Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О трехмерных G -многообразиях Фано,
Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 4, 159–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8349>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:41:24

УДК 512.76

Ю. Г. Прохоров

О трехмерных G -многообразиях Фано

Изучаются трехмерные многообразия Фано с терминальными горенштейновыми особенностями, допускающие “минимальное” действие конечной группы. Доказано, что при некоторых предположениях такое многообразие не содержит плоскостей. Получены также оценки числа особых точек некоторых трехмерных многообразий Фано с терминальными факториальными особенностями.

Библиография: 21 наименование.

Ключевые слова: бирациональное отображение, многообразие Фано, терминальная особенность, дивизор, линейная система.

DOI: 10.4213/im8349

§ 1. Введение

Пусть X – алгебраическое многообразие над полем $\mathbb{k}$ нулевой характеристики, и пусть G – некоторая группа. Мы говорим, что X является G -многообразием, если группа G действует на $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{k}}$, где $\bar{\mathbb{k}}$ – алгебраическое замыкание $\mathbb{k}$. Более того, мы предположим, что X , G и $\mathbb{k}$ удовлетворяют одному из следующих условий.

(а) *Геометрический случай:* поле $\mathbb{k}$ алгебраически замкнуто, группа G конечна и действие G на X задается гомоморфизмом $G \rightarrow \text{Aut}_{\mathbb{k}}(X)$.

(б) *Алгебраический случай:* G – группа Галуа $\bar{\mathbb{k}}$ над $\mathbb{k}$, действующая на $\bar{X} = X \otimes \bar{\mathbb{k}}$ через второй множитель. Действие G на X тривиально.

G -многообразие X называется G -многообразием Фано, если особенности X не хуже, чем терминальные горенштейновы, антиканонический дивизор $-K_X$ обилен и ранг инвариантной части $\text{Cl}(X)^G$ группы классов дивизоров Вейля $\text{Cl}(X)$ равен 1 (см. [1]–[3]). В настоящей статье мы рассмотрим только трехмерный случай.

Будем говорить, что многообразие Фано X принадлежит основной серии, если его канонический дивизор K_X порождает группу Пикара $\text{Pic}(X)$. G -многообразия Фано неосновной серии были классифицированы автором в работах [2], [4].

Напомним, что родом трехмерного многообразия Фано X называется число $g(X) := \frac{1}{2}(-K_X)^3 + 1$ (см. определение 2.1).

Мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – трехмерное G -многообразие Фано основной серии с $g(X) \geq 6$. Тогда X не содержит плоскостей.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Оказывается, что отсутствие плоскостей на многообразии Фано с терминальными горенштейновыми особенностями очень важно для классификации. В самом деле, для такого многообразия существует $\mathbb{Q}$ -факториализация $\pi: X' \rightarrow X$, где X' – многообразие с терминальными факториальными особенностями и численно эффективным объемным антиканоническим дивизором. Если на X отсутствуют плоскости, то применение программы минимальных моделей к X' не выводит из этой категории (категории терминальных факториальных многообразий с численно эффективным объемным антиканоническим дивизором, на которых отсутствуют плоскости; см. [5], [6]). В ряде случаев (особенно при больших значениях рода) это позволяет получить описание многообразия X . Приложения теоремы 1.1 с использованием этой конструкции будут обсуждаться в последующей работе.

Отметим, что для меньших значений рода G -многообразия Фано могут содержать плоскости.

ПРИМЕР 1.2. *Квартика Бурхарда* X_4^b – это подмногообразие в $\mathbb{P}^5$, заданное уравнениями $\sigma_1 = \sigma_4 = 0$, где σ_i – элементарные симметрические функции от $x_1, \dots, x_6$. Эта кватрика активно изучалась ранее (см., например, [7]). Особое множество X_4^b состоит из 45 обыкновенных двойных точек. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_6$ действует на X_4^b перестановками координат. При этом фактормногообразие $\mathbb{P}^5/\mathfrak{S}_6$ изоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(1, \dots, 6)$, а фактормногообразие $X_4^b/\mathfrak{S}_6$ изоморфно подпространству $\mathbb{P}(2, 3, 5, 6) \subset \mathbb{P}(1, \dots, 6)$. Следовательно, $\mathrm{rk} \, \mathrm{Cl}(X_4^b)^{\mathfrak{S}_6} = 1$, и, таким образом, X_4^b является $\mathfrak{S}_6$ -многообразием Фано рода 3 основной серии. Кватрика X_4^b содержит ровно 40 плоскостей [7].

Известно также много примеров многообразий Фано большого рода (не G -многообразий Фано) с терминальными горенштейновыми особенностями, которые содержат плоскости. Однако автору не известны примеры G -многообразий Фано основной серии рода 4 и 5, содержащие плоскости (см. следствие 3.12).

$\mathbb{Q}$ -факториальные (терминальные) многообразия Фано основной серии всегда являются G -многообразиями Фано относительно, например, тривиальной группы. В этом случае для $g(X) \geq 8$ мы получим оценку сверху для числа особых точек, которая является точной для $g(X) \geq 9$.

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть X – трехмерное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано основной серии с терминальными горенштейновыми особенностями. Тогда для $g(X) = 9, 10, 12$ число особых точек X не превосходит $12 - g(X)$ и эта оценка точная. Для $g(X) = 8$ многообразие X имеет не более 10 особых точек.*

Более того, мы обобщим классическую конструкцию “двойной проекции” Фано–Исковских (см. теорему 4.1).

Работа организована следующим образом: § 2 является предварительным; в § 3 мы докажем теорему 1.1; теорема 1.3 выводится из более общей теоремы 4.1 в § 4; наконец, § 5 содержит два вспомогательных результата, которые используются в доказательстве теоремы 4.1.

Автор благодарен рецензенту за конструктивные замечания.

§ 2. Предварительные сведения

Для определенности, рассматривая G -многообразия, мы рассмотрим только геометрический случай. Алгебраический случай аналогичен. Таким образом, основное поле $\mathbb{k}$ предполагается алгебраически замкнутым (характеристики 0). Иногда мы будем также предполагать, что $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

Все рассматриваемые нами многообразия имеют особенности не хуже, чем терминальные горенштейновы. Каждая такая трехмерная особенность $X \ni P$ локально является гиперповерхностью и имеет кратность 2. Группа Пикара многообразия с терминальными горенштейновыми особенностями вкладывается в группу классов дивизоров Вейля так, что коядро не имеет элементов кручения [8, лемма 5.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть X – многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями. Его *родом* называется число $g(X) := -K_X^3/2 + 1$.

По формуле Римана–Роха и теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем $\dim |-K_X| = g(X) + 1$. В частности, $g(X)$ – целое число. В случае многообразий Фано основной серии род может принимать только следующие значения: $g(X) \in \{2, 3, \dots, 10, 12\}$ (см. [9] и [10]).

