисление квантового умножения на первый класс Чжэня в грассманианах из работ В. В. Пржиялковского [14] и У. Фултона и К. Вудворда [15], вычисление GW-инвариантов многообразий V_{22} А. Г. Кузнецовым (частное сообщение) и результат А. Бовилля [16] о V_5 .

ТЕОРЕМА 2 (см. [1], [2]). Пусть N и d — такие положительные целые числа, что кривая $\Gamma_0^*(N)$ имеет род 0 и в $M_2(\Gamma_0(N))^-$ существует модулярная форма, дифференциальное уравнение которой относительно корня степени d из некоторого хауптмодуля (главной модулярной функции) для группы³ $\Gamma_0^*(N)$ принадлежит к типу D3. Тогда пара (N, d) входит в список (1.1), а преобразование Лапласа этого дифференциального уравнения является, с точностью до эквивалентности, квантовым дифференциальным уравнением (см. п. 1.4 ниже) соответствующего многообразия Фано из классификации Исковских.

Модулярную форму F и главную модулярную функцию t , упоминаемые в этой теореме, можно выразить (почти) единообразной формулой. При $N > 1$

³То есть модулярной функции веса 0, параметризующей фактор верхней полуплоскости по этой группе.

определим модулярную форму $F_N \in M_2(\Gamma_0(N))^-$ как единственный ряд Эйзенштейна веса 2 на $\Gamma_0(N)$, принимающий значение $+1$ при $\tau = \infty$, -1 при $\tau = 0$, и 0 в остальных вершинах. При $N = 1$ это определение некорректно, но можно положить $F_1 = \sqrt{E_4}$, что принадлежит $M_2^-(\Gamma_0(1))$ в только что обсуждавшемся смысле. Тогда во всех случаях модулярная форма $F = F_{N,d}$ и главная модулярная функция $t = t_{N,d}$, существование которых требуется в теореме, задаются (после нормировок $F(\tau) = 1 + O(q)$ и $t(\tau) = q + O(q^2)$) и с точностью до эквивалентностей $t \mapsto t/(1+ct)$, $F \mapsto (1+ct)F$ единообразными формулами

$$F_{N,d}(\tau) = F_N(d\tau), \quad t_{N,d}(\tau) = t_N(d\tau)^{1/d} \quad (1.8)$$

для всех N и d , где $t_N(\tau)$ есть степенной ряд от q , определенный формулой

$$F_N(\tau)t_N(\tau)^{(N+1)/12} = \eta(\tau)^2\eta(N\tau)^2. \quad (1.9)$$

Обратно, легко проверить, что единственные пары $(N, d) \in \mathbb{N}^2$, для которых функция $t = t_{N,d}$, определенная равенствами (1.8) и (1.9), является модулярной функцией на $\Gamma_0(dN)$ – это пары, перечисленные в (1.1). Приведем схему соответствующего рассуждения. Если N достаточно велико, то из хорошо известной “формулы валентности” (для числа нулей голоморфной модулярной формы в фундаментальной области группы) вытекает, что функция F_N имеет в $\mathbb{H}$ по крайней мере один нуль порядка, не делящегося на $(N+1)/\text{НОД}(N+1, 12)$, и что тогда функция $t_N(\tau)$, определенная при больших $\text{Im}(\tau)$ формулой (1.9), не продолжается в верхнюю полуплоскость даже до однозначной мероморфной функции, не говоря уже о модулярной функции. Проверяя оставшиеся случаи с помощью компьютера, находим, что единственные значения N , для которых требуемый корень извлекается, – это десять значений $N = 1, \dots, 9, 11$ из списка (1.1) и еще четыре значения $N = 12, 16, 18$ и 36 . Но в каждом из этих последних случаев функция $t_N(\tau)$, определенная формулой (1.9), не является модулярной на $\Gamma_0(N)$. Этим зафиксированы все возможные значения N , после чего при каждом N аналогичным рассуждением убеждаемся, что для всех значений d , кроме указанных в (1.1), функция $t_{N,d}$, определенная формулой (1.8), является только некоторым корнем из модулярной функции на $\Gamma_0(dN)$.

Отметим, что в указанных выше четырех случаях $N = 12, 16, 18$ и 36 функция F_N является эта-произведением, а функция t^{N+1} , но не сама t , является как эта-произведением, так и модулярной функцией на $\Gamma_0^*(N)$. Например, при $N = 12$ имеем

$$F_{12}(\tau) = \frac{\eta(2\tau)^4\eta(3\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^4}{\eta(\tau)^3\eta(12\tau)^3}, \quad (1.10)$$

$$t_{12}(\tau) = \left(\frac{\eta(\tau)^{60}\eta(12\tau)^{60}}{\eta(2\tau)^{48}\eta(3\tau)^{12}\eta(4\tau)^{12}\eta(6\tau)^{48}} \right)^{1/13},$$

так что t^{13} является модулярной функцией на $\Gamma_0(12)$, но сама t инвариантна только относительно некоторой не-конгруэнц-подгруппы группы $\Gamma_0(12)$ индекса 13.

В виде дополнительного замечания отметим, что имеется ровно восемь значений N , для которых модулярную форму $F_N \in M_2^-(\Gamma_0(N))$ можно записать как частное произведений эта-функций:

N	4	6	8	9	12	16	18	36
F_N	$\frac{2^{20}}{1^8 4^8}$	$\frac{2^7 3^7}{1^5 6^5}$	$\frac{2^6 4^6}{1^4 8^4}$	$\frac{3^{10}}{1^3 3^3}$	$\frac{2^4 3^{14} 6^4}{1^3 12^3}$	$\frac{2^1 4^6 8^1}{1^2 16^2}$	$\frac{2^1 3^3 6^3 9^1}{2^2 18^2}$	$\frac{4^1 6^4 9^1}{1^1 36^1}$

Смысл обозначений в этой таблице становится ясным из сравнения ее элемента при $N = 12$ с формулой (1.10) для F_{12} , или элемента при $N = 6$ с указанной во введении формулой для $\Phi(t)$ в случае Апери.

Во всех случаях модулярная форма $F = F_{N,d}$ записывается в виде степенного ряда $\Phi(t)$ от главной модулярной функции $t = t_{N,d}$, причем степенной ряд $\Phi = \Phi_{N,d}$ имеет целочисленные коэффициенты и старший коэффициент 1. Эта целочисленность, очевидная из модулярного описания, совсем не очевидна с точки зрения рекуррентной формулы для коэффициентов, полученной из дифференциального уравнения для функций Φ . Указанное обстоятельство было частью “чуда Апери”, объясненной в модулярной интерпретации Бейкерса. Как объяснено в предыдущем пункте, оператор $\mathcal{L}$, равный нулю на функции Φ , имеет тогда вид tL , где L задается формулой (1.3). Следующее предложение выражает этот факт в чисто модулярных терминах.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ выражается в терминах модулярной переменной τ формулой*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{H(\tau)} \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau} \right)^3 \frac{1}{F(\tau)}, \quad (1.11)$$

где $F = F_{N,d} \in M_2^-(\Gamma_0(N))$ есть определенная выше модулярная форма, а $H = H_{N,d}$ есть некоторая модулярная форма, принадлежащая $M_4(\Gamma_0(N))^-$. В явном виде эта форма задается формулой $H_{N,d}(\tau) = H_N(d\tau)$, где H_N при $N > 1$ есть единственный ряд Эйзенштейна веса 4 на $\Gamma_0(N)$, принимающий значения $+1$ при $\tau = \infty$, -1 при $\tau = 0$, и 0 в остальных вершинах, а $H_1 = E_6/\sqrt{E_4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что пространство решений изучаемого дифференциального уравнения натянуто на $F(\tau)$, $\tau F(\tau)$ и $\tau^2 F(\tau)$, т. е. состоит в точности из тех функций, отношение которых к $F(\tau)$ дает нуль под действием оператора $(d/d\tau)^3$. Поэтому $\mathcal{L}$ должен иметь вид (1.11) для некоторой функции $H(\tau)$. Приравнивая символы (т. е. коэффициенты при $(d/dt)^3$) обеих частей равенства (1.11) и пользуясь (1.3), мы находим, что

$$t(\tau)^2 Q(t(\tau)) = \frac{1}{H(\tau)} \frac{t'(\tau)^3}{t(\tau) F(\tau)}, \quad (1.12)$$

где $t' = \frac{1}{2\pi i} \frac{dt}{d\tau}$, и выражение (1.12) является по крайней мере мероморфной модулярной формой веса 4 на $\Gamma_0(N)$ с W_N -собственным значением -1 . С другой стороны, чисто алгебраическое вычисление показывает, что поскольку дифференциальный оператор принадлежит типу D3, справедливо равенство

$$H(\tau) = F(\tau) \frac{t'(\tau)}{t(\tau)}. \quad (1.13)$$

Сравнивая эти две формулы, мы убеждаемся, что модулярная форма H (при $N > 1$) голоморфна и принимает заданные значения в вершинах. Этого достаточно для требуемого заключения, так как $S_4(\Gamma_0(N))^-$ здесь всегда равно 0. По-другому можно простым перебором убедиться, что правая часть любого из приведенных выше уравнений совпадает с $E_{4,N}^-$ при $N > 1$ и с $E_6(\tau)/\sqrt{E_4(\tau)}$ при $N = 1$. Случаи с $d > 1$ легко вывести из случаев с $d = 1$, определяя $H(\tau) = H_{N,d}(\tau)$ как $H_N(d\tau)$. Предложение доказано.

