Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Ильяшенко, Теоремы конечности для предельных циклов: схема обновленного доказательства, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 1, 55–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 10:23:18

УДК 517.925

Ю. С. Ильяшенко

Теоремы конечности для предельных циклов: схема обновленного доказательства

Настоящая работа является первой из двух частей, в которых излагается дайджест доказательства теоремы конечности для предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости. В то же время даются схемы доказательств еще двух теорем: аналогичного результата для аналитических векторных полей и описания асимптотики преобразования монодромии для сложных циклов таких полей.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: предельные циклы, элементарные сложные циклы, функциональные коцепи, сверхточные асимптотические ряды.

DOI: 10.4213/im8352

Памяти Андрея Болибруха, выдающегося математика и дорогого друга

Введение: от дифференциальных уравнений к комплексному анализу

0.1. Теоремы конечности. Цель настоящей статьи – дать обзор упрощенного и исправленного доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 0.1. *Всякое полиномиальное векторное поле на плоскости имеет не более чем конечное число предельных циклов.*

Первое доказательство было изложено в [1]. Одновременно независимое доказательство было получено Ж. Экалем [2].

Теорема доказывается как частный случай намного более сильного результата.

ТЕОРЕМА 0.2. *Аналитическое векторное поле на замкнутой двумерной поверхности имеет лишь конечное число предельных циклов.*

0.2. Теоремы о ненакоплении. Обе приведенные выше теоремы вытекают из следующего результата.

ТЕОРЕМА 0.3 (теорема о ненакоплении). *Элементарный сложный цикл аналитического векторного поля на двумерной поверхности имеет окрестность, свободную от предельных циклов.*

Напомним, что сложный цикл векторного поля – это сепаратрисный многоугольник с конечным числом вершин, которыми являются особые точки векторного поля, и конечным числом ребер. Для аналитических векторных полей

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-00969).

последнее требование выполнено автоматически. Сложный цикл называется элементарным, если все его особые точки элементарны, т. е. линеаризация векторного поля в каждой из них имеет хотя бы одно ненулевое собственное значение. Теорема о конечности вытекает из теоремы о ненакоплении, сформулированной для произвольного, не обязательно элементарного, сложного цикла. Этот случай общего сложного цикла сводится к случаю элементарного сложного цикла по теореме о разрешении особых точек аналитических векторных полей на плоскости.

Преобразование монодромии сложного цикла определяется так же, как и для обычного цикла, с той лишь разницей, что вместо открытого интервала берется полуинтервал. Удобно рассматривать преобразования монодромии как ростки отображений $(\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$.

ТЕОРЕМА 0.4 (теорема тождественности). *Пусть преобразование монодромии элементарного сложного цикла аналитического векторного поля на двумерной поверхности имеет счетное множество неподвижных точек. Тогда оно тождественно.*

В нашей терминологии счетные множества не могут быть конечными. Теорема тождественности влечет все предыдущие. Именно ее мы схематически доказываем в дальнейшем.

0.3. Асимптотика преобразования монодромии. Основной результат работы не исчерпывается чисто отрицательным утверждением о том, что *предельные циклы аналитического векторного поля никогда не накапливаются к сложному циклу*, но содержит и положительную информацию: описание старшего члена поправки (разницы с тождественным отображением) преобразования монодромии для сложных циклов аналитического векторного поля на плоскости. Грубая формулировка этого результата такова. Пусть $x \in (\mathbb{R}^+, 0)$ – “естественная” карта на полутрансверсали, а $\xi \in (\mathbb{R}^+, \infty) = -\ln x$ – “логарифмическая” карта на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Обозначим через $[n]$ итерационную степень:

$$f^{[n]} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ раз}}.$$

Символ $\prec$ означает “ $<$ в некоторой окрестности бесконечности”.

ТЕОРЕМА 0.5 (теорема об асимптотике). *Пусть сложный цикл аналитического векторного поля на плоскости такой, что его преобразование монодромии Δ не тождественно. Тогда найдутся два положительных числа $\mu < \nu$ и неотрицательное целое число n такие, что в логарифмической карте*

$$\exp(-\exp^{[n]} \nu \xi) \prec |\Delta(\xi) - \xi| \prec \exp(-\exp^{[n]} \mu \xi). \quad (1)$$

При этом для любых положительных $\mu < \nu$ и неотрицательного целого n существует сложный цикл аналитического векторного поля, преобразование монодромии которого удовлетворяет неравенствам (1).

Вторая часть этой теоремы довольно простая и доказывается в п. 1.1. Из первой части очевидно вытекает теорема тождественности, а сама она выводится из аддитивной теоремы о разложении, сформулированной ниже и схематически доказываемой в п. 1.8.4 по модулю некоторых вспомогательных результатов.

Если преобразование монодромии, записанное в логарифмической карте, удовлетворяет неравенствам (1) при $n > 0$, то в естественной карте оно имеет плоскую поправку. В аналитическом случае эта поправка может убывать как башня экспонент произвольной высоты. Вопрос в том, имеет ли это место в полиномиальном случае.

ПРОБЛЕМА 0.1. *Может ли преобразование монодромии сложного цикла полиномиального векторного поля иметь ненулевую плоскую поправку?*

Ожидаемый ответ “нет”, но совершенно не ясно, как можно было бы его доказать.

0.4. Сведение к элементарным сложным циклам. Известная теорема Бендиксона–Зайденберга–Лефшеца–Дюмортье о разрешении особенностей [3]–[5] позволяет свести доказательство теоремы единственности для произвольных сложных циклов к случаю элементарных сложных циклов. Элементарный сложный цикл, допускающий преобразование монодромии, может иметь особые точки только двух типов: седла и седлоузлы. Преобразование монодромии такого сложного цикла является композицией так называемых отображений соответствия (или отображений Дюлака), отвечающих этим особым точкам. Напомним, что отображение соответствия для гиперболического сектора седла или седлоузла – это отображение трансверсали к входящей сепаратрисе на трансверсаль к исходящей сепаратрисе вдоль траекторий векторного поля.

Гладкое описание этих отображений было дано А. Дюлаком в его знаменитом мемуаре [6]. Аналитическое описание было получено лишь в начале 1980-х гг. Оно излагается в п. 0.5 и п. 0.6.

0.5. Отображения соответствия для гиперболических сёдел и преобразование монодромии для гиперболических сложных циклов. В этом пункте приведены результаты работы [7].

0.5.1. Почти регулярные ростки. В гиперболическом случае отображения соответствия, записанные в логарифмической карте, продолжаются в области, аналогичные полуплоскостям и называемые квадратичными стандартными областями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. *Квадратичная стандартная область* – это любая область вида

$$\Omega_C = \varphi_C(\mathbb{C}^+ \setminus K), \quad \varphi_C(\zeta) = \zeta + C(\zeta + 1)^{1/2}, \quad C > 0, \quad K = \{|\zeta| \leq R\}.$$

Здесь $\mathbb{C}^+$ – правая полуплоскость $\xi \geq 0$, где $\zeta = \xi + i\eta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. *Экспоненциальный ряд Дюлака* – это формальный ряд вида

$$\Sigma = \nu_0 \zeta + c + \sum P_j(\zeta) \exp \nu_j \zeta,$$

где $\nu_0 > 0$, $0 > \nu_j \searrow -\infty$, а P_j – вещественные полиномы; стрелка $\searrow$ означает монотонно убывающую сходимоть.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. *Почти регулярное отображение* – это голоморфное отображение некоторой квадратичной стандартной области Ω в $\mathbb{C}$, вещественное на $\mathbb{R}^+$ и разложимое в этой области в асимптотический вещественный экспоненциальный ряд Дюлака. Разложимость означает, что для каждого $\nu > 0$

существует частная сумма, приближающая данное отображение с точностью $o(\exp(-\nu\xi))$ в Ω . Класс всех почти регулярных ростков на бесконечности обозначается через $\mathcal{R}$.

ТЕОРЕМА 0.6. *Отображение соответствия для гиперболического седла, записанное в логарифмической карте, продолжается до почти регулярного отображения некоторой квадратичной области.*

0.5.2. Теорема Фрагмена–Линделёфа для почти регулярных ростков. Почти регулярные ростки нельзя аналитически продолжить в полную окрестность бесконечности. Тем не менее они полностью определяются своим асимптотическим рядом на бесконечности.

ТЕОРЕМА 0.7 (теорема Фрагмена–Линделёфа для почти регулярных ростков). *Почти регулярный росток, убывающий на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты, тождественно равен нулю.*

Отсюда вытекает, что два почти регулярных ростка с одинаковыми асимптотическими рядами Дюлака совпадают. Действительно, их разность убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты.

0.5.3. Теорема тождественности для гиперболических сложных циклов.

ТЕОРЕМА 0.8. *Если преобразование монодромии гиперболического сложного цикла имеет бесконечное множество неподвижных точек, то оно тождественно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование монодромии является композицией почти регулярных ростков. Легко вывести прямо из определения, что такая композиция также почти регулярна.

Допустим, что она имеет нетривиальный (т. е. отличный от тождественного) ряд Дюлака. Члены этого ряда не осциллируют и имеют разные порядки убывания. Поэтому соответствующий росток не имеет неподвижных точек вблизи бесконечности.

Допустим теперь, что ряд Дюлака преобразования монодромии сводится к тождественному отображению. Тогда и само преобразование монодромии тождественно, так как оно однозначно определяется своим рядом Дюлака. Теорема 0.8 доказана.

Доказательство общей теоремы тождественности проходит по той же схеме. Мы установим, что преобразование монодромии обладает свойствами *регулярности* и *разложимости*. Разложимость означает существование так называемого *сверхточного асимптотического ряда* для преобразования монодромии. Члены этого ряда не осциллируют. Если он отличен от тождественного, то преобразование монодромии не имеет неподвижных точек вблизи бесконечности. Если он тождественен, то и само преобразование монодромии тождественно по свойству регулярности.

Это описание лишь приблизительное. Для точного описания требуется больше деталей. Но это приблизительное описание позволяет понять основную идею приведенного ниже доказательства. Теорема 0.5 показывает, что точное описание преобразования монодромии не может быть столь простым.

0.6. Отображения соответствия для седлоузлов.

0.6.1. *Формальные нормальные формы для седлоузлов и их отображения соответствия.* Росток голоморфного векторного поля в изолированной вырожденной элементарной особой точке формально орбитально эквивалентен ростку

$$\dot{z} = z^{k+1}(1 + az^k)^{-1}, \quad \dot{w} = -w. \quad (2)$$

Здесь $k+1$ – кратность особой точки, a – константа, которая вещественна, если исходный росток был вещественным. Для формальной нормальной формы многообразие $z = 0$ – сжимающееся (в другой терминологии устойчивое), а многообразие $w = 0$ – центральное. Отображение соответствия произвольной полутрансверсали к первому многообразию на полутрансверсаль ко второму (короче, отображение К центральному многообразию) для нормализованной системы обозначается через Δ_{st} и имеет легко вычисляемый вид:

$$\Delta_{\text{st}} = C \exp\left(-\frac{1}{h_{k,a}(z)}\right), \quad \text{где } h_{k,a}(z) = \frac{kz^k}{1 - akz^k \ln z}, \quad C = \exp \frac{1}{k}.$$

Множители такого вида вносят экспоненциально малые члены в асимптотическое разложение преобразования монодромии.

0.6.2. *Параболические ростки и нормализующие коцепи.* Комплексифицированный росток вещественного голоморфного векторного поля в изолированной вырожденной элементарной особой точке всегда имеет одномерное голоморфное инвариантное многообразие, являющееся сжимающимся после надлежащей замены времени, и, как правило, не имеет голоморфного центрального многообразия. Сжимающемуся многообразию отвечает преобразование монодромии следующего вида (после надлежащей замены масштаба с положительным коэффициентом):

$$f: z \mapsto z - 2\pi iz^{k+1} + \dots \quad (3)$$

Это преобразование – так называемый *параболический росток* (росток, линейная часть которого тождественна в естественной карте). Оно формально эквивалентно сдвигу за время $(-2\pi i)$ вдоль траекторий векторного поля $v(z) = z^{k+1}/(1 + az^k)$. Здесь k и a – те же, что и в формальной орбитальной нормальной форме ростка. Соответствующие нормализующие формальные ряды, как правило, расходятся, но они являются асимптотическими рядами для так называемых нормализующих коцепей, к определению которых мы сейчас и перейдем. Сначала отметим, что речь идет о функциональных коцепях и их ростках. Функциональные коцепи в областях – объект, возникающий на самых первых этапах определения когомологий Чеха. Функциональная коцепь возникает, когда задана область и ее разбиение, и представляет собой набор голоморфных функций (называемых компонентами коцепи), находящихся во взаимно-однозначном соответствии с областями разбиения, причем каждая функция голоморфна в соответствующей ей области. Росток функциональной коцепи в точке – это набор ростков ее компонент в этой точке (которая обычно является граничной точкой для всех областей разбиения). Условия на область и на разбиение задаются отдельно в каждом частном случае.

Хорошим k -разбиением проколотого круга с центром в нуле называется его разбиение на $2k$ равных секторов с вершиной в нуле, граничный луч одного из которых лежит на вещественной оси.

ТЕОРЕМА 0.9 (о секториальной нормализации [8], [9]). Для произвольного параболического роста (3) (не обязательно преобразования монодромии) существует круг D с центром в нуле и набор голоморфных функций, называемый нормализующей коцепью, со следующими свойствами.

1. Функции набора находятся в биективном соответствии с секторами хорошего k -разбиения проколотого круга D ; каждая функция определена в соответствующем ей секторе.

2. Каждая функция набора продолжается биголоморфно в сектор S_j с той же биссектрисой и некоторым большим раствором $\alpha \in (\pi/k, 2\pi/k)$; радиус этого сектора зависит от α .

3. Все функции набора имеют общий асимптотический ряд Тейлора в нуле с тождественной линейной частью.

4. На пересечениях соответствующих секторов функции набора отличаются на $o(\exp(-c/z^k))$ для некоторого $c > 0$.

5. Каждая из функций набора сопрягает росток (3) в секторе S_j со сдвигом за время $-2\pi i$ вдоль траекторий векторного поля $v(z)$.

Существует единственная нормализующая коцепь, поправка которой убывает быстрее, чем поправка роста (3), т. е. коцепь вида $\text{id} + o(z^{k+1})$.

Напомним, что поправка функции или коцепи – это разность между функцией (коцепью) и тождественным отображением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.4. Множество всех нормализующих коцепей, описанных в предыдущей теореме и нижеследующем дополнении к ней, обозначается через NC (от normalizing cochains); множество отображений набора, отвечающих сектору, примыкающему сверху (соответственно снизу) к $(\mathbb{R}^+, 0)$, обозначается через NC^u (u – от upper) (соответственно NC^l (l – от lower)).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.5. Аддитивная кограница нормализующей коцепи – это множество разностей ее компонент, определенных в ростках узких секторов в нуле, содержащих лучи хорошего разбиения; уменьшаемое отвечает области, находящейся слева от луча. Композиционная кограница нормализующей коцепи – это множество композиционных частных ее компонент, определенных в тех же секторах; числитель отвечает области, находящейся слева от луча. В дальнейшем под кограницей понимается аддитивная кограница.

Следующий результат также известен, он содержится “между строк” в [8] и [9]. Для его формулировки введем следующие обозначения:

$$\Pi = \left\{ \xi \geq a, |\eta| \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \quad \Pi_*^{(\varepsilon)} = \Phi_{1-\varepsilon} \Pi, \quad \Pi_*^{(0)} = \Pi_*, \quad (4)$$

$$\Phi_{1-\varepsilon} = \zeta + (1-\varepsilon)\zeta^{-2}, \quad \varepsilon \in [0, 1)$$

(см. рис. 1). Области $\Pi_*^{(\varepsilon)}$ упорядочены по включению: $\Pi_*^{(\varepsilon)} \subset \Pi_*^{(\varepsilon')}$ при $\varepsilon < \varepsilon'$. Область $\Pi_*^{(\varepsilon)}$ называется обобщенной ε -окрестностью криволинейной полуполосы Π_* .

ТЕОРЕМА 0.10. Функция набора, образующего нормализующую коцепь, голоморфно продолжается в область, более широкую, чем сектор S_j . Для сектора S^u (соответственно S^l), примыкающего сверху (соответственно снизу) к положительной полусоси в хорошем k -разбиении, эта область имеет вид $k^{-1}\Pi_*^{(\varepsilon)}$ в логарифмической карте $\zeta = -\ln z$.

Асимптотическое разложение в ряд Тейлора для NC^u продолжается в ту же область. То же самое справедливо для S^l и NC^l .

Аналогичный результат верен и для остальных функций набора. Отображение, соответствующее сектору S^u (S^l) в нормализующей коцепи, обозначается через F_{norm}^u (соответственно F_{norm}^l).

Рис. 1

Следующие обозначения будут использоваться всегда, когда речь идет о логарифмической карте:

$$\zeta = -\ln z, \quad \xi = \operatorname{Re} \zeta, \quad x = \operatorname{Re} z, \quad \xi = -\ln x, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Теперь все готово для описания отображения соответствия для седлоузлов.

0.6.3. Отображения соответствия. Напомним, что отображения соответствия определены в первом абзаце п. 0.4.

ТЕОРЕМА 0.11 (см. [10], [11]). *Отображение соответствия $\Delta: (\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$ к центральному многообразию вырожденной элементарной особой точки вещественно-аналитического векторного поля равно сужению на $(\mathbb{R}^+, 0)$ любой из двух композиций*

$$\Delta = g^u \circ \Delta_{\text{st}} \circ F_{\text{norm}}^u = g^l \circ \Delta_{\text{st}} \circ F_{\text{norm}}^l,$$

где F_{norm} – нормализующее отображение-коцепь (см. теорему о секториальной нормализации) для соответствующего преобразования монодромии; F_{norm}^u (соответственно F_{norm}^l) – отображение из набора F_{norm} , которое определено в секторе S^u (соответственно S^l), примыкающем сверху (соответственно снизу) к лучу $(\mathbb{R}^+, 0)$; отображение Δ_{st} было определено в начале пункта, а ростки g^u , g^l голоморфны в своей неподвижной точке нуль. Мультипликаторы $(g^u(0))'$ и $(g^l(0))'$ положительны.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.1. Важно, что отображения F_{norm}^u , F_{norm}^l из этой теоремы, записанные в логарифмической карте, продолжают как в теореме 0.10.

Отображения, описанные в теореме 0.11, по определению образуют класс ТО (иногда по-русски К). Обратные отображения образуют класс FROM (иногда по-русски ОТ).

0.7. Структурные теоремы для преобразований монодромии.

0.7.1. Предварительная структурная теорема.

ТЕОРЕМА 0.12. *Преобразование монодромии сложного цикла является конечной композицией почти регулярных отображений и отображений классов TO и FROM.*

Эта композиция называется *композицией Дюлака* данного преобразования монодромии. Для таких композиций ниже будет доказана теорема тождественности.

0.7.2. Характеристика композиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.6. Элементарный сложный цикл называется *уравновешенным*, если количество отображений ОТ центрального многообразия в разложении Дюлака его преобразования монодромии равно количеству отображений К центральному многообразию. В противном случае цикл называется *неуравновешенным*.

Для описания композиции Дюлака

$$\Delta = \Delta_N \circ \dots \circ \Delta_1, \quad (5)$$

состоящей из N сомножителей, полезна функция χ , называемая *характеристикой* этой композиции и определяемая на $[-N, 0]$ следующим образом. Функция χ непрерывна и линейна на каждом замкнутом отрезке между двумя последовательными целыми числами, $\chi(0) = 0$. Если отображение Δ_j изучаемой композиции соответствует гиперболической особой точке, то $\chi(-j) = \chi(-j + 1)$. В этом случае скажем, что отображение Δ_j *находится на уровне* $l = \chi(-j)$ в композиции (5).

Если Δ_j – отображение ОТ центрального многообразия, то

$$\chi(-j) = \chi(-j + 1) + 1.$$

Если Δ_j – отображение К центральному многообразию, то

$$\chi(-j) = \chi(-j + 1) - 1.$$

В этих случаях скажем, что Δ_j *находится между уровнями* $l = \chi(-j)$ и $l - 1 = \chi(-j) - 1$ (соответственно между уровнями $l = \chi(-j)$ и $l + 1 = \chi(-j) + 1$) в композиции (5).

Ясно, что сложный цикл γ уравновешен тогда и только тогда, когда $\chi(0) = \chi(-N) = 0$. Характеристика уравновешенного сложного цикла определена однозначно с точностью до аддитивной константы и “циклического сдвига аргумента”: $j \rightarrow j + k \pmod{N}$, причем и то и другое зависит от выбора полутрансверсали.

ПРИМЕР 0.1. Рассмотрим композицию (5) с $N = 7$, где

$$\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5 \in \mathcal{R}, \quad \Delta_2, \Delta_4 \in \text{TO}, \quad \Delta_6, \Delta_7 \in \text{FROM}.$$

Тогда $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_5$ находятся на уровнях 0, 1, 2 соответственно, Δ_2, Δ_7 – между уровнями 0 и 1, а Δ_4, Δ_6 – между уровнями 1 и 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.7. Полутрансверсаль к уравновешенному сложному циклу называется *правильно выбранной*, если характеристика разложения Дюлака соответствующего преобразования монодромии неположительна.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.2. Для уравновешенного сложного цикла правильный выбор полутрансверсали всегда возможен. Он соответствует некоторой циклической перестановке сомножителей разложения Дюлака.

ЛЕММА 0.1 (А. Дюлак [6]). *При надлежащем выборе полутрансверсали преобразование монодромии для неуравновешенного сложного цикла является либо плоским, либо вертикальным (т. е. обратным к плоскому).*

Теорема о ненакоплении очевидна для неуравновешенных сложных циклов. В дальнейшем рассматриваются только уравновешенные сложные циклы.

0.7.3. Класс преобразования монодромии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.8. *Классом разложения Дюлака* преобразования монодромии Δ для уравновешенного сложного цикла называется колебание соответствующей характеристической функции χ_Δ :

$$\text{класс } \Delta = -\min \chi_\Delta$$

при условии, что полутрансверсаль правильно выбрана, т. е. $\chi_\Delta \leq 0$.

Класс композиции – это главный параметр, по которому проводится индукция на протяжении всего доказательства. Он обозначается через n . При $n = 0$ сложный цикл гиперболичен, и теорема конечности для таких сложных циклов уже доказана выше. Это составляет базу индукции. Доказательство для $n > 0$ осуществляется индукцией по n . Весь дальнейший материал описывает шаг индукции от $n - 1$ к n .

Прежде чем двигаться дальше, обсудим два подхода к теории функциональных коцепей и докажем простейшую версию теоремы Фрагмена–Линделёфа для них. Эта теорема показывает, что функциональная коцепь представляет собой единое целое, а не разрозненный набор компонент.

0.8. Когомологический подход и классический подход. Коцепи класса NC из определения 0.4 рассматриваются как наборы функций, жестко привязанных к областям соответствующего хорошего покрытия. Нормализующие коцепи возникли почти одновременно в статье С. М. Воронина [8] и докладе Б. Мальгранжа на семинаре Бурбаки в 1981 г. Обе работы были посвящены аналитической классификации параболических ростков отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Два таких ростка считаются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них можно преобразовать в другой ростком аналитической замены координат $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Модулями в этой классификации являются, грубо говоря, композиционные кограницы нормализующих коцепей. В работе Воронина кограница понимается так же, как в определении 0.5 выше: это набор функций в узких секторах, содержащих лучи соответствующего хорошего разбиения. В работе Мальгранжа она трактуется как элемент некоторой группы когомологий, а никакого разбиения заранее не фиксируется.

Для нашего подхода рассмотрение фиксированных разбиений – один из ключевых моментов. Нормализующая коцепь, как и другие вводимые ниже функциональные коцепи, является единым целым. Например, коцепь класса NC

полностью определяется своей компонентой NC^u . Это вытекает из приводимой ниже теоремы Фрагмена–Линделёфа. В ее формулировке участвует логарифмическая карта, к описанию которой мы и обратимся.

0.9. Переход к логарифмической карте. Полутрансверсаль к элементарному сложному циклу всегда можно выбрать лежащей на некоторой аналитической трансверсали (открытом интервале, трансверсальном к полю). Карта на полутрансверсали, равная нулю в ее вершине и аналитически продолжимая на трансверсаль, называется *естественной*; ее логарифм со знаком минус называется *логарифмической картой*. Естественная карта обозначается через x , а соответствующая ей логарифмическая карта – через ξ ; функция перехода имеет вид $\xi = -\ln x$. В естественной карте преобразование монодромии сложного цикла является ростком отображения $(\mathbb{R}^+, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^+, 0)$, а в логарифмической карте – ростком отображения $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$. Для выхода в комплексную область используются обозначения $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$. Переход к логарифмической карте обозначается навешиванием волны: если функция f представляет некоторое отображение в естественной карте, то $\tilde{f}$ представляет то же отображение в логарифмической карте.

Таблица 1 содержит примеры отображений, постоянно используемых в дальнейшем.