Группы Пикара $\text{Pic}(X)$ и классов дивизоров Вейля $\text{Cl}(X)$ конечно порождены и не имеют элементов кручения [9].

ТЕОРЕМА 2.2 [11], [12]. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями и с $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot K_X$. Имеют место следующие утверждения:

- (i) линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек;
- (ii) если $g(X) \geq 4$, то $|-K_X|$ очень обильна и определяет вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$;
- (iii) если $g(X) \geq 5$, то образ $X = X_{2g-1} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ является пересечением квадрик.

ТЕОРЕМА 2.3 [10]. Пусть X – трехмерное многообразие Фано с терминальными горенштейновыми особенностями. Тогда X сглаживаемо, т.е. существует плоское семейство $f: \mathfrak{X} \rightarrow (\mathfrak{D} \ni 0)$ над диском $(\mathfrak{D} \ni 0) \subset \mathbb{C}$ такое, что $\mathfrak{X}_0 \simeq X$, а общий элемент $\mathfrak{X}_s$, $s \in \mathfrak{D}$, является неособым многообразием Фано. Более того, существуют естественные отождествления $\text{Pic}(X) = \text{Pic}(\mathfrak{X}_s) = \text{Pic}(\mathfrak{X})$ так, что $K_{\mathfrak{X}_s} = K_X$ (см. [13, § 1]).

Пусть (X, B) – логпара (пара, состоящая из нормального многообразия X и эффективного $\mathbb{Q}$ -дивизора $B = \sum_i b_i B_i$ на X). Предположим, что $K_X + B$ – дивизор $\mathbb{Q}$ -картье. Пусть $f: \tilde{X} \rightarrow X$ – логразрешение (X, B) . Запишем

$$K_{\tilde{X}} = f^*(K_X + B) + E,$$

где $E = \sum_i e_i E_i$ – $\mathbb{Q}$ -дивизор, компоненты которого – собственные прообразы компонент B и исключительные дивизоры. По нашему предположению $\sum_i E_i$ имеет простые нормальные пересечения. Пара (X, B) имеет логканонические особенности, если $e_i \geq -1$ для всех i . Собственное неприводимое подмногообразие $Z \subset X$ называется *центром логканонических особенностей* (X, B) , если

для некоторого выбора разрешения f существует компонента E_i с коэффициентом $e_i \leq -1$, отображающаяся доминантно на Z . Объединение всех центров логканонических особенностей называется *множеством логканонических особенностей* и обозначается через $\text{LCS}(X, B)$. Таким образом,

$$\text{LCS}(X, B) = \bigcup_{e_i \leq -1} f(E_i).$$

Пучок

$$\mathcal{I}(X, B) := f_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}([E])$$

называется *множительным пучком*. Поскольку B эффективен, то $\mathcal{I}(X, B)$ является пучком идеалов. Соответствующая подсхема в X называется *схемой логканонических особенностей*, ее носитель равен $\text{LCS}(X, B)$. Если пара (X, B) логканонична, то $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}(X, B)$ не имеет нильпотентов, и поэтому схема логканонических особенностей приведена (и совпадает с $\text{LCS}(X, B)$)).

ТЕОРЕМА НАДЕЛЯ (об обращении в нуль [14, теорема 9.4.17]). Пусть (X, B) – логканоническая пара, где многообразие X проективно. Пусть D – дивизор Картье на X такой, что дивизор $D - (K_X + B)$ численно эффективен и объем. Тогда

$$H^q(\mathcal{I}(X, B) \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0 \quad \forall q > 0.$$

§ 3. Плоскости

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1.

Сначала введем обозначения. Пусть X – трехмерное G -многообразие Фано основной серии с горенштейновыми терминальными особенностями. Мы предположим, что $g = g(X) \geq 5$. Таким образом, $\text{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} \cdot K_X$, и линейная система $|-K_X|$ определяет вложение $X = X_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ так, что его образ – пересечение квадратик (по теореме 2.2).

Предположим, что существует плоскость $\Pi_1 \subset X$. Пусть $O = \{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$ – ее орбита относительно действия G , и пусть $D := \sum_i \Pi_i$. Напомним, что $\text{Cl}(X)^G \simeq \text{Pic}(X)^G \simeq \mathbb{Z} \cdot K_X$. Поэтому D является дивизором Картье, и для некоторого целого a мы можем записать $D \sim -aK_X$. Сравнивая степени, получим

$$n = (2g - 2)a. \quad (3.1)$$

Ясно, что для любых двух различных плоскостей $\Pi_i, \Pi_j \in O$ их пересечение $\Pi_i \cap \Pi_j$ либо пусто, либо является точкой, либо прямой.

ЛЕММА 3.1. Во введенных обозначениях через любую точку $P \in X \setminus \text{Sing}(X)$ проходит не более двух плоскостей (содержащихся в X). В частности, дивизор D имеет простые нормальные пересечения в неособой части $X \setminus \text{Sing}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P \in X$ – неособая точка, и пусть $\Pi_1, \dots, \Pi_r \in O$ – плоскости, проходящие через P . Тогда эти плоскости содержатся в проективном касательном пространстве $\overline{T}_{P,X} \simeq \mathbb{P}^3$ к X в P . Поскольку $X \subset \mathbb{P}^{g+1}$ является пересечением квадратик (по теореме 2.2), то и $\overline{T}_{P,X} \cap X$ является пересечением квадратик и поэтому не может содержать более двух плоскостей.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Пара (X, D) имеет логканонические особенности в $X \setminus \text{Sing}(X)$. Более того, $X \setminus \text{Sing}(X)$ не содержит нульмерных логканонических центров.*

ЛЕММА 3.3. *Через особую точку $P \in X$ проходит не более четырех плоскостей (содержащихся в X).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в лемме 3.1, все плоскости $\Pi_1, \dots, \Pi_r$, проходящие через P , содержатся в множестве $\overline{T_{P,X}} \cap X$, которое является пересечением квадрик в $\overline{T_{P,X}}$. Поскольку $P \in X$ – гиперповерхностная особенность, то $\dim T_{P,X} = 4$. Так как $\dim \overline{T_{P,X}} \cap X \leq 2$, то $\overline{T_{P,X}} \cap X$ содержит не более четырех плоскостей.

ЛЕММА 3.4. *Пара (X, D) логканонична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $(X, (1 - \varepsilon)D)$ не логканонична для $0 < \varepsilon \ll 1$. Согласно следствию 3.2 множество логканонических особенностей $\text{LCS}(X, (1 - \varepsilon)D)$ – конечное множество точек (непустое), оно содержится в особой части X . С другой стороны, по теореме Шокурова о связности (см. [15, теорема 17.4]) это множество связно.¹ Значит, $\text{LCS}(X, (1 - \varepsilon)D)$ – одна точка P , которая должна быть G -инвариантной и особой для X . Тогда все компоненты D проходят через P . Это противоречит лемме 3.3, поскольку число компонент D больше 4. Лемма доказана.

