Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Клячин, Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 3, 95–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:57:12

УДК 514.174.3+519.65

В. А. Клячин

Модифицированное условие пустой сферы Делоне в задаче аппроксимации градиента

Классический пример Шварца показывает, что кусочно-линейная аппроксимация гладких функций не всегда влечет сходимость производных. Однако, в плоском случае требуемая сходимость будет иметь место, если для триангуляции сетки потребовать выполнения условия пустой сферы – условия триангуляции Делоне. Построенные автором статьи примеры и опубликованные ранее показывают, что данные результаты не могут быть распространены на многомерный случай. В настоящей статье приводится модифицированное условие пустой сферы, обеспечивающее необходимую аппроксимацию и в многомерном случае.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: триангуляция Делоне, условие пустой сферы, кусочно-линейная аппроксимация.

DOI: 10.4213/im8350

§ 1. Введение

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан конечный набор точек $P = \{p_i\}$, $i = 1, \dots, N$. Для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ставится задача о приближенном вычислении ее производных по известным значениям функции в точках p_i . Одним из методов решения такой задачи является метод, основанный на построении триангуляции T множества точек P – системы симплексов с вершинами из P , которые попарно не пересекаются по внутренним точкам. Если такой симплекс $S \in T$ имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, \dots, p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида $f_S(x) = \langle a, x \rangle + b$ такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$ можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$. Напомним, что триангуляция T называется *триангуляцией Делоне* [1], если выполнено следующее условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P . Аналогичное условие пустой сферы для триангуляций поверхностей было введено и изучено в работах [2], [3]. В [4] построен многомерный аналог классического примера Шварца [5], для которого изучена связь аппроксимации градиента с условием пустой сферы. Триангуляция Делоне чаще всего используется в вычислительных задачах, например, при исследовании явлений газовой динамики [6], [7], в прикладных задачах моделирования процессов сварки материалов [8].

Введем обозначение

$$\delta_S(f) = \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)| \quad (1)$$

для абсолютной погрешности вычисления градиента. Пусть также d_S обозначает диаметр симплекса S . Оценка введенной величины изучалась во множестве работ. В частности, в [9]–[12] получены оценки погрешности для произвольных триангуляций с использованием интерполяционных многочленов в терминах геометрии треугольников. С другой стороны, рассмотренный в [4] классический пример Шварца показывает, что поведение погрешности $\delta_S(f)$ при $d_S \rightarrow 0$ тесно связано не только со структурой симплекса (в двумерном случае треугольника), определяющей степень его невырожденности, но и с геометрией триангуляции в целом. Так в [3] и частично в [13] было доказано, что при $n = 2$ в случае триангуляции Делоне набора точек P , образующих ε -сеть, справедлива оценка

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f)\varepsilon, \quad (2)$$

где $C(f)$ – константа, зависящая от класса функции f . Это неравенство является следствием неравенства для погрешности в отдельном треугольнике

$$\delta_S(f) \leq C(f) \cdot R(S), \quad (3)$$

где $R(S)$ – радиус описанной окружности треугольника S (см., например, [3], [9], [13]). Предпринятые автором попытки распространить эти результаты на случай многомерных пространств не привели к ожидаемому успеху. Тем не менее, в [3] для случая $n = 3$ было доказано неравенство, аналогичное неравенству (2), для триангуляций, в которых все тетраэдры являются остроугольными, т. е. у тетраэдров все плоские и двугранные углы являются острыми. Несмотря на это, вопрос о существовании оценки вида (3) до определенного момента времени оставался открытым. Существование такой оценки давало бы возможность использовать триангуляцию Делоне в вопросах приближенного вычисления производных функций, заданных на нерегулярных сетках, не заботясь о контроле геометрии ячеек. Однако, как оказалось, при $n \geq 3$ оценку (3) невозможно получить принципиально. Соответствующий пример был построен в [4].

Вопрос о существовании оценки вида (2) для тетраэдральных сеток, удовлетворяющих условию Делоне, также был решен в этой работе. К сожалению, в отличие от плоских триангуляций, в многомерном случае для существования подобной оценки одного условия пустоты сферы недостаточно.

В настоящей статье мы приводим такого рода условия, но в несколько измененном виде. Дадим соответствующие формулировки.