Из совпадения уравнений (1.12) и (1.13) для H вытекает, что кривая $u^2 = Q(t)$, являющаяся рациональной или эллиптической в зависимости от степени полинома Q , допускает модулярную параметризацию $t = t(\tau)$, $u = t'/tF$, которая, в частности, дает параметризацию Таниямы–Вейля (Тейлора–Уайлса) при $\deg Q > 2$ (что в нашей ситуации имеет место для четырех случаев: $(N, d) \in \{(11, 1), (5, 2), (3, 3), (2, 4)\}$). В этом случае функция $f = tF$ является параболической формой веса 2, для которой $f(\tau)d\tau = t'(\tau)/u(\tau)$ служит дифференциалом Вейерштрасса dt/u на соответствующей эллиптической кривой. Поэтому она является собственной формой оператора Гекке с мультипликативными коэффициентами. Упомянем в этой связи совместную работу [17] В. Голышева и М. Власенко, где, в частности, классифицированы все уравнения типа D3 с 5 различными особыми точками, для которых функция $t\Phi(t)$ допускает разложение относительно $\exp(\Phi_1/\Phi_0)$ с мультипликативными коэффициентами (в модулярном случае отсюда опять вытекает, что она является собственной формой оператора Гекке).

Если $N > 1$, то поскольку в рассматриваемых случаях все ряды Эйзенштейна на $\Gamma_0(N)$ приходят с уровня 1, функции F_N и H_N задаются формулами вида

$$F_N(\tau) = \sum_{M|N} M f_M G_2(M\tau), \quad H_N(\tau) = \sum_{M|N} M^2 h_M G_4(M\tau), \quad (1.14)$$

где

$$G_2(\tau) = -\frac{1}{24}E_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n},$$

$$G_4(\tau) = \frac{1}{240}E_4(\tau) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n}$$

суть нормализованные по Гекке ряды Эйзенштейна уровня 1 и весов 2 и 4, а коэффициенты f_M , h_M ($M|N$) рациональны и обладают свойством антисимметрии

$$f_{N/M} = -f_M, \quad h_{N/M} = -h_M \quad (M|N), \quad (1.15)$$

поскольку F и H принадлежат (-1) -собственному подпространству инволюции W_N . (Заметим, что функция $G_2(\tau)$ только квазимодулярна, но так как из (1.15) вытекает обращение в нуль суммы $\sum f_M$, то правая часть формулы (1.14) для F_N модулярна.) Именно эти коэффициенты f_M и h_M были табулированы в п. 1.2 вместе с коэффициентами соответствующих D3-операторов.

Эти коэффициенты, а точнее, связанные с ними числа

$$\mu_N = \begin{cases} 62 & \text{при } N = 1, \\ \frac{1}{2} \sum_{M|N} M h_M & \text{при } N > 1, \end{cases} \quad (1.16)$$

также табулированные в п. 1.2, возникают в следующей теореме, дающей значения пределов Фробениуса, о которых идет речь в гамма-гипотезе.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Psi_0 = \Psi$, Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 – решения Фробениуса линейного дифференциального уравнения четвертого порядка, которому удовлетворяет $\Psi(z) = \sum A_n z^n / n!$, где $F_{N,d}(\tau) = \sum A_n t_{N,d}(\tau)^n$ для одной из 17 пар (N, d) , указанных в (1.1). Введем пределы Фробениуса κ_j , $j = 1, 2, 3$, по формуле (0.3). Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\gamma, & \kappa_2 &= \frac{\gamma^2}{2} - \left(\frac{12}{d^2 N} - \frac{1}{2} \right) \zeta(2), \\ \kappa_3 &= -\frac{\gamma^3}{6} + \left(\frac{12}{d^2 N} - \frac{1}{2} \right) \gamma \zeta(2) + \left(\frac{\mu_N}{d^3 N} - \frac{1}{3} \right) \zeta(3), \end{aligned}$$

где числа μ_N определены равенством (1.16).

Эта теорема будет доказана в § 2, п. 2.2 и п. 2.3. Заметим, что ее заключение можно переписать в упрощенном виде

$$\Gamma(1 + \varepsilon)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \varepsilon^j = 1 - \frac{2}{d^2 N} \pi^2 \varepsilon^2 + \frac{\mu_N}{d^3 N} \zeta(3) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \quad (1.17)$$

Фактически на модулярной стороне естественно вычисляется именно левая часть последнего равенства, описывающая некоторые пределы решений Фробениуса дифференциального уравнения для самого ряда Φ , а не для его преобразования Лапласа Ψ . На топологической стороне речь идет о “модифицированном гамма-классе”, определяемом в (1.19) ниже.

1.4. Квантовые дифференциальные уравнения многообразий Фано. В этом пункте поясняется определение дифференциального уравнения, асимптотические свойства решений которого возникают в гамма-гипотезе. Сначала мы опишем смысл коэффициентов 4×4 -матрицы $\mathcal{A} = (a_{i,j})$, задающей квантовое дифференциальное уравнение по формуле (1.6), а затем для удобства заинтересованного читателя вкратце поясним, откуда берется детерминантное уравнение.

Грубо говоря, каждый коэффициент $a_{i,j}$ при $j \geq i$ (остальные коэффициенты матрицы $\mathcal{A}$ по определению равны 0 или 1) имеет смысл (надлежащим образом интерпретированного) “числа” рациональных кривых антиканонической степени $j - i + 1$, пересекающих алгебраические циклы некоторых коразмерностей, определяемых числами i и j . Уточним эту формулировку в интересующем нас случае, когда X является трехмерным многообразием Фано с $H^2(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}c_1$. Трехточечный коррелятор $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ трех (эффективных и однородных) классов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ из $H^*(X)$ определяется как полином

$\sum c_n z^n$, где c_n есть ожидаемое число голоморфных отображений $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ антиканонической степени n , переводящих три фиксированные точки P_i общего положения на $\mathbb{P}^1$ в циклы, двойственные по Пуанкаре к классам α_i . С помощью этого коррелятора определим *кольцо квантовых когомологий* многообразия X как $H^*(X) \otimes \mathbb{C}[z]$ с квантовым умножением $\star$, где $\alpha_1 \star \alpha_2$ определяется следующим образом. Рассмотрим $\langle \alpha_1, \alpha_2, \cdot \rangle$ как линейный функционал на $H^*(X) \otimes \mathbb{C}[z]$ со значениями в $\mathbb{C}[z]$ и дуализируем его относительно спаривания Пуанкаре: $\int_{[X]} (\alpha_1 \star \alpha_2) \cup \alpha_3 = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$. Тогда матрица $G(z) = (g_{i,j}(z))$ оператора $c_1 \star$ относительно базиса $\mathbf{c} = (1, c_1, c_1^2, c_1^3)$ имеет вид $g_{i,j} = a_{i,j} z^{j-i+1}$ для некоторой матрицы $\mathcal{A}$, а интересующий нас дифференциальный оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ четвертого порядка ассоциирован с системой дифференциальных уравнений первого порядка $D_z \tilde{\zeta}(z) = \tilde{\zeta}(z) G(z)$ стандартным образом ($\mathbf{c}$ 1 в качестве циклического вектора). Базис Фробениуса $\{\Psi_i\}$ пространства решений дифференциального уравнения $\tilde{\mathcal{L}}\Psi = 0$ тогда соответствует базису $H_*(X, \mathbb{Q})$, двойственному по Пуанкаре к базису $\mathbf{c}$. Представления для коэффициентов оператора $\tilde{\mathcal{L}}$ (или коэффициентов разложения решений Фробениуса) через инварианты Громова–Виттена многообразия X можно найти в [18].

Описанное отождествление позволяет рассматривать линейный функционал $\Psi \mapsto \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z)}{\Psi_0(z)}$ на пространстве решений дифференциального уравнения $\tilde{\mathcal{L}}\Psi = 0$ как некоторый кохомологический класс A_X (называемый “главным асимптотическим классом” многообразия X). В нашем случае он явно задается формулой

$$A_X = \sum_{j=0}^3 \kappa_j c_1^j \in H^*(X; \mathbb{C}),$$

где числа κ_j – это пределы Фробениуса, определенные в (0.3). Гамма-гипотеза, к формулировке которой мы переходим, гласит, что этот класс равен некоторому характеристическому классу многообразия X , так называемому гамма-классу.