Поскольку D – дивизор Картэ на многообразии с терминальными особенностями, то D является схемой Коэна–Маколея. Следовательно, для любой компоненты $\Pi_i \subset D$ пересечение $\Pi_i \cap \text{Supp}(D - \Pi_i)$ имеет чистую размерность 1. С другой стороны, схема $\Pi_i \cap \text{Supp}(D - \Pi_i)$ приведена в общей точке по лемме 3.1 (и ее компоненты – различные прямые). Положим $\Delta_i := \Pi_i \cap \text{Supp}(D - \Pi_i)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.5. *Для любой компоненты $\Pi_i \subset D$ дивизор $\Delta_i \subset \Pi_i$ имеет простые нормальные пересечения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из логканонического обращения присоединения Шокурова (см. [16]).

Ясно, что двумерными центрами логканонических особенностей пары (X, D) являются плоскости Π_i , а одномерными – те пересечения $\Pi_i \cap \Pi_j$, которые являются прямыми. Пусть $\mathcal{P} \subset X$ – множество всех нульмерных центров логканонических особенностей (X, D) . Согласно следствию 3.2 имеем $\mathcal{P} \subset \text{Sing}(X)$.

ЛЕММА 3.6. *Для любой компоненты $\Pi_i \subset D$ имеем $\mathcal{P} \cap \Pi_i = \text{Sing}(\Delta_i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $P \in \Pi_i$, и пусть $H \subset X$ – общее гиперплоское сечение, проходящее через P .

Пусть $P \in \text{Sing}(\Delta_i)$. Если P не является логканоническим центром, то пара $(X, D + \varepsilon H)$ логканонична для $0 < \varepsilon \ll 1$. В этом случае по обращению присоединения [16] пара $(\Pi_i, \Delta_i + \varepsilon H|_{\Pi_i})$ также логканонична, что невозможно,

¹Это рассуждение работает для $a = 1$. Для $a > 1$ нужно использовать обращение присоединения на плоскость Π_i (см. [16]) и тот факт, что $\overline{T_{P,X}} \cap X$ является пересечением квадрик (см. теорему 2.2).

поскольку кратность $\Delta_i + \varepsilon H|_{\Pi_i}$ в P больше 2. Противоречие показывает, что $\mathcal{P} \supset \text{Sing}(\Delta_i)$.

Наоборот, пусть $P \in \mathcal{P}$. Снова по обращению присоединения пара $(\Pi_i, \Delta_i + \varepsilon H|_{\Pi_i})$ не является логканонической для $0 < \varepsilon \ll 1$. Следовательно, кривая Δ_i особа в P .

СЛЕДСТВИЕ 3.7. *Для любой точки $P \in \mathcal{P}$ дивизор*

$$D^{(P)} := \sum_{\Pi_i \ni P} \Pi_i$$

является конусом с вершиной в P над объединением четырех прямых, образующих комбинаторный цикл. В частности, дивизор $D^{(P)}$ имеет четыре компонента.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset X$ – общее гиперплоское сечение. Ясно, что $D^{(P)}$ является конусом над $H \cap D^{(P)}$ и $H \cap D^{(P)}$ – объединение прямых. По лемме 3.1 дивизор $H \cap D^{(P)}$ имеет простые нормальные пересечения. Если $H \cap D^{(P)}$ не связан, то D может быть разложен в сумму $D' + D''$ двух эффективных дивизоров так, что $D' \cap D'' = \{P\}$ (в окрестности P). С другой стороны, так как D – дивизор Картье в многообразии с терминальными особенностями, то он является схемой Коэна–Маколея, что приводит к противоречию. Таким образом, пересечение $H \cap D^{(P)}$ связно.

Пусть $\Pi_i \subset D^{(P)}$. По лемме 3.6 существуют ровно две компоненты Δ_i , проходящие через P . Эти компоненты соответствуют двум плоскостям Π_l, Π_k , содержащим P . Следовательно, каждая компонента $H \cap \Pi_i \subset H \cap D^{(P)}$ пересекает ровно две другие компоненты $H \cap \Pi_l$ и $H \cap \Pi_k \subset H \cap D^{(P)}$. Это и означает, что $H \cap D^{(P)}$ – комбинаторный цикл.

Наконец, число компонент $H \cap D^{(P)}$ не превосходит 4 по лемме 3.3, и оно не может быть меньше 4, поскольку H – пересечение квадрик в $\mathbb{P}^g$, и поэтому не содержит “треугольников”, составленных из прямых.

ЛЕММА 3.8. *Для каждой плоскости Π_i пересечение $\Pi_i \cap \text{Supp}(D - \Pi_i)$ имеет $2 + a$ одномерных компонент, где a определяется соотношением $D \sim -aK_X$ (ср. (3.1)).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H \subset X$ – общее гиперплоское сечение. Ясно, что H – неособая КЗ-поверхность. Пусть $l_i := \Pi_i \cap H$. Поскольку l_i – неособая рациональная кривая, то

$$l_i \cdot \sum_{j \neq i} l_j = -l_i^2 + l_i \cdot \sum_j l_j = 2 + l_i \cdot \sum \Pi_i = 2 + a.$$

Таким образом, Π_i пересекает по прямым ровно $2 + a$ компонент D .

ЛЕММА 3.9. *Имеем $|\mathcal{P}| = (g - 1)a(a + 2)(a + 1)/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая плоскость $\Pi_i \in \mathcal{O}$ содержит $(a + 2)(a + 1)/2$ точек из $\mathcal{P}$ (которые являются множеством особенностей объединения $2 + a$ прямых Δ_i), и через каждую точку $P \in \mathcal{P}$ проходит ровно четыре плоскости $\Pi_j \in \mathcal{O}$.

ЛЕММА 3.10. *Имеем $|\mathcal{P}| = \dim |D|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $P \in \mathcal{P}$ пусть H_P – общее гиперплоское сечение, проходящее через P . Пусть $H := \sum_{P \in \mathcal{P}} H_P$, и пусть $B := (1 - \delta)D + \varepsilon H$. Положим $\mathcal{I}_{\mathcal{P}} := \mathcal{I}(X, B)$. Для некоторых $0 < \delta, \varepsilon \ll 1$ пара (X, B) логканонична и ее множество логканонических особенностей $\text{LCS}(X, B)$ совпадает с $\mathcal{P}$. Поскольку как пара (X, B) логканонична, схема логканонических особенностей приведена. Таким образом, $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ – структурный пучок $\mathcal{P}$. Применим теорему Надея об обращении в нуль. Получим $H^1(X, \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{O}_X(D)) = 0$. Тогда из точной последовательности

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \otimes \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}}(D) \longrightarrow 0$$

получаем

$$|\mathcal{P}| = \dim H^0(\mathcal{O}_{\mathcal{P}}(D)) = \dim H^0(\mathcal{O}_X(D)) - \dim H^0(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(D)).$$

Поскольку $\mathcal{P} \subset D$, то $H^0(\mathcal{I}_{\mathcal{P}}(D)) \neq 0$. Следовательно, $|\mathcal{P}| \leq \dim |D|$.