§ 2. Основные результаты

Пусть $B(x, t)$ обозначает открытый шар радиуса $t > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^n$. Определим величину

$$\eta_{k,n} = \inf_{q_1, \dots, q_k \in B(0,1)} \sup_{y_0 \in B(0,1)} \{ \rho : B(y_0, \rho) \subset B(0,1) \setminus \{q_1, \dots, q_k\} \}.$$

Геометрический смысл величины $\eta_{k,n}$ состоит в том, что какие бы k точек из $B(0,1)$ ни взяли, найдется открытый шар радиуса $\eta_{k,n}$, лежащий внутри шара $B(0,1)$ и не содержащий заданных k точек. Ясно, что для всех k, n выполнено $\eta_{k,n} > 0$ и $\eta_{k,n} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана локально конечная ε -сеть и некоторая ее триангуляция T .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что симплекс S удовлетворяет условию m -пустой сферы, если его описанная сфера содержит внутри себя не более m точек ε -сети.

Заметим, что для симплексов триангуляции T выполнение этого условия при $m = 0$ эквивалентно условию Делоне.

Рассмотрим некоторый симплекс S с вершинами $p_0, \dots, p_n$. Зафиксируем произвольное его ребро $p_i p_j$. Построим симплекс S^* по точкам $p_0, \dots, p_{j-1}, p_j^*, p_{j+1}, \dots, p_n$, где $p_j^* = p_i - (p_j - p_i)$. Используя такую операцию, для фиксированного i мы сможем получить $2^n - 1$ симплексов, заменяя по приведенному правилу произвольную комбинацию вершин кроме i -й вершины исходного симплекса S . Таким образом получаемые симплексы будем называть *присоединенными симплексами* к симплексу S .

ТЕОРЕМА 1. Если каждый симплекс триангуляции T ε -сети и каждый его присоединенный симплекс удовлетворяют условию m -пустой сферы, то для погрешности вычисления градиента функции $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ такой, что $\sup \|d^2 f(x)\| < +\infty$, имеет место оценка

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq C(f) \frac{\varepsilon}{\eta_{m,n}}. \quad (4)$$

Предположим, что функция $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и обозначим через $\omega(t)$, $t \geq 0$, модуль непрерывности ее градиента. Будем предполагать, что $\omega(t)$ – конечная функция. Так, что

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq \omega(|x - y|) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Введем обозначение

$$\sigma = \max_{S \in T} \max_{i=1, \dots, n} \frac{1}{|p_i - p_0|^2} \int_0^{|p_i - p_0|} \omega(t) dt.$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если каждый симплекс триангуляции T ε -сети и каждый его присоединенный симплекс удовлетворяют условию m -пустой сферы, то для погрешности вычисления градиента функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ с конечным модулем непрерывности $\omega(t)$ имеет место оценка

$$\max_{S \in T} \delta_S(f) \leq 2\sigma \frac{\varepsilon}{\eta_{m,n}}. \quad (5)$$

§ 3. Доказательства теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, а $L(x)$ – линейная функция вида $L(x) = \langle A, x \rangle + a$ в n -мерном симплексе с вершинами в точках $p_0, p_1, \dots, p_n$, удовлетворяющая соотношениям

$$L(p_i) = f(p_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Тогда по формуле Тейлора получим систему

$$\langle A, p_i \rangle + a = L(p_i) = f(p_i) = f(p_0) + \langle \nabla f(p_0), p_i - p_0 \rangle + \beta_i(p_i - p_0), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

или, вычитая соотношение при $i = 0$, получаем

$$\langle A, p_i - p_0 \rangle = \langle \nabla f(p_0), p_i - p_0 \rangle + \beta_i(p_i - p_0), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где β_i – остаточные члены в формуле Тейлора. Перепишем полученные соотношения в виде следующей системы уравнений

$$\langle Y, p_i - p_0 \rangle = \beta_i(p_i - p_0), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$Y = A - \nabla f(p_0).$$

Для получения оценки аппроксимации необходимо оценить длину вектора Y системы (6). Из условий теоремы $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $\sup \|d^2 f(x)\| < +\infty$ можно получить оценку для правых частей этой системы вида

$$|\beta_i| \leq C(f)|p_i - p_0|^2,$$

где $C(f)$ – зависит от максимума вторых производных функции f . Перепишем систему (6) в следующем виде, разделив обе части на $2C(f)$,

$$\left\langle Y \frac{1}{2C(f)}, p_i - p_0 \right\rangle = \frac{\beta_i(p_i - p_0)}{2C(f)} = \gamma_i(p_i - p_0), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Тогда правые части новой системы удовлетворяют неравенствам