1.5. Гамма-класс и гамма-гипотеза. Гамма-класс голоморфного векторного расслоения E над топологическим пространством X – это мультипликативный характеристический класс в смысле Хирцебруха, ассоциированный с разложением $\Gamma(1+x) = 1 - \gamma x + \frac{\gamma^2 + \zeta(2)}{2} x^2 + \dots$ гамма-функции в степенной ряд с центром в нуле. Иными словами, это функция, сопоставляющая каждому голоморфному расслоению E/X кохомологический класс $\hat{\Gamma}(E) = \prod_i \Gamma(1 + \tau_i) \in H^*(X, \mathbb{R})$, если полный класс Чженя расслоения E имеет формальную факторизацию $c(E) = \prod (1 + \tau_i)$ с элементами τ_i степени 2. Когда E является касательным расслоением многообразия X , мы пишем просто $\hat{\Gamma}_X$ вместо $\hat{\Gamma}(E)$. Члены степени ≤ 3 этого класса (только они потребуются нам в дальнейшем) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_X = & 1 - \gamma c_1 + \left(-\zeta(2) c_2 + \frac{\zeta(2) + \gamma^2}{2} c_1^2 \right) \\ & + \left(-\zeta(3) c_3 + (\zeta(3) + \gamma \zeta(2)) c_1 c_2 - \frac{2\zeta(3) + 3\gamma \zeta(2) + \gamma^3}{6} c_1^3 \right) + \dots, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $c_i = c_i(TX) \in H^{2i}(X)$ суть классы Чжэня многообразия X . Если ввести *модифицированный гамма-класс* $\hat{\Gamma}_X^0$ по формуле

$$\hat{\Gamma}_X = \Gamma(1 + c_1)\hat{\Gamma}_X^0, \quad (1.19)$$

то предыдущее равенство принимает более простой вид:

$$\hat{\Gamma}_X^0 = 1 - \zeta(2)c_2 + \zeta(3)(c_1c_2 - c_3) + \dots \quad (1.20)$$

(Переход от $\hat{\Gamma}_X$ к $\hat{\Gamma}_X^0$ в интересующих нас случаях отражает связь между топологическими свойствами многообразия Фано и КЗ-поверхности, являющейся его гиперплоским сечением. На “другой стороне” гамма-гипотезы, как мы уже отмечали в связи с теоремой 3, этот переход отражает связь между пределами Фробениуса для квантового дифференциального уравнения, связанного с трехмерным многообразием Фано, и пределами Фробениуса для дифференциальных уравнений Пикара–Фукса его зеркального двойника.) Гамма-класс многообразия можно рассматривать как “половину” класса Тодда из теоремы Римана–Роха–Хирцебруха (или, точнее, “половину” $\hat{A}$ -класса $\hat{A}_X = e^{-c_1} \text{Td}_X$ из теоремы Атьи–Хирцебруха), поскольку Γ -функция удовлетворяет тождеству $\Gamma(1+z)\Gamma(1-z) = \pi z / \sin(\pi z)$, из которого вытекает факторизация $\hat{A}$ -класса в виде $\mu_+(\hat{\Gamma}_X)\mu_-(\hat{\Gamma}_X)$, где $\mu_{\pm}$ – это масштабирующие операторы умножения на $(\pm 2\pi i)^{-m}$ в $H^{2m}(X; \mathbb{C})$.

Обозначим через $A_X \in H^*(X)$ главный асимптотический класс квантового дифференциального уравнения, ассоциированного с многообразием Фано X (как объяснено в п. 1.4), а через $\hat{\Gamma}_X \in H^*(X)$ – гамма-класс этого многообразия.

Теперь все готово для формулировки гамма-гипотезы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполняется равенство

$$A_X = \hat{\Gamma}_X, \quad (1.21)$$

то скажем, что для X справедлива *гамма-гипотеза*⁴.

В теореме 1 утверждается, что гамма-гипотеза справедлива для всех 17 случаев Исковских. Для доказательства мы независимо вычислим обе части уравнения (1.21) и проверим, что они совпадают в каждом из случаев. Результат “на стороне” Пикара–Фукса был сформулирован в теореме 3 и будет доказан в § 2. Вычисления на “когомологической стороне” проводятся непосредственно, и мы представим их в настоящей работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Модифицированный гамма-класс трехмерного многообразия Фано X ранга 1 задается формулой*

$$\hat{\Gamma}_X^0 = 1 - \frac{12}{d^2 N} \zeta(2)c_1^2 + \frac{h^{1,2} + 10}{d^2 N} \zeta(3)c_1^3,$$

где c_1 – первый класс Чжэня многообразия X , а $h^{1,2}$ – размерность пространства $H^{1,2}(X)$.

⁴Называемая “гамма-гипотезой Γ ” в [5]. Но мы не будем обсуждать здесь “гамма-гипотезу Π ” и потому говорим просто о “гамма-гипотезе”.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три числа Чженя многообразия X выражаются формулами $\langle c_1^3, [X] \rangle = 2d^2N$ (по определению N), $\langle c_1c_2, [X] \rangle = 24$ (поскольку гиперплоское сечение X является КЗ-поверхностью, а для всех КЗ-поверхностей S имеем $\langle c_2, [S] \rangle = e(S) = 24$) и $\langle c_3, [X] \rangle = e(X)$, где $e(X)$ есть эйлерова характеристика X . При этом $e(X) = 4 - 2h^{1,2}$, так как все числа Ходжа многообразия X равны нулю, кроме $h^{i,i} = 1$ и $h^{1,2} = h^{2,1}$. Поскольку $c_i \in H_{\text{alg}}^{i,i}(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}c_1^i$, отсюда вытекает, что

$$c_2 = \frac{12}{d^2N}c_1^2 \quad \text{и} \quad c_1c_2 - c_3 = \frac{h^{1,2} + 10}{d^2N}c_1^3.$$

Подставляя эти значения в (1.20), получаем требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Числа $h^{1,2}$ для всех 17 семейств Исковских даны в следующей таблице, взятой нами из монографии [9] по многообразиям Фано.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	1	2	3	4	5	3	2
d	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	4
$h^{1,2}$	52	30	20	14	10	7	5	3	2	0	21	10	5	2	0	0	0

Проверка показывает, что во всех случаях имеем $h^{1,2} + 10 = \mu_N/d$, где μ_N — числа, определенные в (1.16) и табулированные в п. 1.2.⁵ Вместе с теоремой 3 из п. 1.3 и предложением 2 это доказывает теорему 1.

§ 2. Вычисление пределов Фробениуса

В настоящем параграфе представлены два разных подхода к вычислению пределов Фробениуса. Один из них использует комбинаторное описание коэффициентов голоморфного решения в виде сумм биномиальных коэффициентов (как в формуле Апери для случая V_{12} или в общих моделях Ландау–Гинзбурга), а второй использует модулярное представление такого решения. Мы подробно проведем первый подход для V_{12} -случая в п. 2.2, где также будет проверено предсказание гамма-гипотезы в (более легких) гипергеометрических случаях. Модулярный подход, единообразно применимый во всех случаях с $N > 1$, будет рассмотрен в п. 2.3. В п. 2.4 мы кратко опишем численные результаты, позволяющие предположить, что высшие пределы Фробениуса (с номерами, превышающими размерность многообразия Фано) также интересны: несколько первых из них все еще выражаются как полиномы от римановых дзета-значений, но затем возникают более сложные виды периодов, такие как кратные дзета-значения.

2.1. Два базиса Фробениуса и связь между ними. В этом пункте определяются старшие функции Фробениуса как для дифференциальных уравнений типа Пикара–Фукса, так и для их преобразований Лапласа. Все будет

⁵Как отметил С.С. Галкин, левую часть этого равенства можно интерпретировать как “минус половина” эйлеровой характеристики открытого трехмерного многообразия Калаби–Яу, полученного из X удалением антиканонического КЗ-сечения.

иллюстрироваться на примере чисел Аперри, но определения применимы во всех случаях.