Предположим, что $|\mathcal{P}| \leq \dim |D| - 1$. Пусть $\mathcal{D} \subset |D|$ – линейная подсистема, состоящая из дивизоров, проходящих через все точки $\mathcal{P}$. Тогда $\dim \mathcal{D} \geq \dim |D| - |\mathcal{P}| \geq 1$. Предположим, что плоскости $\Pi_i, \Pi_j \in \mathcal{O}$ пересекаются по прямой l . Тогда $D \cdot l = a$. С другой стороны, l содержит ровно $a + 1$ точек из $\mathcal{P}$. Следовательно, любой элемент $D' \in \mathcal{D}$ содержит все прямые вида $\Pi_i \cap \Pi_j$. В частности, $D' \cap \Pi_i$ содержит $\Pi_i \cap \text{Supp}(D - \Pi_i)$. Поскольку последнее множество – объединение $a + 2$ прямых, то $D' \supset \Pi_i$ для любого i . Тогда $D' = D$. Противоречие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. По теореме Римана–Роха и теореме Каваматы–Фивега об обращении в нуль имеем

$$\dim |D| = \dim |-aK_X| = \frac{1}{12}a(a+1)(2a+1)(2g-2) + 2a.$$

Следовательно, по леммам 3.9 и 3.10 получаем

$$(a+1)(2a+1)(2g-2) + 24 = 3(g-1)(a+2)(a+1).$$

Таким образом, имеем

$$(a+1)(g-1)(4-a) = 24. \quad (3.2)$$

При $5 \leq g \leq 12$ уравнение (3.2) имеет следующие решения:

$$(g, a, |\mathcal{P}|) = (5, 1, 6), (5, 2, 24), (7, 3, 90). \quad (3.3)$$

Последняя возможность исключается по следующей лемме. Это доказывает теорему.

ЛЕММА 3.11 [10]. *Если $g \geq 6$, то $|\text{Sing}(X)| \leq 29$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [10, теорема 13] число особых точек на трехмерном многообразии Фано X с терминальными горенштейновыми особенностями не превосходит

$$21 - \frac{1}{2} \text{Eu}(\mathfrak{X}_s) = 21 - \frac{1}{2} (2 + 2b_2(\mathfrak{X}_s) - b_3(\mathfrak{X}_s)) = 20 - \rho(\mathfrak{X}_s) + h^{1,2}(\mathfrak{X}_s),$$

где $\mathfrak{X}_s$ – сглаживание X , как в теореме 2.3. В нашем случае $\rho(\mathfrak{X}_s) = \rho(X) = 1$ и $h^{1,2}(\mathfrak{X}_s) \leq 10$ (см. [9]). Лемма доказана.

Для случая $g(X) = 5$ из (3.3) мы получаем следующий частичный результат.

СЛЕДСТВИЕ 3.12. Пусть X есть G -многообразие Фано основной серии с $g(X) = 5$. Предположим, что X содержит плоскость Π_1 , и пусть $\Pi_1, \dots, \Pi_n$ – ее орбита. Пусть $\mathcal{P}$ – множество всех нульмерных логканонических центров пары $(X, \sum_i \Pi_i)$. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- (i) $n = 8$, $|\mathcal{P}| = 6$, $|\text{Sing}(X)| \geq 6$;
- (ii) $n = 16$, $|\mathcal{P}| = 24$, $|\text{Sing}(X)| \geq 24$.

§ 4. $\mathbb{Q}$ -факториальный случай

В этом параграфе мы обобщим метод Фано–Исковских “двойной проекции” на случай особых трехмерных многообразий Фано.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X – трехмерное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано основной серии с терминальными горенштейновыми особенностями и $g(X) \geq 7$. Тогда существует диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \overset{\chi}{\dashrightarrow} & Y' \\ & f \swarrow & & & \searrow f' \\ X & & & & Z \end{array} \quad (4.1)$$

где f – раздутие прямой $l \subset X \setminus \text{Sing}(X)$, χ – флоп, f' – стягивание Мори и $\text{Pic}(Z) \simeq \mathbb{Z}$.

(i) Если $g \geq 9$, то Z – неособое многообразие Фано и f' – раздутие неприводимой (возможно, особой) кривой $B \subset Z$. Более того, Z и B описываются следующей таблицей:

$g(X)$	Z	$p_a(B)$	$-K_Z \cdot B$
9	$\mathbb{P}^3$	3	$4 \cdot 7$
10	$Q \subset \mathbb{P}^4$ – неособая квадрака	2	$3 \cdot 7$
12	$Z_5 \subset \mathbb{P}^6$ – неособое многообразие дель Пеццо	0	$2 \cdot 5$

Имеем

$$|\text{Sing}(X)| = |\text{Sing}(B)| \leq p_a(B).$$

В частности, X неособо, если $g(X) = 12$.

(ii) Если $g = 8$, то f' – расслоение на коники над $Z \simeq \mathbb{P}^2$ и дискриминантная кривая является (возможно, приводимой) квинтикой $\Delta \subset \mathbb{P}^2$. Пусть r_1 – число обыкновенных двойных точек Δ , r_2 – число простых каспов и r_3 – число остальных особых точек. Тогда

$$|\mathrm{Sing}(X)| \leq r_1 + r_2 + 2r_3.$$

(iii) Если $g = 7$, то f' – расслоение на поверхности дель Пеццо степени 5 над $Z \simeq \mathbb{P}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует классической идее Фано (современное изложение которой для неособого случая см. в [17]).

Пусть X – трехмерное $\mathbb{Q}$ -факториальное многообразие Фано основной серии с терминальными горенштейновыми особенностями рода $g = g(X) \geq 7$. Тогда X является, на самом деле, факториальным [8, лемма 5.1] и группа $\mathrm{Cl}(X)$ порождается каноническим классом K_X . Пусть $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{D} \ni o$ – однопараметрическое сглаживание X , как в теореме 2.3. По конструкции общий слой $X_s = f^{-1}(s)$ – неособое многообразие Фано и $f^{-1}(o) = X$. Согласно [18] каждый неособый слой X_s содержит одномерное семейство прямых. Каждая прямая деформируется в $\mathfrak{X}$, и поэтому изначальное многообразие X также содержит одномерное семейство прямых $\mathcal{L}$. Мы утверждаем, что общая прямая l из этого семейства $\mathcal{L}$ лежит в неособой части X . Действительно, иначе существовало бы одномерное семейство прямых, проходящих через одну точку $P \in X$ (поскольку особенности X изолированы). Все эти прямые заматают поверхность $F \subset X \cap \overline{T_{P,X}}$, которая должна быть проективным конусом над некоторой кривой. Так как X является пересечением квадрик (по теореме 2.2, (iii)) и $\dim \overline{T_{P,X}} = 4$, то $\deg F \leq 4$. С другой стороны, $\mathrm{Cl}(X) = \mathbb{Z} \cdot K_X$. Противоречие.