$$|\gamma_i| \leq \frac{|p_i - p_0|^2}{2}.$$

Из этих неравенств следует, что геометрически решение системы (7) будет лежать в пересечении пространственных слоев Π_i вида

$$\Pi_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, p_i - p_0 \rangle| \leq \frac{|p_i - p_0|^2}{2} \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Такое пересечение представляет собой пространственный $2n$ -гранник с 2^n вершинами. Более того, все эти вершины являются центрами описанных сфер присоединенных симплексов с общей вершиной p_0 , т. е. симплексов с вершинами с различными комбинациями плюсов и минусов в выражении $p_0 \pm (p_i - p_0)$. Если обозначить через R максимальный радиус таких шаров, то из сказанного выше следует, что

$$|Y| \leq 2C(f)R.$$

Покажем, что $R \leq \varepsilon/\eta_{m,n}$. Предположим противное, т. е. $R > \varepsilon/\eta_{m,n}$. Обозначим через F описанную сферу такого присоединенного симплекса, радиус которого равен R . Сфера F удовлетворяет условию m -пустой сферы. Таким образом, внутри этой сферы находится не более m точек ε -сети. Тогда по определению величины $\eta_{m,n}$ найдется шар B радиуса $R\eta_{m,n}$, лежащий внутри сферы F и не содержащий точек ε -сети. Последнее противоречит определению ε -сети, так как мы указали шар радиуса $R\eta_{m,n} > \varepsilon$, не пересекающийся с ε -сетью. Тем самым $R \leq \varepsilon/\eta_{m,n}$, и мы приходим к неравенству (4). Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Как и при доказательстве теоремы 1, мы получаем систему (6). В этой системе необходимо оценить величины β_i . Используя непрерывную дифференцируемость $f(x)$, получаем

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x - x_0)) dt = \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt + \int_0^1 \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt \\ &= \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(x_0 + t(x - x_0)) - \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle dt. \end{aligned}$$

Воспользуемся определением модуля непрерывности и запишем

$$\begin{aligned} |\beta_i(p_i - p_0)| &= |f(p_i) - f(p_0) - \langle \nabla f(p_0), p_i - p_0 \rangle| \\ &\leq \int_0^1 |\nabla f(p_0 + t(p_i - p_0)) - \nabla f(p_0)| |p_i - p_0| dt \\ &\leq \int_0^1 \omega(t|p_i - p_0|) |p_i - p_0| dt = \int_0^{|p_i - p_0|} \omega(t) dt. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$|\beta_i(p_i - p_0)| \leq \sigma |p_i - p_0|^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

Рассуждая как и в завершении доказательства теоремы 1, приходим к требуемому неравенству

$$|\nabla f - A| = |Y| \leq 2\sigma R \leq 2\sigma \frac{\varepsilon}{\eta_{m,n}}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Пример

Будем использовать доказанные утверждения в следующем примере. Возьмем за основу пример триагуляции Делоне, построенный в [4]. Рассмотрим ε -сеть в $\mathbb{R}^3$, образованную узлами прямоугольной сетки

$$P_{ijk} = (ih_x, jh_y, kh_z), \quad h_x, h_y, h_z > 0, \quad i, j, k \in \mathbb{Z},$$

где h_x, h_y, h_z – расстояния между соседними узлами вдоль каждой координатной оси. Триангуляция такого набора точек строится следующим образом. Выбирается ячейка сетки – группа соседних узлов, образующих пространственный параллелепипед

$$P_{ijk}, P_{i+1jk}, P_{i+1j+1k}, P_{ij+1k}, \quad P_{ijk+1}, P_{i+1jk+1}, P_{i+1j+1k+1}, P_{ij+1k+1}.$$

Тогда можно двумя способами осуществить триангуляцию вершин этого параллелепипеда. В первом способе образуется пять тетраэдров с вершинами

$$\begin{aligned} &P_{i+1j+1k}, P_{ij+1k}, P_{ij+1k+1}, P_{ijk+1}, \quad P_{ijk}, P_{i+1jk}, P_{i+1j+1k}, P_{i+1jk+1}, \\ &P_{ij+1k}, P_{i+1j+1k+1}, P_{ij+1k+1}, P_{i+1jk+1}, \\ &P_{ijk}, P_{i+1jk+1}, P_{ij+1k+1}, P_{ijk+1}, \quad P_{ijk}, P_{i+1j+1k}, P_{ij+1k+1}, P_{i+1jk+1}. \end{aligned}$$