Определение чисел Аперри $A_0 = 1$, $A_1 = 5$, $A_2 = 73$, ... и рекуррентное соотношение для них уже были даны во введении. Не будем повторять их здесь. Рассмотрим фробениусову деформацию рекуррентных соотношений Аперри, т. е. последовательность степенных рядов

$$A_n(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} A_n^{(j)} \varepsilon^j \in \mathbb{Q}[[\varepsilon]], \quad n = 0, 1, \dots,$$

заданную начальными условиями $A_{-1}(\varepsilon) = 0$, $A_0(\varepsilon) = 1$ и рекуррентным соотношением

$$(n + \varepsilon + 1)^3 A_{n+1}(\varepsilon) - P(n + \varepsilon) A_n(\varepsilon) + (n + \varepsilon)^3 A_{n-1}(\varepsilon) = 0, \quad (2.1)$$

где $P(x)$ – тот же полином, что и в (0.2). Составим с помощью рациональных чисел $A_n^{(j)}$ следующие степенные ряды:

$$\Phi_j^{\text{an}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(j)} t^n, \quad \Phi^{\text{an}}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j^{\text{an}}(t) \varepsilon^j = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\varepsilon)} t^n. \quad (2.2)$$

Начальные члены первых нескольких рядов $\Phi_j^{\text{an}}(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{\text{an}}(t) &= \Phi(t) = 1 + 5t + 73t^2 + 1445t^3 + 33001t^4 + 819005t^5 + \dots, \\ \Phi_1^{\text{an}}(t) &= 12t + 210t^2 + 4438t^3 + 104825t^4 + \frac{13276637}{5}t^5 + \dots, \\ \Phi_2^{\text{an}}(t) &= 72t^2 + 2160t^3 + 59250t^4 + 1631910t^5 + \dots, \\ \Phi_3^{\text{an}}(t) &= -7t - \frac{1011}{8}t^2 - \frac{522389}{216}t^3 - \frac{90124865}{1728}t^4 - \frac{264872026721}{216000}t^5 + \dots, \\ \Phi_4^{\text{an}}(t) &= 9t + \frac{1437}{16}t^2 + \frac{182489}{144}t^3 + \frac{5753277}{256}t^4 + \frac{663266820361}{1440000}t^5 + \dots. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Полагая $t^\varepsilon = \exp(\varepsilon \log t)$, определим функции Фробениуса $\Phi_j(t)$ для всех $j \geq 0$ из разложений

$$\Phi(t, \varepsilon) = t^\varepsilon \Phi^{\text{an}}(t, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(t) \varepsilon^j, \quad \Phi_j(t) = \sum_{i=0}^j \Phi_i^{\text{an}}(t) \frac{(\log t)^{j-i}}{(j-i)!}. \quad (2.4)$$

Тогда рекуррентное соотношение для $A_n(\varepsilon)$ превращается в утверждение о том, что степенные ряды $\Phi_j(t)$ и $\Phi(t, \varepsilon)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\mathcal{L}(\Phi(t, \varepsilon)) = \varepsilon^3 t^\varepsilon, \quad \mathcal{L}(\Phi_j(t)) = \frac{(\log t)^{j-3}}{(j-3)!}, \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{L} = D^3 - tP(D) + t(D+1)^3, \quad D = t \frac{d}{dt},$$

есть дифференциальный оператор, равный нулю на $\Phi(t)$, а правая часть второго равенства в (2.5) считается равной 0 при $j < 3$. В частности, Φ_0 , Φ_1

и Φ_2 являются решениями исходного дифференциального уравнения $\mathcal{L}\Phi = 0$ и составляют хорошо известный базис Фробениуса в пространстве таких решений. Тем не менее, как уже было отмечено во введении, высшие Φ_j также представляют интерес. В любом случае даже для гамма-гипотезы нам потребуется решение Φ_3 неоднородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}\Phi = 1$, поскольку преобразование Лапласа устанавливает соответствие между наборами $\{\Phi_0, \dots, \Phi_J\}$ и $\{\Psi_0, \dots, \Psi_J\}$ для всех J , как мы сейчас увидим, а оператор $\tilde{\mathcal{L}}$ имеет порядок 4 и, следовательно, нужны *четыре* решения Фробениуса $\Psi_0, \dots, \Psi_3$.

Проделаем теперь то же самое “на стороне” преобразований Лапласа. Модифицированные числа $a_n = A_n/n!$ удовлетворяют модифицированным рекуррентным соотношениям

$$(n+1)^4 a_{n+1} - P(n)a_n + n^2 a_{n-1} = 0 \quad (2.6)$$

с тем же полиномом $P(n)$, что и выше, а их производящая функция $\Psi(z) = \sum a_n z^n$ удовлетворяет модифицированному дифференциальному уравнению (преобразованию Лапласа от $\mathcal{L}$)

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Psi) = 0, \quad \tilde{\mathcal{L}} = D_z^4 - zP(D_z) + z^2(D_z + 1)^2,$$

где $D = z d/(dz)$. Фробениусова деформация задается в этом случае формулами

$$(n+1+\varepsilon)^4 a_{n+1}(\varepsilon) + P(n+\varepsilon)a_n(\varepsilon) + (n+\varepsilon)^2 a_{n-1}(\varepsilon) = 0 \quad (2.7)$$

для $n \geq 0$ с начальными условиями $a_{-1}(\varepsilon) = 0$ и $a_0(\varepsilon) = 1$. Мы опять полагаем $a_n(\varepsilon) = \sum_j a_n^{(j)} \varepsilon^j$ и определяем степенные ряды

$$\Psi_j^{\text{an}}(z) = \sum_n a_n^{(j)} z^n, \quad \Psi^{\text{an}}(z, \varepsilon) = \sum_j \Psi_j^{\text{an}}(z) \varepsilon^j = \sum_n a_n(\varepsilon) z^n.$$

Их первые значения таковы:

$$\begin{aligned} \Psi_0^{\text{an}}(z) &= \Psi(z) = 1 + 5z + \frac{73}{2}z^2 + \frac{1445}{6}z^3 + \frac{33001}{24}z^4 + \frac{163801}{24}z^5 + \dots, \\ \Psi_1^{\text{an}}(z) &= 7z + \frac{201}{4}z^2 + \frac{10733}{36}z^3 + \frac{432875}{288}z^4 + \frac{47115959}{7200}z^5 + \dots, \\ \Psi_2^{\text{an}}(z) &= -7z - \frac{461}{8}z^2 - \frac{92323}{216}z^3 - \frac{9220085}{3456}z^4 - \frac{6108294133}{432000}z^5 + \dots, \\ \Psi_3^{\text{an}}(z) &= -\frac{15}{8}z^2 + \frac{169}{4}z^3 + \frac{4285465}{6912}z^4 + \frac{3811075}{768}z^5 + \dots, \\ \Psi_4^{\text{an}}(z) &= 9z + \frac{2449}{32}z^2 + \frac{441925}{864}z^3 + \frac{52564099}{18432}z^4 + \frac{259795048429}{19200000}z^5 + \dots. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Как и выше, полагая $z^\varepsilon = \exp(\varepsilon \log z)$, мы находим, что функции Фробениуса, определенные формулами

$$\Psi(t, \varepsilon) = z^\varepsilon \Psi^{\text{an}}(z, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j(z) \varepsilon^j, \quad \Psi_j(z) = \sum_{i=0}^j \Psi_i^{\text{an}}(z) \frac{(\log z)^{j-i}}{(j-i)!}, \quad (2.9)$$

удовлетворяют неоднородным дифференциальным уравнениям

$$\tilde{\mathcal{L}}(\Psi(z, \varepsilon)) = \varepsilon^4 z^\varepsilon, \quad \tilde{\mathcal{L}}(\Psi_i(t)) = \frac{(\log z)^{j-4}}{(j-4)!} \quad (2.10)$$

при тех же соглашениях, что и выше. В частности, $\Psi_0, \dots, \Psi_3$ образуют базис (называемый опять базисом Фробениуса) пространства решений преобразованного дифференциального уравнения.

Гамма-гипотеза касается пределов κ_j , определенных формулой (0.3). Но для вычисления этих пределов удобнее работать с числами $A_n^{(j)}$ и функциями $\Phi_j(t)$, свойства которых более удобны (регулярные особенности, модулярная параметризация). Поэтому важно выяснить, как связаны эти две последовательности чисел и функций. Из рекуррентных соотношений находим, что

$$a_n(\varepsilon) = \frac{A_n(\varepsilon)}{(1+\varepsilon)_n} = \frac{A_n(\varepsilon)}{n!} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right)^{-1}.$$

Здесь $(1+\varepsilon)_n$ означает возрастающий символ Похгаммера $(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)\dots(n+\varepsilon)$. Подставляя сюда разложение

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\varepsilon}{k}\right)^{-1} = \exp\left(-H_n \varepsilon + H_n^{(2)} \frac{\varepsilon^2}{2} - H_n^{(3)} \frac{\varepsilon^3}{3} + \dots\right),$$

где

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad H_m^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m^2}$$

и так далее, находим

$$\begin{aligned} n! a_n^{(0)} &= A_n^{(0)}, \\ n! a_n^{(1)} &= A_n^{(1)} - H_n A_n^{(0)}, \\ n! a_n^{(2)} &= A_n^{(2)} - H_n A_n^{(1)} + \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{2} A_n^{(0)}, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Пользуясь формулами $H_n = \log n + \gamma + O(1/n)$ и $H_n^{(m)} = \zeta(m) + O(1/n)$ при $m > 1$, а также тем, что максимум $a_n^{(j)} z^n$ при большом z и фиксированном j достигается для $n \approx Cz$, где $C = (1 + \sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$ (поскольку $A_n \sim \text{const} \cdot C^n / n^{3/2}$, что подробнее обсуждается в п. 2.4), мы видим, что для нахождения асимптотики решений Фробениуса надо просто заменить H_n на $\log(Cz) + \gamma$ и $H_n^{(m)}$ на $\zeta(m)$ при $m > 1$. Это означает, что если мы определим последовательность пределов Фробениуса κ_j^0 и их производящую функцию $\kappa^0(\varepsilon)$ в регулярном случае формулами

$$\kappa_j^0 = \sum_{i=0}^j \left(\frac{(-\log C)^{j-i}}{(j-i)!} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n^{(i)}}{A_n} \right) \right), \quad \kappa^0(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j^0 \varepsilon^j = C^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_n(\varepsilon)}{A_n} \right), \quad (2.12)$$