Таким образом, $X \setminus \mathrm{Sing}(X)$ содержит прямую l . Далее доказательство приводим, как в [17]. Однако, поскольку многообразие X может быть особым в нашем случае, необходимы некоторые изменения. Для удобства изложения мы приводим доказательство полностью.

Пусть $f: Y \rightarrow X$ – раздутие l , E – исключительный дивизор, и пусть $H := f^*(-K_X)$.

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 4.2 (см., например, [9, лемма 4.1.2] или (5.1)). *Имеют место следующие равенства:*

$$(-K_Y)^3 = 2g - 6, \quad (-K_Y)^2 \cdot E = 3, \quad (-K_Y) \cdot E^2 = -2, \quad E^3 = 1. \quad (4.2)$$

Используя те же самые соображения, что и в [9, п. 4.3.1], покажем, что линейная система $|-K_Y| = |H - E|$ численно эффективна, объемна и определяет бирациональный морфизм $\varphi: Y \rightarrow Y_{2g-6} \subset \mathbb{P}^{g-1}$.

Несложно также показать, что $\dim |H - 2E| \geq g - 6$ (см., например, [17, § 2, лемма 1]). Поскольку $\mathrm{Cl}(X)$ порождается классом дивизора $-K_X$, для некоторого $\alpha \geq 2$ линейная система $|H - \alpha E|$ не имеет неподвижных компонент. Используя соотношения (4.2), получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-K_Y) \cdot (H - \alpha E)^2 = (-K_Y) \cdot (-K_Y - (\alpha - 1)E)^2 \\ &= 2g - 6 - 6(\alpha - 1) - 2(\alpha - 1)^2. \end{aligned}$$

Поскольку $g \leq 12$, отсюда имеем $\alpha = 2$, т. е. линейная система $|H - 2E|$ не имеет неподвижных компонент.

Далее мы утверждаем, что φ – малый морфизм. Действительно, иначе φ стягивает простой дивизор D . Для любого слоя Υ морфизма φ мы имеем $-K_Y \cdot \Upsilon = 0$, и поэтому $(H - 2E) \cdot \Upsilon < 0$. Следовательно, D содержится в базисном множестве $|H - 2E|$. Противоречие доказывает, что φ – малый крепантный морфизм.

В этой ситуации существует флоп $\chi: Y \dashrightarrow Y'$, где Y' имеет тот же тип особенностей, что и Y (терминальные горенштейновы) [19]. Более того, $\rho(Y') = \rho(Y) = 2$, дивизор $-K_{Y'}$ численно эффективен, объемен и многообразия Y' (как и Y) факториально (см. [8, лемма 5.1]). Следовательно, существует экстремальное стягивание Мори $f': Y' \rightarrow Z$. Согласно общей теории экстремальных лучей имеется точная последовательность

$$0 \longrightarrow \text{Pic}(Z) \xrightarrow{f'^*} \text{Pic}(Y') \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (4.3)$$

где правое отображение задается пересечением с некоторой кривой в слое. Отсюда $\rho(Z) = \rho(Y') - 1 = 1$, и поэтому $\dim Z > 0$. Пусть H' и E' – собственные прообразы на Y' дивизоров H и E соответственно.

ЛЕММА 4.3. Пусть F – дивизор на Y' и D – его собственный прообраз на Y . Запишем $D \sim \alpha(-K_Y) - \beta E$. Тогда

$$\begin{aligned} (-K_Y)^2 \cdot D &= (-K_{Y'})^2 \cdot F = (2g - 6)\alpha - 3\beta, \\ (-K_Y) \cdot D^2 &= (-K_{Y'}) \cdot F^2 = (2g - 6)\alpha^2 - 6\alpha\beta - 2\beta^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из (4.2).

ЛЕММА 4.4. Пусть D – простой дивизор на Y , не являющийся объемным. Для некоторых целых α, β запишем $D \sim \alpha(-K_Y) - \beta E$. Тогда

$$\alpha, \beta > 0, \quad \beta \geq \alpha, \quad (-K_Y)^2 \cdot D \geq 3\alpha + 2\beta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f(D)$ эффективен, то $\alpha > 0$. Так как дивизор $-K_Y$ объемен, то $\beta > 0$. Дивизоры $-K_{Y'}$ и $-K_{Y'} - E'$ численно эффективны на Y' , и они содержатся в замкнутом конусе обильных дивизоров $\text{Amp}(Y')$. Поэтому D не может быть выпуклой линейной комбинацией $-K_Y$ и $-K_Y - E$. Отсюда $\beta \geq \alpha$. Поскольку линейная система $|-K_Y - E|$ не имеет неподвижных компонент, то

$$(-K_Y) \cdot (-K_Y - E) \cdot D = (-K_Y)^2 \cdot D - (-K_Y) \cdot E \cdot D \geq 0.$$

С другой стороны, $(-K_Y) \cdot E \cdot D = 3\alpha + 2\beta$ согласно (4.2). Лемма доказана.

Далее мы рассмотрим возможности для стягивания f' согласно классификации экстремальных стягиваний [20].

Предположим, что $\dim Z = 1$. Тогда f' – расслоение на поверхности дель Пеццо и $Z \simeq \mathbb{P}^1$. Пусть F – общий геометрический слой. Воспользуемся обозначениями леммы 4.3. Тогда $(-K_{Y'}) \cdot F^2 = 0$ и $(-K_{Y'})^2 \cdot F = K_F^2 \leq 9$. Из

последовательности (4.3) следует, что $\gcd(\alpha, \beta) = 1$, и из второго соотношения в (4.4) следует, что α делит 2. Заметим, что $-\alpha K_F \sim \alpha(-K_{Y'})|_F \sim \beta E'|_F$. Это означает, что канонический дивизор K_F поверхности дель Пеццо F делится на β . Отсюда $\beta \leq 3$. Более того, если $\beta = 3$, то $F \simeq \mathbb{P}^2$ и $K_F^2 = 9$. В этом случае в силу (4.4) имеем $(g-3)\alpha = 9$, $\alpha = 1$ и $(-K_Y) \cdot D^2 < 0$. С другой стороны, $(-K_Y) \cdot D^2 = (-K_{Y'}) \cdot F^2 = 0$. Противоречие. Аналогично, если $\beta = 2$, то $K_F^2 = 8$, $(g-3)\alpha = 7$, $\alpha = 1$, и $(-K_Y) \cdot D^2 < 0$. Снова противоречие. Следовательно, $\beta = \alpha = 1$, и опять из (4.4) получаем $g = 7$ и $K_F^2 = 5$, т. е. случай (iii) теоремы.