ТАБЛИЦА 1

	Отображение в естественной карте	То же отображение в логарифмической карте
1	Степень: $z \mapsto Cz^\nu$	Аффинное: $\zeta \mapsto \nu\zeta - \ln C$
2	Стандартное плоское: $z \mapsto \exp(-1/z)$	Экспонента: $\zeta \mapsto \exp \zeta$
3	Отображение, заданное в секторе с вершиной 0 и разложимое в сходящийся или асимптотический ряд Тейлора $\tilde{f} = z(1 + \sum_1^\infty a_j z^j)$	Отображение, заданное в горизонтальной полуполосе и разложимое в сходящийся или асимптотический (экспоненциальный) ряд Дюлака $\tilde{f} = \zeta + \sum_1^\infty b_j \exp(-j\zeta)$
4	$h_{k,a}: z \mapsto kz^k(1 - az^{-k} \ln z)^{-1}$	$\tilde{h}_{k,a}: \zeta \mapsto k\zeta - \ln k - \ln(1 - a\zeta \exp(-k\zeta))$
5	Почти регулярное отображение с асимптотическим рядом Дюлака в нуле $z \mapsto Cz^\nu + \sum P_j(z)z^{\nu_j}$, где $C > 0$, $\nu > 0$, $0 < \nu_j \nearrow \infty$, а P_j – вещественные полиномы	Почти регулярное отображение с асимптотическим экспоненциальным рядом Дюлака на бесконечности $\zeta \mapsto \nu\zeta - \ln C + \sum Q_j(\zeta) \cdot \exp(-\mu_j\zeta)$ где $C > 0$, $\nu > 0$, $0 < \mu_j \nearrow \infty$, а Q_j – вещественные полиномы

Самый важный пример – это запись нормализующей коцепи в логарифмической карте. При переходе к логарифмической карте она становится отображением-коцепью, определенным на полуплоскости $\mathbb{C}_a^+ : \xi \geq a$, где a зависит от коцепи.

Хорошее k -разбиение проколотого круга на секторы становится разбиением $\mathbb{C}_a^+$ на полуполосы лучами $\eta = \pi t/k$, $t \in \mathbb{Z}$. Множество всех нормализующих коцепей, записанных в логарифмической карте и соответствующих

этому разбиению, обозначается через $\mathcal{NC}_k$. Аддитивная кограница δF коцепи F – это множество попарных разностей компонент коцепи, определенных на полуполосах с общим граничным лучом; уменьшаемое соответствует верхней полуполосе.

Обозначим через a_k аффинное отображение $\zeta \mapsto k\zeta - \ln k$ и положим

$$\mathcal{NC}_0 = \bigcup_k a_k \circ \mathcal{NC}_k \circ a_k^{-1}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.9. *Стандартным разбиением Ξ_{st} называется разбиение области из $\mathbb{C}$ лучами $\eta = \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$. Пересечение полосы $\eta \in [\pi(j-1), \pi j]$ с этой областью обозначается через Π_j .*

Все коцепи класса $\mathcal{NC}_0$ отвечают стандартному разбиению полуплоскости $\mathbb{C}_a^+$ (a зависит от коцепи $F \in \mathcal{NC}_0$). Полуполосы Π_0 и Π_1 , примыкающие к $(\mathcal{R}^+, \infty)$, называются *главными*. В дальнейшем нам потребуется продолжение отображения из нормализующей коцепи, соответствующего главной полуполосе стандартного разбиения, в криволинейную полуполосу, близкую к правой полуполосе $|\eta| \leq \pi/2$. Существование такого продолжения следует из теоремы 0.10.

Отсюда вытекает, что коцепи класса $\mathcal{NC}_0$ обладают следующими свойствами.

1. Каждая коцепь $F \in \mathcal{NC}_0$ отвечает стандартному разбиению некоторой правой полуплоскости $\mathbb{C}_a^+$, где a зависит от F .
2. Все отображения коцепи продолжаются в ε -окрестности соответствующих им полуполос при некотором $\varepsilon > 0$. Отображения коцепи, соответствующие главным полуполосам Π_0 и Π_1 стандартного разбиения, продолжаются голоморфно в росток на бесконечности полуполосы $\Pi_*^{(\varepsilon)}$ при любом $\varepsilon > 0$ (см. (4)), причем поправка продолженного отображения оценивается сверху некоторой убывающей экспонентой.
3. Поправки всех отображений коцепи, продолженных как в предыдущем свойстве, оцениваются по модулю сверху некоторой убывающей экспонентой $\exp(-\mu\xi)$, где $\mu > 0$ – одно и то же для всех отображений, составляющих F .
4. Аддитивная кограница δF в ε -окрестностях всех лучей разбиения оценивается сверху итерированной экспонентой:

$$|\delta F| < \exp(-C \exp \xi) \quad (6)$$

для некоторого $C > 0$.

5. Коцепь F можно разложить в асимптотический экспоненциальный ряд Дюлака в ее области определения, учитывая продолжение компонент, упомянутое в свойстве 2. Это означает, что частные суммы ряда приближают все компоненты коцепи равномерно на областях, описанных в свойстве 2, с точностью $\exp(-\nu \exp \xi)$ для любого $\nu > 0$.

В дальнейшем используются эти и только эти свойства коцепей класса $\mathcal{NC}_0$. Обозначим множество всех коцепей, обладающих этими свойствами, через $\mathcal{NC}$. Теперь мы можем сформулировать простейшую версию теоремы Фрагмена–Линделёфа для функциональных коцепей. Как отмечалось выше, из нее вытекает, что функциональная коцепь – единое целое.

0.10. Теорема Фрагмена–Линделёфа для коцепей класса $\mathcal{NC}$.

ТЕОРЕМА 0.13. *Коцепь класса $\mathcal{NC}$, убывающая на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты, тождественно равна 0.*

Заметим, что голоморфная функция в произвольной горизонтальной полосе $|\eta| < a$ может убывать на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее, чем любая экспонента, и быть при этом отличной от нуля.

Начнем с классических версий теоремы Фрагмена–Линделёфа.

0.10.1. Классические теоремы Фрагмена–Линделёфа и их модификации.

ТЕОРЕМА 0.14. *Пусть область $\mathcal{D}$ на сфере Римана односвязна и ее граница содержит точку ∞ . Пусть функция f голоморфна в $\mathcal{D}$ и ограничена и непрерывна на замыкании области $\mathcal{D}$, взятом в топологии $\mathbb{C}$ и не содержащем ∞ . Тогда*

$$\sup_{\mathcal{D}} |f| = \sup_{\partial \mathcal{D}} |f|.$$

Эта теорема – вариант принципа максимума модуля для голоморфных функций.

ТЕОРЕМА 0.15. *Пусть голоморфная функция $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}^+$ ограничена на объединении мнимой оси и положительной полуоси и возрастает не быстрее экспоненты от модуля: существует $\nu > 0$ такое, что $|f(\zeta)| < \exp \nu |\zeta|$. Тогда f ограничена и $\sup_{\mathbb{C}^+} |f| = \sup_{\partial \mathbb{C}^+} |f|$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что f удовлетворяет принципу максимума в каждом из секторов S_1, S_2 , где S_1 – первая координатная четверть, а S_2 – четвертая. Рассмотрим сектор S_1 и семейство барьерных функций g_ε , голоморфных в S_1 и по модулю больших, чем $\exp c|\zeta|^{1+\delta}$ для некоторых $c > 0$ и $\delta > 0$. Например,

$$g_\varepsilon(\zeta) = \exp \varepsilon (\beta \zeta)^{1+\delta}, \quad \beta = e^{i\pi/4}.$$

При любом положительном значении параметра ε частное f/g_ε ограничено в S_1 и по теореме 0.14

$$\sup_{S_1} \left| \frac{f}{g_\varepsilon} \right| = \sup_{\partial S_1} \left| \frac{f}{g_\varepsilon} \right|.$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что f ограничена в S_1 . Аналогично, f ограничена в S_2 и, следовательно, в $\mathbb{C}^+$. Применяя еще раз теорему 0.14, получаем теорему 0.15.

СЛЕДСТВИЕ 0.1. *Если голоморфная функция $f: \mathbb{C}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ограничена и убывает на $\mathbb{R}^+$ быстрее любой экспоненты $\exp(-\nu \xi)$, $\nu > 0$, то $f \equiv 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $f \exp \lambda \zeta$ удовлетворяет условиям теоремы 0.15 при любом $\lambda > 0$. Поскольку $|\exp \lambda \zeta| = 1$ на $\partial \mathbb{C}^+$, отсюда вытекает, что

$$\sup_{\mathbb{C}^+} |f(\zeta)| |\exp \lambda \zeta| \leq \sup_{\partial \mathbb{C}^+} |f|.$$

Допустим, что существует точка $\zeta: \operatorname{Re} \zeta > 0$, $f(\zeta) \neq 0$. Тогда $f(\zeta) \exp \lambda \zeta \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$, противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 0.3. Мы включили эти доказательства потому, что они дают образец для последующих доказательств.

Следующий результат легко выводится из предыдущих и будет применяться в дальнейшем.

СЛЕДСТВИЕ 0.2. Пусть Ω – подобласть в $\mathbb{C}$, содержащая луч $\mathbb{R}_a^+ : \xi > a$ для некоторого $a > 0$, причем существует конформное отображение $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^+$, переводящее росток луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$ в кривую (Γ, ∞) , росток которой на бесконечности содержится в некотором секторе $S_\alpha := \{|\arg \zeta| < \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi/2)$. Допустим, что голоморфная функция $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ возрастает не быстрее, чем $\exp \nu |\psi|$ для некоторого $\nu > 0$, и что f ограничена на $\partial\Omega$ и на $\mathbb{R}_a^+$. Тогда f ограничена на Ω и

$$\sup_{\Omega} |f| = \sup_{\partial\Omega} |f|.$$

Если при этом f убывает на $\mathbb{R}_a^+$ быстрее, чем $\exp(-\lambda \operatorname{Re} \psi)$ для всех $\lambda > 0$, то $f \equiv 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 0.13.

0.10.2. Тривиализация коцикла. В этом подпункте делается первый шаг доказательства теоремы 0.13. А именно, для любой функциональной коцепи класса $\mathcal{NC}$ будет найдена “малая” коцепь с той же кограницей. Отсюда вытекает, что разность этих двух коцепей – голоморфная функция.

Пусть Ω – квадратичная стандартная область, Ξ^ε – стандартное разбиение области Ω^ε , а $\partial\Xi^\varepsilon$ – его граница.

ЛЕММА 0.2. Пусть F – ε -продолжимая коцепь класса $\mathcal{NC}$, определенная в ε -окрестности Ω^ε некоторой квадратичной стандартной области. Допустим, что ее кограница в ε -окрестности границы стандартного разбиения оценивается сверху итерированной экспонентой $m = \exp(-C \exp \xi)$ (см. (6)) такой, что

$$m_0 = \sup_{\Omega^\varepsilon} m, \quad \int_{\partial\Xi^\varepsilon} m \, ds = I < \infty.$$

Тогда существует ε -продолжимая функциональная коцепь Φ , определенная на Ω и такая, что

$$\delta F = \delta \Phi \quad \text{на} \quad \partial\Xi, \quad \max_{\Omega} |\Phi| \leq C \varepsilon^{-1} (m_0 + I),$$

где C – константа, не зависящая от F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Ξ и $\partial\Xi^\varepsilon$ – те же, что в начале этого подпункта. Определим коцепь Φ интегралом типа Коши:

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Xi^\varepsilon} \frac{\delta F(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau.$$

По хорошо известной теореме комплексного анализа (см., например, [12]) $\delta F = \delta \Phi$; когда мы вычисляем кограницы δF и $\delta \Phi$ на каком-либо граничном луче, то уменьшаемое отвечает области над лучом, а вычитаемое – под лучом. Оценим теперь коцепь F сверху в области Ω .

1) Пусть $\operatorname{dist}(\zeta, \partial\Xi^\varepsilon) \geq \varepsilon$. Тогда $|\Phi(\zeta)| \leq \varepsilon^{-1} I$.

2) Пусть $\text{dist}(\zeta, \partial\Xi^\varepsilon) < \varepsilon$ и ζ принадлежит области $\mathcal{D}$ разбиения Ξ . Тогда круг K с центром ζ и радиусом ε лежит в ε -окрестности области $\mathcal{D}$. Заменяем интеграл по хорде круга в формуле для Φ интегралом по дуге круга K , имеющей те же концевые точки, что и хорда, причем эта дуга и точка ζ разделены хордой. Интеграл по дуге ограничен сверху константой $2\pi m_0/\varepsilon$, а интеграл по остальной части контура – константой I/ε .

Коцепь Φ из этой леммы называется *тривиализацией коцикла* δF .

0.10.3. Принцип максимума модуля для функциональных коцепей.

ЛЕММА 0.3 (принцип максимума модуля для класса $\mathcal{NC}$). *В предположении леммы 0.2 допустим, что функциональная коцепь F растет не быстрее, чем $\exp \nu \xi$ для некоторого $\nu > 0$ и ограничена на $\partial\Omega$ и на $\mathbb{R}^+$. Тогда F ограничена на Ω и*

$$\sup_{\Omega} |F| \leq \sup_{\partial\Omega} |F| + 2C\varepsilon^{-1}(m_0 + I),$$

где ε, m_0, I, C – те же, что в предыдущей лемме.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Φ – тривиализация коцикла δF , полученная в предыдущей лемме. Тогда разность $F - \Phi$ – голоморфная функция на Ω , удовлетворяющая условиям следствия 0.2. Следовательно,

$$\sup_{\Omega} |F| \leq \sup_{\Omega} |F - \Phi| + \sup_{\Omega} |\Phi| \leq \sup_{\partial\Omega} |F| + 2 \sup_{\Omega} |\Phi|.$$

Из оценки $|\Phi|$ в предыдущей лемме вытекает требуемая оценка.

0.10.4. Предварительная оценка и окончание доказательства теоремы Фрагмена–Линделёфа для коцепей класса $\mathcal{NC}$.

ЛЕММА 0.4 (предварительная оценка для коцепей класса $\mathcal{NC}$). *Пусть F – коцепь класса $\mathcal{NC}$, убывающая на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты. Тогда в полосе $\Pi_0 \cup \Pi_1$ выполнено неравенство*

$$|F(\zeta)| \leq \exp(-C \exp \xi)$$

для некоторого $C > 0$, не зависящего от ζ .

Теорема Фрагмена–Линделёфа для класса $\mathcal{NC}$ утверждает, что в предположениях леммы 0.4 имеем $F \equiv 0$. Ее легко вывести из этой леммы, что и будет сделано в конце настоящего подпункта. Ниже мы используем “универсальную константу” C , которая может принимать разные значения в разных неравенствах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 0.4. Не теряя общности, можно считать, что $|F| \leq 1$ на Ω^ε , где Ω^ε означает ε -окрестность квадратичной стандартной области Ω . Действительно, по свойству 3 из определения класса $\mathcal{NC}$ все компоненты F_j коцепи F удовлетворяют равномерной оценке $|F_j| \leq C|\zeta|$ на Ω^ε . Поэтому коцепь $F \exp(-\zeta)$ ограничена на Ω^ε . Умножая последнее произведение на надлежащую константу, получаем такую коцепь F_1 , что $|F_1| \leq 1$ на Ω^ε . В дальнейшем индекс 1 будет опускаться.

Пусть $\psi: \Omega \rightarrow (\mathbb{C}^+, \infty)$ – конформное отображение. Для достаточно большого $a \in \mathbb{R}^+$ обозначим через Ω_a следующую область:

$$\Omega_a = \{\zeta \mid \text{Re } \psi(\zeta) \geq \text{Re } \psi(a)\}.$$

Заметим, что отображение ψ вещественно на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ и, в частности, $\operatorname{Re} \psi(a) = \psi(a)$.

Рассмотрим коцепь

$$F_{\lambda,a} \stackrel{\text{def}}{=} F \exp \lambda(\psi(\zeta) - \psi(a)).$$

Она убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты (поскольку это верно для F) и $\psi = \zeta(1 + o(1))$. Следовательно, к ней применим принцип максимума модуля для функциональных коцепей. Оценим значения I и m_0 при больших a и при λ , зависящем от a надлежащим образом. Для этого оценим сверху кограницу коцепи $F_{\lambda,a}$. Имеем

$$|\delta F| \leq m(\zeta) = \exp(-C \exp \xi).$$

Следовательно,

$$|\delta F_{\lambda,a}(\zeta)| \leq \exp(-C \exp \xi + \lambda \operatorname{Re}(\psi(\zeta) - \psi(a))).$$

Поскольку Ω – квадратичная стандартная область, вертикальная прямая $\operatorname{Re} \zeta = \xi$ пересекает не более $C\xi^2$ граничных линий стандартного разбиения. Поэтому

$$I(a) \leq C \int_{a-\varepsilon}^{\infty} \xi^2 \exp(-C \exp \xi + \lambda \operatorname{Re}(\psi(\zeta) - \psi(a))) d\xi.$$

Обозначим подынтегральное выражение через m_+ . Интеграл $I(a)$ легко оценивается, если

$$\frac{m'_+}{m_+} \leq -1 \quad \text{при} \quad \xi \geq a - \varepsilon, \quad m'_+ = \frac{dm_+}{d\xi}. \quad (7)$$

В этом случае

$$m_+(\xi) \leq m_+(a - \varepsilon) \exp(a - \varepsilon - \xi), \quad I(a) \leq C m_+(a - \varepsilon).$$

В то же время

$$m_0 \leq m_+(a - \varepsilon).$$

Имеем

$$m_+(a - \varepsilon) = (a - \varepsilon)^2 \exp(-\exp(a - \varepsilon) + \lambda(\psi(a - \varepsilon) - \psi(a))).$$

Заметим, что второе слагаемое в показателе отрицательно. Следовательно,

$$m_+(a - \varepsilon) \leq (a - \varepsilon)^2 \exp(-\exp(a - \varepsilon)).$$

При достаточно большом a правая часть будет меньше, чем $C\varepsilon$ для любой предписанной константы C . Поэтому, при большом a

$$2\varepsilon^{-1}(m_0 + I) < 1.$$

Тогда по принципу максимума модуля

$$|F_{\lambda,a}(\zeta)| < 2. \quad (8)$$

Вернемся к неравенству (7). Имеем

$$\ln m_+ = 2 \ln \xi - \exp \xi + \lambda \operatorname{Re}(\psi(\zeta) - \psi(a)).$$

Поэтому

$$(\ln m_+)' = \frac{2}{\xi} - \exp \xi + \lambda(1 + o(1)).$$

При

$$\lambda = \frac{1}{2} \exp a$$

и при достаточно больших a неравенство (7) выполнено. Следовательно, оценка (8) также верна.

Теперь мы хотим оценить $|F(\zeta)|$ при данном $\zeta \in \Pi_0 \cup \Pi_1$. Выберем $a \in \mathbb{R}$ так, что $\operatorname{Re} \psi(\zeta) - \psi(a) = 1$. Поскольку $\psi = \zeta + C\sqrt{\zeta}$, имеем $|a - \operatorname{Re} \zeta| \leq c$ для некоторого c , не зависящего от ζ . Согласно (8) имеем

$$|F(\zeta)| \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2} \exp a\right) \leq \exp(-C_1 \exp \xi)$$

для некоторого $C_1 > 0$, не зависящего от ζ . Это доказывает лемму 0.4.

Докажем теперь теорему Фрагмена–Линделёфа для класса $\mathcal{NC}$. Полученные выше оценки остаются верными при замене F на F^u или F^l . Эти компоненты голоморфны в полосе ширины, большей π согласно свойству 2 из п. 0.9. По свойству 3 эти компоненты оцениваются сверху на $\Pi_1 \cup \Pi_0$ величиной $C\xi$ для некоторого $C > 0$. В то же время эти функции убывают на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, как $\exp(-C \exp \xi)$. По классической теореме Фрагмена–Линделёфа $F^u \equiv F^l \equiv 0$. Это же рассуждение вместе с индукцией по j показывает, что j -я компонента коцепи F равна нулю. Тем самым завершено доказательство теоремы Фрагмена–Линделёфа для коцепей класса $\mathcal{NC}$.

Теорема Фрагмена–Линделёфа для более сложных функциональных коцепей представлена в § 2.

§ 1. Разложение преобразования монодромии на слагаемые с несравнимыми скоростями убывания

Этот параграф является центральным в статье. Здесь доказывается теорема конечности по модулю вспомогательных результатов. Эти результаты схематически доказываются в оставшейся части статьи.

1.1. Преобразование монодромии с предписанной асимптотикой.

В этом пункте будет доказана наиболее простая часть теоремы об асимптотике. Для любых заданных чисел $0 < \mu < \nu$ и $n \in \mathbb{Z}^+$ мы построим сложный цикл, преобразование монодромии которого удовлетворяет неравенствам (1). Этот сложный цикл будет иметь два гиперболических (и даже линейных) седла и $2n$ седлоузлов. Правильно выбранная трансверсаль Γ будет размещена на ребре, соединяющем два линейных седла. Положим

$$\operatorname{Ad}(f)g = f^{-1} \circ g \circ f \quad Ag = \operatorname{Ad}(\exp)g, \quad A^{-1}g = \operatorname{Ad}(\ln)g.$$

Седлоузлы будут ориентированы так, чтобы преобразование монодромии Δ имело следующий вид в логарифмической карте:

$$\Delta = \operatorname{Ad}(\alpha)A^n(\xi + \exp(-\xi)), \quad \mu < \alpha < \nu. \quad (9)$$

Рис. 2

Мы сначала построим сложный цикл с таким преобразованием монодромии, а затем проверим, что для него выполнены условия (1).

Рассмотрим $2n+2$ экземпляров единичного квадрата $[-1, 1]^2$ с координатами

$$(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n), (X_n, Y_n), \dots, (X_0, Y_0)$$

и зададим векторные поля на них формулами

$$v_0 = (x_0, -\alpha y_0), \quad v_1 = (x_1^2, -y_1), \quad \dots, \quad v_n = (x_n^2, -y_n),$$

$$V_n = (X_n^2, Y_n), \quad \dots, \quad V_1 = (X_1^2, Y_1), \quad V_0 = \left(-X_0, \frac{1}{\alpha} Y_0\right)$$

(см. рис. 2). Склеим части границ квадратов и определим сложный цикл как объединение ориентированных отрезков координатных осей, склеенных в следующем порядке: $[1, 0]$ на Oy_j , $[0, 1]$ на Ox_j , $[-1, 0]$ на OX_j , $[0, 1]$ на OY_j , причем упорядочение осей таково:

$$Oy_0, Ox_0, \dots, Oy_n, Ox_n, OX_n, OY_n, \dots, OX_0, OY_0.$$

Склеивающие отображения отождествляют окрестности точки 0 на следующих сторонах:

$$\begin{aligned} x_j = 1 \quad \text{и} \quad y_{j+1} = 1, \quad j = 0, \dots, n-1, \\ x_n = 1 \quad \text{и} \quad X_n = -1, \\ Y_j = 1 \quad \text{и} \quad X_{j-1} = -1, \quad j = n, \dots, 1, \\ Y_0 = 1 \quad \text{и} \quad y_0 = 1. \end{aligned}$$

Координаты на этих сторонах суть y_j , x_{j+1} , y_n , Y_n , X_j , Y_{j-1} и X_0 , x_0 . Напомним, что в рассматриваемых гиперболических секторах имеем $X_j \in [-1, 0]$. Склеивающие функции таковы:

$$\begin{aligned} x_1 = f_0(y_0) = y_0, \quad x_{j+1} = f_j(y_j) = e^{-1}y_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ Y_n = f_n(y_n) = y_n \exp(-e^{-1}y_n), \\ Y_{j-1} = F_j(X_j) = -eX_j, \quad j = n, \dots, 2, \\ Y_0 = F_1(X_1) = -X_1, \quad x_0 = F_0(X_0) = -X_0. \end{aligned}$$

Отображения соответствия имеют вид:

$$\begin{aligned} y_0 = x_0^\alpha, \quad y_j = e \cdot e^{-1/x_j}, \quad j = 1, \dots, n, \\ |X_j| = -\frac{1}{\ln(Y_j \cdot e^{-1})}, \quad j = n, \dots, 1, \quad |X_0| = Y_0^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Вместе со склеивающими отображениями имеем

$$\begin{aligned} x_1 = x_0^\alpha, \quad x_{j+1} = e^{-1/x_j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ |X_n| = \text{Ad}(e^{-1/x})(x_n \exp(-x_n)), \\ |X_{j-1}| = -\frac{1}{\ln |X_j|}, \quad j = n, \dots, 2, \quad |X_0| = |X_1|^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Delta = \text{Ad}(f_0^{[n]} \circ x^\alpha)(x \exp(-x)).$$

В логарифмической карте это отображение имеет вид (9).

Индукцией по n легко доказывается, что

$$A^n(\xi + \exp(-\xi)) = \xi + (1 + o(1))(\exp(-\xi))(\exp(-\exp \xi)) \cdots (\exp(-\exp^{[n]} \xi)).$$

Поэтому

$$\Delta = \text{Ad}(\alpha)A^n(\xi + \exp(-\xi)) = \xi + (\alpha^{-1} + o(1))(\exp(-\alpha\xi)) \cdots \exp(-\exp^{[n]} \alpha\xi).$$

Это отображение удовлетворяет неравенствам (1).

Таким образом, мы построили кусочно-аналитическое векторное поле на топологическом кольце с предписанной асимптотикой преобразования монодромии.

Можно изменить комплексную структуру на этом кольце так, чтобы это векторное поле стало вещественно-аналитическим. Этот прием впервые применялся в [7].

Вторая часть теоремы 0.5 доказана.

1.2. Еще раз об отображениях Дюлака для седлоузлов. Обозначим через $\mathcal{H}$ множество ростков отображений $(\mathbb{C}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}^+, \infty)$, полученных из параболических ростков голоморфных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ в результате перехода к логарифмической карте.

Множество почти регулярных ростков, аффинная главная часть которых тождественна, обозначается через $\mathcal{R}^0$.

Наконец, обозначим через Aff множество ростков аффинных отображений $(\mathbb{C}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}^+, \infty)$ с вещественными коэффициентами и положительным мультипликатором, а через $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{R}$ от real mappings) – множество ростков отображений, называемых ниже вещественными, сужение которых на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ является отображением $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Из теоремы 0.11 после небольших вычислений вытекает, что

$$\text{TO} \subset (\mathcal{H} \circ \exp \circ \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \circ \text{Aff}) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}} =: \underline{\text{TO}}. \quad (10)$$

Обозначим через **FROM** класс ростков на бесконечности, обратных к росткам из $\underline{\text{TO}}$. Эти два класса ростков являются основными в дальнейшем.