то связь между $\kappa^0(\varepsilon)$ и производящей функцией

$$\kappa(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \kappa_j \varepsilon^j = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Psi(z, \varepsilon)}{\Psi(z)} \quad (2.13)$$

описывается простой формулой

$$\kappa^0(\varepsilon) = \frac{1}{\Gamma(1 + \varepsilon)} \kappa(\varepsilon). \quad (2.14)$$

Это в точности то же соотношение (после замены ε на $c_1(X)$), что и между гамма-классом и модифицированным гамма-классом многообразия Фано X (см. п. 1.5). В п. 2.4 мы опишем способ быстрого вычисления с очень высокой точностью всех пределов, входящих в (2.12) и (2.13) (эти пределы определяют друг друга по формуле (2.14)), и обсудим некоторые результаты таких вычислений.

2.2. Пределы Фробениуса с гипергеометрической точки зрения.

Здесь мы докажем формулу (0.4) для пределов Фробениуса в случае Аперри, пользуясь исходной формулой Аперри (0.1) для его чисел как конечных сумм произведений биномиальных коэффициентов или обрывающихся гипергеометрических рядов. Этот подход связан с вычислениями и опирается на тождества, найденные экспериментальным путем, доказательства которых вряд ли вносят ясность в существо дела. Но у него есть и преимущества: полная элементарность и возможность в принципе применить его к любому дифференциальному уравнению изучаемого типа, даже не модулярному. Он также дает очень легкие доказательства гамма-гипотезы для тех 10 случаев из классификации Исковских, которые отвечают гипергеометрическим дифференциальным уравнениям.

Идея состоит в том, чтобы подражать исходному доказательству Аперри иррациональности $\zeta(3)$, в котором он изучал второе решение A_n^* рекуррентных соотношений (0.2) с начальными условиями $A_0^* = 0$, $A_1^* = 1$ (производящая функция этого решения также удовлетворяет неоднородной версии исходного дифференциального уравнения, но с правой частью t , а не 1) и показал, что предел отношения $\lim_n A_n^*/A_n$ равен $\frac{1}{6}\zeta(3)$. Последнее было сделано с помощью найденной им явной формулы для A_n^* вида $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 Q(n, k)$, где $Q(n, k)$ – надлежащая элементарная функция, в которую входят частичные суммы ряда для $\zeta(3)$ (см. [19] и [20]). Попытавшись найти аналогичные формулы для чисел $A_n^{(i)}$ при малых значениях i , мы экспериментально обнаружили ряд тождеств такого типа, из которых вытекали правильные значения для $1 \leq i \leq 3$ и для всех n вплоть до некоторого большого числа. С помощью любого из этих тождеств можно было бы вычислить все требуемые пределы Фробениуса. Мы выбрали из них одно, особенно простое, и приводим его в предложении 3 ниже вместе со стандартным доказательством методом телескопических сумм. Для нахождения как тождеств, так и их доказательств, мы записали анзац для функций, обозначенных в предложении 3 через $Q_i(n, k)$ и $R_{n,k}(\varepsilon)$, имеющий указанный там вид, но с неопределенными коэффициентами (три числовых коэффициента для $H_{n+k}^{(i)}$, $H_k^{(i)}$ и $H_n^{(i)}$ в случае $Q_i(n, k)$ и

четыре коэффициента из $\mathbb{Q}(n, k)$ при ε^i в случае $R_{n,k}(\varepsilon)$), после чего нашли подходящие значения этих коэффициентов с помощью компьютерных вычислений. Поэтому доказательство не особенно красиво, но (как уже говорилось) обладает тем преимуществом, что метод в принципе применим к фробениусовым деформациям других дифференциальных уравнений, в том числе и не допускающих модулярную параметризацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для $n, k \geq 0$ положим

$$a_{n,k}(\varepsilon) = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \exp\left(\sum_{i=1}^3 Q_i(n, k) \frac{\varepsilon^i}{i!} + O(\varepsilon^4)\right),$$

где

$$\begin{aligned} Q_1(n, k) &= 4H_{n+k} - 4H_k, & Q_2(n, k) &= 4H_k^{(2)} - 8H_{n+k}^{(2)}, \\ Q_3(n, k) &= 32H_{n+k}^{(3)} - H_k^{(3)} - 14H_n^{(3)}. \end{aligned}$$

Тогда

$$A_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}(\varepsilon) + O(\varepsilon^4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $R_{n,k}(\varepsilon) \in \mathbb{Q}(n, k)[\varepsilon]/\varepsilon^4$ по формуле

$$\begin{aligned} R_{n,k}(\varepsilon) &= 4(2n+1)(2k^2 + k - (2n+1)^2) \\ &\quad + (16k^2 + 8(4n+3)k - 4(2n+1)(12n+5))\varepsilon + 16(2k - 5n - 2)\varepsilon^2 \\ &\quad + \left(-16 + \frac{14(2n+1)k}{3n^2(n+1)^2}(2n^2 + 2n - k)\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Применяя легко проверяемое тождество

$$(n+1+\varepsilon)^3 \frac{a_{n+1,k}(\varepsilon)}{a_{n,k}(\varepsilon)} - P(n+\varepsilon) + (n+\varepsilon)^3 \frac{a_{n-1,k}(\varepsilon)}{a_{n,k}(\varepsilon)} = R_{n,k}(\varepsilon) - R_{n,k-1}(\varepsilon) \frac{a_{n,k-1}(\varepsilon)}{a_{n,k}(\varepsilon)}$$

в $\mathbb{Q}(n, k)[\varepsilon]/\varepsilon^4$, убеждаемся индукцией по K в том, что

$$\sum_{k=0}^K ((n+1+\varepsilon)^3 a_{n+1,k}(\varepsilon) - P(n+\varepsilon) a_{n,k}(\varepsilon) + (n+\varepsilon)^3 a_{n-1,k}(\varepsilon)) = R_{n,K}(\varepsilon) a_{n,K}(\varepsilon)$$

для всех $K \geq 0$. Выбрав $K > n$, находим, что $\sum_{k=0}^n a_{n,k}(\varepsilon)$ удовлетворяет определяющим рекуррентным соотношениям для $A_n(\varepsilon)$. Поскольку начальные условия этих последовательностей также совпадают (0 при $n = -1$, 1 при $n = 0$), сами последовательности равны. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ. Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\varepsilon)}{C^\varepsilon A_n} = \exp\left(-2\zeta(2)\varepsilon^2 + \frac{17}{6}\zeta(3)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для больших n последовательность $a_{n,k} = \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ имеет на отрезке $0 \leq k \leq n$ резко выраженный максимум при $k = n(1/\sqrt{2} + o(1))$, потому что отношение $a_{n,k}/a_{n,k-1}$ равно

$$\frac{(n+k)^2(n-k+1)^2}{k^4} \approx \left(\frac{n^2}{k^2} - 1\right)^2.$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^n a_{n,k}(\varepsilon) \sim \left(\sum_{k=0}^n a_{n,k}\right) \exp\left(4\log(1+\sqrt{2})\varepsilon - 2\zeta(2)\varepsilon^2 + \frac{17}{6}\zeta(3)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)\right).$$

В силу (2.12) и (2.14) утверждение следствия равносильно предсказанной гамма-гипотезой формуле (0.4). Этим завершено доказательство указанной гипотезы для случая Аперы.

Отметим, что для каждого из наших 17 семейств, а также и для других Dn -уравнений, возникающих как уравнения Пикара–Фукса, существуют формулы наподобие (0.1), выражающие коэффициенты A_n в виде простых или кратных конечных сумм произведений биномиальных коэффициентов (обрывающихся гипергеометрических рядов). Например, такие формулы вытекают из “моделей Ландау–Гинзбурга”, выражающих A_n как постоянный член в $P(x, y, z)^n$ для некоторого полинома Лорана $P(x, y, z)$. В принципе можно было бы изучить все остальные случаи с помощью той же самой идеи (внесением надлежащих множителей в эти формулы). Мы не пытались сделать это, так как излагаемый в следующем пункте модулярный подход намного проще и работает единообразно во всех случаях. Тем не менее мы можем дать с помощью комбинаторного подхода простое прямое доказательство теоремы 3 для всех десяти случаев из списка Исковских, для которых соответствующие дифференциальные операторы гипергеометричны. Это полезно, так как покрывает оба случая с $N = 1$, в которых модулярный подход неприменим (или по крайней мере требует модификации) из-за того, что функция $F_1 = \sqrt{E_4}$ не является голоморфной модулярной формой. Заметим, впрочем, что случай $(N, d) = (2, 4)$ отвечает многообразию Фано $\mathbb{P}^3$ и тем самым является частным случаем результатов Б. А. Дубровина [21] (см. также [5]), доказавшего гамма-гипотезу для всех $\mathbb{P}^n$, а все гипергеометрические случаи следует считать известными из работы Х. Иритани (см. п. 2.4). Тем не менее мы приведем здесь доказательство, поскольку оно элементарно и дает полезную информацию о других случаях.