Предположим теперь, что $\dim Z = 2$. Согласно [20] поверхность Z является неособой и f' – расслоение на коники. В нашем случае $\kappa(Z) = -\infty$ и $\rho(Z) = 1$. Поэтому $Z \simeq \mathbb{P}^2$. Пусть $\Delta \subset \mathbb{P}^2$ – дискриминантная кривая, $l \subset \mathbb{P}^2$ – прямая и $F := f'^{-1}(l)$. Снова воспользуемся обозначениями леммы 4.3. Поскольку общий геометрический слой $C \subset Y'$ является коникой, то $(-K_Y) \cdot C = (-K_Y) \cdot D^2 = 2$ и $0 = F \cdot C = 2\alpha - (E' \cdot C)\beta$. Из последовательности (4.3) следует, что $\gcd(\alpha, \beta) = 1$, и поэтому β делит 2. По лемме 4.4 имеем $\alpha = 1$. Поскольку $(-K_Y) \cdot D^2 = 2$, второе соотношение в (4.4) принимает вид $2g - 6 - 6\beta - 2\beta^2 = 2$, откуда $\beta = 1$ и $g = 8$. Наконец, по формуле присоединения

$$K_F = (K_{Y'} + F)|_F, \quad K_F^2 = K_{Y'}^2 \cdot F + 2K_{Y'} \cdot F^2 = 3.$$

Следовательно, проекция $f'|_F: F \rightarrow l$ имеет пять вырожденных слоев. Поэтому $\deg \Delta = 5$. Мы получаем случай (ii) теоремы.

Предположим, что морфизм f' бирационален и стягивает (неприводимый) дивизор F в точку. Пусть, как и выше, $D \subset Y$ – собственный прообраз F и $D \sim \alpha(-K_Y) - \beta E$. Согласно классификации из [20] существует четыре типа таких стягиваний во всех случаях $(-K_{Y'})^2 \cdot D' \leq 4$. Это противоречит лемме 4.4.

Наконец, предположим, что морфизм f' бирационален и стягивает (неприводимый) дивизор F на кривую B . Согласно [20] особенности кривой B локально планарны, многообразие Z неособо вдоль B и f' является раздутием пучка идеалов B . Тогда Z – многообразие Фано с терминальными факториальными особенностями и $\rho(Z) = 1$. Пусть A – положительная образующая группы $\text{Pic}(Z)$. Тогда $-K_Z = \iota A$ для некоторого положительного целого ι , которое называется *индексом Фано*. Хорошо известно, что $\iota \leq 4$ (см. [9] и теорему 2.3). Более того, $\iota = 4$ тогда и только тогда, когда $Z \simeq \mathbb{P}^3$, и $\iota = 3$ тогда и только тогда, когда Z – квадра в $\mathbb{P}^4$.

Далее воспользуемся обозначениями леммы 4.3. Пусть C – общий слой $f'|_F: F \rightarrow B$. Поскольку над общей точкой кривой B морфизм f' – обычное раздутие, то $F \cdot C = -1$. Следовательно, $(E' \cdot C)\beta = \alpha + 1$. В частности, β делит $\alpha + 1$. Так как $\dim |F| = 0$, а $\dim |-K_{Y'} - E'| > 0$, то $\alpha \neq \beta$. Тогда по лемме 4.4 имеем $\beta > \alpha$. Отсюда $\beta = \alpha + 1$. Далее,

$$\begin{aligned} K_{Y'} &= (f')^* K_Z + F = -\iota(f')^* A + \alpha(-K_{Y'}) - (\alpha + 1)E', \\ \iota f'^* A &= (\alpha + 1)(-K_{Y'} - E'). \end{aligned}$$

Поскольку дивизоры $(f')^* A$ и $-K_{Y'} - E'$ – примитивные элементы решетки $\text{Pic}(Y')$, то $\beta = \alpha + 1 = \iota$ и $(f')^* A = -K_{Y'} - E'$. В частности, $1 \leq \alpha \leq \iota - 1 = 3$.

Более того,

$$\dim |A| \geq |-K_Y - E| \geq g - 6. \quad (4.5)$$

Теория пересечений на Y' имеет тот же вид, что и теория пересечений раздутия неособого многообразия вдоль неособой кривой (см. (5.1)). Поэтому

$$\begin{aligned} (-K_Y)^2 \cdot D &= -K_Z \cdot B - 2p_a(B) + 2, \\ (-K_Y) \cdot D^2 &= 2p_a(B) - 2. \end{aligned}$$

Учитывая (4.4) и $\beta = \alpha + 1$, получим

$$\begin{aligned} (2g - 6)\alpha - 3(\alpha + 1) &= -K_Z \cdot B - 2p_a(B) + 2, \\ (2g - 6)\alpha^2 - 6\alpha(\alpha + 1) - 2(\alpha + 1)^2 &= 2p_a(B) - 2. \end{aligned}$$

Складывая последние два равенства, получим

$$(2g - 6)\alpha - 3(\alpha + 1) + (2g - 6)\alpha^2 - 6\alpha(\alpha + 1) - 2(\alpha + 1)^2 = -K_Z \cdot B.$$

Поскольку $\beta = \alpha + 1 = \iota$, то

$$2(g - 7)\alpha = A \cdot B + 5.$$

Рассмотрим случаи $\alpha = 1, 2, 3$ отдельно.

Пусть $\alpha = 1$. Тогда $\beta = \iota = 2$ и

$$(2g - 6)\alpha^2 - 6\alpha\beta - 2\beta^2 = 2g - 26 = 2p_a(B) - 2. \quad (4.6)$$

Единственным решением для (4.6) является $p_a(B) = 0$, $g = 12$, $A \cdot B = 5$. В этом случае Z является многообразием дель Пеццо (см., например, [9] или [2]). Согласно (4.5) имеем $\dim |A| \geq 6$. Поскольку $\rho(Z) = 1$ и Z факториально, то $A^3 = 5$. Согласно [2, следствие 5.4] многообразие Z неособо.

Пусть $\alpha = 2$. Тогда $\beta = \iota = 3$ и Z — квадрика в $\mathbb{P}^4$. Поскольку многообразие Z факториально, эта квадрика неособа. Как и выше, имеем

$$(2g - 6)\alpha^2 - 6\alpha\beta - 2\beta^2 = 8g - 78 = 2p_a(B) - 2, \quad 4g = p_a(B) + 38. \quad (4.7)$$

Согласно (4.5) имеем $4 = \dim |A| \geq g - 6$. Отсюда $g \leq 10$. Единственным решением для (4.7) является $g = 10$, $p_a(B) = 2$, $A \cdot B = 7$.