1.3. Окончательная структурная теорема. Обозначим через G_n группу всех уравновешенных композиций отображений классов TO , **FROM** и $\mathcal{R}$, имеющих класс (глубину) не более чем n . Напомним некоторые обозначения и введем ряд новых. Если $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$ – подмножества некоторой группы, то порожденные ими группа и полугруппа обозначаются через $\text{Gr}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ и $\text{Gr}_+(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)$ соответственно. Множество всех произведений $a_m \circ \dots \circ a_1$, $a_j \in \mathcal{A}_j$, обозначается через $\mathcal{A}_m \circ \dots \circ \mathcal{A}_1$.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – подмножества некоторой группы, то $\text{Ad}(\mathcal{A})\mathcal{B} = \text{Gr}(\text{Ad}(a)b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B})$.

Если $\mathcal{B}$ – нормальная подгруппа группы $G = \text{Gr}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, то любой элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = ab$, где $a \in \mathcal{A}$ и $b \in \mathcal{B}$. В этом случае мы пишем $G = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}^0$ и Aff – те же классы, что и выше. Тогда $\mathcal{R} = \text{Aff} \circ \mathcal{R}^0$.

Рассмотрим кластер отображений $\tilde{\Delta} \in \underline{\text{FROM}} \circ \mathcal{R} \circ \underline{\text{TO}}$ в композиции (5). По определению уровня из п. 0.7.2 крайние отображения этого кластера лежат между уровнями $j-1$, j для некоторого j , а остальные (принадлежащие $\mathcal{R}$) – на уровне j . Скажем, что $\tilde{\Delta}$ лежит между уровнями $j-1$ и j . Теперь мы перестроим композицию $\tilde{\Delta}$ и переопределим понятие уровня так, чтобы все сомножители, кроме $\exp$ и $\ln$, имели некоторый уровень.

Сначала вставим в композицию произведение $\exp^{[j-1]} \circ \ln^{[j-1]}$ сразу до и после каждого кластера $\tilde{\Delta} \in \underline{\text{FROM}} \circ \mathcal{R} \circ \underline{\text{TO}}$, лежащего между уровнями $j-1$ и j . При $j \leq n-1$ новый кластер $A^{j-1}\tilde{\Delta}$ принадлежит G_{n-1} . Группа G_n отличается от G_{n-1} кластерами вида $A^{n-1}\tilde{\Delta}$:

$$G_n = \text{Gr}(A^{n-1}(\underline{\text{FROM}} \circ \mathcal{R} \circ \underline{\text{TO}}), G_{n-1}). \quad (11)$$

Заметим, что все сомножители в правой части вещественны на вещественной оси. Поэтому их композиции корректно определены в некоторой окрестности $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Теперь мы разложим кластеры **FROM** и $\underline{\text{TO}}$ на сомножители, вообще говоря, не вещественные на вещественной прямой. В качестве компенсации каждый сомножитель новой композиции будет лежать только на одном уровне в смысле, определенном ниже.

Композиция **FROM** $\circ \mathcal{R} \circ \mathbf{TO}$ имеет вид

$$\mathbf{FROM} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{TO} = \text{Aff} \circ \mathcal{NC}^{-1} \circ \mathcal{R}^0 \circ A(\mathcal{H} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{H}) \circ \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \circ \text{Aff}.$$

Мы хотим отделить нормализующую коцепь в этой композиции от сомножителя, принадлежащего $A(\mathcal{H} \circ \mathcal{R} \circ \mathcal{H})$. Для этого нужны следующие определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Положим $\mathcal{A}^0 = \text{Gr}(f \in \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \mid \text{существует } \tilde{g} \in \mathcal{H}: A\tilde{g} \circ f \text{ вещественно})$.

Класс $\mathcal{H}$ не содержится в $\mathcal{R}$, поскольку ростки класса $\mathcal{R}$ всегда вещественны на $(\mathcal{R}^+, \infty)$, а ростки класса $\mathcal{H}$ – не всегда. Это обстоятельство вместе с предыдущей формулой мотивирует следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2.

$$H^0 = \text{Gr}(\text{Ad}(\text{Aff})\mathcal{H}, \mathcal{R}^0).$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{FROM} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{TO} \subset \text{Aff} \circ \mathcal{A}^0 \circ A(H^0 \circ \text{Aff}) \circ \mathcal{A}^0 \circ \text{Aff}.$$

Обозначим через T группу вещественных сдвигов. Легко видеть, что

$$A(\text{Aff}) \subset T \circ \mathcal{R}^0, \quad \text{Ad}(T)\mathcal{R}^0 = \mathcal{R}^0, \quad \text{Ad}(T)\mathcal{NC} = \mathcal{NC}.$$

Значит, в предыдущей формуле можно освободиться от сомножителя $A(\text{Aff})$:

$$\mathbf{FROM} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{TO} \subset \text{Gr}(\mathcal{R}, \mathcal{A}^0, A(H^0)).$$

Кроме того, $A^{n-1}\mathcal{R} \subset G_{n-1}$. Поэтому

$$G_n \subset \text{Gr}(G_{n-1}, A^{n-1}\mathcal{A}^0, A^n H^0) =: \tilde{G}_n. \quad (12)$$

Обобщим понятие уровня, положив по определению, что сомножители из $A^{n-1}\mathcal{A}^0$, $A^n H^0$ находятся на уровнях $n-1$, n соответственно. Заметим, что $\tilde{G}_{n-1} = \text{Gr}(G_{n-2}, A^{n-2}\mathcal{A}^0, A^{n-1}H^0)$. В этой группе есть кластеры из $A^{n-1}H^0$ на уровне $n-1$. Но они отличны от кластеров из $A^{n-1}\mathcal{A}^0$ на уровне $n-1$, возникающих в группе $\tilde{G}_n$.

Заметим, что отображения классов **FROM**, **TO** $\mathcal{R}$ вещественны на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Поэтому их композиции корректно определены на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ и, следовательно, в некоторой окрестности $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Напротив, отображения классов $\mathcal{A}^0$, H^0 не вещественны на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Тем не менее справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1.1. *Любой росток из группы $\tilde{G}_n$ корректно определен в некоторой окрестности $(\mathbb{R}^+, \infty)$.*

Доказательство намечено в п. 1.5.3.

Все ростки из G_n вещественны. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 1.1 (окончательная структурная теорема). *Справедливо*

$$G_n \subset \tilde{G}_n \cap \mathcal{M}_{\mathcal{R}}.$$

1.4. Стратегия I. Стратегия предлагаемого доказательства теоремы конечности отлична от первоначальной. Для описания преобразований монодромии класса n надо ввести функциональные коцепи и стандартные области класса n . Эти классы зависят от n , и первый из них содержит все нормализующие коцепи, но отнюдь не исчерпывается ими. В первоначальном доказательстве [1] эти классы определялись сразу после формулировки окончательной структурной теоремы. Затем формулировались без доказательств некоторые основные свойства этих классов, из которых выводилась теорема конечности. Остаток книги [1] был посвящен доказательству этих свойств.

Определения функциональных коцепей и стандартных областей класса n давались индукцией по n и были весьма длинными и сложными. Без достаточной мотивировки они создавали что-то вроде барьера на пути к доказательствам основных теорем.

Излагаемое ниже доказательство устроено по-другому. Во-первых, дается новое и простое определение стандартных областей класса n . Оно прямое и не использует индукции. Во-вторых, приводится аксиоматическое описание функциональных коцепей класса n , гораздо более короткое, чем их явное определение. Затем из этих аксиом выводятся основные теоремы. После этого дается явное определение функциональных коцепей класса n , строящее модель, для которой выполнены данные аксиомы. Это то же самое определение, что и в первоначальном доказательстве, лишь слегка модифицированное. На этом этапе рассуждений оно уже хорошо мотивировано предыдущим материалом. Мы также добавляем краткие мотивировки ключевых деталей определений.

Остаток доказательства посвящен проверке того, что построенная модель действительно удовлетворяет аксиомам. Зафиксируем теперь $n > 0$. Все определяемые ниже объекты класса m рассматриваются при $m \leq n$. Различные индуктивные предположения считаются выполненными при $m \leq n - 1$. Они доказываются для $m = n$ в ходе шага индукции от $n - 1$ к n .

1.5. Аксиоматическое описание функциональных коцепей класса n . Упомянутое в заголовке описание опирается на некоторые операции над функциональными коцепями, определяемые в следующем подпункте.

1.5.1. Функциональные коцепи и отображения-коцепи. Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ – произвольная область, а Ξ – ее локально конечное разбиение на аналитические многоугольники: каждая область разбиения представляет собой замыкание открытого множества, заданного конечным набором неравенств вида $\omega < 0$, где ω – вещественно-аналитическая функция на некоторой подобласти $\mathbb{R}^2$. Набор функций $F = \{f_j\}$ называется *функциональной коцепью*, соответствующей разбиению Ξ , если функции набора находятся в биективном соответствии с областями разбиения, причем каждая функция голоморфно продолжается в некоторую окрестность отвечающей ей области разбиения. Разбиение, соответствующее функциональной коцепи F , обозначается через Ξ^F . Функции f_j называются *компонентами* коцепи F .

Кограница δF функциональной коцепи F представляет собой набор голоморфных функций на граничных линиях разбиения, определяемый следующим образом. Пусть $\mathcal{L}$ – граничная кривая разбиения Ξ^F . В дальнейшем рассматриваются только такие разбиения, граничные кривые которых биективно проектируются на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ вдоль вертикальных прямых. Тем самым на этих кривых индуцируется ориентация, наследованная с $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Рассмотрим

упорядоченную пару областей разбиения с общей граничной кривой $\mathcal{L}$, причем первая область лежит слева от кривой, и пусть f_1, f_2 – упорядоченная пара функций, соответствующих этим областям. Тогда $f_1 - f_2$ есть компонента δF , определенная в некоторой окрестности кривой $\mathcal{L}$. Набор всех таких компонент называется аддитивной кограницей коцепи.

Отображения-коцепи определяются аналогично функциональным коцепям с той разницей, что в определении коцепи требуется, чтобы функции f_j осуществляли биголоморфные отображения соответствующих областей разбиения на их образы. Композиционная кограница определяется так же, как и аддитивная, только разность компонент заменяется на их композиционное частное.

ПРИМЕР 1.1. Основным примером являются нормализующие коцепи, записанные в логарифмической карте. Роль области Ω играет правая полуплоскость $\mathbb{C}_a^+$: $\operatorname{Re} \zeta > a > 0$ для некоторого a . Поправки композиционных кограниц убывают как двойные экспоненты.

Функциональные коцепи можно складывать, вычитать и умножать. Для отображений-коцепей рассматривается композиция.

Напомним, что *произведение двух разбиений – это новое разбиение, образованное попарными пересечениями областей двух исходных разбиений.*

Сумма двух функциональных коцепей F и G – это функциональная коцепь, обозначаемая через $F+G$ и соответствующая произведению разбиений Ξ^F и Ξ^G . Это означает, что пересечению $U_1 \cap U_2$ двух областей разбиений Ξ^F и Ξ^G сопоставляется функция $f_1 + g_1$, равная сумме компонент F и G , отвечающих соответственно U_1 и U_2 . Разность и произведение функциональных коцепей определяются аналогично. Суммы, разности и произведения функциональных коцепей на одной и той же области Ω всегда определены.

Пусть F – функциональная коцепь, а $\operatorname{id} + G$ – такое отображение-коцепь, что $G \rightarrow 0$ на бесконечности. Композиция $F \circ (\operatorname{id} + G)$ определяется покомпонентно, как и сумма. Она не всегда корректно определена; достаточным условием для этого служит существование такого положительного числа ε , что все компоненты коцепи F продолжаются в ε -окрестности соответствующих им областей разбиения, а поправка G коцепи $\operatorname{id} + G$ по модулю меньше, чем ε . Подробнее, пусть f_j – одна из компонент F , D_j – ее область определения, а g_k – такая компонента G с областью определения $\tilde{D}_k$, что $D_j \cap \tilde{D}_k =: D \neq \emptyset$. По определению $f_j \circ (\operatorname{id} + g_k)$ является компонентой $F \circ (\operatorname{id} + G)$, определенной на D , если выполнено следующее: f_j продолжается голоморфно в некоторую ε -окрестность D^ε множества D и $|g_k| < \varepsilon/2$ на D^ε . Тогда композиция $f_j \circ (\operatorname{id} + g_k)$ продолжается на $D^{\varepsilon/2}$.

В дальнейшем все разбиения будут иметь граничную линию $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

1.5.2. Стандартные области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Стандартная область* – это область, симметричная относительно вещественной оси, лежащая в правой полуплоскости и допускающая вещественное конформное отображение на правую полуплоскость с производной вида $1 + o(1)$ при $\zeta \rightarrow \infty$, которое продолжается при некотором $\delta > 0$ на δ -окрестность части области, лежащей вне некоторого компакта. Кроме того, в этой области $\xi \rightarrow \infty$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Квадратичные стандартные области удовлетворяют этому определению, а правая полуплоскость – нет.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Стандартная область класса $m > 0$, соответствующая константам $\varepsilon > 0$, $C > 0$, – это область вида

$$\Omega_{m,\varepsilon,C} = \Phi_{m,\varepsilon}(\mathbb{C}_C^+), \quad (13)$$

где

$$\Phi_{m,\varepsilon}: \zeta \mapsto \zeta(1 + (\ln^{[m-1]} \zeta)^{-\varepsilon}), \quad \mathbb{C}_C^+ = \mathbb{C}^+ \setminus K_C, \quad K_C = \{|\zeta| \leq C\}. \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Для любых m, ε найдется число $C(m, \varepsilon)$ такое, что при каждом $C > C(m, \varepsilon)$ область $\Omega_{m,\varepsilon,C}$ – стандартная в смысле определения 1.3, а отображение $\Phi_{m,\varepsilon}$ из определения этой области является конформным на $\mathbb{C}^+ \setminus K_C$. Напомним, что существует конформное отображение $\mathbb{C}^+ \setminus K_C \rightarrow \mathbb{C}^+$, имеющее вид $\zeta + o(1)$ на $(\mathbb{C}^+, \infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Множество Ω_m стандартных областей класса $m > 0$ – это множество всех областей $\Omega_{m,\varepsilon,C}$ с $C > C(m, \varepsilon)$, где число $C(m, \varepsilon)$ настолько велико, что отображение $\Phi_{m,\varepsilon}$ биголоморфно на $\Omega_{m,\varepsilon,C}$. Множество Ω_0 – это класс всех квадратичных стандартных областей.

1.5.3. Расширенные группы G^n и функциональные коцепи класса n . В дальнейшем мы расширим группу G_n до G^n . Это делается индукцией по $m \leq n$.

База индукции: группы G^{-1} и G_{-1} (а также G^0 и G_0) совпадают: $G^{-1} = \text{Aff}$, $G^0 = \mathcal{R}$.

Шаг индукции: пусть группы $G^m \supset G_m$, $m < n$, уже построены. Группа G^n отличается от G^{n-1} композициями из $A^{n-1}(\text{FROM} \circ \mathcal{R} \circ \text{TO})$. Новые функциональные коцепи могут находиться (и действительно находятся) на уровнях $n-1$ и n . Они называются функциональными коцепями класса n и типов 1 и 0 соответственно и обозначаются через $\mathcal{FC}_1^{n-1}$ и $\mathcal{FC}_0^n$ (верхний индекс показывает уровень, нижний индекс – тип, а их сумма – класс). Эти функциональные коцепи будут описаны аксиоматически, индукцией по n . При $n = 0$ они представляют собой аффинные и почти регулярные отображения соответственно.

Следующее новое множество появляется на уровне $n-1$ при $n \geq 1$:

$$J^{n-1} = \text{Ad}(G^{n-1})A^{n-1}\mathcal{A}^0. \quad (15)$$

В дальнейшем под оценкой коцепи понимается равномерная оценка ее компонент на некотором представителе ростка на бесконечности области определения коцепи.

Коцепь F , убывающая экспоненциально в своей области определения (всегда содержащейся в правой полуплоскости), т. е. удовлетворяющая оценке

$$|F(\zeta)| \prec \exp(-\varepsilon \xi) \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0,$$

называется *быстро убывающей*. Множество всех таких коцепей из $\mathcal{FC}_1^{n-1}$ и $\mathcal{FC}_0^n$ обозначается через $\mathcal{FC}_{1+}^{n-1}$ и $\mathcal{FC}_{0+}^n$ соответственно.

Новое множество, появляющееся на уровне n при $n \geq 1$, определяется с помощью множества $\mathcal{FC}_0^n$:

$$H^n = \text{Gr}(\text{id} + \mathcal{FC}_{0+}^n \circ \exp^{[n]} \circ g \mid g \in G^{n-1}).$$

Первой аксиомой о коцепях класса n является

АКСИОМА ВКЛЮЧЕНИЯ. Множества J^{n-1} и H^n корректно определены, причем

$$A^n H^0 \subset H^n, \quad (16)$$

$$J^{n-1} \subset \text{Gr}(\text{id} + \mathcal{FC}_{1+}^{n-1} \circ \exp^{[n-1]} \circ g \mid g \in G^{n-2}). \quad (17)$$

Второе утверждение этой аксиомы будет повторено в одной из дальнейших аксиом, называемой четвертой леммой о сдвиге. Заметим, что $\mathcal{FC}_0^n$ состоит из функциональных коцепей, определенных на стандартных областях $\Omega \in \Omega_n$. Композиции из $\mathcal{FC}_0^n \circ \exp^{[n]}$ определены в очень узких окрестностях $\ln^{[n]} \Omega$ луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Положим

$$\tilde{G}^n = \text{Gr}(G^{n-1}, J^{n-1}, H^n), \quad G^n = \tilde{G}^n \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}. \quad (18)$$

Групповой операцией в $\tilde{G}_n$ является композиция. Все ростки отображений-коцепей из G_n определены на ростках в бесконечности окрестностей луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$; эти ростки областей свои для каждого отображения-коцепи. Ростки из G^{n-1} голоморфны в своих (узких) областях определения. Ростки из J^{n-1} и H^n являются отображениями-коцепями в настолько узких областях, что единственной линией скачка является $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Взяв композиции верхних компонент обоих сомножителей, а затем композиции нижних, получаем новое отображение-коцепь с линией скачка $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Аддитивная теорема о разложении позволяет продолжить эти композиции в области, допускающие явное описание, но нам это не понадобится.

Дадим краткую схему доказательства того, что группа $\tilde{G}^n$ корректно определена. В то же время из него следует лемма 1.1. Ниже мы формулируем так называемые леммы о сдвиге, из которых вытекает, что

$$\tilde{G}^n = G^{n-1} \circ J^{n-1} \circ H^n.$$

Затем мы докажем, что каждый элемент этой композиции корректно определен в некоторой окрестности луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

Первое утверждение (16) аксиомы включения вместе с теоремой 1.1 влечет, что $G_n \subset G^n$.

Будем доказывать теорему тождественности для элементов группы G^n . Пользуясь индукцией по n , допустим, что она уже доказана для G^{n-1} . Следовательно, для любого $g \in G^{n-1}$ имеем либо $g \prec \text{id}$, либо $g = \text{id}$, либо $g \succ \text{id}$. Тем самым группа G^{n-1} упорядочена соотношением: $g_1 \prec g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1 - g_2 \prec 0$ или, эквивалентно, $g_1 \circ g_2^{-1} \prec \text{id}$.

1.5.4. Упорядоченные группы и обобщенные мультипликаторы. Пусть G — некоторая группа ростков $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$, содержащая отображение $A^n g_c$ при некотором $c > 0$, где $g_c(\xi) = c\xi$. Допустим, что G упорядочена соотношением:

$$g_1 \prec g_2 \text{ тогда и только тогда, когда } g_1 - g_2 \prec 0. \quad (19)$$

Тогда корректно определено отображение

$$\lambda_n: G \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \frac{A^{-n} g(\xi)}{\xi}.$$

Действительно,

$$\lambda_n(g) = \sup\{c \mid A^n g_c \prec g\}.$$

Образ $\lambda_n(g)$ называется (n -м) *обобщенным мультипликатором* ростка g . При фиксированном n и для той же группы G , что и выше, положим

$$\lambda_n^{-1}(0) = G_{\text{slow}}^-, \quad \lambda_n^{-1}(\mathbb{R}^+) = G_{\text{rap}}, \quad \lambda_n^{-1}(\infty) = G_{\text{slow}}^+.$$

Эти обозначения объясняются следующим образом. Поправки ростков $g \in G_{\text{rap}}$ убывают столь *быстро*, что $\lambda_n(g) \in \mathbb{R}^+$, а поправки ростков из $G \setminus G_{\text{rap}}$ — столь *медленно*, что $\lambda_n(g) = 0$ или ∞ . Верхний индекс “+” напоминает о бесконечности, а “−” — о нуле.

По индуктивному предположению группа G^k упорядочена при любом $k \leq n-1$. Легко видеть, что $A^{k+1}g_c \in G^k$. Действительно, $A^2(gc) \in \mathcal{R}^0$ и $A^{k-1}\mathcal{R}^0 \subset G^k$. Следовательно, отображение λ_{k+1} и подмножества G_{slow}^k , G_{rap}^k корректно определены.

1.5.5. Мотивировка лемм о сдвиге. Приведем мотивировку лемм (аксиом), формулируемых ниже. Из (12) заключаем, что группа $\tilde{G}_n$ может содержать элементы вида

$$\Delta = A^n F \circ A^{n-1} G, \quad F \in H^0, \quad G \in \mathcal{A}^0.$$

Сомножители $A^n F$, $A^{n-1} G$ расположены в “неправильном порядке”, что мешает дальнейшему изучению асимптотики Δ . Мы хотели бы обратить этот порядок и записать

$$\Delta = A^{n-1} \tilde{G} \circ A^n \tilde{F}, \quad \tilde{G} \in \mathcal{A}^0, \quad \tilde{F} \in H^0,$$

если это возможно. Однако это невозможно. Надо расширить $A^{n-1}\mathcal{A}^0$ и $A^n H^0$ до определенных в п. 1.5.3 классов J^{n-1} и H^n , для которых существуют классы ростков $\Phi \supset J^{n-1} - \text{id}$, $\Psi \supset H^n - \text{id}$ со следующими свойствами. Классы Φ и Ψ являются векторными пространствами, и для всех $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ имеем:

- φ и ψ определены в некоторых окрестностях луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$, зависящих от φ , ψ ;
- $\varphi \rightarrow 0$, $\psi \rightarrow 0$ на бесконечности в своих областях определения;
- композиции $(\text{id} + \varphi)^{-1}$, $(\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \psi)$ и $(\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi)$ определены на ростке некоторой окрестности луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$, причем

$$(\text{id} + \varphi)^{-1} = \text{id} - \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} \in \Phi; \quad (20)$$

$$\varphi \circ (\text{id} + \psi) = \varphi + \tilde{\psi}, \quad \tilde{\psi} \in \Psi; \quad (21)$$

$$\psi \circ (\text{id} + \varphi) = \hat{\psi}, \quad \hat{\psi} \in \Psi. \quad (22)$$

Равенства (21), (22), как и последующие равенства этого пункта, выполняются в пересечении некоторой окрестности положительной полуоси с верхней полуплоскостью.

Из этих свойств вытекает следующий

Принцип сдвига–сопряжения. В приведенных выше предположениях для любых $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ существует такой элемент $\psi_1 \in \Psi$, что

$$(\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi) = (\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \psi_1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с тождества

$$(\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi) = (\text{id} + \varphi) \circ \text{Ad}(\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \psi).$$

Следующая цепочка равенств завершает доказательство:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \psi) &= (\text{id} - \tilde{\varphi}) \circ (\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi) \\ &= (\text{id} + \psi - \tilde{\varphi} \circ (\text{id} + \psi)) \circ (\text{id} + \varphi) = (\text{id} - \tilde{\varphi} - \tilde{\psi} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi) \\ &= (\text{id} - \tilde{\varphi}) \circ (\text{id} + \varphi) - \hat{\psi} \circ (\text{id} + \varphi) = \text{id} + \psi_1, \quad \tilde{\varphi} \in \Phi, \quad \hat{\psi}, \psi_1 \in \Psi. \end{aligned}$$

Первое равенство цепочки следует из (20), второе – очевидное тождество, третье вытекает из (21), четвертое – из того, что Ψ является векторным пространством, а пятое – из (22).

Соотношения (20)–(22) являются моделями для приводимых ниже лемм (аксиом) о сдвиге. Эти леммы (аксиомы) позволяют аналогично переставить сомножители в группе $\tilde{G}^n$ и доказать основные теоремы: мультипликативную и аддитивную теоремы о разложении.

1.5.6. Леммы о сдвиге. Приведенные ниже четыре леммы о сдвиге, так же как и другие утверждения пп. 1.5.3–1.5.9, принимаются за аксиомы, выполненные для функциональных коцепей классов $\mathcal{FC}^m$, $m < n$. Из этих аксиом вытекают сформулированные ниже мультипликативная и аддитивная теоремы о разложении.

Подчеркнем еще раз, что по индуктивному предположению все эти леммы и теоремы считаются доказанными для $1 \leq m \leq n-1$ (где n – зафиксированное выше натуральное число), так же как и сформулированные ниже теоремы MDT_m и ADT_m . База индукции представлена в п. 1.5.10.

Равенства с плюсом в скобках означают, что равенство верно как в присутствии плюса (и тогда без скобок), так и без него.