Начнем с замечания, касающегося всех 17 случаев, а не только гипергеометрических. А именно, достаточно доказать теорему 3 для тех 10 случаев из списка Исковских, для которых $d = 1$. Действительно, сравнивая утверждение (1.17) теоремы 3 с формулой (2.14), связывающей пределы Фробениуса для дифференциальных операторов $\mathcal{L}$ и $\bar{\mathcal{L}}$, мы видим, что эта теорема принимает простой вид:

$$\kappa_{N,d}^0(\varepsilon) = 1 + 0 \cdot \varepsilon + \frac{2}{d^2 N} \pi^2 \varepsilon^2 + \frac{\mu_N}{d^3 N} \zeta(3) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \quad (2.15)$$

где $\kappa_{N,d}^0(\varepsilon)$ означает функцию $\kappa^0(\varepsilon)$, определенную в (2.12) для случая (N, d) из списка (1.1) (так что применявшаяся для иллюстрации в п. 2.1 функция κ^0 для

класса Апери равна $\kappa_{6,1}^0$), только константу $C = 17 + 12\sqrt{2}$ из (2.12) надо заменить в остальных 16 случаях на величину $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n^{1/n}$, обратную к наименьшему положительному корню многочлена $Q(t)$. Но степенной ряд $\Phi_{N,d}(t)$, отвечающий этому случаю, есть просто $\Phi_{N,1}(t^d)$. Поэтому переход от $(N, 1)$ к (N, d) заменяет A_n и $A_n(\varepsilon)$ на $A_{n/d}$ и $A_{n/d}(\varepsilon)$ (что считается равным 0 при $d \nmid n$), а C на $C^{1/d}$. Отсюда вытекает, что $\kappa_{N,d}^0(\varepsilon) = \kappa_{N,1}^0(\varepsilon/d)$ с точностью до всех порядков, а не только до $O(\varepsilon^4)$.

Это замечание сводит число изучаемых гипергеометрических случаев с 10 до 4, а именно, это случаи с $1 \leq N \leq 4$ и $d = 1$. В этих случаях коэффициенты степенных рядов $\Phi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_n t^n$ являются частными произведений факториалов, как видно из следующей таблицы:

N	1	2	3	4
A_n	$\frac{(6n)!}{(3n)!n!^3}$	$\frac{(4n)!}{n!^4}$	$\frac{(3n)!(2n)!}{n!^5}$	$\frac{(2n)!^3}{n!^6}$

В каждом из случаев запишем выражение для A_n в виде $\prod_r ((rn)!)^{\nu_r}$ и заметим, что оно определено и для нецелых значений n , если понимать $x!$ как $\Gamma(1+x)$. Тогда продеформированные по Фробениусу числа $A_n(\varepsilon)$, определяемые той же рекуррентной формулой (здесь имеющей длину 2, а не 3, как выше) с начальным условием $A_0(\varepsilon) = 1$, можно записать просто как $A_n(\varepsilon) = A_{n+\varepsilon}/A_\varepsilon$. С другой стороны, поскольку $\sum_r r\nu_r = 0$ во всех случаях (иначе ряд $\Phi(t)$ имел бы нулевой радиус сходимости), формула Стирлинга дает асимптотику $A_x \sim \alpha x^{\nu/2} C^x$ при $x \rightarrow \infty$, где $\alpha = \prod_r (2\pi r)^{\nu_r/2}$, $\nu = \sum_r \nu_r$, $C = \prod_r r^{r\nu_r}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \kappa^0(\varepsilon) &= C^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\varepsilon)}{A_n} = C^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+\varepsilon}}{A_n A_\varepsilon} = \frac{1}{A_\varepsilon} = \prod_r \Gamma(1+r\varepsilon)^{-\nu_r} \\ &= \exp \left(\sum_r \nu_r \left(-\gamma r \varepsilon + \frac{\zeta(2)}{2} r^2 \varepsilon^2 - \frac{\zeta(3)}{3} r^3 \varepsilon^3 + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

и так как $\sum r\nu_r = 0$, $\sum r^2\nu_r = 24/N$ и $\sum r^3\nu_r = 3\mu_N/N$ во всех четырех случаях $1 \leq N \leq 4$, то этим завершено доказательство теоремы 3 для всех десяти гипергеометрических случаев.

2.3. Пределы Фробениуса с модулярной точки зрения. Метод, описанный в предыдущем пункте для случая Апери, опирается на сложные и искусственно выглядящие тождества. Здесь мы дадим более естественное доказательство, использующее модулярные параметризации наших дифференциальных уравнений, обсуждавшиеся в п. 1.3. Этот подход единообразно применим ко всем случаям с $N > 1$ из списка Исковских, т. е. к 15 из 17 случаев. Поскольку оставшиеся два случая с $N = 1$ являются гипергеометрическими и для них все уже доказано, этим завершается доказательство теоремы 3 и теоремы 1.

Согласно замечанию, сделанному в конце предыдущего пункта, достаточно доказать теорему для 9 случаев с $d = 1$ и N из списка $\{2, \dots, 9, 11\}$. После проделанной выше подготовки это уже нетрудно. В каждом из этих случаев

дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ имеет вид, указанный в предложении 1 (уравнение (1.11)), где $H(\tau) = H_N(\tau)$ есть ряд Эйзенштейна веса 4, определенный в (1.14). Согласно (2.5) первые четыре функции Фробениуса удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\mathcal{L}\Phi_0 = \mathcal{L}\Phi_1 = \mathcal{L}\Phi_2 = 0$ и $\mathcal{L}\Phi_3 = 1$, которые на модулярной стороне принимают вид $(\Phi_j(t(\tau))/F(t))''' = \delta_{j,3}H(\tau)$ для $0 \leq j \leq 3$. (Здесь “'''” означает $\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{d\tau}$, как в п. 1.3.) Ввиду асимптотики функций Фробениуса $\Phi_j(t)$ в точке $t = 0$, которая соответствует $q = 0$ при замене $2\pi i\tau = \log q = \log t + O(t)$, это означает, что

$$\Phi_j(t(\tau)) = \frac{(2\pi i\tau)^j}{j!} F(\tau), \quad j = 0, 1, 2, \quad \Phi_3(t(\tau)) = \tilde{H}(\tau)F(\tau), \quad (2.16)$$

где $\tilde{H}(\tau)$ есть интеграл Эйлера функции $H(\tau)$, определяемый равенством $\tilde{H}''' = H$ и нормировкой

$$\tilde{H}(\tau) = \frac{(2\pi i\tau)^3}{3!} + O(q) \quad \text{при } q \rightarrow 0.$$

Из (1.14) имеем

$$\tilde{H}(\tau) = \sum_{M|N} \frac{h_M}{M} \tilde{G}_4(M\tau), \quad (2.17)$$

где

$$\tilde{G}_4(\tau) = \frac{(2\pi i\tau)^3}{1440} + \sum_{n \geq 1} \frac{n^{-3}q^n}{1 - q^n}$$

есть надлежащим образом нормированный интеграл Эйлера от $G_4(\tau)$. Но хорошо известно и элементарно доказывается, что $\tilde{G}_4$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\tilde{G}_4(\tau) - \tau^2 \tilde{G}_4\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{\zeta(3)}{2}(\tau^2 - 1) - \frac{\pi^3 i}{6} \tau \quad (2.18)$$

для всех $\tau \in \mathbb{H}$. (Это выводится из закона преобразования $G_4|_4 S = G_4$ трехкратным интегрированием и применением “тождества Боля”, утверждающего, что $(F|_{-2}\gamma)''' = F'''|_4\gamma$ для любой голоморфной функции F и любого преобразования Мебиуса γ . Последнее влечет, что выражение слева в (2.18) является не более чем квадратичным полиномом, который затем вычисляется с использованием того факта, что L -функция от G_4 равна $\zeta(s)\zeta(s-3)$.) Подставляя это равенство в (2.17) и пользуясь свойством антисимметричности (1.15), получаем

$$N\tau^2 \tilde{H}\left(-\frac{1}{N\tau}\right) + \tilde{H}(\tau) = \sum_{M|N} \frac{h_M}{2M} \zeta(3)(M^2\tau^2 - 1) = \frac{\mu_N}{N} \zeta(3)(N\tau^2 + 1), \quad (2.19)$$

где μ_N – те же, что в (1.16). (Аналогичное вычисление проведено в [3, п. 1.2].) Отсюда находим предел Фробениуса. Действительно, из (2.16) и (2.19) и из антиинвариантности F при $|_2 W_N$ вытекает, что если мы положим

$$(k_0, k_1, k_2, k_3) = \left(1, 0, \frac{2\pi^2}{N}, \frac{\mu_N}{N} \zeta(3)\right),$$

то $\Phi_j(t(\tau)) - k_j F(\tau)$ является W_N -инвариантной функцией в верхней полуплоскости при каждом $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Но это означает, что указанные четыре выражения как функции от $t = t(\tau)$ регулярны в точке $t = t(\tau_N) = 1/C$, отвечающей неподвижной точке $t_N = i/\sqrt{N}$ инволюции W_N и тем самым имеют больший радиус сходимости, чем радиус сходимости $1/C$ ряда $\Phi(t)$. Отсюда вытекает, что предел Фробениуса $\kappa_j^0 = \lim_{t \rightarrow 1/C} \Phi_j(t)/\Phi(t)$ равен k_j , чем и завершено доказательство равенства (1.17) во всех случаях с $N > 1$.