Во втором способе строятся тетраэдры с вершинами

$$\begin{aligned} &P_{ijk}, P_{i+1jk}, P_{ij+1k}, P_{ijk+1}, \quad P_{i+1jk}, P_{i+1j+1k}, P_{ij+1k}, P_{i+1j+1k+1}, \\ &P_{i+1jk}, P_{i+1j+1k+1}, P_{i+1jk+1}, P_{ijk+1}, \\ &P_{ijk+1}, P_{i+1j+1k+1}, P_{ij+1k+1}, P_{ij+1k}, \quad P_{ijk+1}, P_{i+1j+1k+1}, P_{i+1jk}, P_{ij+1k}. \end{aligned}$$

Для получения триангуляции всей прямоугольной сетки применяем эти два способа в “шахматном” порядке ко всем ячейкам сетки. В [4] было показано, что при таком выборе способа стремления к нулю величин h_x, h_y, h_z , при котором $h_x h_y / h_z = 1$, для центральных тетраэдров разбиения прямоугольных ячеек будет выполнено $\delta_S(f) \neq 0$. Покажем, что для этих тетраэдров не выполнено условие m -пустой сферы ни при каком m . С этой целью вычислим радиус описанной сферы следующего присоединенного тетраэдра для центрального тетраэдра триангуляции прямоугольной ячейки:

$$P_{ijk}, P_{i+1jk+1}, P_{ij+1k+1}, P_{ijk} - (P_{i+1j+1k} - P_{ijk}).$$

Заметим, что радиус R описанной сферы этого тетраэдра равен

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_y^4}{h_x^2} + \frac{h_x^4}{h_y^2} + \frac{(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^2}{h_z^2}}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задан набор P точек вида

$$P_{ijk} = (ih_x, jh_y, kh_z), \quad h_x, h_y, h_z > 0, \quad i, j, k \in \mathbb{Z},$$

образующих прямоугольную сетку в $\mathbb{R}^3$. Тогда число N точек этого множества, лежащих внутри сферы радиуса $R > 0$ с любым центром, удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned} N &\geq \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_x} - 1 \right) \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_y} - 1 \right) \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_z} - 1 \right), \\ N &\leq \left(\frac{2R}{h_x} + 1 \right) \left(\frac{2R}{h_y} + 1 \right) \left(\frac{2R}{h_z} + 1 \right). \end{aligned} \tag{8}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим на числовой прямой равномерную сетку и пусть $h > 0$ обозначает расстояние между ее соседними узлами. Рассмотрим некоторый отрезок длины $L > 0$ и пусть m – число узлов сетки, находящихся внутри этого отрезка. Поскольку число отрезков длины h , укладываемых в заданный отрезок, есть $m - 1$, то

$$h(m - 1) \leq L.$$

С другой стороны, добавляя еще пару отрезков справа и слева, получим систему отрезков длины h , покрывающих отрезок длины L . Это дает неравенство

$$h(m + 1) \geq L,$$

откуда $L/h - 1 \leq m \leq L/h + 1$. Теперь построим куб, вписанный в заданную сферу радиуса R . Пусть a – длина стороны куба. Ясно, что $a = 2R/\sqrt{3}$. Число точек заданной прямоугольной сетки, попадающих внутрь сферы не меньше, чем число точек, попадающих внутрь этого куба. Поскольку вдоль каждой координатной оси узлов получается не меньше, чем $a/h_x - 1$ для оси Ox , $a/h_y - 1$ для оси Oy и $a/h_z - 1$ для оси Oz , то всего узлов будет не меньше, чем произведение этих чисел

$$N \geq \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_x} - 1 \right) \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_y} - 1 \right) \left(\frac{2R}{\sqrt{3}h_z} - 1 \right).$$

Аналогично, рассматривая описанный куб заданной сферы, доказывается и второе неравенство. Лемма доказана.

Оценим первый множитель в правой части оценки (8). Используя очевидное неравенство $h_x^2 + h_y^2 + h_z^2 \geq h_x h_y + h_y h_z + h_z h_x$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2R}{h_x \sqrt{3}} - 1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{h_y}{h_x} \right)^4 + \left(\frac{h_x}{h_y} \right)^2 + \frac{(h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)^2}{h_z^2 h_x^2}} - 1 \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{h_y}{h_x} \right)^4 + \left(\frac{h_x}{h_y} \right)^2 + \frac{(h_x h_y + h_y h_z + h_z h_x)^2}{h_z^2 h_x^2}} - 1 \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{h_y}{h_x} \right)^4 + \left(\frac{h_x}{h_y} \right)^2 + 1} - 1. \end{aligned}$$