ЛЕММА 1.2 (лемма о сдвиге 1, аксиома SL1_n). *Имеем:*

а) $\mathcal{FC}_{0(+)}^n \circ \exp^{[n]} \circ G_{\text{rap}}^{n-1} = \mathcal{FC}_{0(+)}^n \circ \exp^{[n]}$;

б) $\mathcal{FC}_{1(+)}^{n-1} \circ \exp^{[n-1]} \circ G_{\text{rap}}^{n-2} = \mathcal{FC}_{1(+)}^{n-1} \circ \exp^{[n-1]}$. *Это равенство выполняется в пересечении роста на бесконечности некоторой окрестности положительной полуоси с верхней полуплоскостью (далее, для краткости: в верхней полукрестности положительной полуоси).*

СОГЛАШЕНИЕ. Пусть n зафиксировано, и пусть $1 \leq m \leq n$. Тогда $\mathcal{FC}^m$ означает $\mathcal{FC}_1^m$ при $m \leq n-1$ и $\mathcal{FC}_0^n$ при $m = n$.

Пусть $m \leq n$, $g \in G^{m-1}$. Обозначим

$$\mathcal{F}_{(+)g}^m = \mathcal{FC}_{(+)}^m \circ \exp^{[m]} \circ g.$$

По сделанному соглашению это означает, что

$$\mathcal{F}_{(+)g}^m = \mathcal{FC}_{1(+)}^m \circ \exp^{[m]} \circ g, \quad m \leq n-1; \quad \mathcal{F}_{(+)g}^n = \mathcal{FC}_{0(+)}^n \circ \exp^{[n]} \circ g.$$

По тому же соглашению аксиома SL1_n принимает вид

ЛЕММА 1.3 (SL1_n). *Пусть $m = n-1$ или $m = n$, $g \in G_{\text{rap}}^{m-1}$. Тогда*

$$\mathcal{F}_{(+)g}^m = \mathcal{F}_{(+)}^m \text{id}.$$

Это равенство выполняется в верхней полукрестности положительной полуоси.

Последнее требование нуждается в комментарии. По определению любой элемент $\varphi \in \mathcal{F}_g^m$ имеет вид

$$\varphi = F_1 \circ \exp^{[m]} \circ g, \quad F_1 \in \mathcal{FC}^m.$$

Лемма утверждает, что существует такая коцепь $F \in \mathcal{FC}^m$, что $F = F_1 \circ A^{-m}g$, причем последнее равенство выполняется в пересечении некоторой стандартной области класса m с верхней полуплоскостью.

Прежде чем формулировать следующую лемму, дадим определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. а) Если f и g принадлежат G^k , то будем писать, что $f \prec\prec g$ в G^k тогда и только тогда, когда $f \circ g^{-1} \in G_{\text{slow}}^{k-}$;

б) $(k, f) \prec (m, g)$ тогда и только тогда, когда $f \in G^{k-1}$, $g \in G^{m-1}$ и либо $k < m$, либо $k = m$ и $f \prec\prec g$ в G^{m-1} .

ЛЕММА 1.4 (вторая лемма о сдвиге, аксиома $\text{SL}2_n$). Пусть $m = n - 1$ или $m = n$. Допустим, что $(k, f) \prec (m, g)$ и $\varphi \in \mathcal{F}_f^k$. Тогда

$$\varphi \circ (\text{id} + \mathcal{F}_{+g}^m) \subset \varphi + \mathcal{F}_{+g}^m.$$

Это равенство выполняется в верхней полукрестности положительной полуоси.

Более подробно, для любых

$$\begin{aligned} \varphi &= F_1 \circ \exp^{[k]} \circ f, & F_1 &\in \mathcal{FC}^k, & f &\in G^{k-1}, \\ \psi &= F_2 \circ \exp^{[m]} \circ g, & F_2 &\in \mathcal{FC}_+^m, & g &\in G^{m-1}, \end{aligned}$$

существует такая коцепь $F \in \mathcal{FC}^m$, что

$$F = F_1 \circ \rho - F_1 \circ (\rho + F_2), \quad \rho = \exp^{[k]} \circ f \circ g^{-1} \circ \ln^{[m]}$$

причем равенство для F выполняется в пересечении некоторой стандартной области класса m с верхней полуплоскостью.

ЛЕММА 1.5 (третья лемма о сдвиге, аксиома $\text{SL}3_n$). а) Пусть $m = n - 1$ или $m = n$. Допустим, что $f \succ\succ g$ в G^{m-1} или $f \circ g^{-1} \in G_{\text{rap}}^{m-1}$. Тогда

$$\mathcal{F}_{(+)f}^m \circ (\text{id} + \mathcal{F}_{+g}^m) \subset \mathcal{F}_{(+)f}^m.$$

Это включение выполняется в верхней полукрестности положительной полуоси; см. комментарий после формулировки леммы.

б) $(\text{id} + \mathcal{F}_{+g}^m)^{-1} = \text{id} + \mathcal{F}_{+g}^m$ для произвольного $g \in G^{m-1}$.

Более подробно, утверждение а) означает, что для любых

$$\begin{aligned} \varphi &= F_1 \circ \exp^{[m]} \circ f, & F_1 &\in \mathcal{FC}^m, & f &\in G^{m-1}, \\ \psi &= F_2 \circ \exp^{[m]} \circ g, & F_2 &\in \mathcal{FC}_+^m, & g &\in G^{m-1}, \end{aligned}$$

$f \succ\succ g$ в G^{m-1} , существует коцепь $F \in \mathcal{FC}^m$ такая, что

$$F = F_1 \circ \exp^{[m]} \circ f \circ (f^{-1} \circ \ln^{[m]} + F_2 \circ \rho), \quad \rho = A^{-m}(g \circ f^{-1}),$$

причем равенство для F выполняется в пересечении некоторой стандартной области класса m с верхней полуплоскостью.

ЛЕММА 1.6 (четвертая лемма о сдвиге, аксиома $SL4_n$). Имеем:

- а) $J^{n-1} \subset \text{Gr}(\text{id} + \mathcal{F}_{1+}^{n-1})$;
 б) $\mathcal{F}_{0(+)_g}^n \circ J^{n-1} \subset \mathcal{F}_{0(+)_g}^n$.

Это включение выполняется в верхней полукрестности положительной полуоси.

Прокомментируем утверждения б). Для любых

$$\varphi = F_1 \circ \exp^{[n]} \circ g, F_1 \in \mathcal{FC}^n, \quad g \in G^{n-1}, \quad j \in J^{[n-1]},$$

существует коцепь $F \in \mathcal{FC}_0^n$ такая, что

$$F = F_1 \circ \exp^{[m]} \circ g \circ j \circ g^{[-1]} \circ \ln^{[m]},$$

причем равенство для F выполняется в пересечении некоторой стандартной области класса m с верхней полуплоскостью.

Аналогичный комментарий для утверждения а) опущен, чтобы избежать повторов.

1.5.7. Слабая вещественность и оценка снизу.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Функциональная коцепь называется *слабо вещественной*, если граница соответствующего ей разбиения содержит луч $(\mathbb{R}^+, \infty)$, а области разбиения, примыкающие к $\mathbb{R}$, симметричны друг другу относительно $\mathbb{R}$ и

$$F^u(\bar{\zeta}) = \overline{F^l(\zeta)}.$$

Композиция

$$\varphi \in \mathcal{F}_f^k, \quad \varphi = F \circ \exp^{[k]} \circ f, \quad F \in \mathcal{FC}^k, \quad f \in G^{k-1}, \quad k \leq n$$

называется *слабо вещественной*, если F – слабо вещественна.

Если заменить коцепь на голоморфную функцию (т. е. считать F^u и F^l аналитическими продолжениями друг друга), то предыдущее определение означает, что функция $F^u \equiv F^l$ вещественна на $\mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 1.2 (теорема об оценке снизу, LET_n). Пусть $m = n-1$ или $m = n$, $F \in \mathcal{FC}^m$ и функция F слабо вещественна. Тогда существует такое $\nu > 0$, что

$$|\text{Re } F| \succ \exp(-\nu\xi) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty).$$

1.5.8. Теорема Фрагмена–Линделёфа для коцепей, PLT_n. Обозначим через S оператор симметрии $S: F \rightarrow SF$, $SF(\zeta) = \overline{F(\bar{\zeta})}$. Пусть $IF = F - SF$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $m = n-1$ или $m = n$, $F \in \mathcal{FC}^m$. Пусть F убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты:

$$|F(\xi)| \prec \exp(-\nu\xi) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty) \quad \forall \nu > 0.$$

Тогда $F^u \equiv 0$, $F^l \equiv 0$.

Теорема также верна для $G = IF$ при $F \in \mathcal{FC}^m$.

1.5.9. Оценка кограницы сверху.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $1 < m \leq n$, $F \in \mathcal{FC}^m$. Тогда

$$|\delta F| \prec \exp(-\nu\xi) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty) \quad \forall \nu > 0.$$

Кроме того, для любых m и g множество ростков на бесконечности композиций из $\mathcal{F}_{(+)g}^m$ является векторным пространством. По определению $\mathcal{F}_{(+)g}^m$ это эквивалентно тому, что $\mathcal{FC}^m$ является векторным пространством.

1.5.10. База индукции: $n = 0$. Отображения Пуанкаре гиперболических сложных циклов, возникающие на уровне 0, были описаны в п. 0.3: это почти регулярные ростки с ненулевой производной аффинной части. Напомним, что группа всех таких ростков обозначается через $\mathcal{R}$. Подгруппа ростков с тождественной аффинной частью обозначается через $\mathcal{R}^0$. В частности, $G^0 = \mathcal{R}$.

Для проверки приводимых ниже аксиом введем следующие множества:

$$\mathcal{FC}_0^0, \mathcal{FC}_1^{-1}, G^{-1}, G_{\text{rap}}^{-1}, G_{\text{slow}}^{-1\pm}, J^{-1}, G^{-2};$$

элементы $\mathcal{FC}_0^0$ называются *коцепями нулевого уровня*. Положим

$$\mathcal{FC}_0^0 = \mathcal{R}, \quad \mathcal{FC}_1^{-1} = \emptyset, \quad G^{-1} = \text{Aff}.$$

По определению подгруппы с индексом “rap”, G_{rap}^{-1} — это группа всех тех $a \in \text{Aff}$, для которых существует предел $\lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} (A^{-n}a)'$, $n = 0$. Поэтому

$$G_{\text{rap}}^{-1} = \text{Aff}, \quad G_{\text{slow}}^{-1\pm} = \emptyset.$$

Нам нужно также ввести отношение $(k, l) \prec (m, g)$ для $k \leq m \leq 0$. Поскольку $G_{\text{slow}}^{-1-} = \emptyset$, отношение $f \prec\prec g$ в G^{-1} бессодержательно. Поэтому отношение выше может иметь только вид

$$(-1, \text{id}) \prec (0, a), \quad a \in \text{Aff}.$$

Положим $J^{-1} = G^{-2} = \emptyset$.

Леммы о сдвиге во введенных нами терминах, относящихся к уровню $n = 0$, становятся тривиальными, как и все остальные аксиомы. Мы опускаем детали.

1.6. Мультипликативная и аддитивная теоремы о разложении.

ТЕОРЕМА 1.5 (мультипликативная теорема о разложении, MDT_n).

1° При $n > 0$ имеем $G^n = G^{n-1} \circ J^{n-1} \circ H^n \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$.

2° Пусть Δ — преобразование монодромии класса n или, более общо, $\Delta \in G^n$. Тогда либо $\Delta \in G^{n-1}$, либо при некотором $N \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta = g \circ \prod_{j=1}^N (\text{id} + \varphi_j), \quad (23)$$

где

$$g \in G^{n-1}, \quad \varphi_j \in \mathcal{F}_{+f_j}^{k_j}, \quad n-1 \leq k_j \leq n, \quad (k_j, f_j) \prec (k_{j+1}, f_{j+1}). \quad (24)$$

ТЕОРЕМА 1.6 (аддитивная теорема о разложении, ADT_n). Пусть Δ – не-тождественное преобразование монодромии класса n или, более общо, $\Delta \in G^n \setminus \text{id}$. Тогда при некотором $N \in \mathbb{N}$ справедливо разложение

$$\Delta = a + \sum_{j=1}^N \varphi_j, \quad a \in \text{Aff}, \quad \varphi_j \in \mathcal{F}_{+f_j}^{k_j}, \quad 0 \leq k_j \leq n, \quad (k_j, f_j) \prec (k_{j+1}, f_{j+1}), \quad (25)$$

причем равенство (25) выполняется в пересечении некоторой окрестности положительной полуоси с верхней полуплоскостью. Если $a = \text{id}$, то φ_1 слабо вещественна.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. 1) Теорема MDT_n позволяет представить произвольное преобразование монодромии $\Delta \in G^n$ класса n в виде композиции

$$\Delta \in \text{Aff} \circ J^0 \circ (H^1 \circ J^1) \circ \dots \circ (H^{n-1} \circ J^{n-1}) \circ H^n.$$

Это делается индукцией по $m < n$. Для G^{n-1} теорема MDT_{n-1} считается доказанной и из нее вытекает, что

$$G^{n-1} = G^{n-2} \circ J^{n-2} \circ H^{n-1} \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}.$$

Затем применяется обратная индукция по m .

Поправки ростков класса $H^k \circ J^k$ убывают не медленнее, чем $\exp(-\exp^{[k]} \mu \xi)$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, где $\mu > 0$ зависит от ростка.

2) Утверждение теоремы ADT_n о слабой вещественности членов разложения вещественной поправки $g - \text{id}$ позволяет оценить эту поправку снизу и доказать, что она не осциллирует. Это делается в следующем пункте.

Из аддитивной теоремы о разложении вместе с теоремой об оценке снизу вытекает теорема 0.5.

1.7. Сведение теоремы конечности к вспомогательным результатам. Здесь мы докажем теорему тождественности для преобразований монодромии класса n . Напомним ее формулировку. Пусть Fix_{∞} – семейство всех ростков отображений $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$ с бесконечным множеством неподвижных точек.

ТЕОРЕМА 1.7. Пусть Δ – преобразование монодромии класса n , причем $\Delta \in \text{Fix}_{\infty}$. Тогда $\Delta = \text{id}$. То же самое верно и для всех $\Delta \in G^m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $\Delta \neq \text{id}$. Рассмотрим разложение (25) из теоремы ADT_n . Аффинный член $a \in \text{Aff}$ этого разложения стремится к плюс бесконечности, поскольку его производная положительна. По индуктивному предположению все ростки $f \in G^m$, $m < n$, стремятся к плюс бесконечности. Докажем это же утверждение для $\Delta \in G^n$. Достаточно проверить, что все члены разложения (25), кроме аффинного, стремятся к 0 на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Действительно, в (25)

$$\varphi_j = F_j \circ \exp^{[k_j]} \circ f_j, \quad k_j \leq n, \quad F_j \in \mathcal{FC}_{+}^{k_j}, \quad f_j \in G^{k_j-1},$$

причем F_j убывает экспоненциально на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Поэтому в (25) имеем $\varphi_j \rightarrow 0$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Следовательно, преобразование Δ почти аффинно:

$$\Delta = a + o(1) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty).$$

Этим доказано, что любой росток из G^n стремится к бесконечности на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Приведем теперь к противоречию предположение о том, что $\Delta \neq \text{id}$.

Сначала допустим, что $a \neq \text{id}$. В этом случае поправка $\Delta - \text{id}$ не обращается в нуль на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, так как величина $a - \text{id}$ отграничена от нуля, а все остальные слагаемые стремятся к нулю на $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

Допустим теперь, что $a = \text{id}$. Пусть φ – первый ненулевой член после id в разложении (25). Запишем

$$\varphi = F \circ \exp^{[k]} \circ f, \quad F \in \mathcal{FC}_+^k, \quad f \in G^{k-1}.$$

По теореме ADT_n , F слабо вещественна. Следовательно, по теореме LET_k ,

$$|\text{Re } F| \succ \exp(-\nu\xi) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty)$$

для некоторого $\nu > 0$. Любой другой член ψ разложения (25) преобразования Δ имеет вид

$$\psi = G \circ \exp^{[m]} \circ g, \quad G \in \mathcal{FC}_+^m, \quad g \in G^{m-1} \quad \text{и} \quad (k, f) \prec (m, g).$$

Коцень G быстро убывает по определению. Поэтому

$$|G| \prec \exp(-\varepsilon\xi) \quad \text{на } (\mathbb{R}^+, \infty)$$

для некоторого $\varepsilon > 0$.

Чтобы сравнить слагаемые φ и ψ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, достаточно сравнить F и $\psi \circ f^{-1} \circ \ln^{[k]} = G \circ \exp^{[m-k]} A^{-k}h$, где $h = g \circ f^{-1}$.

Рассмотрим сначала случай $k = m$. По предположению в этом случае $h \in G_{\text{slow}}^{k-1+}$. Отсюда по определению вытекает, что $\lambda_k(h) = \infty$, т.е. росток $A^{-k}h$ растет быстрее любой линейной функции на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Следовательно, росток $G \circ A^{-k}h$ убывает быстрее любой экспоненты. Вместе с оценкой F снизу, это влечет, что $\varphi \succ C\psi$ при любом $C > 0$.

Рассмотрим теперь случай $k < m$. В этом случае $m - k \geq 1$. Росток h возрастает как линейная функция. Легко показать, что композиция $A^{-k}h$ растет быстрее, чем $C \ln$ при любом $C > 0$. Тогда $\exp^{[m-k]} A^{-k}h$ растет быстрее любой степени. Поэтому опять $\varphi \succ C\psi$ при любом $C > 0$.

Отсюда вытекает, что $\Delta - \text{id}$ не осциллирует. Следовательно, в обоих случаях имеем $\Delta \notin \text{Fix}_\infty$, противоречие.

Итак, теорема конечности выведена из аддитивной теоремы о разложении. Последнюю мы выведем из аксиом в следующем пункте.

Тем же методом доказывается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Группа G^n упорядочена соотношением: $g_1 \prec g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1 - g_2 \prec 0$.*

Перейдем теперь к доказательству мультипликативной и аддитивной теорем о разложении.

1.8. Доказательство мультипликативной и аддитивной теорем о разложении, MDT_n и ADT_n . Мы выведем указанные в заголовке теоремы из аксиом. Все утверждения этих теорем, кроме слабой вещественности φ_1 , выводятся из лемм о сдвиге.

Доказательства проводятся индукцией по $m \leq n$. База индукции ($m = 0$) тривиальна. В шаге индукции используется предположение о том, что обе теоремы верны для групп G^m , $m < n$.

1.8.1. *Еще раз о принципе сдвига–сопряжения.* Здесь доказываются леммы о сопряжении, из которых MDT_n выводится в следующих двух подпунктах. Общая идея состоит в том, что каждое свойство сдвига влечет за собой соответствующее свойство сопряжения, как показано в доказательстве следующей леммы.

ЛЕММА 1.7 (лемма о сопряжении 1_n , $\text{CL}1_n$). *Пусть*

$$m \leq n, \quad f, g \in G^{m-1}, \quad \varphi \in \mathcal{F}_{+f}^m, \quad \psi \in \mathcal{F}_{+g}^m, \quad f \prec \prec g \quad \text{в } G^{m-1}.$$

Тогда

$$\text{Ad}(\text{id} + \varphi)(\text{id} + \psi) \in \text{id} + \mathcal{F}_{+g}^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме $\text{SL}3_m$,

$$(\text{id} + \varphi)^{-1} = (\text{id} + \tilde{\varphi}), \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{F}_{+f}^m.$$

Тогда найдутся $\tilde{\psi} \in \mathcal{F}_g^m$ и $\hat{\psi} \in \mathcal{F}_g^m$, для которых выполнена следующая цепочка равенств (объясняемых ниже):

$$(\text{id} + \tilde{\varphi}) \circ (\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi) = (\text{id} + \tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) \circ (\text{id} + \varphi) = \text{id} + \tilde{\psi} \circ (\text{id} + \varphi) = (\text{id} + \hat{\psi}).$$

Первое равенство вытекает из леммы $\text{SL}2_m$, третье – из леммы $\text{SL}3_m$.

ЛЕММА 1.8 (лемма о сопряжении 2_n , $\text{CL}2_n$).

$$\text{Ad}(J^{n-1})H^n = H^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма доказывается с помощью тех же идей, что и предыдущая, только вместо $\text{SL}3_n$ используется $\text{SL}4_n$ (см. п. б)).

ЛЕММА 1.9 (лемма о сопряжении 3_n , $\text{CL}3_n$). *Справедливо равенство:*

$$\text{Ad}(G^{n-1})H^n = H^n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается с помощью тех же идей, что и выше, а также применения теоремы ADT_{n-1} к группе G^{n-1} .

1.8.2. *Доказательство $\text{MDT}_n 1^\circ$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что

$$\tilde{G}^n = \text{Gr}(G^{n-1}, J^{n-1}, H^n) = G^{n-1} \circ J^{n-1} \circ H^n.$$

Для этого достаточно установить, что

$$\text{Ad}(G^{n-1})J^{n-1} = J^{n-1}, \quad \text{Ad}(J^{n-1})H^n = H^n, \quad \text{Ad}(G^{n-1})H^n = H^n.$$

Первое равенство является прямым следствием из определения J^{n-1} , а второе и третье вытекают из лемм $\text{CL}2_n$ и $\text{CL}3_n$ соответственно.

1.8.3. *Доказательство* $\text{MDT}_n 2^\circ$. Надо установить, что для $g \in G^n$ (и даже для $g \in \tilde{G}^n$) выполнено равенство (23) с условиями (24).

Из $\text{MDT}_n 1^\circ$ вытекает, что

$$g = \tilde{g} \circ j \circ h, \quad \tilde{g} \in G^{n-1}, \quad j \in J^{n-1}, \quad h \in H^n.$$

Часто используемое обозначение j для элементов J^{n-1} не следует путать с индексом j ; разница всегда ясна из контекста.

Упомянутые ростки j и h являются произведениями образующих элементов групп J^{n-1} и H^n :

$$\begin{aligned} j &= \prod (\text{id} + \tilde{\varphi}_j), & \tilde{\varphi}_j &\in \mathcal{F}_{1+\tilde{f}_j}^{n-1}, & \tilde{f}_j &\in G^{n-2}, \\ h &= \prod (\text{id} + \psi_j), & \psi_j &\in \mathcal{F}_{0+g_j}^n, & g_j &\in G^{n-1}. \end{aligned}$$

Покажем, что все сомножители в произведении $j \circ h$ можно правильно упорядочить. Допустим сначала, что нам встретились два сомножителя вида

$$(\text{id} + \psi) \circ (\text{id} + \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{F}_{+f}^m, \quad \psi \in \mathcal{F}_{+g}^m, \quad f \prec g \text{ в } G^{m-1}, \quad n-1 \leq m \leq n. \quad (26)$$

Они идут в неправильном порядке; в правильном последний множитель должен идти первым. Но это произведение двух сомножителей имеет вид

$$(\text{id} + \varphi) \text{Ad}(\text{id} + \varphi)(\text{id} + \psi) = (\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \tilde{\psi}), \quad \tilde{\psi} \in \mathcal{F}_{+g}^m.$$

Это вытекает из леммы CL1_m при $m = n-1$ или $m = n$. Теперь два сомножителя идут в правильном порядке.

Допустим теперь, что в (26) отношение $f \prec g$ в G^{m-1} заменено на $f \circ g^{-1} = h \in G_{\text{rap}}^{m-1}$. Тогда произведение двух сомножителей заменится на один множитель. Это делается с помощью первой и третьей лемм о сдвиге. А именно,

$$\varphi \in \mathcal{F}_{+h \circ g}^m = (\mathcal{F}_{+h}^m) \circ g = \mathcal{F}_{+\text{id}}^m \circ g = \mathcal{F}_{+g}^m.$$

Второе равенство вытекает из SL1_m . Здесь φ и ψ принадлежат $\mathcal{F}_{+g}^m$. Поэтому согласно лемме SL3_m и тому, что $\mathcal{F}_{+g}^m$ – векторное пространство, имеем

$$(\text{id} + \varphi) \circ (\text{id} + \psi) = \text{id} + \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} \in \mathcal{F}_{+g}^m.$$

1.8.4. *Доказательство* ADT_n . По модулю слабой вещественности главных членов теорема ADT_n напрямую вытекает из $\text{MDT}_n 2^\circ$. Доказательство проводится двойной индукцией: по глубине n композиции Δ (внешняя индукция) и по числу N сомножителей в произведении (23) (внутренняя индукция). Докажем равенство (25) для произвольного $\Delta \in G^n$ (и даже для $\Delta \in \tilde{G}^n$).

База внешней индукции: $n = 0$. В этом случае теорема тривиальна.

Предположение внешней индукции: теорема ADT_{n-1} верна. Иными словами, для любых $\tilde{g} \in \tilde{G}^{n-1}$ имеем

$$\tilde{g} = a + \sum \tilde{\varphi}_j, \quad a \in \text{Aff}, \quad \tilde{\varphi}_j \in \mathcal{F}_{+\tilde{f}_j}^{k_j}, \quad 0 \leq k_j \leq n-1, \quad (k_j, \tilde{f}_j) \prec (k_{j+1}, \tilde{f}_{j+1}).$$

База внутренней индукции: $N = 0$. В этом случае произведение (23) состоит из одного лишь первого сомножителя и теорема вытекает из только что сформулированного индуктивного предположения.