Сделаем в заключение несколько замечаний об исключенном случае $N = 1$. Здесь функция $H_1(\tau) = E_6(\tau)/\sqrt{E_4(\tau)} = 1 - 624q + 64368q^2 - \dots$ уже не является модулярной формой. Но в силу закона преобразования $H_1|_4 S = -H_1$ и тождества Боля мы все же имеем

$$\tilde{H}_1(\tau) + \tau^2 \tilde{H}_1\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mu \zeta(3)(\tau^2 + 1)$$

для некоторого комплексного числа μ , так что единственным недостающим звеном доказательства является равенство $\mu = \mu_1 = 62$. Разумеется, это равенство вытекает из нашего альтернативного доказательства формул для пределов Фробениуса через гипергеометрическое разложение функции $\sqrt{E_4}$, а также было проверено нами численно с высокой точностью, но полностью модулярного доказательства нам найти не удалось. Вероятно, такое доказательство можно было бы дать, проводя вычисления, аналогичные вычислениям из работы [22], где интеграл Эйхлера от очень похожей почти модулярной формы $\Delta(\tau)/\sqrt{E_6(\tau)}$ веса 3 связан с нулями $\wp$ -функции Вейерштрасса.

2.4. Высшие пределы Фробениуса: за пределами гамма-гипотезы.

В этом пункте мы вкратце обсудим значения пределов Фробениуса κ_j (точнее, эквивалентных им пределов κ_j^0) при $j > 3$.

Поскольку здесь получены только численные результаты, скажем сначала о том, как можно очень быстро и с высокой точностью вычислить κ_j^0 и κ_j . (Конечно, нет необходимости одновременно вычислять обе последовательности, так как они связаны равенством (2.14). Однако возможность провести вычисления двумя способами позволяет эффективно проверить численную корректность предлагаемой процедуры.) Для κ_j можно напрямую использовать (0.3) с умеренно большим значением z , например, $z = 100$ (на самом деле достаточно гораздо меньших значений) и, поскольку сходимость экспоненциальна, процедура работает хорошо. Для κ_j^0 нельзя напрямую использовать (2.12), поскольку отношение $C^{-\varepsilon} A_n(\varepsilon)$ к A_n сходится к своему пределу $\kappa^0(\varepsilon)$ только со скоростью $1/n$. Вместо этого воспользуемся тем, что A_n имеет асимптотическое разложение (в случае Аперии; остальные случаи аналогичны) вида

$$A_n \sim \mathbf{A}(n) := 2^{-9/4} \pi^{-3/2} \frac{C^{n+1/2}}{(n+1/2)^{3/2}} P\left(\frac{1}{64(n+\frac{1}{2})\sqrt{2}}\right)$$

для некоторого степенного ряда $P(X) = 1 + 30X + 274X^2 - 17132X^3 + \dots$ с легко вычисляемыми рациональными (и, предположительно, целыми) коэффициентами (они находятся из того свойства, что $\mathbf{A}(n)$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и A_n). Тогда

$$\kappa^0(\varepsilon) = C^{-\varepsilon} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\varepsilon)}{\mathbf{A}(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n(\varepsilon)}{\mathbf{A}(n+\varepsilon)}.$$

Последнее выражение сходится быстрее, чем любая степень n , так что взяв умеренно большое число коэффициентов ряда P и умеренно большое значение n , мы получим очень точное значение степенного ряда $\kappa^0(\varepsilon)$. (Например, взяв 100 членов ряда P и выбрав $n = 100$, получим первые 15 коэффициентов κ_j^0 с точностью до 300 десятичных знаков менее чем за 10 секунд на обычном персональном компьютере.)

Мы проделали эти вычисления (до 300 знаков) чисел κ_j и κ_j^0 для V_{12} и в нескольких других случаях, каждый раз получая совпадение двух рядов (2.14) в пределах точности вычислений. Затем мы попытались распознать, чему равны коэффициенты κ_j^0 вне диапазона значений $j \leq 3$, для которого они были предсказаны гамма-гипотезой и проверены вычислениями из двух последних пунктов. Оказалось, что вплоть до $j = 10$ (для случая V_{12}) эти значения всегда являются полиномами от римановых дзета-значений (а также эйлеровой константы γ , если речь идет о κ_j). Результаты яснее выражаются в терминах коэффициентов λ_j производящей функции

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varepsilon^j = \log(\kappa^0(\varepsilon)).$$

В этом случае первые десять значений задаются (в пределах точности вычислений) формулами:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= -2\zeta(2), & \lambda_3 &= \frac{17}{6}\zeta(3), & \lambda_4 &= -3\zeta(4), \\ \lambda_5 &= \frac{7}{3}\zeta(5), & \lambda_6 &= -\frac{2}{3}\zeta(6) - \frac{1}{72}\zeta(3)^2, & \lambda_7 &= -\frac{5}{3}\zeta(7) + \frac{1}{6}\zeta(3)\zeta(4), \\ \lambda_8 &= \frac{29}{12}\zeta(8) - \frac{11}{18}\zeta(3)\zeta(5), & \lambda_9 &= \frac{8}{9}\zeta(9) + \frac{5}{3}\zeta(3)\zeta(6) + \frac{11}{3}\zeta(4)\zeta(5) + \frac{17}{648}\zeta(3)^3, \\ \lambda_{10} &= -\frac{147}{5}\zeta(10) - \frac{59}{18}\zeta(3)\zeta(7) - \frac{121}{18}\zeta(5)^2 - \frac{17}{36}\zeta(4)\zeta(3)^2, \end{aligned}$$

в которые входят только римановы дзета-значения, как и утверждалось. Однако для 11-го коэффициента мы получили, что

$$\lambda_{11} = 66\zeta(11) + \frac{59}{3}\zeta(4)\zeta(7) + \frac{110}{3}\zeta(5)\zeta(6) + \frac{215}{36}\zeta(8)\zeta(3) + \frac{187}{108}\zeta(3)^2\zeta(5) + \frac{2}{3}\zeta(3, 5, 3),$$

где последнее слагаемое содержит не обычное, а кратное дзета-значение

$$\zeta(3, 5, 3) = \sum_{0 < \ell < m < n} \frac{1}{\ell^3 m^5 n^3} = 0.002630072587647 \dots$$

Это позволяет предположить, что высшие пределы Фробениуса могут в общем случае представлять интерес как периоды и что по крайней мере некоторые из них связаны с кратными дзета-значениями. Сделаем несколько заключительных замечаний в этой связи. Прежде всего, первый вес, для которого кольцо кратных дзета-значений не порождается над $\mathbb{Q}$ римановыми дзета-значениями, равен 8, причем как для этого веса, так и для веса 10 пространство кратных дзета-значений имеет размерность, большую на 1 (строгое высказывание – “большую на 1 или ту же”, так как подразумеваемые здесь

утверждения о линейной независимости пока не доказаны). Однако ни одно из этих значений не появляется в наших расчетах. Первое нетривиальное кратное дзета-значение, возникающее в приведенном примере – это число $\zeta(3, 5, 3)$ веса 11. Можно поэтому предположить наличие связи с “однозначными кратными дзета-значениями” Ф. Брауна [23], которые также впервые отклоняются от кольца обычных дзета-значений именно для веса 11. Эта возможная связь не вполне ясна, так как новое однозначное кратное дзета-значение веса 11 (по модулю полиномов от римановых дзета-значений) не является рациональным кратным $\zeta(3, 5, 3)$, а представляет собой рациональную линейную комбинацию $\zeta(3, 5, 3)$ и произведения $\zeta(3)$ на нетривиальное двойное дзета-значение $\zeta(3, 5)$. Однако Ф. Браун в персональном сообщении предположил, что это можно объяснить с помощью свойства дуальности D3-уравнений (упомянутого в п. 1.2) и его старых вычислений [24]. Наконец отметим, что и в других рассмотренных нами негипергеометрических случаях пределы Фробениуса вплоть до некоторого веса оказываются полиномами от римановых дзета-значений, а потом этого свойства уже нет, и что не все высшие значения нам удалось распознать (например, это относится к κ_7 для случая $(N, d) = (9, 1)$). По-видимому, это явление связано с тем, что V_{12} и подобные ему многообразия Фано могут быть представлены как последовательные гиперплоские сечения многообразий Фано большей размерности только вплоть до некоторой критической размерности, и именно в этом диапазоне размерностей гамма-гипотеза для возникающих многомерных многообразий Фано позволяет предсказать значения, выражаемые полиномами от римановых дзета-значений. Например, V_{12} представимо как семикратное взятие гиперплоского сечения некоторого десятимерного многообразия Фано с решеткой Пикара ранга 1 (а именно, ортогонального грассманиана изотропных пятимерных линейных подпространств в $\mathbb{C}^{10}$). Мы проверили для этого случая, что предсказания гамма-гипотезы действительно совпадают с численно найденными выше значениями λ_j для всех $j \leq 10$.