Наконец, воспользовавшись неравенством $y^2 + 1/y \geq 4^{-1/3} + 2^{1/3} > 1$, $y > 0$, можем записать

$$\frac{2R}{h_x \sqrt{3}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Аналогично, выводим оценку

$$\frac{2R}{h_y \sqrt{3}} - 1 \geq \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.$$

Для третьего множителя в (8) имеет место

$$\frac{2R}{h_z \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{h_y^2 h_y^2}{h_z^2 h_x^2} + \frac{h_x^2 h_x^2}{h_z^2 h_y^2} + \left(1 + \frac{h_y^2}{h_z^2} + \frac{h_x^2}{h_z^2} \right)^2}.$$

Если величины $h_x, h_y, h_z \rightarrow 0$, так что $h_x h_y / h_z = 1$, то

$$\frac{2R}{h_z \sqrt{3}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{h_y^2}{h_x^4} + \frac{h_x^2}{h_y^4} + \left(1 + \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right)^2} - 1 \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, объединяя оценки для множителей в (8), получаем, что последовательность построенных триангуаций с $h_x, h_y, h_z \rightarrow 0$, $h_z = h_x h_y$ не удовлетворяет условию m -пустой сферы ни при каком m .

Список литературы

1. А. В. Скворцов, Н. С. Мирза, *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*, Изд. Томск. ун-та, Томск, 2006, 168 с.
2. В. А. Клячин, А. А. Широкий, “Триангуляция Делоне многомерных поверхностей”, *Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер.*, 2010, № 4(78), 51–55.
3. В. А. Клячин, А. А. Широкий, “Триангуляция Делоне многомерных поверхностей и ее аппроксимационные свойства”, *Изв. вузов. Матем.*, 2012, № 1, 31–39; англ. пер.: V. A. Klyachin, A. A. Shirokii, “The Delaunay triangulation for multidimensional surfaces and its approximative properties”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **56**:1 (2012), 27–34.
4. В. А. Клячин, “О многомерном аналоге примера Шварца”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **76**:4 (2012), 41–48; англ. пер.: V. A. Klyachin, “On a multidimensional analogue of the Schwarz example”, *Izv. Math.*, **76**:4 (2012), 681–687.
5. Б. Гелбаум, Дж. Олмстед, *Контрпримеры в анализе*, Изд-во ПЛАТОН, Волгоград, 1997, 252 с.; пер. с англ.: B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted, *Counterexamples in analysis*, The Mathesis Series, Holden-Day, Inc., San Francisco–London–Amsterdam, 1964, xxiv+194 pp.
6. С. Н. Боровиков, И. Э. Иванов, И. А. Крюков, “Моделирование пространственных течений идеального газа с использованием тетраэдральных сеток”, *Матем. моделирование*, **18**:8 (2006), 37–48.
7. С. Н. Боровиков, И. А. Крюков, И. Э. Иванов, “Построение нерегулярных треугольных сеток на криволинейных гранях на основе триангуляции Делоне”, *Матем. моделирование*, **17**:8 (2005), 31–45.
8. P. J. Sun, B. Huang, X. M. Wang, “The design of weldment model based on improved Delaunay triangulation algorithm”, *Applied Mechanics and Materials*, **411–414** (2013), 1414–1418.
9. J. L. Synge, *The hypocircle in mathematical physics: a method for the approximate solution of boundary value problems*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1957, xii+424 pp.
10. P. Jamet, “Estimations d’erreur pour des elements finis droits presque dégénérées”, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle. Analyse Numérique*, **10**:R-1 (1976), 43–60.
11. Ю. Н. Субботин, “Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция”, *Методы аппроксимации и интерполяции*, ВЦН, Новосибирск, 1981, 148–153.
12. Ю. Н. Субботин, “Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 117–137; англ. пер.: Yu. N. Subbotin, “The dependence of estimates of a multidimensional piecewise polynomial approximation on the geometric characteristics of the triangulation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 135–159.
13. J. R. Shewchuk, *What is a good linear element? Interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures*, Department of electrical engineering and computer sciences University of California, Berkeley, CA, 2002, 66 pp., www.cs.berkeley.edu/~jrs/papers/elemj.pdf.

Владимир Александрович Клячин
 (VLADIMIR A. KLYACHIN)
 Волгоградский государственный университет
 E-mail: klchnv@mail.ru

Поступило в редакцию
 02.02.2015
 03.04.2015