Шаг внутренней индукции: от $N - 1$ к N . Пусть произведение (23) состоит из N сомножителей. Тогда по предположению внутренней индукции произведение первых $N - 1$ сомножителей записывается в виде суммы (25) с $0 \leq k_j \leq n - 1$ или $0 \leq k_j \leq n$. Рассмотрим первый случай. Последний сомножитель равен $\text{id} + \varphi_N$, где $\varphi_N \in \mathcal{F}_{+f}^m$ и $f \in G^{m-1}$, $m = n - 1$ или $m = n$. Рассмотрим последний случай. Пусть $\tilde{\varphi}_j$ есть то же, что φ_j в (25), $0 \leq k_j \leq n - 1$, $\varphi_N \in \mathcal{F}_{+f}^n$. Тогда $\tilde{\varphi} \circ (\text{id} + \varphi_N) = \tilde{\varphi}_j + \psi_N$, $\psi_N \in \mathcal{F}_{+f}^n$ по второй лемме о сдвиге. Поэтому

$$\begin{aligned} \left(a + \sum \tilde{\varphi}_j\right) \circ (\text{id} + \varphi_N) &= a + \sum \tilde{\varphi}_j + \psi, & \tilde{\varphi}_j &\in \mathcal{F}_{+f_j}^{k_j}, & \psi &\in \mathcal{F}_{+f}^n, \\ 0 \leq k_j \leq n - 1, & & (k_j, f_j) &\prec (k_{j+1}, f_{j+1}). \end{aligned}$$

Таким образом, теорема ADT_n доказана в рассматриваемом случае. Остальные случаи разбираются так же, лишь с небольшими отличиями в технических деталях.

Докажем теперь слабую вещественность члена φ_1 из (25) в случае, когда $a = \text{id}$ и $\Delta \in G^n$, т. е. отображение Δ вещественно на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Здесь различие между $\tilde{G}_n$ и G_n играет ключевую роль.

1.8.5. Критерий слабой вещественности.

ЛЕММА 1.10. Пусть $m = n - 1$ или $m = n$. Коцепь F класса $\mathcal{FC}^m$ слабо вещественна тогда и только тогда, когда мнимая часть хотя бы одной из компонент F^u , F^l убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее, чем любая функция вида $\exp(-\nu\xi)$, $\nu > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* В дальнейшем нам потребуется лишь достаточность, поэтому только ее здесь и докажем. Пусть $|\text{Im } F^u| \prec \exp(-\nu\xi)$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ для любого $\nu > 0$. Тогда то же самое верно для $|\text{Im } F^l|$ и $|\text{Re}(F^u - F^l)|$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, поскольку кограница коцепи F убывает быстрее любой экспоненты (см. теорему 1.4, включенную в список аксиом). Напомним, что мы определили оператор симметрии $S: F \rightarrow SF$ формулой $SF(\zeta) = \overline{F(\bar{\zeta})}$. Положим $IF = F - SF$. Коцепь F слабо вещественна тогда и только тогда, когда $IF \equiv 0$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Рассмотрим коцепь $IF = SF - F$. Она убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты $\exp(-\nu\xi)$. По второму утверждению теоремы Фрагмена–Линделёфа (см. теорему 1.3) $SF - F \equiv 0$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Отсюда вытекает, что F слабо вещественна.

1.8.6. Завершение доказательства аддитивной теоремы о разложении. Допустим теперь, что $\Delta \in G^n$ и в разложении (25) имеем $a = \text{id}$. Надо доказать, что член этого разложения, следующий после a (обозначим его через φ), слабо вещественен. Запишем

$$\varphi = F \circ \exp^{[k]} \circ f$$

для некоторого $k \leq n$, $F \in \mathcal{FC}^k$, $f \in G^{k-1}$. Любой член ψ , следующий за φ в разложении (25), имеет вид

$$\psi = G \circ \exp^{[m]} \circ \tilde{f}, \quad G \in \mathcal{FC}_+^m, \quad \tilde{f} \in G^{m-1}, \quad (k, f) \prec (m, \tilde{f}).$$

Он убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее, чем φ , как показано в п. 1.7. Тем же способом доказывается, что композиция $\psi \circ f^{-1} \circ \ln^{[k]}$ убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты.

С другой стороны, сумма (25) вещественна на вещественной оси, так как $\Delta \in G^n$. Поэтому

$$\operatorname{Im} F = - \sum \operatorname{Im} \psi_j \circ f^{-1} \circ \ln^{[k]}.$$

Правая часть убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты. По доказанному выше критерию F (а значит, и φ) слабо вещественна.

Этим завершено доказательство теоремы ADT_n .

1.9. Стратегия II: дальнейшее доказательство теоремы конечности. Закончилась первая часть § 1. Его вторая часть начинается с общего обзора оставшихся элементов доказательства. Их иллюстрирует диаграмма, изображенная на рис. 3.

Рис. 3

В прямоугольниках помещены названия основных вспомогательных утверждений, а также самой теоремы конечности. Стрелки, как обычно, означают импликации. Сплошные стрелки – это уже доказанные импликации, а пунктирные – те, которые предстоит доказать. В нижний левый прямоугольник не входят никакие стрелки, так как его содержание взято из индуктивного предположения. Шаг индукции (доказательство свойств допустимых ростков класса $n + 1$) опирается на все предыдущие результаты и будет проведен в § 5. Он обозначается верхним прямоугольником.

Первый шаг состоит в построении модели, для которой выполнены изложенные выше аксиомы. Это делается во второй части настоящего параграфа. В то же время определяются допустимые ростки, о которых идет речь в левом нижнем прямоугольнике. Коцепи классов $\mathcal{FC}_0^n$ и $\mathcal{FC}_1^{n-1}$ характеризуются

двумя основными свойствами: регулярностью и разложимостью. Эти свойства отвечают двум верхним прямоугольникам в правом нижнем углу схемы. Свойство Фрагмена–Линделёфа опирается только на регулярность, тогда как для оценки снизу требуются и регулярность и разложимость. В доказательствах лемм о сдвиге и теоремы Фрагмена–Линделёфа используются некоторые свойства допустимых ростков. Индуктивное предположение состоит в том, что эти свойства выполнены для допустимых ростков класса n . По этой причине в левый нижний прямоугольник схемы не входят никакие стрелки.

Чтобы завершить шаг индукции, мы доказываем в § 5 требуемые свойства для допустимых ростков класса $n + 1$. Доказательство использует все предыдущие результаты. На рис. 3 это показано широкой стрелкой наверху.

Леммы о сдвиге доказываются в § 3 (что касается регулярности) и в § 4 (что касается разложимости). Теорема Фрагмена–Линделёфа доказывается в § 2.

Перейдем к явному определению коцепей класса n , т. е. к построению модели, для которой выполнены аксиомы.

1.10. Допустимые ростки диффеоморфизмов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Пусть Ω – некоторое множество стандартных областей. Росток диффеоморфизма $\sigma_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$ называется *допустимым* класса Ω (или Ω -допустимым), если выполнены следующие условия:

1) обратный росток ρ допускает биголоморфное продолжение в некоторую стандартную область, и для каждой стандартной области $\Omega \in \Omega$ найдется такая стандартная область $\tilde{\Omega} \in \Omega$, что ρ биголоморфно отображает $\tilde{\Omega}$ внутрь Ω ;

2) производная ρ' ограничена на $\tilde{\Omega}$;

3) существует $\mu > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \rho < \mu \xi$ на $\tilde{\Omega}$;

4) при каждом $\nu > 0$ имеем $\exp \operatorname{Re} \rho \succ \nu \xi$ на $\tilde{\Omega}$.

Продолжение ростка $\sigma_{\mathbb{R}}$ на область $\rho\tilde{\Omega}$ обозначается через σ и также называется Ω -допустимым ростком. Если речь идет просто о допустимом (а не Ω -допустимом) ростке, то это по определению означает, что в качестве Ω рассматривается класс всех стандартных областей.

ПРИМЕР 1.2. Ростки $\mu\zeta$, ζ^μ при $\mu > 1$, $\exp \mu\zeta$ при $\mu \in [0, 1)$ – допустимы, а росток $\exp \zeta$ – нет (не выполнено условие 4) определения 1.8).

1.11. Регулярные коцепи. Два отображения-коцепи или две функциональные коцепи называются *эквивалентными*, если существует стандартная область, на которой они определены и совпадают. Класс эквивалентности отображений-коцепей (или функциональных коцепей) называется *ростком отображения-коцепи* (или функциональной коцепи). Представители ростка по определению рассматриваются в стандартных областях.

1.11.1. Регулярные разбиения. Сначала определим регулярные разбиения стандартных областей. Выберем и зафиксируем подмножество Ω множества всех стандартных областей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Пусть дано разбиение Ξ стандартной области $\Omega \in \Omega$. Образом разбиения Ξ под действием допустимого ростка диффеоморфизма σ класса Ω называется разбиение $\sigma_*\Xi$ той стандартной области $\tilde{\Omega} \in \Omega$, в которой представитель ростка $\rho = \sigma^{-1}$, переводящий $\tilde{\Omega}$ внутрь Ω , определен и

биголоморфен. Области разбиения $\sigma_*\Xi$ определяются равенствами

$$(\sigma_*\Xi)_j = \sigma(\Xi_j \cap \rho\tilde{\Omega}),$$

где Ξ_j – это области разбиения Ξ . Область $(\sigma_*\Xi)_j$ по определению соответствует области Ξ_j .

Рис. 4

ПРИМЕР 1.3. На рис. 4 изображены образы стандартного разбиения под действием диффеоморфизмов $\exp \mu\zeta$, $\mu \in (0, 1)$; ζ^μ , $\mu > 1$; $\mu\zeta$, $\mu > 0$. В первом случае области разбиения-образа – это обычные секторы, во втором – “параболические секторы”, а в третьем – горизонтальные полуполосы.

Рассмотрим произвольную область Ω и ее разбиение Σ . Граничная кривая области разбиения называется *внешней*, если она содержится в $\partial\Omega$, и *внутренней* в противном случае. Объединение всех внутренних граничных кривых разбиения Σ называется *границей* Σ и обозначается через $\partial\Sigma$. Напомним, что Ξ_{st} означает стандартное разбиение (см. определение 0.9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.10. Рассмотрим набор

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N) \quad (27)$$

допустимых ростков. *Регулярное разбиение* стандартной области Ω определяется как произведение

$$\Xi = \prod_1^N \sigma_{j*}\Xi_{\text{st}}. \quad (28)$$

Это разбиение называется *разбиением типа σ* и *числового типа N* .

Напомним, что произведение разбиений определено в п. 1.5.1.

Наряду с ε -окрестностями областей разбиения (28) удобно рассматривать их обобщенные ε -окрестности, определяемые следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.11. Пусть (28) – регулярное разбиение типа σ , см. (27), стандартной области Ω , а $\tilde{\Omega}$ – другая стандартная область такая, что для любых $\sigma_j \in \sigma$, $\rho_j = \sigma_j^{-1}$ имеем $\rho_j\Omega \subset \Omega$. Пусть Ξ_j – это области стандартного разбиения Ξ_{st} области Ω . Рассмотрим область

$$U = \tilde{\Omega} \bigcap_1^N \sigma_j(\Xi_{l_j})$$

разбиения (28) области $\tilde{\Omega}$. Здесь l_j выбраны так, что $U \neq \emptyset$.

Пусть A^ε означает ε -окрестность множества A в $\mathbb{C}$. Тогда *обобщенная ε -окрестность* $U^{(\varepsilon)}$ области U определяется как

$$U^{(\varepsilon)} = \tilde{\Omega}^\varepsilon \bigcap_{j=1}^N \sigma_j(\Xi_{l_j}^\varepsilon).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.12. Для любой граничной кривой разбиения (28), являющейся общей границей двух областей разбиения, ее *обобщенная ε -окрестность* определяется как пересечение обобщенных ε -окрестностей двух указанных областей разбиения. Объединение всех таких окрестностей обозначается через $\partial\Xi^{(\varepsilon)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Любое регулярное разбиение типа σ порождает семейство функциональных коцепей, заданных на обобщенных ε -окрестностях границы разбиения. Эти коцепи называются *коцепями оснащения* и определяются следующим образом. Функция коцепи, заданная в окрестности граничной кривой $\mathcal{L}$, обозначается через $m_{\sigma, C, \varepsilon, \mathcal{L}}$ и равна

$$m_{\sigma, C, \varepsilon, \mathcal{L}} = \sum \exp(-C \exp \operatorname{Re} \rho_j), \quad \rho_j = \sigma_j^{-1}, \quad (29)$$

где суммирование ведется по тем j , для которых $\mathcal{L}$ является внутренней граничной кривой разбиения $\sigma_{j*}\Xi_{st}$. Коцепь с компонентами (29) обозначается через $m_{\sigma, C, \varepsilon}$. Разбиение, рассматриваемое вместе с набором всех коцепей оснащения, т. е. коцепей вида (29) для всех положительных C , ε , называется *оснащенным*.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Луч $(\mathbb{R}^+, \infty)$ является граничной линией разбиения $\sigma_{j*}\Xi_{st}$ для всех j . Поэтому коцепь оснащения на этом луче равна сумме (29), взятой по всем $j = 1, \dots, N$.

1.12. Регулярные коцепи типа D . Следующее определение является основным в этом пункте. Его условия носят названия, которые приведены сразу после их номеров. Как всегда, $\xi = \operatorname{Re} \zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.14. ε -*продолжимый росток* регулярной коцепи класса Ω – это росток, имеющий представителя (называемого *регулярной функциональной коцепью*), заданного в ε -окрестности некоторой (зависящей от ростка) стандартной области Ω класса Ω со следующими свойствами.

1) (Разбиение). Соответствующее разбиение является стандартным разбиением типа $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, а ростки σ_j – допустимыми ростками класса Ω , причем разбиение оснащено (последнее условие выполняется автоматически).

2) (Продолжимость). Для малых ε все функции, образующие коцепь, голоморфно продолжаются в обобщенные ε -окрестности соответствующих им областей разбиения.

3) (Рост). Модуль коцепи оценивается сверху в Ω функцией $\exp \nu \xi$ для некоторого $\nu \in \mathbb{R}$, зависящего от коцепи. Если ν в этой оценке можно выбрать отрицательным, то коцепь называется *быстро убывающей*. Если модуль коцепи оценивается сверху функцией $C|\zeta|^{-5}$ для некоторого $C > 0$, то коцепь называется *слабо убывающей*.

4) (Кограница). Все функции, образующие кограницу коцепи, допускают аналитическое продолжение в обобщенные ε -окрестности граничных кривых разбиения и оцениваются там сверху по модулю соответствующими функциями

коцепи оснащения $m_{\sigma, C, \varepsilon}$ для некоторых констант $C > 0$, $\varepsilon > 0$, зависящих от исходной коцепи.

Множество всех регулярных функциональных коцепей обозначается через $\mathcal{FC}_{\text{reg}}$, а множество всех быстро убывающих регулярных функциональных коцепей – через $\mathcal{FC}_{\text{reg}}^+$ ($\mathcal{FC}$ от functional cochains).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. ε -продолжимый росток регулярного отображения-коцепи – это росток, поправка которого является ε -продолжимым ростком быстро убывающей регулярной функциональной коцепи. Аналогично определяется росток слабо регулярного ε -продолжимого отображения-коцепи, только поправка должна быть слабо убывающей, а не быстро убывающей. Множества всех регулярных и слабо регулярных отображений-коцепей обозначаются через $\mathcal{MC}_{\text{reg}}$ и $\mathcal{MC}_{\text{wt}}$ ($\mathcal{MC}$ от map-cochains, wt от weakly regular).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.16. Пусть D – произвольное множество ростков допустимых диффеоморфизмов. Росток функциональной коцепи или отображения-коцепи называется *регулярным типа D* , если соответствующее ему разбиение имеет тип $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)$, где $\sigma_j \in D$. Эти ростки обозначим через $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D)$, $\mathcal{MC}_{\text{reg}}(D)$. Множества ростков быстро или слабо убывающих функциональных коцепей класса D и множество слабо регулярных отображений-коцепей класса D обозначаются соответственно через $\mathcal{FC}_{\text{reg}}^+(D)$, $\mathcal{FC}_{\text{wt}}(D)$, $\mathcal{MC}_{\text{wt}}(D)$.

1.13. Регулярные коцепи в нестандартных областях. Регулярные функциональные коцепи удовлетворяют теореме Фрагмена–Линделёфа при условии, что они допускают специальные комплексные продолжения, называемые *реализациями*. Эти продолжения определяются в этом и следующем пунктах.

Рассмотрим любую связную область $\hat{\Omega}$, содержащуюся в некоторой стандартной области Ω класса Ω и содержащую $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Пусть $\hat{\Omega}^{(\varepsilon)}$ – любое возрастающее семейство областей:

$$\hat{\Omega}^{(\varepsilon)} \subset \hat{\Omega}^{(\varepsilon')} \quad \text{при} \quad \varepsilon < \varepsilon', \quad \hat{\Omega}^{(0)} = \hat{\Omega}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.17. Разбиение (28) типа (27) области $\hat{\Omega}$ – это пересечение разбиения (28) области Ω с областью $\hat{\Omega}$. Точнее, каждая область W этого разбиения является пересечением некоторой области U разбиения (28) с областью $\hat{\Omega}$. *Обобщенной ε -окрестностью* области W называется пересечение

$$W^{(\varepsilon)} = \hat{\Omega}^{(\varepsilon)} \cap U^{(\varepsilon)}.$$

Обобщенные ε -окрестности граничных кривых разбиения определяются так же, как и выше. *Коцепи оснащения* для разбиения (28) области $\hat{\Omega}$ определяются формулой (29) с тем же самым соглашением о суммировании.

После этого множество регулярных коцепей типа (27) становится корректно определенным в любой области $\hat{\Omega}$ описанного выше вида, только свойство продолжимости следует модифицировать: обобщенные ε -окрестности понимаются в смысле определения 1.17.

Важный пример дается *реализациями регулярных коцепей*, определяемыми в следующем пункте.

1.14. Реализации. Прежде чем дать общее определение, начнем с примеров.

Рассмотрим две коцепи $F, G \in \mathcal{NC}$. По определению обе соответствуют стандартному разбиению. Рассмотрим также два аффинных отображения $a: \zeta \mapsto \nu_1^{-1}\zeta$, $b: \zeta \mapsto \nu_2^{-1}\zeta$, $\nu_1 > \nu_2$, и две коцепи $\tilde{F} = \text{Ad}(a)F$, $\tilde{G} = \text{Ad}(b)G$, соответствующие разбиениям $\nu_{1*}\Xi_{\text{st}}$, $\nu_{2*}\Xi_{\text{st}}$. Их сумма $H = \tilde{F} + \tilde{G}$ является коцепью типа $(a^{-1}, b^{-1}) = (\nu_1, \nu_2)$, где ν_j означает отображение $\zeta \mapsto \nu_j\zeta$. Кограница δH оценивается коцепью оснащения

$$m = \exp(-C \exp \nu_1^{-1}\xi) + \exp(-C_1 \exp \nu_2^{-1}\xi)$$

в окрестности границы разбиения $\Xi = \nu_{1*}\Xi_{\text{st}} \cdot \nu_{2*}\Xi_{\text{st}}$. Первое слагаемое в выражении для m доминирует над вторым: при $C' > C$ имеем

$$m \prec \exp(-C' \exp \nu_1^{-1}\xi).$$

Рассмотрим теперь коцепь

$$H_1 = \text{Ad}(a)F^u + G \quad \text{на } \nu_1\Pi_{\text{main}}.$$

Первое слагаемое голоморфно в $\Omega_{(1)} = \nu_1\Pi_{\text{main}}$. Поэтому коцепь H_1 соответствует разбиению $\nu_{2*}\Xi_{\text{st}}$ области $\Omega_{(1)}$. В окрестности границы этого разбиения имеем

$$\delta H_1(\zeta) \prec \exp(-C_1 \exp \nu_2^{-1}\xi).$$

Кограница коцепи H_1 оценивается коцепью оснащения, убывающей быстрее, чем коцепь оснащения, оценивающая кограницу коцепи H .

Коцепи H и H_1 совпадают на $\Omega_{(1)} \cap \{\eta > 0\}$. В дальнейшем H_1 называется 1-реализацией H . Преимущество этой реализации в том, что ее кограница оценивается более быстро убывающей коцепью оснащения, чем кограница самой H .

Рассмотрим теперь сумму

$$H_{1,1} = \text{Ad}(a)F^u + \text{Ad}(b)G^l.$$

Эта сумма является голоморфной функцией в области $\Omega_{1,1} = \nu_2^{-1}\Pi_{\text{main}}^+$ (так что кограницы нет совсем) и совпадает с H_1 на $\Omega_{1,1} \cap \{\eta < 0\}$.

Коцепи H_1 и $H_{1,1}$ – это примеры того, что будет называться 1- и (1,1)-реализациями коцепи H . Реализации многократно используются, например, в доказательстве теоремы Фрагмена–Линделёфа. Перейдем к общим определениям.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.18. Класс Ω стандартных областей называется *правильным*, если выполнены следующие условия.

- 1) Для любого $C > 0$ произвольная область класса Ω содержит область того же класса, расстояние от которой до границы первой области не меньше, чем C .
- 2) Пересечение любых двух областей класса Ω содержит область того же класса.

Рассмотрим какой-либо правильный класс Ω стандартных областей (см. определение 1.18) и какое-либо семейство D Ω -допустимых ростков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.19. Два допустимых ростка σ_1 и σ_2 называются *слабо эквивалентными*, $\sigma_1 \stackrel{w}{\sim} \sigma_2$, если их композиционное частное $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ имеет ограниченную поправку на $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

Положим

$$\Pi_{\text{main}} = \Pi_* \cup \Pi_1, \quad \Pi_{\text{main}}^+ = \Pi_* \cup \Pi_0, \quad (30)$$

$$\Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)} = \Pi_*^{(\varepsilon)} \cup \Pi_1^\varepsilon, \quad \Pi_{\text{main}}^{+(\varepsilon)} = \Pi_*^{(\varepsilon)} \cup \Pi_0^\varepsilon. \quad (31)$$

Напомним, что через Π_j^ε обозначается ε -окрестность множества Π_j , обозначение Π_* было введено в (4), а Π_0, Π_1 – это полосы стандартного разбиения, примыкающие к $(\mathbb{R}^+, \infty)$ сверху и снизу соответственно.

Допустим, что класс D обладает следующими свойствами.

• *Упорядоченность.* Для любых различных ростков $\sigma_1, \sigma_2 \in D$ разность $\sigma_1 - \sigma_2$ не обращается в нуль на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Введем отношение порядка

$$\sigma_1 \succ \sigma_2 \iff \sigma_1 - \sigma_2 \succ 0 \iff \sigma_1 - \sigma_2 > 0 \text{ на } (\mathbb{R}^+, \infty).$$

• *Монотонность.*

1) Если $\sigma_1 \succ \sigma_2 \in D$ и ростки σ_1, σ_2 не являются слабо эквивалентными, то

$$(\sigma_1 \Pi_{\text{main}} \cap \Omega, \infty) \supset (\sigma_2 \Pi_{\text{main}} \cap \Omega, \infty). \quad (32)$$

2) Если ростки $\sigma_1, \sigma_2 \in D$ слабо эквивалентны, то их можно занумеровать так, что для любых $\varepsilon > \delta > 0$ имеем

$$(\sigma_1 \Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)} \cap \Omega, \infty) \supset (\sigma_2 \Pi_{\text{main}}^{(\delta)} \cap \Omega, \infty). \quad (33)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.20. Пусть ростки σ_1, σ_2 либо не являются слабо эквивалентными и $\sigma_1 \succ \sigma_2$, либо являются слабо эквивалентными и выполнено (33). Тогда будем использовать обозначение $\sigma_1 \triangleright \sigma_2$.

В силу симметрии относительно вещественной оси из (32), (33) вытекает, что

$$(\sigma_1 \Pi_{\text{main}}^+ \cap \Omega, \infty) \supset (\sigma_2 \Pi_{\text{main}}^+ \cap \Omega, \infty). \quad (34)$$

$$(\sigma_1 \Pi_{\text{main}}^{+(\varepsilon)} \cap \Omega, \infty) \supset (\sigma_2 \Pi_{\text{main}}^{+(\delta)} \cap \Omega, \infty) \quad (35)$$

для всех ε, δ с $1 > \varepsilon > \delta > 0$.

Любое конечное подмножество σ класса D , обладающего свойствами упорядоченности и монотонности, можно записать в упорядоченном виде:

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N), \quad \sigma_1 \triangleright \sigma_2 \triangleright \dots \triangleright \sigma_N. \quad (36)$$

Определим теперь области, в которых заданы реализации коцепей класса (36), а также обобщенные ε -окрестности этих областей. Введем следующие области типов (σ, k) , (σ, k^+) и (σ, k, l) при $0 < k \leq N$, $0 < l \leq N - k$:

$$\Omega_{\sigma, k} = \sigma_k \Pi_{\text{main}} \cap \Omega, \quad \Omega_{\sigma, k}^+ = \sigma_k \Pi_{\text{main}}^+ \cap \Omega, \quad \Omega_{\sigma, k, l} = \Omega_{\sigma, k} \cap \Omega_{\sigma, k+l}^+. \quad (37)$$

Обобщенные ε -окрестности этих областей определяются следующим образом:

$$\Omega_{\sigma, k}^{(\varepsilon)} = \sigma_k \Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)} \cap \Omega^\varepsilon, \quad \Omega_{\sigma, k}^{+(\varepsilon)} = \sigma_k \Pi_{\text{main}}^{+(\varepsilon)} \cap \Omega^\varepsilon, \quad \Omega_{\sigma, k, l}^{(\varepsilon)} = \Omega_{\sigma, k}^{(\varepsilon)} \cap \Omega_{\sigma, k+l}^{+(\varepsilon)}, \quad (38)$$

где $\Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)}, \Pi_{\text{main}}^{+(\varepsilon)}$ – те же, что в (31).