Пусть $\alpha = 3$. Тогда $\beta = \iota = 3$ и $Z \simeq \mathbb{P}^3$. Как и выше, $9g = p_a(B) + 78$, $3 = \dim |A| \geq g - 6$, $g = 9$, $p_a(B) = 3$, $A \cdot B = 7$.

Таким образом, существование диаграммы (4.1) и ее свойства доказаны.

Для доказательств утверждений об особенностях следует заметить, что по построению f является изоморфизмом вблизи $\text{Sing}(X)$ и $\text{Sing}(Y)$, а отображение χ полностью сохраняет тип особенностей (и их число) [19]. Таким образом, $|\text{Sing}(X)| = |\text{Sing}(Y')|$. Оценка для $|\text{Sing}(Y')|$ следует из предложения 5.2 в случае $g = 8$ и из предложения 5.1 в случаях $g \geq 9$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. При $g \geq 9$ конструкция (4.1) может быть обращена: при подходящем выборе кривой B с соответствующими значениями степени и арифметического рода ее раздутие $f': Y' \rightarrow Z$ будет удовлетворять стандартным условиям:

- а) линейная система $|-K'_Y|$ не имеет базисных точек;
- б) соответствующий морфизм $\Phi_{|-K'_Y|}$ не стягивает дивизоров;
- с) многообразие Y' имеет терминальные особенности.

В этой ситуации существует (и однозначно восстанавливается) правая часть диаграммы (4.1). Такая кривая может быть выбрана на неособой поверхности дель Педро степени 3, 4, 5 в случаях $g = 9, 10, 12$ соответственно. Это позволяет решать вопросы о существовании многообразий Фано с заданным количеством особенностей.

В частности, эта конструкция позволяет строить примеры непроективных мойшезоновых многообразий с $b_2 = 1$ как малые разрешения нашего многообразия X (ср. [21]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. В случаях $g \geq 9$ утверждение непосредственно следует из теоремы 4.1, (i). Рассмотрим случай $g = 8$. Для плоской приведенной (но, возможно, приводимой) кривой C положим $\gamma(C) := r_1 + r_2 + 2r$, где r_1 (соответственно r_2) – число простых двойных точек типа A_1 (соответственно A_2), а r – число остальных особых точек. Тогда по теореме 4.1, (ii) имеем $|\text{Sing}(X)| \leq \gamma(\Delta)$. Оценка $\gamma(\Delta) \leq 10$ для плоской квинтики Δ вытекает из следующих двух простых утверждений:

- 1) если кривая C неприводима, то $\gamma(C) \leq p_a(C)$;
- 2) если C_1 – неприводимая неособая компонента C , то $\gamma(C) \leq \gamma(C - C_1) + C \cdot (C - C_1)$.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. В отличие от случая $g \geq 9$ мы не утверждаем, что оценка $|\text{Sing}(X)| \leq 10$ является точной при $g = 8$. Можно предположить, что она может быть улучшена.

§ 5. Два вспомогательных результата

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть V – трехмерное многообразие с терминальными гореништейновыми особенностями, и пусть $f: V \rightarrow W$ – бирациональное стягивание Мори, стягивающее дивизор F на кривую B . Тогда имеют место следующие утверждения:

- (i) особенности кривой B локально планарны, многообразие W неособо вдоль B и f является раздутием пучка идеалов B ;
- (ii) $f(\text{Sing}(X) \cap F) = \text{Sing}(B)$, и каждый слой $f^{-1}(b)$ над точкой $b \in \text{Sing}(B)$ содержит ровно одну особую точку X .

Более того,

$$\begin{aligned}
 (-K_V)^3 &= (-K_W)^3 + 2K_W \cdot B + 2p_a(B) - 2, \\
 (-K_V)^2 \cdot E &= -K_W \cdot B - 2p_a(B) + 2, \\
 (-K_V) \cdot E^2 &= 2p_a(B) - 2.
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из [20], утверждение (ii) – простая проверка в локальных координатах. Докажем (5.1). Для некоторого обильного дивизора A на W линейная система $|-K_V + f^*A|$ не имеет базисных точек (см. [20, предложение 1]). Возьмем общий элемент $S \in |-K_V + f^*A|$.

По теореме Бертини S неособ. Пусть $\bar{S} := f(S)$. Тогда $\bar{S} \in |-K_W + A|$ и $f^*\bar{S} = S + E$. Ограниченная линейная система $|-K_V + f^*A|_E$ обильна и не имеет базисных точек. Снова по теореме Бертини ее общий элемент $S \cap E$ – неособая неприводимая кривая. Поскольку пересечение S с общим слоем $E \rightarrow f(E)$ равно 1, ограничение $f_S: S \rightarrow \bar{S}$ является изоморфизмом и $f_S(E \cap S) = B$. Заметим, что $K_S = f^*A|_S$, $K_{\bar{S}} = A|_{\bar{S}}$, $(B \cdot B)_{\bar{S}} = 2p_a(B) - 2 - A \cdot B$. Используя последнее, мы можем записать

$$\begin{aligned} -K_V \cdot E^2 &= (S - f^*A) \cdot E^2 = (B \cdot B)_{\bar{S}} + A \cdot B = 2p_a(B) - 2, \\ -K_V \cdot f^*K_W \cdot E &= (S - f^*A) \cdot f^*K_W \cdot E = S \cdot f^*K_W \cdot E = K_W \cdot B. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} K_V^2 \cdot E &= K_V \cdot f^*K_W \cdot E + K_V \cdot E^2 = -K_W \cdot B - 2p_a(B) + 2, \\ (-K_V)^3 &= -K_V \cdot (f^*K_W + E)^2 = -(f^*K_W + E) \cdot f^*K_W^2 \\ &\quad - 2K_V \cdot f^*K_W \cdot E - K_V \cdot E^2 = (-K_W)^3 + 2K_W \cdot B + 2p_a(B) - 2. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть V – трехмерное многообразие с терминальными горенштейновыми особенностями, и пусть $f: V \rightarrow W$ – стягивание Мори на поверхность. Тогда поверхность W неособа и f – расслоение на коники (возможно, особое). Далее, пусть $\Delta \subset W$ – дискриминантная кривая. Тогда $f(\text{Sing}(V)) \subset \text{Sing}(\Delta)$. Более того, любой слой $f^{-1}(w)$, $w \in \text{Sing}(\Delta)$, содержит не более двух точек $\text{Sing}(V)$. Если $f^{-1}(w) \cap \text{Sing}(V)$ – две точки, то особенность $w \in \Delta$ не является ни обыкновенной двойной точкой A_1 , ни простым каспом A_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть предложения содержится в [20]. Остается доказать утверждения об особенностях V . Поскольку проблема локальна, можно считать, что основное поле $\mathbb{k}$ – поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, V – аналитическая окрестность слоя $f^{-1}(w)$, и $W \subset \mathbb{C}_{u,v}^2$ – малый диск, содержащий $w = (0, 0)$. Тогда можно вложить V в $\mathbb{P}^2 \times W$ так, что V задается уравнением $q(x, y, z; u, v) = 0$, где q рассматривается как квадратичная форма от x, y, z с коэффициентами в $\mathbb{C}\{u, v\}$. Слой $f^{-1}(w)$ задается уравнением $q(x, y, z; 0, 0) = 0$. Поскольку $f^{-1}(w)$ – коника, то $\text{rk } q(x, y, z; 0, 0) \geq 1$. Если $\text{rk } q(x, y, z; 0, 0) = 3$, то слой $f^{-1}(w)$ неособ и V также неособо (вблизи $f^{-1}(w)$). Если $\text{rk } q(x, y, z; 0, 0) = 2$, то с точностью до замены координат мы можем записать $q(x, y, z; 0, 0) = x^2 + y^2$ и $q(x, y, z; u, v) = x^2 + y^2 + \alpha(u, v)z^2$, где $\alpha = 0$ – уравнение Δ и $\alpha(0, 0) = 0$. В этом случае V особа, если и только если $\text{mult}_{(0,0)} \alpha > 1$, т.е. кривая Δ особа в начале координат. Более того, $\text{Sing}(V) \subset \text{Sing}(f^{-1}(w)) = \{P\}$, где $\text{Sing}(f^{-1}(w))$ – одна точка.