2.5. Работы на смежные темы. Дальнейшие ссылки. Для наших гипергеометрических случаев (которые соответствуют полным пересечениям в торических многообразиях) гамма-гипотеза по существу вытекает из знаменитой квантовой теоремы Лефшеца, принадлежащей А. Б. Гивенталю [25], и работы Х. Иритани [26]; мы привели наше доказательство в целях полноты. Б. А. Дубровин [21] вычислил все асимптотические разложения для случая проективных пространств. Другое изложение этого случая дано в [4], причем используемую нами формулировку гамма-гипотезы можно рассматривать как явную и приспособленную к случаю многообразий Фано версию условия “совместимости со структурой Стокса” из последней работы. В. В. Пржиялковский [27] ввел понятие слабой модели Ландау–Гинзбурга для многообразия Фано и предложил кандидатов на роль слабой модели Ландау–Гинзбурга для всех 17 наших случаев. Он обнаружил, что во всех его моделях число неприводимых компонент разрешения особенностей центрального слоя (что в наших обозначениях отвечает точке $t = \infty$) на единицу превышает число $h^{1,2}$ соответствующего многообразия Фано. Связь чисел Ходжа многообразий Фано с приводимыми слоями их моделей Ландау–Гинзбурга объясняется в [28]. С. С. Галкин установил модулярность “ G -многообразий Фано” [29]. Он вычислил “константы Аперы” для многих однородных пространств и ввел то, что

он назвал “классом Апери” в [30]. Работа Х. ван Энкеворта и Д. ван Стратена [31] относится к случаю трехмерных многообразий Калаби–Яу, а не Фано, но она неявно связана с топологией четырехмерных многообразий Фано благодаря квантовому принципу Лефшеца. Наконец, модулярность трехмерных многообразий Фано с любым рангом Пикара была недавно анонсирована Ч. Дораном, Э. Хардером, Л. Кацарковым, Дж. Льюисом и В. В. Пржиялковским.

Список литературы

1. V. Golyshev, “Classification problems and mirror duality”, *Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **338**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007, 88–121.
2. В. В. Пржиялковский, “Квантовые когомологии гладких полных пересечений во взвешенных проективных пространствах и особых торических многообразиях”, *Матем. сб.*, **198**:9 (2007), 107–122; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Quantum cohomology of smooth complete intersections in weighted projective spaces and in singular toric varieties”, *Sb. Math.*, **198**:9 (2007), 1325–1340.
3. F. Beukers, “Irrationality proofs using modular forms”, *Journées arithmétiques de Besançon* (Besançon, 1985), *Astérisque*, **147/148**, Soc. Math. France, Paris, 1987, 271–283.
4. L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, “Hodge theoretic aspects of mirror symmetry”, *From Hodge theory to integrability and TQFT tt*-geometry*, Proc. Sympos. Pure Math., **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 87–174.
5. S. Galkin, V. Golyshev, H. Iritani, *Gamma classes and quantum cohomology of Fano manifolds: Gamma conjectures*, 2014, arXiv: 1404.6407.
6. S. Mori, S. Mukai, “Classification of Fano 3-folds with $b_2 \geq 2$ ”, *Manuscripta Math.*, **36**:2 (1981), 147–162.
7. В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Fano 3-folds. I”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:3 (1977), 485–527.
8. В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 506–549; англ. пер.: “Fano 3-folds. II”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 469–506.
9. V. A. Iskovskikh, Yu. G. Prokhorov, “Fano varieties”, *Algebraic geometry. V*, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999, 1–247.
10. V. Golyshev, J. Stienstra, “Fuchsian equations of type DN”, *Commun. Number Theory Phys.*, **1**:2 (2007), 323–346.
11. F. Beukers, “On Dwork’s accessory parameter problem”, *Math. Z.*, **241**:2 (2002), 425–444.
12. D. Zagier, “Integral solutions of Apéry-like recurrence equations”, *Groups and symmetries*, CRM Proc. Lecture Notes, **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 349–366.
13. A. B. Givental, “Equivariant Gromov–Witten invariants”, *Internat. Math. Res. Notices*, **1996**:13 (1996), 613–663.
14. В. В. Пржиялковский, “Инварианты Громова–Виттена трехмерных многообразий Фано рода 6 и рода 8”, *Матем. сб.*, **198**:3 (2007), 145–158; англ. пер.: V. V. Przhijalkovskii, “Gromov–Witten invariants of Fano threefolds of genera 6 and 8”, *Sb. Math.*, **198**:3 (2007), 433–446.
15. W. Fulton, C. Woodward, “On the quantum product of Schubert classes”, *J. Algebraic Geom.*, **13**:4 (2004), 641–661.
16. A. Beauville, “Quantum cohomology of complete intersections”, *Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **2**:3–4 (1995), 384–398.

17. V. Golyshev, M. Vlasenko, *Equations D3 and spectral elliptic curves*, 2012, [arXiv: 1212.0205](#).
18. В. В. Пржиялковский, “Минимальное кольцо Громова–Виттена”, *Изв. РАН. Сер. Матем.*, **72**:6 (2008), 203–222; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Minimal Gromov–Witten rings”, *Izv. Math.*, **72**:6 (2008), 1253–1272.
19. R. Apéry, “Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Astérisque*, **61**, Soc. Math. France, Paris, 1979, 11–13.
20. A. van der Poorten, “A proof that Euler missed . . . Apéry’s proof of the irrationality of $\zeta(3)$. An informal report”, *Math. Intelligencer*, **1**:4 (1979), 195–203.
21. B. Dubrovin, “Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds”, Proceedings of the International congress of mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998), *Doc. Math.*, 1998, Extra Vol. II, 315–326.
22. M. Eichler, D. Zagier, “On the zeros of the Weierstrass $\wp$ -function”, *Math. Ann.*, **258**:4 (1982), 399–407.
23. F. Brown, “Single-valued motivic periods and multiple zeta values”, *Forum Math. Sigma*, **2** (2014), e25, 37 pp.
24. F. Brown, *Irrationality proofs for zeta values, moduli spaces and dinner parties*, 2014, [arXiv: 1412.6508](#).
25. A. Givental, “A mirror theorem for toric complete intersections”, *Topological field theory, primitive forms and related topics* (Kyoto, 1996), *Progr. Math.*, **160**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998, 141–175.
26. H. Iritani, “An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds”, *Adv. Math.*, **222**:3 (2009), 1016–1079.
27. В. В. Пржиялковский, “Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:4 (2013), 135–160; англ. пер.: V. V. Przyjalkowski, “Weak Landau–Ginzburg models of smooth Fano threefolds”, *Izv. Math.*, **77**:4 (2013), 772–794.
28. L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, 2014, [arXiv: 1409.5996](#).
29. S. Galkin, *G-Fano threefolds are mirror-modular*, Preprint IPMU, 10-0150, 2010, 9 pp.
30. S. Galkin, *On Apéry constants of homogeneous varieties*, Preprint SFB45, 2008, 12 pp.
31. C. van Enkevort, D. van Straten, “Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi–Yau type”, *Mirror symmetry V*, AMS/IP Stud. Adv. Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, 539–559.

ВАСИЛИЙ ВИКТОРОВИЧ ГОЛЫШЕВ
 (VASILII V. GOLYSHEV)
 Институт проблем передачи информации
 им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
 г. Москва
E-mail: golyshev@mccme.ru

Поступило в редакцию
 25.01.2015
 09.06.2015

ДОН ЗАГИР
 (DON ZAGIER)
 Max Planck Institute for Mathematics,
 Bonn, Germany;
 International Centre for Theoretical Physics,
 Trieste, Italy
E-mail: dbz@mpim-bonn.mpg.de

Перевод с английского А. В. Домрина