Допустим, что никакие два ростка из (36) не являются слабо эквивалентными. Тогда чем меньше номер j , тем больше росток σ_j (он растет на бесконечности быстрее, чем все последующие). Чем больше росток σ_j , тем больше область $\Omega_{\sigma, j}$. Если допустить слабую эквивалентность некоторых ростков σ_j ,

σ_{j+1} , то будет выполнено включение (33). В обоих случаях при $j < k$ для всех $\varepsilon > \delta > 0$ имеем:

$$(\Omega_{\sigma,k}^{(\delta)}, \infty) \subset (\Omega_{\sigma,j}^{(\varepsilon)}, \infty), \quad (\Omega_{\sigma,k}^{+(\delta)}, \infty) \subset (\Omega_{\sigma,j}^{+(\varepsilon)}, \infty). \quad (39)$$

При этом если $m > l$, то

$$(\Omega_{\sigma,k,m}^{(\delta)}, \infty) \subset (\Omega_{\sigma,k,l}^{(\varepsilon)}, \infty). \quad (40)$$

Заметим, что области $\Omega_{\sigma,k}$ и $\Omega_{\sigma,k}^+$ симметричны друг другу относительно $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.21. Разбиения типов (σ, k) , (σ, k^+) , (σ, k, l) для наборов σ вида (36) – это разбиения вида

$$\prod_{j=a}^N \sigma_j * \Xi_{\text{st}} \quad (41)$$

области Ω , где $a = k+1, k+1, k+l+1$ для $\Omega = \Omega_{\sigma,k}, \Omega_{\sigma,k}^+, \Omega_{\sigma,k,l}$ соответственно.

В силу соотношений монотонности (39) и (40) разбиения типа (σ, k) обладают следующим ключевым свойством: они совпадают с разбиениями типа σ области $\Omega_{\sigma,k}$. А именно, при любом $j \leq k$ единственная внутренняя граничная линия разбиения типа σ , принадлежащая $\sigma_j \partial \Xi_{\text{st}}$ – это $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Действительно, даже при $j = k$ линия $\sigma_k(\eta = \pi)$ содержится в верхней границе области $\Omega_{\sigma,k}$. При $j \neq 0, 1$ линии $\sigma_k(\eta = \pi j)$ не пересекают $\Omega_{\sigma,k}$.

Коцепи оснащения m_σ и $m_{\sigma,k}$, соответствующие разбиениям типа σ или (σ, k) области $\Omega_{\sigma,k}$, совпадают всюду, кроме обобщенной ε -окрестности луча $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Но на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ имеем

$$m_\sigma = \sum_{j=1}^N \exp(-C \exp \rho_j), \quad m_{\sigma,k} = \sum_{j=k+1}^N \exp(-C \exp \rho_j). \quad (42)$$

Благодаря упорядоченности ростков σ_j в наборе σ , коцепь оснащения m_σ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ характеризуется своим первым членом:

$$\exp(-C \exp \rho_1) \succ m_\sigma|_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \succ \exp(-C' \exp \rho_1) \quad (43)$$

для некоторого $C' > C$. Действительно, пусть росток σ_1 слабо эквивалентен σ_j . Тогда $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_j = \text{id} + \Phi$, где Φ ограничено на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Пусть $|\Phi| < D$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp(-C \exp \rho_1 \circ \rho_j^{-1}(\xi)) &= \exp(-C \exp \sigma_1^{-1} \circ \sigma_j(\xi)) = \exp(-C \exp(\xi + \Phi(\xi))) \\ &\succ \exp(-(C \exp(-D)) \exp \xi) \end{aligned}$$

и

$$\exp(-C \exp \rho_1) \succ \exp(-(C \exp(-D)) \exp \rho_j).$$

Если σ_1 не является слабо эквивалентным σ_j и $\sigma_1 \succ \sigma_j$, то предыдущее вычисление показывает, что

$$\exp(-C \exp \rho_j) = o(1) \exp(-C \exp \rho_1).$$

Отсюда вытекает (43).

Те же самые рассуждения дают на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ оценки

$$\exp(-C \exp \rho_{k+1}) \succ m_{\sigma,k} \succ \exp(-C' \exp \rho_{k+1}). \quad (44)$$

Поэтому регулярные коцепи, соответствующие разбиениям типа (σ, k) на $\Omega_{\sigma,k}$, имеют “меньшие кограницы” и являются “более голоморфными”, чем сужения коцепей типа σ на $\Omega_{\sigma,k}$.

Это дает мотивировку для следующего определения, опирающегося на определение 1.17 из п. 1.13.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.22. Пусть σ – как в (36), $0 < k \leq N$, $0 < l \leq N - k$. *Регулярная коцепь типа (σ, k)* (или (σ, k^+) , (σ, k, l)) – это регулярная коцепь, заданная на соответствующей области (37) и соответствующая разбиению типа (σ, k) (или (σ, k^+) , (σ, k, l) соответственно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.23. Пусть F – регулярная функциональная коцепь на стандартной области Ω , $0 < k \leq N$, $0 < l \leq N - k$. Регулярная коцепь $F_{(k)}$ (соответственно $F_{(k)}^+$ или $F_{(k,l)}$) называется *k-реализацией* (соответственно k^+ - или (k, l) -реализацией) коцепи F , если выполнены следующие условия.

- Она имеет тип (σ, k) (соответственно тип (σ, k^+) или (σ, k, l)).
- Она совпадает с F на пересечении своей области определения с верхней полуплоскостью:

$$F = F_{(k)} \quad \text{на} \quad \sigma_k \Pi_1 \cap \Omega, \quad (45)$$

или соответственно совпадает с F на пересечении своей области определения с нижней полуплоскостью:

$$F = F_{(k)}^+ \quad \text{на} \quad \sigma_k \Pi_0 \cap \Omega, \quad (46)$$

или соответственно совпадает с $F_{(k)}$ на пересечении своей области определения с нижней полуплоскостью:

$$F_{(k,l)} = F_{(k)} \quad \text{на} \quad \Omega_{\sigma,k,l} \cap \{\eta < 0\}. \quad (47)$$

Сама коцепь F называется своей *0-реализацией* и обозначается через $F_{(0)}$: $F = F_{(0)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. (k, l) -реализации можно определить только для коцепей числового типа $N > 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.24. Регулярная коцепь типа (36) называется

- *слабо реализуемой*, если она имеет все k -реализации при $0 < k \leq N$;
- *почти реализуемой*, если она имеет все k - и k^+ -реализации при $0 < k \leq N$;
- *абсолютно реализуемой*, если она имеет числовой тип $N > 1$ и обладает всеми k -, k^+ - и (k, l) -реализациями, или если она имеет числовой тип 1 и почти реализуема, или если она является голоморфной функцией.

Для пояснения последующих определений напомним, что $\Pi_{\text{main}} = \Pi_1 \cup \Pi_*$, $\Pi_{\text{main}}^+ = \Pi_0 \cup \Pi_*$, а пересечение области $\Omega_{\sigma,k}$ (см. (37)) с верхней полуплоскостью равно $\sigma_k \Pi_1 \cap \Omega$. Аналогично, $\Omega_{\sigma,k}^+ \cap \{\eta < 0\} = \sigma_k \Pi_0 \cap \Omega$.

ПРИМЕР 1.4. Нормализующие коцепи абсолютно реализуемы. Действительно, они являются коцепями числового типа 1, так что для них абсолютная

реализуемость означает почти реализуемость. Для последней требуется существование двух реализаций: $F_{(1)}$ типа 1 и $F_{(1)}^+$ типа 1^+ . Эти реализации существуют согласно добавлению к теореме о секториальной нормализации и являются голоморфными функциями:

$$F_{(1)} = F^u, \quad F_{(1)}^+ = F^l.$$

Этот пример – в некотором смысле основной.

Необходимость рассмотрения реализаций мотивируется, помимо прочего, еще и следующим аргументом. Чтобы удовлетворять теореме Фрагмена–Линделёфа, регулярная коцепь F должна быть слабо реализуемой, т. е. нужны все k -реализации. Чтобы коцепь SF удовлетворяла теореме Фрагмена–Линделёфа, она также должна быть слабо реализуемой. Но справедливо равенство

$$(SF)_k = S(F_k^+).$$

Отсюда вытекает, что F должна быть почти реализуемой. Мотивировку абсолютной реализуемости мы дадим во второй части настоящей работы при обсуждении подстановок медленно убывающих ростков в функциональные коцепи.

1.15. Стандартные области, допустимые ростки и регулярные коцепи класса n . В этом пункте вводятся свойства регулярности, налагаемые на коцепи класса n . А именно, будут определены регулярные коцепи класса n и типа 0 или 1. В следующем пункте мы определим свойства разложимости, завершая тем самым построение модели, для которой выполняются требуемые аксиомы.

1.15.1. Мотивировка: регулярность. Ниже мы определяем стандартные области и допустимые ростки класса n . Зависимость понятия стандартной области от n связана со следующим требованием: для каждого ростка, обратного к допустимому ростку класса n и любой области класса n должна существовать другая область того же класса, отображаемая этим ростком внутрь данной. Таким образом, класс областей должен соответствовать классу ростков.

Из лемм о сдвиге вытекает, что сложность структуры коцепей, находящихся на уровне m , возрастает вместе с этим уровнем. Таким образом, класс допустимых ростков, используемый в определении коцепей класса m , должен зависеть от m . Более подробный анализ этих лемм приводит к появлению определяемых ниже множеств D_0^n и D_1^{n-1} допустимых ростков класса n .

1.15.2. Стандартные области класса n . Напомним, что стандартная область $\Omega_{m,\varepsilon,C}$ класса m , соответствующая константам $\varepsilon > 0$, $C > 0$, определена формулами (13) и (14). Свойства этих областей обсуждаются в п. 1.5.2.

1.15.3. Допустимые ростки и регулярные коцепи класса n . Мы определим два множества Ω_n -допустимых и Ω_{n-1} -допустимых ростков класса n и типов 0 и 1 соответственно: D_0^n и D_1^{n-1} . Тем самым возникают следующие множества регулярных коцепей класса n :

$$\mathcal{FC}_{0\text{reg}}^n = \mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_0^n), \quad \mathcal{FC}_{1\text{reg}}^{n-1} = \mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_1^{n-1}).$$

При $m < n$ определения те же, но с заменой n на m . Множество регулярных коцепей класса 1 типа 1 особенно просто и мы опишем его сейчас.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.25. *Регулярные секториальные коцепи* – это коцепи класса $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D^0)$, где

$$D^0 = \{\exp \mu \zeta \mid \mu \in (0, 1)\}.$$

Множество регулярных коцепей класса 1 типа 0 также устроено просто; эти коцепи даже называются *простыми*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.26. *Регулярные простые коцепи* – это коцепи, принадлежащие классу $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D^1)$, где

$$D^1 = \{\nu \zeta \mid \nu \in \mathbb{R}^+\}.$$

Перейдем к определению классов D_0^n и D_1^{n-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.27. Множество Ω_n -допустимых ростков класса n и типа 0 определяется как

$$D_0^n = \{\exp \circ A^{1-n} g \mid g \in G_{\text{slow}}^{n-1-}\}.$$

ПРИМЕР 1.5. Множество D_1^0 эквивалентно множеству D^0 в следующем смысле. Множество $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_1^0)$ регулярных коцепей класса 1 типа 1 совпадает с множеством регулярных секториальных коцепей. Это означает, что один и тот же набор компонент одновременно соответствует слегка различным покрытиям типов D_1^0 и D^0 и удовлетворяет всем требованиям определения 1.14 для каждого из этих покрытий.

Определение класса D_1^{n-1} более сложно. Сначала обозначим через D_*^{n-1} множество

$$D_*^{n-1} = D_{\text{slow}}^{n-1+} \cup D_{\text{rap}}^{n-1},$$

$$D_{\text{slow}}^{n-1+} = \{A^{1-n} g \mid g \in G_{\text{slow}}^{n-2+}\}, \quad D_{\text{rap}}^{n-1} = \{A^{1-n} g \mid g \in G_{\text{rap}}^{n-2}\}.$$

Пусть $\underline{\mathbf{TO}}^0$ – множество тех отображений класса $\underline{\mathbf{TO}}$, для которых аффинный сомножитель в разложении (10) тождественен:

$$\underline{\mathbf{TO}}^0 = (\mathcal{H} \circ \exp \circ \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \cap \mathcal{M}_{\mathcal{R}}).$$

Для каждого $n \geq 3$ рассмотрим множество

$$\mathcal{L}^{n-1} = \{A^{1-n} g \mid g \in G^{n-1}, g = \text{Ad}(f) A^{n-2} h, \\ h \in \ln \circ \underline{\mathbf{TO}}^0, f \in G^{n-2}, \lambda_{n-2}(f) = 0\}.$$

Заметим, что эта формула бессмысленна при $n \leq 2$. Действительно, если $n \leq 2$, то множество $\{f \in G^{n-2}, \lambda_{n-2}(f) = 0\}$ пусто. При $n \leq 3$ положим $\mathcal{L}^{n-1} = \{\text{id}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.28. Множество Ω_{n-1} -допустимых ростков класса n и типа 1 определяется как

$$D_1^{n-1} = D_0^{n-1} \cup D_*^{n-1} \circ \mathcal{L}^{n-1}.$$

ПРИМЕР 1.6. Множество D_1^0 эквивалентно множеству D^1 в следующем смысле: множество $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_1^0)$ регулярных коцепей класса 1 типа 1 совпадает с множеством регулярных простых коцепей.

Для рассмотрения классов $\mathcal{FC}_{\text{reg}}$ при $D = D_0^n$ или D_1^{n-1} потребуется следующая лемма.

ЛЕММА 1.11. 1) Оба класса D_0^n и D_1^{n-1} состоят из Ω_n - и Ω_{n-1} -допустимых ростков соответственно.

2) Каждый из классов D_0^n, D_1^{n-1} обладает свойствами упорядоченности и монотонности, введенными в п. 1.14.

Множества D_0^m, D_1^{m-1} определяются для любого $m > 0, m < n$ так же, как и множества D_0^n, D_1^{n-1} , только с заменой n на m . Лемма 1.11 справедлива для классов D_0^m, D_1^{m-1} . Это доказывается индукцией по m .

Действительно, при $m = 1$ утверждение леммы очевидно. При $1 < m \leq n$ мы включаем эту лемму в предположение индукции как некоторое свойство ростков классов $D_0^m, D_1^{m-1}, m \leq n$. Для классов D_0^{n+1}, D_1^n лемма будет схематически доказана в § 5. Этот шаг индукции (от n к $n+1$) завершает доказательство леммы.

Лемма 1.11 позволяет определить слабо реализуемые, почти реализуемые и абсолютно реализуемые коцепи классов D_0^n, D_1^{n-1} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.29. Регулярные коцепи класса n типа 0 или 1 – это абсолютно реализуемые коцепи классов $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_0^n)$ и $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D_1^{n-1})$ соответственно.

Этим закончена часть определения, касающаяся регулярности. Часть, относящаяся к разложимости, рассматривается в следующем пункте.

1.16. Сверхточные асимптотические ряды. В пп. 1.10–1.15 завершена первая часть построения модели, для которой выполняются сформулированные выше аксиомы: описаны требования регулярности. В данном пункте осуществляется вторая часть этого построения: даются требования разложимости.

1.16.1. Эвристическое описание сверхточных асимптотических рядов. Сверхточные асимптотические ряды будут также обозначаться аббревиатурой СТАР.

Из теоремы 0.5 вытекает, что обычных асимптотических рядов недостаточно для однозначного восстановления преобразования монодромии. Нужны сверхточные асимптотические ряды, идея построения которых состоит в следующем.

Рассмотрим ростки отображений на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, записанные в логарифмической карте. Пусть изучается множество M_1 ростков отображений $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$. Каждый из этих ростков разлагается в асимптотический ряд, частные суммы которого приближают росток с произвольной экспоненциальной точностью, например, в экспоненциальный ряд Дюлака. Такие ряды будут называться обычными. Однако желательно разлагать изучаемые ростки в ряды, члены которых имеют не только простой экспоненциальный, но и двойной экспоненциальный порядок малости. На первый взгляд это невозможно: произвольный остаточный член обычного ряда имеет простой экспоненциальный порядок малости и кажется бессмысленным учитывать величины, убывающие как двойная экспонента.

Эту трудность можно обойти следующим образом. Вводится промежуточный класс функций M_0 , элементы которого разлагаются в обычные ряды и однозначно определяются ими, т. е. нулевой ряд соответствует нулевому ростку. Например, в качестве M_0 можно взять множество почти регулярных ростков, записанных в логарифмической карте. Тогда ростки класса M_1 разлагаются

в ряды из убывающих двойных экспонент, имеющие в качестве коэффициентов уже не числа, а функции класса M_0 . Простейший пример СТАР имеет вид

$$\Sigma = a_0(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j(\xi) \exp(-\nu_j \exp \xi), \quad a_j \in M_0, \quad 0 < \nu_j \nearrow \infty. \quad (48)$$

Ряд Σ называется *асимптотическим для роста f* , если для каждого $\nu > 0$ найдется частная сумма ряда, приближающая этот росток на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ с точностью $o(\exp(-\nu \exp \xi))$. Вся информация о разложении f в обычный ряд содержится в свободном члене сверхточного ряда: обычные ряды для f и a_0 совпадают.

Покажем на простом примере, как используются сверхточные ряды для доказательства упрощенной версии теоремы тождественности. Допустим в дополнение к предыдущему, что класс M_0 (соответственно M_1) содержит ростки функций 0 и ξ , и ростки из этого класса разлагаются в экспоненциальные ряды Дюлака (соответственно в СТАР (48)) и однозначно определяются этими рядами. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1.8. *Имеет место следующая импликация: $f \in M_1 \cap \text{Fix}_\infty \Rightarrow f = \text{id}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается по той же схеме, что и теорема тождественности 1.7. Пусть теорема неверна: существует $f \in M_1 \cap \text{Fix}_\infty$, $f \neq \text{id}$. Пусть (48) – СТАР для f . Допустим сначала, что $a_0 \neq \text{id}$. Тогда соответствующий экспоненциальный ряд Дюлака $\hat{a}_0 - \text{id}$ отличен от 0. Следовательно, росток $a_0 - \text{id}$ равен главному члену своего экспоненциального ряда Дюлака, умноженному на $1 + o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. В частности, для некоторого $\nu > 0$ имеем

$$|a_0 - \text{id}| \succ \exp(-\nu \xi).$$

Заметим, что каждый член ряда (48) мал по сравнению с предыдущим. Действительно, коэффициентами служат почти регулярные ростки, которые оцениваются сверху возрастающей (а снизу – убывающей) простой экспонентой. Но двойная экспонента “забивает” простую. Поэтому из разложимости f в СТАР (48) вытекает, что

$$|f - \text{id}| \geq |a_0 - \text{id}| + (|a_1| \exp(-\nu_1 \exp \xi))(1 + o(1)) \succ \exp(-\nu \xi)(1 + o(1)).$$

Тем самым $f - \text{id} \neq 0$ при больших ξ и, следовательно, $f \notin \text{Fix}_\infty$, противоречие.

Допустим теперь, что $a_0 = \text{id}$, $f \neq \text{id}$. Тогда СТАР (48) отличен от id ; иначе было бы $f = \text{id}$, поскольку ростки класса M_1 однозначно определяются своими рядами. Из определения разложимости получаем, что

$$f - \text{id} = (a_1 \exp(-\nu_1 \exp \xi))(1 + o(1)).$$

Рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что $a_1 \neq 0$ при больших ξ . Два других сомножителя в формуле для $f - \text{id}$ также не обращаются в нуль вблизи бесконечности. Следовательно, $f \notin \text{Fix}_\infty$, противоречие.

Теорема 0.5 показывает, что адекватный асимптотический ряд для преобразования монодромии класса n должен быть еще сложнее.

Перейдем к определению сверхточных асимптотических рядов класса n .

1.16.2. *Обзор последующих определений.* Коцепи класса n разлагаются в СТАР- n . Множество всех СТАР, отвечающих $\mathcal{FC}_1^{n-1}$ (соответственно $\mathcal{FC}_0^n$), обозначается через $\mathcal{E}_1^{n-1}$ (соответственно $\mathcal{E}_0^n$). Все ряды и коцепи из этих множеств имеют не только класс n , но и ранг $r \in \mathbb{Z}^+$, принимающий значения от 0 до бесконечности. Соответствующие классы обозначаются через $\mathcal{E}_1^{n-1,r}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1,r}$, $\mathcal{E}_0^{n,r}$, $\mathcal{FC}_0^{n,r}$:

$$\mathcal{E}_1^{n-1} = \bigcup_0^\infty \mathcal{E}_0^{n-1,r}, \quad \mathcal{FC}_1^{n-1} = \bigcup_0^\infty \mathcal{FC}_0^{n-1,r}, \quad (49)$$

$$\mathcal{E}_0^n = \bigcup_0^\infty \mathcal{E}_0^{n,r}, \quad \mathcal{FC}_0^n = \bigcup_0^\infty \mathcal{FC}_0^{n,r}. \quad (50)$$

Определение этих классов дается индукцией по n (внешняя индукция) и r (внутренняя индукция). Базой внешней индукции является определение рядов и коцепей классов $m = 0$ и $m = 1$. Шаг индукции делается от $n - 1$ к n . Предположение внешней индукции состоит в том, что все множества $\mathcal{E}_1^m$, $\mathcal{FC}_1^m$ определены для $m < n - 1$, а множества $\mathcal{E}_0^m$, $\mathcal{FC}_0^m$ определены для $m < n$.

Для рядов и коцепей класса n типа 1 шаг внутренней индукции осуществляется следующим образом. Допустим, что множества $\mathcal{E}_1^{n-1,r}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1,r}$ уже определены. Тогда мы определяем множества $\mathcal{E}_1^{n-1,r+1}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1,r+1}$, а затем множества (49).

После этого мы переходим к определению рядов и коцепей класса n типа 0: $\mathcal{E}_0^{n,r}$, $\mathcal{FC}_0^{n,r}$. Они также определяются с помощью индукции по r , в итоге дающей (50).

Все СТАР в дальнейшем имеют вид

$$\Sigma = \sum a_j \exp \mathbf{e}_j, \quad (51)$$

где $\mathbf{e}_j$ называются *показателями*, а a_j — *коэффициентами*; главные показатели $\nu(\mathbf{e}_j)$, определяемые ниже, стремятся к $-\infty$. Чтобы определить новый класс рядов, надо задать класс E их показателей и класс $\mathcal{K}$ их коэффициентов. Верхние и нижние индексы у символов E и $\mathcal{K}$ означают те или иные классы, например, $\mathcal{K}_1^{n-1,r}$.

Грубо говоря, индукция по r для класса n типа 1 происходит следующим образом:

коэффициенты из класса $\mathcal{K}_1^{n-1,r}$ определяются с помощью индуктивного предположения;

коцепи из $\mathcal{FC}_1^{n-1,r}$ определяются с использованием коэффициентов из класса $\mathcal{K}_1^{n-1,r}$;

коэффициенты из класса $\mathcal{K}_1^{n-1,r+1}$ определяются с использованием коцепей из $\mathcal{FC}_1^{n-1,r}$.

Аналогичные построения проводятся для класса n типа 0.

1.16.3. *База внешней индукции.* При $m = 0$ ранг не рассматривается, а тип равен 0. Сверхточные ряды класса 0 и типа 0 — это *экспоненциальные ряды Дюлака*; они образуют множество $\mathcal{E}^0$. Функциональные коцепи класса 0 — это почти регулярные ростки: $\mathcal{FC}_0^0 = \mathcal{R}$. Напомним, что ряды из $\mathcal{E}^0$ имеют вид (51), где

$$\mathbf{e}_j = \mu_j \zeta, \quad \mu_j \rightarrow -\infty,$$

а a_j — вещественные полиномы.

Ниже мы подробно опишем шаг внешней индукции от $m = 0$ к 1. Он включает в себя внутреннюю индукцию по r и облегчает понимание шага от $n - 1$ к n .

Сначала определим множество $\mathcal{E}_1^0$ рядов СТАР-0₁ и множество $\mathcal{FC}_1^0$. Эти множества не зависят от ранга. Ряды из $\mathcal{E}_1^0$ – это опять экспоненциальные ряды Дюлака. Коцепи класса $\mathcal{FC}_1^0$ – это регулярные простые коцепи (см. п. 1.15.3), допускающие разложения в асимптотические ряды СТАР-0₁ в некоторых квадратичных стандартных областях.

Теперь определим множество $\mathcal{E}_0^1$ рядов СТАР-1₀ и множество $\mathcal{FC}_0^1$. На этот раз используется внутренняя индукция.

База внутренней индукции: $r = 0$, ряды класса $\mathcal{E}_0^{1,0} = \text{СТАР}-(1, 0)_0$ и коцепи класса $\mathcal{FC}_0^{1,0}$.

Как упоминалось выше, для определения рядов некоторого класса надо задать класс показателей и класс коэффициентов. Множество показателей любого из нужных нам классов не зависит от ранга, а множество коэффициентов – зависит.

Множество E^1 показателей рядов класса 1 типа 0 – это множество всех описанных ниже частных сумм экспоненциальных рядов Дюлака с неотрицательными показателями, не превосходящими 1. А именно,

$$E^1 = \left\{ \mathbf{e} \mid \mathbf{e} = \sum P_j(\zeta) \exp \mu_j \zeta \right\},$$

где сумма конечна, P_j – вещественные полиномы и $\mu_j \in [0, 1]$. При этом если $\mu_j = 1$, то $P_j = \text{const}$, а если $\mu_j = 0$, то $P_j \in (\zeta^2)$, т.е. свободный и линейный члены полинома P_j равны нулю. Главный показатель члена $\exp \mathbf{e}$ определяется как предел

$$\nu_1(\mathbf{e}) = \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \frac{\mathbf{e}(\xi)}{\exp \xi}.$$

Этот предел существует по определению E^1 .

Мотивировка этого определения дана в следующем подпункте.

Множество $\mathcal{K}_0^{1,0}$ коэффициентов рядов СТАР-(1, 0)₀ – это множество $\mathcal{FC}_1^0$ всех простых функциональных коцепей. Ряды $\Sigma \in \mathcal{E}_0^{1,0}$ имеют вид (51), где $\mathbf{e}_j \in E^1$, $a_j \in \mathcal{K}_0^{1,0}$ и $\nu_1(\mathbf{e}_j) \rightarrow -\infty$.