Наконец, рассмотрим случай $\text{rk } q(x, y, z; 0, 0) = 1$. Тогда с точностью до замены координат мы можем записать $q(x, y, z; 0, 0) = x^2$ и $q(x, y, z; u, v) = x^2 + \alpha y^2 + 2\beta yz + \gamma z^2$, где α, β, γ – голоморфные функции от u, v , обращающиеся в нуль в начале координат. Уравнение для Δ имеет вид $\alpha\gamma - \beta^2 = 0$. Поэтому кривая Δ особа в $(0, 0)$. Предположим, что V имеет две особые точки P_1, P_2 на $f^{-1}(w)$. Заменяя координаты y, z линейно, мы можем считать,

что $P_1 = (0 : 1 : 0)$, $P_2 = (0 : 0 : 1)$. Тогда $\text{mult}_{(0,0)} \alpha > 1$ и $\text{mult}_{(0,0)} \gamma > 1$. Поскольку особенности V изолированы, то $\text{mult}_{(0,0)} \beta = 1$. Тогда легко видеть, что многообразие V неособо вне P_1 , P_2 и $\{\alpha\gamma - \beta^2 = 0\}$ не является ни обыкновенной двойной точкой, ни простым каспом.

Список литературы

1. Yu. Prokhorov, “Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3”, *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563–600.
2. Yu. Prokhorov, “ G -Fano threefolds. I”, *Adv. Geom.*, **13**:3 (2013), 389–418.
3. Yu. Prokhorov, “ p -elementary subgroups of the Cremona group of rank 3”, *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2011, 327–338.
4. Yu. Prokhorov, “ G -Fano threefolds. II”, *Adv. Geom.*, **13**:3 (2013), 419–434.
5. Ю. Г. Прохоров, “Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими гorenштейновыми особенностями”, *Матем. сб.*, **196**:1 (2005), 81–122; англ. пер.: Yu. Prokhorov, “On the degree of Fano threefolds with canonical Gorenstein singularities”, *Sb. Math.*, **196**:1 (2005), 77–114.
6. A.-S. Kaloghiros, “The defect of Fano 3-folds”, *J. Algebraic Geom.*, **20**:1 (2011), 127–149; Errata: **21**:2 (2012), 397–399.
7. H. F. Baker, *A locus with linear self-transformations*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **39**, University Press, Cambridge; The Macmillan Company, New York, 1946, xi+107 pp.
8. Y. Kawamata, “Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces”, *Ann. of Math. (2)*, **127**:1 (1988), 93–163.
9. V. A. Iskovskih, Yu. G. Prokhorov, “Fano varieties”, *Algebraic geometry. V: Fano varieties*, Encyclopaedia Math. Sci., **47**, Springer, Berlin, 1999, 1–245.
10. Y. Namikawa, “Smoothing Fano 3-folds”, *J. Algebraic Geom.*, **6**:2 (1997), 307–324.
11. P. Jahnke, I. Radloff, “Gorenstein Fano threefolds with base points in the anticanonical system”, *Compos. Math.*, **142**:2 (2006), 422–432.
12. В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Гиперэллиптические и тригональные многообразия Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 145–204; англ. пер.: V. V. Przhijalkowski, I. A. Cheltsov, K. A. Shramov, “Hyperelliptic and trigonal Fano threefolds”, *Izv. Math.*, **69**:2 (2005), 365–421.
13. P. Jahnke, I. Radloff, “Terminal Fano threefolds and their smoothings”, *Math. Z.*, **269**:3–4 (2011), 1129–1136.
14. R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. II: Positivity for vector bundles, and multiplier ideals*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **49**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xviii+385 pp.
15. J. Kollár (Ed.), *Flips and abundance for algebraic threefolds*, Papers from the Second Summer Seminar on Algebraic Geometry held at the University of Utah (Salt Lake City, UT, 1991), *Astérisque*, **211**, Soc. Math. France, Paris, 1992, 258 pp.
16. M. Kawakita, “Inversion of adjunction on log canonicity”, *Invent. Math.*, **167** (2007), 129–133.
17. В. А. Исковских, “Двойная проекция из прямой на трехмерных многообразиях Фано первого рода”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 260–278; англ. пер.: V. A. Iskovskih, “Double projection from a line on Fano threefolds of the first kind”, *Math. USSR-Sb.*, **66**:1 (1990), 265–284.

18. В. В. Шокуров, “Существование прямой на многообразиях Фано”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:4 (1979), 922–964; англ. пер.: V. V. Šokurov, “The existence of a straight line on Fano 3-folds”, *Math. USSR-Izv.*, **15**:1 (1980), 173–209.
19. J. Kollár, “Flops”, *Nagoya Math. J.*, **113** (1989), 15–36.
20. S. Cutkosky, “Elementary contractions of Gorenstein threefolds”, *Math. Ann.*, **280**:3 (1988), 521–525.
21. J. Kollár, “Flips, flops, minimal models, etc.”, *Surveys in differential geometry* (Cambridge, MA, 1990), Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991, 113–199.

Юрий Геннадьевич ПРОХОРОВ

(YURI G. PROKHOROV)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

E-mail: prokhorov@gmail.com

Поступило в редакцию

01.02.2015

08.02.2015