Теперь определим коцепи класса $\mathcal{FC}_0^{1,0}$. Определение состоит из двух частей: регулярности и разложимости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.30. Коцепи F класса $\mathcal{FC}_0^{1,0}$ – это такие регулярные секториальные коцепи, определенные в п. 1.15.3 (условие регулярности), которые разлагаются в асимптотические ряды СТАР-(1, 0)₀, обозначаемые через Σ . Последнее означает, что для любого $\nu > 0$ композицию $F \circ \exp$ можно приблизить некоторой частной суммой ряда Σ с точностью $\exp(-\nu \exp \xi)$ на ростке в бесконечности области $\ln \Omega$ для некоторой стандартной области Ω класса 1 (условие разложимости).

Этим полностью описана база внутренней индукции. Сделаем теперь шаг индукции по r . Допустим, что множество $\mathcal{K}_0^{1,r}$ уже определено. Пусть $\mathcal{E}_0^{1,r}$ – множество всех рядов (51) с $\mathbf{e}_j \in E^1$, $a_j \in \mathcal{K}_0^{1,r}$ и $\nu_1(\mathbf{e}_j) \rightarrow -\infty$.

Следующее определение справедливо для всех классов и рангов, если только множество $\mathcal{E}_l^{m,r}$ определено для некоторых (m, r, l) : $l = 0, 1$, $m = 0, \dots, n$, $r \in \mathbb{Z}^+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.31. Функциональная коцепь F называется *разложимой* в своей области определения Ω в ряд СТАР- $(m, r)_l$, обозначаемый через Σ , если для каждого $\nu > 0$ существует частная сумма Σ_N ряда Σ , приближающая $F \circ \exp^{[m]}$ с точностью $o(|\exp(-\nu \operatorname{Re} \exp^{[m]})|)$ в области $\ln^{[m]} \Omega$:

$$F \circ \exp^{[m]} = \Sigma_N + R, \quad R = o(|\exp(-\nu \operatorname{Re} \exp^{[m]})|) \quad \text{в} \quad \ln^{[m]} \Omega. \quad (52)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.32. Коцепь класса $\mathcal{FC}_0^{1,r}$ – это регулярная секториальная коцепь, разложимая в СТАР- $(1, r)_0$ в некоторой стандартной области класса 1.

Таким образом, в процессе шага внутренней индукции, начиная с множества коэффициентов $\mathcal{K}_0^{1,r}$, мы определили ряды класса $\mathcal{E}_0^{1,r}$ и коцепи класса $\mathcal{FC}_0^{1,r}$. Теперь определим множество $\mathcal{K}_0^{1,r+1}$, чем и завершаем шаг внутренней индукции:

$$\mathcal{K}_0^{1,r+1} = \mathcal{L}(\mathcal{K}_0^{1,r}, \mathcal{FC}_0^{1,r} \circ \exp \circ \mu \zeta \mid \mu \in (0, 1)).$$

Здесь $\mathcal{L}$ означает линейную оболочку с вещественными коэффициентами.

Итак, индукцией по r мы определили ряды и коцепи классов $\mathcal{E}_0^{1,r}$, $\mathcal{FC}_0^{1,r}$ для всех $r \in \mathbb{Z}^+$. Равенства $\mathcal{E}_0^1 = \bigcup_0^\infty \mathcal{E}_0^{1,r}$, $\mathcal{FC}_0^1 = \bigcup_0^\infty \mathcal{FC}_0^{1,r}$ завершают определение рядов и коцепей класса $n = 1$.

Мы сделали шаг индукции от $n = 0$ к $n = 1$. Шаг индукции от $n - 1$ к n проводится аналогично, начиная с рядов и коцепей класса n типа 1. Прежде чем сделать его, приведем некоторые мотивировки.

1.16.4. *Мотивировки: разложимость.* Приведем мотивировку определения множества E^1 показателей рядов из $\mathcal{E}_0^1$. Это ряды для композиций $F \circ \exp$, $F \in \mathcal{FC}_0^1$. По аксиоме “четвертая лемма о сдвиге” для любых $F_1 \in \mathcal{FC}_0^1$, $j \in \mathcal{A}^0$ существует такая коцепь $F \in \mathcal{FC}_0^1$, что

$$F_1 \circ \exp \circ j = F \circ \exp.$$

Если Σ_1 – СТАР для $F_1 \circ \exp$, то $\Sigma_1 \circ j$ – СТАР для $F \circ \exp$. Рассмотрим простейший случай $F_1 = \exp(-\zeta)$, $F_1 \circ \exp = \exp(-\exp \zeta)$. Пусть j имеет асимптотический ряд Дюлака Σ :

$$\Sigma = \zeta + \Sigma P_j(\zeta) \exp(-\mu_j \zeta), \quad 0 < \mu_j \nearrow \infty.$$

Допустим для простоты (поскольку это пример), что $\Sigma = \zeta + P \exp(-\mu \zeta)$, $\mu \in (1/l + 1, 1/l]$, $l \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \exp \circ j &= (\exp \zeta) \exp(P \exp(-\mu \zeta)) \\ &= (\exp \zeta) \left(1 + \sum_{k=1}^l \frac{(P \exp(-\mu \zeta))^k}{k!} + o(\exp(-(1+\varepsilon)\zeta)) \right) \end{aligned}$$

при некотором $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\exp \circ j = \mathbf{e} + o(\exp(-\varepsilon \zeta)),$$

где $\mathbf{e}$ – сумма квазиполиномов вида $\exp \zeta + \Sigma P_j \exp \nu_j \zeta$, $0 < \nu_j < 1$. Наконец,

$$\exp(-\exp \circ j) = \exp(\mathbf{e} + o(\exp(-\varepsilon \zeta))) = (1 + o(\exp(-\varepsilon \zeta))) \cdot \exp \mathbf{e}.$$

“Хвост” ряда $\exp \circ j$ вошел в первый сомножитель; будем говорить, что он “поглощен коэффициентом”. Показатель $\mathbf{e}$ принадлежит определенному выше множеству E^1 .

Мотивировка приводимых ниже определений также связана с аксиомами, приведенными в начале этого пункта. А именно, множество асимптотических рядов для коцпей классов $\mathcal{FC}_0^n$, $\mathcal{FC}_1^{n-1}$, удовлетворяющих всем четырем леммам о сдвиге и таких, что $\mathcal{FC}_1^0$ содержит множество $\mathcal{NC}$, должно содержать все ряды, построенные ниже.

1.16.5. *Шаг индукции от $n - 1$ к n : определение СТАР- $(n - 1)_1$ и коцпей класса $\mathcal{FC}_1^{n-1}$.* Фиксируем $n > 1$ как выше и предположим, что все СТАР и функциональные коцпи классов $m < n$ уже определены. Чтобы сделать шаг индукции для рядов и коцпей класса n типа 1, надо определить множество показателей E_1^{n-1} и множество коэффициентов $\mathcal{K}_1^{n-1}$.

Множество показателей E_1^{n-1} по определению равно множеству E_0^{n-1} . Последнее, будучи множеством показателей класса $n - 1$, уже определено по предположению индукции. Положим

$$E_1^{n-1} \equiv E_0^{n-1} =: E^{n-1}.$$

Сделаем также индуктивное предположение о том, что главный показатель

$$\nu_{n-1}(\mathbf{e}) = \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \frac{\mathbf{e}}{\exp^{[n-1]} \xi}$$

корректно определен для всех $\mathbf{e} \in E^{n-1}$. Определим теперь множества $\mathcal{E}_1^{n-1,r}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1,r}$ индукцией по r .

1.16.6. *База внешней индукции по r .* База состоит в определении множества коэффициентов $\mathcal{K}_1^{n-1,r}$ для СТАР- $(n - 1, r)_1$ при $r = 0$. Напомним, что группа G^m , $m \leq n$, определена в п. 1.5.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.33. Положим

$$\mathcal{K}_1^{n-1,0} = \mathcal{L}(\mathcal{FC}_1^{n-2} \circ \exp^{[n-2]} \circ g \mid g \in G^{n-3}),$$

где множество $\mathcal{FC}_1^{n-2}$ уже определено по предположению “внешней” индукции по n ; напомним, что $\mathcal{L}(\cdot)$ означает линейную оболочку над $\mathbb{R}$.

1.16.7. *Шаг внешней индукции по r .*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.34. Пусть множество $\mathcal{K}_1^{n-1,r}$ уже определено. Определим множество $\mathcal{E}_1^{n-1,r}$ всех СТАР- $(n - 1, r)_1$ как множество всех формальных рядов вида

$$\Sigma = \sum a_j \exp \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j \in E^{n-1}, \quad a_j \in \mathcal{K}_1^{n-1,r}, \quad \nu_{n-1}(\mathbf{e}_j) \rightarrow -\infty.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.35. Функциональная коцень F является коценью класса $n - 1$, ранга r и типа 1, если она обладает следующими свойствами регулярности и разложимости.

Регулярность: F – абсолютно реализуемая регулярная коцень класса $\mathcal{FC}_{\text{рег}}(D_1^{n-1})$ в смысле определения 1.16.

Разложимость: композиция $F \circ \exp^{[n-1]} = \varphi$ допускает разложение в СТАР- $(n - 1, r)_1$. Более того, для любой реализации F_* (где “ $*$ ” означает (k) , (k^+) , (k, l)) коцпи F , композиция $F_* \circ \exp^{[n-1]} = \varphi$ разлагается в тот же самый асимптотический ряд. Здесь F рассматривается в надлежащей стандартной области

класса $n - 1$, а ее реализации F_* – в некоторых обобщенных окрестностях соответствующих областей (см. (38)). Иными словами, как сама коцепь, так и ее реализации разложимы в СТАР- $(n - 1, r)_1$ в своих областях определения в смысле определения 1.31.

Напомним, что множество всех функциональных коцепей класса $n - 1$, ранга r и типа 1 обозначается через $\mathcal{FC}_1^{n-1, r}$.

Следующее определение завершает шаг индукции:

$$\mathcal{K}_1^{n-1, r+1} = \mathcal{L}(\mathcal{K}_1^{n-1, r}, \mathcal{FC}_1^{n-1, r} \circ \exp^{[n-1]} \circ g \mid g \in G_{\text{slow}}^{n-2^-}).$$

Итак, мы определили множества $\mathcal{E}_1^{n-1, r}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1, r}$ при любом $r > 0$. Формула (49) определяет тогда множества $\mathcal{E}_1^{n-1}$, $\mathcal{FC}_1^{n-1}$.

Подводя итог, дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.36. *Функциональные коцепи класса n типа 1* – это абсолютно реализуемые функциональные коцепи типа D_1^{n-1} , допускающие разложение в СТАР- $(n - 1)_1$ в обобщенных ε -окрестностях своих областей определения вместе со всеми своими реализациями, рассматриваемыми в обобщенных ε -окрестностях соответствующих областей, в смысле определения 1.31.

Этим завершено определение сверхточных асимптотических рядов и функциональных коцепей класса n типа 1: $\mathcal{FC}_1^{n-1}$. Перейдем к типу 0.

1.16.8. *Определение СТАР- $(n)_0$ и коцепей класса $\mathcal{FC}_0^n$.* Теперь мы можем определить множества рядов и коцепей класса n и типа 0: СТАР- n_0 , $\mathcal{FC}_0^n$. Для этого сначала определим множество E^n показателей рядов СТАР- n_0 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.37. Частная сумма Σ_N ряда СТАР- $(n - 1)_1$ называется *слабо вещественной*, если

$$\Sigma_N = S\Sigma_N.$$

Напомним, что $S\Sigma_N(\zeta) = \overline{\Sigma_N(\bar{\zeta})}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.38. Множество E^n показателей рядов СТАР- n_0 – это множество всех частных сумм рядов СТАР- $(n - 1)_1$ со следующими свойствами.

1) Сумма $\mathbf{e} \in E^n$ слабо вещественна и имеет вид

$$\mathbf{e} = \sum_1^N a_j \exp \tilde{\mathbf{e}}_j, \quad \tilde{\mathbf{e}}_j \in E^{n-1},$$

причем для каждого j выполнено условие $\nu_{n-1}(\tilde{\mathbf{e}}_j) \geq 0$.

2) Существует вещественный предел

$$\nu_n(\mathbf{e}) = \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \frac{\mathbf{e}}{\exp^{[n]}}.$$

Он называется *главным показателем члена ряда с показателем $\mathbf{e}$* .

3) Существуют число $\mu > 0$ и стандартная область класса n , в которой

$$|\operatorname{Re} \mathbf{e} \circ \ln^{[n]}| < \mu \xi, \quad |\mathbf{e} \circ \ln^{[n]}| < \mu |\zeta|.$$

4) $\operatorname{Im} \mathbf{e} \rightarrow 0$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$.

Отображение $\nu_n: E^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{e} \mapsto \nu_n(\mathbf{e})$, называется *отображением n -х главных показателей*.

Перейдем к определению СТАР и коцепей класса n типа 0. Они характеризуются рангом $r \geq 0$ и определяются так же, как и соответствующие объекты класса $n-1$ типа 1 с единственным отличием: стандартные области класса $n-1$ заменяются на стандартные области класса n . Определение дается индукцией по r . А именно, мы определяем множество коэффициентов $\mathcal{K}_0^{n,r}$ и множество всех СТАР- $(n, r)_0$, обозначаемое через $\mathcal{E}_0^{n,r}$. Оно состоит из формальных рядов вида

$$\Sigma = \sum a_j \exp \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j \in E^n, \quad a_j \in \mathcal{K}_0^{n,r}, \quad \nu_n(\mathbf{e}_j) \rightarrow -\infty.$$

1.16.9. База внутренней индукции: $r = 0$. Положим

$$\mathcal{K}_0^{n,0} = \mathcal{L}(\mathcal{F}C_1^{n-1} \circ \exp^{[n-1]} \circ G^{n-2}),$$

где $\mathcal{F}C_1^{n-1}$ определено в предыдущем подпункте. После этого индукция проводится точно так же, как в предыдущем случае, и дает определение множеств $\mathcal{E}_0^n$ и $\mathcal{F}C_0^n$ рядов и коцепей класса n и типа 0. Перейдем к подробному описанию.

1.16.10. Шаг индукции по r .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.39. Пусть множество $\mathcal{K}_0^{n,r}$ уже определено. Определим множество $\mathcal{E}_0^{n,r}$ всех СТАР- $(n, r)_0$ как множество формальных рядов вида

$$\Sigma = \sum a_j \exp \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_j \in E^n, \quad a_j \in \mathcal{K}_0^{n,r}, \quad \nu_n(\mathbf{e}_j) \rightarrow -\infty.$$

Разложимость функциональной коцепи в СТАР- $(n, r)_0$ определяется так же, как для СТАР- $(n-1, r)_1$ (см. определение 1.31), только с заменой $n-1$ на n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.40. Функциональная коцепь F является коцепью класса n , ранга r и типа 0, если она обладает следующими свойствами регулярности и разложимости.

Регулярность: F – абсолютно реализуемая регулярная коцепь класса $\mathcal{F}C_{\text{reg}}(D_0^n)$ в смысле определения 1.16.

Разложимость: композиция $F \circ \exp^{[n]} = \varphi$ разложима в СТАР- $(n, r)_0$ и композиции $F_* \circ \exp^{[n]} = \varphi$ также разложимы в тот же самый асимптотический ряд для всех k -, k^+ - и (k, l) -реализаций F_* коцепи F . Здесь F рассматривается в надлежащей стандартной области класса n , а ее реализации F_* – в некоторых обобщенных окрестностях соответствующих областей (см. (38)).

Напомним, что множество всех функциональных коцепей класса n , ранга r и типа 0 обозначается через $\mathcal{F}C_0^{n,r}$.

Следующее определение завершает шаг индукции:

$$\mathcal{K}_0^{n,r+1} = \mathcal{L}(\mathcal{K}_0^{n,r}, \mathcal{F}C_0^{n,r} \circ \exp^{[n]} \circ g \mid g \in G_{\text{slow}}^{n-1}).$$

Итак, мы определили множества $\mathcal{E}_0^{n,r}$, $\mathcal{F}C_0^{n,r}$ при любом $r > 0$. Тогда формула (50) определяет множества $\mathcal{E}_0^n$, $\mathcal{F}C_0^n$.

Подводя итог, дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.41. Функциональные коцепи класса n типа 0 – это абсолютно реализуемые функциональные коцепи типа D_0^n , определенные в некоторых стандартных областях класса n и допускающие разложение в СТАР- n_0 в обобщенных ε -окрестностях этих областей вместе со всеми своими реализациями, рассматриваемыми в обобщенных ε -окрестностях соответствующих областей.

Подчеркнем, что разложимость в СТАР- n – двусторонняя: композиции $F \circ \exp^{[n]}$ приближаются частными суммами ряда в полной окрестности ростка на бесконечности положительной полуоси. Этим завершено построение модели, для которой выполняются сформулированные выше аксиомы. Надо еще проверить, что аксиомы действительно выполняются. В § 3 и § 4 части II настоящей работы мы дадим схему доказательства лемм о сдвиге, а в § 2 схематически докажем общую теорему Фрагмена–Линделёфа для коцепей. Из нее вытекает теорема Фрагмена–Линделёфа для коцепей класса n .

§ 2. Общая теорема Фрагмена–Линделёфа для функциональных коцепей

В этом параграфе доказывается общая теорема Фрагмена–Линделёфа для регулярных функциональных коцепей класса $\mathcal{FC}_{\text{reg}}(D)$ в предположении, что класс D допустимых ростков обладает некоторыми свойствами, перечисленными ниже. В таком виде результат является новым, хотя он существенно опирается на рассуждения из [1]. После этого теорема Фрагмена–Линделёфа для регулярных коцепей класса n выводится из общей теоремы Фрагмена–Линделёфа. Для этого нужно доказать, что допустимые ростки класса n обладают свойствами, требуемыми от ростков из D в общей теореме Фрагмена–Линделёфа. Это утверждение будет схематически доказано в § 5 части II настоящей работы.

Грубо говоря, теорема Фрагмена–Линделёфа утверждает, что *коцепь некоторого класса, убывающая на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее любой экспоненты, тождественно равна нулю на $(\mathbb{R}^+, \infty)$* .

2.1. Регулярные секториальные и простые коцепи. Напомним, что регулярные секториальные и простые коцепи определены в п. 1.15.3.

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема Фрагмена–Линделёфа для секториальных коцепей). *Пусть F – слабо реализуемая регулярная секториальная коцепь, определенная в некоторой стандартной области, содержащейся в квадратичной. Допустим, что F убывает на вещественной оси быстрее любой экспоненты. Тогда $F^u \equiv F^l \equiv 0$.*

Теорема верна также для $G = IF$ при условии, что коцепь F почти реализуема.

Второе утверждение следует из первого. А именно, пусть коцепь F почти реализуема. Тогда и коцепь SF почти (а значит, и слабо) реализуема: симметрия переставляет k - и k^+ -реализации. Поэтому к коцепи IF может быть применена первая часть теоремы Фрагмена–Линделёфа.

2.1.1. Предварительная оценка.

ЛЕММА 2.1 (первая предварительная оценка для секториальных коцепей). *Пусть F – секториальная коцепь типа*

$$(\exp \circ \mu_1, \dots, \exp \circ \mu_N), \quad 1 > \mu_1 > \dots > \mu_N > 0,$$

убывающая на вещественной оси быстрее любой экспоненты. Тогда для каждого сектора $S_\alpha = \{|\arg \zeta| < \alpha < \pi/2\}$ существует такое число C , зависящее

от α , что всюду на S_α выполнено неравенство

$$|F(\zeta)| < \exp(-C|\zeta|^\mu), \quad \mu = \mu_1^{-1}. \quad (53)$$

Эта лемма доказывается так же, как лемма 0.4: осуществляется тривиализация коцикла, применение принципа максимума модуля и построение коцепи $F_{\lambda,a}$, как в лемме 0.4. Мы опускаем детали.

Если F – коцепь числового типа один, то доказательство требуемой теоремы завершается ссылкой на надлежащую версию теоремы Фрагмена–Линделёфа.

Но для числового типа выше 1 нужна новая идея, состоящая в использовании реализаций.

2.1.2. Использование реализаций. Будем доказывать теорему Фрагмена–Линделёфа для секториальных коцепей индукцией по числовому типу N . Мы оценим снизу все реализации секториальной коцепи одну за другой: чем больше номер реализации, тем сильнее будет оценка. Последняя реализация является голоморфной функцией на своей области определения. Скорость убывания этой функции окажется настолько высокой, что по классической теореме Фрагмена–Линделёфа эта реализация должна быть тождественно равна нулю. Перейдем к более подробному описанию. Мы снова будем пользоваться универсальной константой C , которая может принимать разные значения в разных неравенствах.

ЛЕММА 2.2 (вторая предварительная оценка для секториальных коцепей). Пусть секториальная коцепь типа

$$(\exp \mu_{k+1}, \dots, \exp \mu_N), \quad 1 > \mu_{k+1} > \dots > \mu_N > 0, \quad (54)$$

определена в следующем секторе S_μ , $1 > \mu > \mu_{k+1}$:

$$S_\mu = \left\{ \zeta \mid |\zeta| > R, \arg \zeta \in \left(-\frac{\pi}{2}\mu, \alpha(\mu) \right) \right\},$$

где R – некоторое положительное число,

$$\alpha(\mu) = \begin{cases} \pi\mu & \text{при } \mu < \frac{1}{2}, \\ \frac{\pi}{2} - \delta\mu & \text{при } \mu \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

а число δ столь мало, что раствор γ сектора S_μ превышает $\pi\mu$. Пусть F убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ следующим образом:

$$|F| < \exp(-C|\zeta|^{1/\mu}).$$

Тогда

$$|F| < \exp(-C|\zeta|^{1/\mu_{k+1}}) \quad (55)$$

в каждом секторе, лежащем строго внутри S_μ .

Эта лемма доказывается так же, как и первая предварительная оценка для секториальных коцепей.

Теорема Фрагмена–Линделёфа для секториальных коцепей будет выведена из следующей оценки: при всех $k = 1, \dots, N$

$$|F_{(k)}| < \exp(-C|\zeta|^{1/\mu_k}). \quad (56)$$

Эта оценка доказывается индукцией по k .

База индукции: $k = 1$. В этом случае (56) вытекает из первой предварительной оценки для секториальных коцепей.

Шаг индукции: от k к $k + 1$. Допустим, что оценка (56) доказана для k и докажем ее для $k + 1$. Заметим, что k -я реализация коцепи F определена на области $\Omega_{(\sigma, k)}$ вида

$$\Omega_{(\sigma, k)} = (\exp \mu_k \zeta)(\Pi_{\text{main}}) \cap \Omega,$$

где Π_{main} определено в (30). Эта область содержит росток на бесконечности любого сектора S_μ при $\mu < \mu_k$. Выберем произвольное $\mu \in (\mu_{k+1}, \mu_k)$. Применим лемму 2.2 к реализации $F_{(k)}$. Это – секториальная коцепь типа (54), определенная в секторе S_μ . Из леммы вытекает оценка (55) для $F = F_{(k)}$. В то же время, это оценка и для $F_{(k+1)}$, так как $F_{(k+1)} = F_{(k)}$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Этим завершён шаг индукции и доказана оценка (56) для $k + 1$, а значит, и для всех $k = 2, \dots, N$.

Реализация $F_{(N)}$ голоморфна на области $\Omega_{(\sigma, N)}$, содержащей сектор раствора больше $\pi\mu_N$. При этом

$$|F_{(N)}| \prec \exp(-C|\zeta|^{1/\mu_N})$$

на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. По классической теореме Фрагмена–Линделёфа $F_{(N)} \equiv 0$. Этим завершено доказательство теоремы Фрагмена–Линделёфа для секториальных коцепей.

Теорема Фрагмена–Линделёфа для простых коцепей доказывается так же, как и для секториальных. Мы опускаем детали и переходим к общей теореме Фрагмена–Линделёфа.

2.2. Формулировка результата и специальные допустимые ростки.

2.2.1. *Общая теорема Фрагмена–Линделёфа.* Рассмотрим правильный класс Ω стандартных областей, см. определение 1.18. Пусть D – класс специальных Ω -допустимых ростков, который будет описан ниже.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть F – регулярная слабо реализуемая функциональная коцепь типа

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N), \quad \sigma_j \in D, \quad \sigma_j \succ \sigma_{j+1}, \quad (57)$$

заданная в некоторой стандартной области класса Ω , растущая не быстрее, чем $\exp \nu \xi$ для некоторого $\nu > 0$, и убывающая на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее, чем любая экспонента $\exp(-\nu \xi)$, $\nu > 0$. Тогда $F^u \equiv 0$ и $F^l \equiv 0$.

Эта формулировка становится полной после описания множества D . Перечислим свойства, которыми должны обладать ростки из этого множества.

2.2.2. *Обобщенные степени.* Для каждого ростка $\sigma \in D$ существует предел

$$l(\sigma) = \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \frac{\xi \sigma'}{\sigma} \in [1, \infty]. \quad (58)$$

Значение $l(\sigma)$ называется *обобщенной степенью* ростка σ .

В частности, если $l(\sigma) = l < \infty$, то $\sigma = \zeta^{l+o(1)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Росток $\sigma \in D$ называется *почти степенным*, если $l(\sigma) \in [1, \infty)$, и *почти линейным*, если $l(\sigma) = 1$.

2.2.3. *Обобщенные показатели.* Обозначим через Π_a росток на бесконечности полуполосы $|\operatorname{Im} \zeta| < a$. Скажем, что некоторое соотношение выполнено на $(\Pi^\forall, \infty)$, если оно выполнено на Π_a для любого a (символ $\Pi^\forall$ означает росток на бесконечности любой полосы Π_a).

а) Для каждого $\sigma \in D$ существует предел

$$L(\sigma) = \lim_{(\Pi^\forall, \infty)} \frac{\sigma'}{\sigma} \in [0, 1]. \quad (59)$$

б) Если $L(\sigma) = 0$, то

$$\arg \sigma' \rightarrow 0 \quad \text{на} \quad (\Pi^\forall, \infty). \quad (60)$$

с) Если $L(\sigma) = 1$, то

$$\xi - \ln \sigma \searrow \infty \quad \text{на} \quad (\mathbb{R}^+, \infty). \quad (61)$$

Число $L(\sigma)$ называется *обобщенным показателем* ростка σ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Росток σ класса D называется *быстрым*, если $L(\sigma) = 1$, *секториальным*, если $L(\sigma) \in (0, 1)$, и *медленным* в противном случае.

2.2.4. *Упорядоченность и монотонность.* Ростки класса D упорядочены отношением $\succ$. Выполнены также следующие условия монотонности, первые два из которых повторяют (32), (33) соответственно.

а) Если $\Omega \in \mathbf{\Omega}$, $\sigma_1 \succ \sigma_2 \in D$ и ростки σ_1, σ_2 не являются слабо эквивалентными, то

$$(\sigma_1 \Pi_{\text{main}} \cap \Omega, \infty) \supset (\sigma_2 \Pi_{\text{main}} \cap \Omega, \infty). \quad (62)$$

б) Если ростки σ_1 и σ_2 слабо эквивалентны, но не равны, то их можно занумеровать так, что для любых ε и δ , $0 < \delta < \varepsilon < 1$, выполнено

$$(\sigma_2 \Pi_{\text{main}}^{(\delta)} \cap \Omega, \infty) \subset (\sigma_1 \Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)} \cap \Omega, \infty). \quad (63)$$

с) Если $\Omega \in \mathbf{\Omega}$, $\sigma_1 \succ \sigma_2 \in D$ и $\rho_j = \sigma_j^{-1}$, $j = 1, 2$, то

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \succ 1 + o(1). \quad (64)$$

2.2.5. *Полосы типа Варшавского.* Пусть $\sigma \in D$, $L(\sigma) = 1$, $\ln \sigma \Pi = \tilde{\Pi}$. Тогда $\tilde{\Pi}$ – полоса типа Варшавского. Мы не будем определять здесь множество всех полос типа Варшавского. Требуется, чтобы полоса $\tilde{\Pi}$ принадлежала следующему подмножеству этого множества.

Росток $(\tilde{\Pi}, \infty)$ имеет вид

$$(\tilde{\Pi}, \infty) = \left\{ (\xi, \eta) \mid \eta \in \left(\frac{\pi}{2} + \gamma(\xi), \frac{\pi}{2} - \gamma(\xi) \right), \xi \in (\mathbb{R}^+, \infty) \right\} \quad \text{и} \quad \gamma \searrow 0, \quad \gamma' \nearrow 0. \quad (65)$$

Функция γ в (65) такова, что

$$\left| \frac{\xi \gamma'}{\gamma} \right| < 2, \quad \gamma'(\xi(1 + o(1))) = \gamma'(\xi)(1 + o(1)) \quad \text{на} \quad (\mathbb{R}^+, \infty). \quad (66)$$

При каждом $\lambda > 0$ полоса

$$(\tilde{\Pi}_\lambda, \infty) = \left\{ (\xi, \eta) \mid \eta \in \left(-\frac{\pi}{2} + \gamma(\xi), \frac{\pi}{2} - \lambda \gamma(\xi) \right) \right\} \quad (67)$$

содержится в $\ln \Omega$ для любой стандартной области Ω класса $\mathbf{\Omega}$ и в Π_* :

$$(\tilde{\Pi}_\lambda, \infty) \subset \Pi_* \cap \ln \Omega. \quad (68)$$

2.2.6. *Хорошие разбиения.* Для формулировки следующего свойства введем ряд определений.

Пусть σ – допустимый росток, и пусть разбиение $\sigma_* \Xi_{\text{st}}$ корректно определено в стандартной области Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Разбиение $\sigma_* \Sigma_{\text{st}}$ называется *хорошим*, если выполнены следующие условия.

- Все граничные линии – графики функций $\eta = \eta(\xi)$.
- Каждый вертикальный отрезок $\text{Re } \zeta = \xi$ области Ω пересекает не более чем конечное число граничных линий. Сумма секансов углов наклона кривых разбиения в точках пересечения называется *полным наклоном* и обозначается через $C_{\Xi, \Omega}(\xi)$. Требуется, чтобы

$$C_{\Xi, \Omega} < C\xi^4. \quad (69)$$

- Если росток σ не является почти линейным, то вещественная часть ростака $\rho = \sigma^{-1}$ не убывает при движении от вещественной оси по вертикальной прямой:

$$\text{Re } \rho \succ \rho \circ \text{Re}. \quad (70)$$

Если же σ почти линеен, то при любом $\delta > 0$ имеем

$$\text{Re } \rho \succ (1 - \delta)\rho \circ \text{Re}. \quad (71)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Разбиение типа

$$\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_N), \quad \sigma_1 \succ \dots \succ \sigma_N \quad (72)$$

называется *хорошим*, если все разбиения $\sigma_{j*} \Xi_{\text{st}}$, $j = 1, \dots, N$, хорошие.

Еще одно свойство ростков класса D состоит в следующем.

Для любой стандартной области $\Omega \in \mathbf{\Omega}$ и любого упорядоченного набора (57) существует такая меньшая область $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, $\tilde{\Omega} \in \mathbf{\Omega}$, что разбиение (57) области $\tilde{\Omega}$ – хорошее.

Предположение теоремы 2.2 состоит в том, что класс D обладает всеми перечисленными выше свойствами.

В этом пункте мы фиксируем произвольный правильный класс $\mathbf{\Omega}$ стандартных областей и некоторый класс D $\mathbf{\Omega}$ -допустимых ростков. Во всех утверждениях ниже (как и в теореме 2.2) предполагается, что D обладает всеми свойствами, перечисленными в данном пункте.

Ростки σ_j из набора (72) упорядочены соотношением $\succ$. Поэтому первыми в наборе идут быстрые ростки, затем секториальные, затем медленные. Не теряя общности, можно считать росток σ_1 быстрым; иначе мы добавим “фиктивный” росток в набор (57). Эта процедура объясняется в конце п. 2.3.1.

2.2.7. *Доказательство теоремы Фрагмена–Линделёфа для коцепей класса n .* Чтобы можно было применить общую теорему Фрагмена–Линделёфа к коцепям класса n , надо доказать, что семейства допустимых ростков класса n удовлетворяют предположениям п. 2.2, наложенным на класс D . Эти доказательства изложены в § 5 в виде последовательности лемм, соответствующих перечисленным выше свойствам. По модулю этих лемм теорема Фрагмена–Линделёфа для функциональных коцепей класса n вытекает из теоремы 2.2. Схема доказательства последней теоремы занимает оставшуюся часть § 2.

2.3. Предварительные оценки и план доказательства теоремы Фрагмена–Линделёфа.

2.3.1. *Предварительная оценка.* Пусть коцепь F такая же, как в теореме Фрагмена–Линделёфа. Первая оценка следующей леммы будет применяться к самой коцепи, а вторая – к ее k -реализациям $F_{(k)}$.

ЛЕММА 2.3. I. *Рассмотрим коцепь F типа (57), определенную в стандартной области $\Omega \in \Omega$ и удовлетворяющую условиям теоремы Фрагмена–Линделёфа. Пусть росток σ_1 из набора (57) – быстрый. Тогда на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ выполнено*

$$|F(\xi)| \prec \exp(-C \exp \rho_1(\xi)) \quad (73)$$

для некоторого $C > 0$.

II. *Рассмотрим набор (57) и коцепь F_k (не обязательно реализацию $F_{(k)}$ коцепи F), определенную для некоторого $\varepsilon > 0$ в области*

$$\Omega_{\sigma,k} = \sigma_k \Pi_{\text{main}}^{(\varepsilon)} \cap \Omega, \quad \Omega \in \Omega, \quad (74)$$

типа

$$\sigma_k = (\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_N).$$

Допустим, что на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ выполнена одна из следующих оценок:

$$|F_k(\xi)| \prec \exp(-C \exp \rho_k) \quad (75)$$

в случае, если росток σ_k быстрый;

$$|F_k(\xi)| \prec \exp(-C \exp(1 - \delta)\rho_k) \quad (76)$$

в случае, если росток σ_k секториальный или медленный. Тогда на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ имеем

$$|F_k(\xi)| \prec \exp(-C \exp \rho_{k+1}) \quad (77)$$

в случае, если росток σ_{k+1} быстрый;

$$|F_k(\xi)| \prec \exp(-C \exp(1 - \delta)\rho_{k+1}) \quad (78)$$

при любом $\delta > 0$ в случае, если росток σ_{k+1} секториальный или медленный, за следующими исключениями. В лемме требуется, чтобы

- а) росток σ_1 был быстрым;
- б) если σ_k быстрый, то росток σ_{k+1} не должен быть медленным;
- в) если σ_k секториальный, то росток σ_{k+1} не должен быть почти степенным.

Эти исключения совсем не являются ограничительными. Их можно было бы обойти, вводя в набор (57) некоторые фиктивные ростки. А именно, на первое место поставим фиктивный быстрый росток, между каждым быстрым и медленным ростком вставим фиктивный секториальный росток в набор (72), а между каждым секториальным и почти степенным ростком вставим фиктивный медленный, но не почти степенной росток в набор (57). Поэтому мы будем применять лемму 2.3 без всяких исключений.

Введение фиктивных ростков можно объяснить так. Пусть F – коцепь типа (57), не имеющая скачков (т.е. имеющая $\delta F = 0$) на кривых $\sigma_1(\eta = \pi j)$

для тех $j \neq 0$, для которых они не содержат дуг кривых из $\sigma_j \partial \Xi_{\text{st}}$ при $j > 1$. Допустим, что

$$|\delta F| \prec \exp(-C \exp \rho_2(\xi)).$$

Тогда F на самом деле является коцепью типа $(\sigma_2, \dots, \sigma_N)$. Росток σ_1 в наборе (57) для коцепи F можно назвать *фиктивным*.

Допустим теперь, что в наборе (57) росток σ_1 не быстрый. Тогда можно добавить росток $\sigma_0 = \exp(\zeta - \sqrt{\zeta})$ слева в набор (57) в качестве фиктивного ростка (как в предыдущем абзаце), и новый набор будет начинаться с фиктивного быстрого ростка.

В этом случае для коцепи F , определенной на области Ω , ее реализация $F_{(1)}$ будет определена на области $\sigma_0 \Pi_{\text{main}} \cap \Omega$ и будет совпадать с ограничением F на эту область.

Предварительная оценка тогда утверждает, что F убывает не только экспоненциально на $(\mathbb{R}^+, \infty)$, но и быстрее, чем $\exp(-C \exp \rho_0)$, $\rho_0 = \sigma_0^{-1} = \varphi(\zeta) \circ \ln$, где $\varphi(\zeta)$ – функция, обратная к $(\zeta - \sqrt{\zeta})$.

Аналогично используются в доказательстве другие фиктивные ростки.

Лемма 2.3 представляет собой модифицированную версию леммы 4 п. 3.6 статьи [11]. Она аналогична лемме 0.4, но сложнее ее. Доказывается она по той же схеме: тривиализация коцикла, принцип максимума модуля, построение коцепи $F_{\lambda,a}$ и ее оценка сверху. Однако доказательство более технично из-за присутствия допустимых ростков σ_j .

2.3.2. Схема доказательства теоремы Фрагмена–Линделёфа на основе предварительной оценки. Рассмотрим коцепь F типа (57), как в теореме 2.2. Напомним, что два ростка $\sigma, \tilde{\sigma}$ класса D слабо эквивалентны, если поправка их композиционного частного $\sigma^{-1} \circ \tilde{\sigma}$ ограничена на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Разобьем набор (57) на классы слабой эквивалентности. Поскольку ростки этого набора упорядочены отношением $\succ$, ростки одного класса будут идти подряд. Пусть σ_{k_j} , $j = 1, \dots, m$, – последние ростки в своих классах слабой эквивалентности; заметим, что росток σ_{k_1} слабо эквивалентен σ_1 . Мы будем доказывать теорему Фрагмена–Линделёфа индукцией по j . Добавляя к набору (57) фиктивные ростки, можно считать, что:

- росток σ_1 быстрый;
- если росток σ_k быстрый, то росток σ_{k+1} секториальный;
- если росток σ_k секториальный, то росток σ_{k+1} не является почти степенным;

- последний росток σ_N в последовательности (57) линейен: $\sigma_N = \mu\zeta$.

Последнее допущение нуждается в комментарии: для каждого ростка $\sigma \in D_1^{n-1}$ существует такой линейный росток $\tilde{\sigma}$, что $\sigma \succ \tilde{\sigma}$, причем σ не является слабо эквивалентным ростку $\tilde{\sigma}$. Действительно, если $\sigma \in D_{\text{slow}}^{n-1} \circ \mathcal{L}^{n-1}$, то $\sigma' \rightarrow \infty$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ и требуемое утверждение очевидно. Если же $\sigma \in D_{\text{rap}}^{n-1} \circ \mathcal{L}^{n-1}$, то существует предел

$$\lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} \sigma' = \lambda \in (0, \infty).$$

Тогда для выполнения требуемого условия достаточно взять $\mu < \lambda$.

Докажем индукцией по j соответствующие соотношения (75), (76) для реализаций $F_{(k_j)}$. Из этих соотношений для $F_{(k_m)}$ будут вытекать такие же соотношения для реализации $F_{(N)}$, являющейся голоморфной функцией на своей

области определения. Приведенные ниже специальные рассуждения позволяют нам применить классическую теорему Фрагмена–Линделёфа и заключить, что $F_{(N)} \equiv 0$.

Пусть F – та же, что в теореме Фрагмена–Линделёфа, и, следовательно, та же, что в лемме 2.3.

База индукции: $j = 0$. В этом случае по определению $F_{(k_0)} = F$. Применяя к F первую часть леммы 2.3, получаем оценку (73) для F . Поскольку σ_1 и σ_{k_1} слабо эквивалентны, эта оценка имеет место и при замене ρ_1 на ρ_{k_1} :

$$|F(\xi)| \prec \exp(-C' \exp \rho_{k_1}) \quad (79)$$

для некоторого $C' > 0$. Действительно,

$$\sigma_1^{-1} \circ \sigma_{k_1} = \rho_1 \circ \sigma_{k_1} = \text{id} + O(1).$$

Поэтому $\sigma_{k_1}^{-1} \circ \sigma_1 = \rho_{k_1} \circ \rho_1^{-1} = \text{id} + O(1)$. Тогда

$$\exp \rho_{k_1} = \exp(\rho_{k_1} \circ \rho_1^{-1}) \circ \rho_1 = \exp(\rho_1 + O(1)) \prec C \exp \rho_1$$

для некоторого $C > 0$. Отсюда вытекает (79).

Далее, $F_{(k_1)} = F$ на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Поэтому $F_{(k_1)}$ удовлетворяет (79) на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Этим закончено обоснование базы индукции.

Шаг индукции: от $j \geq 1$ к $j + 1$.

Пусть $F_{(k_j)}$ удовлетворяет (75) или (76) в зависимости от свойств σ_{k_j} , где F_k , ρ_k заменены на $F_{(k_j)}$ и ρ_{k_j} . Тогда согласно второй части леммы 2.3

$$|F_{(k_j)}| \prec \exp(-C \exp \rho_{k_{j+1}})$$

или

$$|F_{(k_j)}| \prec \exp(-C \exp(1 - \delta) \rho_{k_{j+1}}),$$

в зависимости от того, является росток $\sigma_{k_{j+1}}$ быстрым или нет.

Заметим, что росток $\sigma_{k_{j+1}}$ слабо эквивалентен $\sigma_{k_{j+1}}$. Поэтому согласно рассуждению, описанному при обосновании базы индукции, те же неравенства выполнены и при замене $\rho_{k_{j+1}}$ на $\rho_{k_{j+1}}$. Реализации $F_{(k_j)}$ и $F_{(k_{j+1})}$ совпадают на $(\mathbb{R}^+, \infty)$. Поэтому

$$|F_{(k_{j+1})}| \prec \exp(-C \exp \rho_{k_{j+1}})$$

или

$$|F_{(k_{j+1})}| \prec \exp m(-C \exp(1 - \delta) \rho_{k_{j+1}}),$$

в зависимости от того, является росток $\sigma_{k_{j+1}}$ быстрым или нет. Этим завершён шаг индукции.

В результате мы заключаем, что

$$|F_{(N)}| \prec \exp(-C \exp \rho_N). \quad (80)$$

Реализация $F_{(N)}$ является голоморфной функцией в области

$$\Omega_{\sigma, N} = \sigma_N(\Pi_{\text{main}} \cap \rho_N \Omega).$$

По предположению $\sigma_N = \mu\zeta$. Поэтому $\Omega_{\sigma, N}$ – это криволинейная полоса $\mu(\Pi_1 \cup \Pi_*)$. В этой полосе $F_{(N)}$ убывает быстрее, чем $\exp(-C \exp \mu^{-1}\xi)$. Функция $F_{(N)}(\mu\zeta)$ голоморфна в горизонтальной полосе ширины больше, чем π , и

убывает на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ быстрее, чем $\exp(-C \exp \xi)$. Тогда из классической теоремы Фрагмена–Линделёфа вытекает, что $F_{(N)} \equiv 0$.

Этим завершён вывод общей теоремы Фрагмена–Линделёфа из леммы 2.3.

В доказательстве леммы 2.1 используются те же рассуждения, что и в доказательстве леммы 0.4. К сожалению, они дают более слабую оценку, чем нам требуется – так называемую *подготовительную оценку*. Чтобы вывести предварительную оценку из подготовительной, требуются серьёзные технические усилия. Мы опускаем здесь детали.

§ 3. Некоторые обозначения

- 3.1. Общие обозначения.** 1) $z = x + iy$ – стандартная координата на $\mathbb{C}$, $\zeta = \xi + i\eta$ – логарифмическая координата ($\zeta = -\ln z$);
 2) $\mathbb{C}^+ = \{\zeta: \operatorname{Re}(\zeta) > 0\}$ – правая полуплоскость;
 3) $\operatorname{Ad}(f)g = f^{-1} \circ g \circ f$;
 4) $Ag = \operatorname{Ad}(\exp)g$;
 5) $f^{[k]} = f \circ f \circ \dots \circ f$ (k раз).

3.2. Отображение соответствия для седлоузла. 1.

$$\Delta_{\text{st}} = C \exp\left(-\frac{1}{h_{k,a}}\right), \quad C = \exp \frac{1}{k}, \quad h_{k,a}(x) = \frac{kx^k}{1 - akx^k \ln x}$$

– голономия нормальной формы седлоузла в карте z (см. строку 5 таблицы в п. 0.9).

2. F_{norm} – нормализующая секториальная коцепь для параболического ростка; $\tilde{F}_{\text{norm}}$ – та же коцепь в логарифмической карте.

3. Отображение соответствия К центральному многообразию, записанное в карте z : $\Delta = g^l \circ \Delta_{\text{st}} \circ F_{\text{norm}}^l = g^u \circ \Delta_{\text{st}} \circ F_{\text{norm}}^u$, где $F_{\text{norm}}^{u,l}$ – компоненты нормализующей коцепи, соответствующие секторам $S^{u,l}$, а $g^{u,l}$ – параболические ростки.

3.3. Множества ростков. 1. $\mathcal{R}$ – почти регулярные ростки в логарифмической карте; $\mathcal{R}^0$ – ростки из $\mathcal{R}$ с тождественной аффинной главной частью.

2. $\mathcal{H}$ – параболические ростки конформных отображений в нуле, записанные в логарифмической карте (в точке ∞).

3. Aff – множество ростков аффинных отображений $(\mathbb{C}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}^+, \infty)$ с вещественными коэффициентами и положительным мультипликатором.

4. $\mathcal{NC}_k$ – нормализующие коцепи порядка k (т. е. соответствующие полосам ширины π/k).

5. $\mathcal{NC} = \bigcup_k a^k \circ \mathcal{NC}_k \circ a_k^{-1}$, где a_k – аффинное отображение $\zeta \mapsto k\zeta - \ln k$.

6. $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ – ростки, сужение которых на $(\mathbb{R}^+, \infty)$ является отображением $(\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

7. $\mathbf{TO} = (\mathcal{H} \circ \exp \circ \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \circ \operatorname{Aff}) \cap \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ – класс, содержащий голономию **ТО** данного седлоузла К центральному многообразию (записанную в логарифмической карте).

8. **FROM** – все ростки, обратные к росткам из **ТО**.

9. $H^0 = \operatorname{Gr}(\operatorname{Ad}(\operatorname{Aff})\mathcal{H}, \mathcal{R}^0)$.

10. $\mathcal{A}^0 = \operatorname{Gr}(f \in \mathcal{R}^0 \circ \mathcal{NC} \mid \text{существует } \tilde{g} \in \mathcal{H}: A\tilde{g} \circ f \text{ вещественно})$.

11. G_n – множество всех композиций отображений из **TO**, **FROM** и $\mathcal{R}$ глубины n с одинаковым числом отображений из **TO** и **FROM** (монодромия сложных циклов глубины n содержится в G_n). Легко видеть, что $G_n = \text{Gr}(A^k(\mathbf{FROM} \circ \mathcal{R} \circ \mathbf{TO}), \mathcal{R}) \mid 1 \leq k \leq n-1$. По окончательной структурной теореме $G_n \subset \text{Gr}(G_{n-1}, A^{n-1}A^0, A^n H^0) \cap M_{\mathbb{R}}$.

$$12. J^{n-1} = \text{Ad}(G^{n-1})A^{n-1}A^0.$$

$$13. H^n = \text{Gr}(\text{id} + \mathcal{FC}_{0+}^n \circ \exp^{[n]} \circ g \mid g \in G^{n-1}).$$

$$14. G^n = \text{Gr}(G^{n-1}, J^{n-1}, H^n) \cap M_{\mathbb{R}}.$$

15. $\lambda_k(g) = \lim_{(\mathbb{R}^+, \infty)} A^{-k}g/\xi$ – обобщенный мультипликатор порядка k роста $g: (\mathbb{R}^+, \infty) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \infty)$.

16. Если группа G и число k таковы, что G является k -собственной, то определены

$$\begin{aligned} \lambda_k^{-1}(0) &= G_{\text{slow}}^-, & \lambda_k^{-1}(\mathbb{R}^+) &= G_{\text{rap}}, & \lambda_k^{-1}(\infty) &= G_{\text{slow}}^+, \\ G_{\text{slow}} &= G \setminus G_{\text{rap}} = G_{\text{slow}}^- \cup G_{\text{slow}}^+. \end{aligned}$$

3.4. Функциональные коцепи. 1. $\Phi_c(\mathbb{C}^+)$ – квадратичная стандартная область, $\Phi_c(\zeta) = \zeta + c\sqrt{1 + \zeta}$.

2. $P_j = \{\text{Im } \zeta \in \pi[j-1, j]\}$ – полоса стандартного разбиения Ξ_{st} правой полуплоскости $\mathbb{C}^+$.

3. $\mathcal{FC}_0^n, \mathcal{FC}_1^{n-1}$ – множества коцепей класса n , аксиоматически определенные в п. 1.5; модель для этого аксиоматического определения построена в пп. 1.10–1.16.

4. $\mathcal{FC}_{0+}^n, \mathcal{FC}_{1+}^{n-1}$: нижний индекс “+” означает, что коцепь быстро убывает, т. е. $|F(\zeta)| \prec \exp(-\varepsilon\xi)$ в некоторой стандартной области класса n (соответственно $n-1$); равенства со знаком (+) справедливы как при наличии плюса, так и без него.

5. $\mathcal{FC}^m$ при $1 \leq m \leq n$ означает $\mathcal{FC}_1^m$, если $m \leq n-1$, и $\mathcal{FC}_0^n$, если $m = n$.

6. $\mathcal{F}_{(+)}^m = \mathcal{FC}_{(+)}^m \circ \exp^{[m]} \circ g$.

Благодарности. Приношу глубокую благодарность рецензенту за проделанную им большую работу и многочисленные полезные комментарии, направленные на то, чтобы сделать изложение в статье более понятным. Автор также благодарен Ивану Шилину, Алексею Окуневу и Станиславу Минкову, прочитавшим первую версию статьи и исправившим много ошибок. Алексей Окунев также составил список обозначений.

Список литературы

1. Yu. S. Il'yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, transl. from the Russian, Transl. Math. Monogr., **94**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, x+288 pp.
2. J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualites Math., Hermann, Paris, 1992, ii+340 pp.
3. I. Bendixson, “Sur les courbes définies par des équations différentielles”, *Acta Math.*, **24**:1 (1901), 1–88.
4. F. Dumortier, *Singularities of vector fields*, Monograf. Mat., **32**, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978, iv+191 pp.
5. A. Seidenberg, “Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$ ”, *Amer. J. Math.*, **90**:1 (1968), 248–269.

6. А. Дюлак, *О предельных циклах*, Наука, М., 1980, 157 с.; пер. с франц.: Н. Dulac, "Sur les cycles limites", *Bull. Soc. Math. France*, **51** (1923), 45–188.
7. Ю. С. Ильяшенко, "Предельные циклы полиномиальных векторных полей с невырожденными особыми точками на вещественной плоскости", *Функц. анализ и его прил.*, **18**:3 (1984), 32–42; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, "Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane", *Funct. Anal. Appl.*, **18**:3 (1984), 199–209.
8. С. М. Воронин, "Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью", *Функц. анализ и его прил.*, **15**:1 (1981), 1–17; англ. пер.: S. M. Voronin, "Analytic classification of germs of conformal mappings $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ with identity linear part", *Funct. Anal. Appl.*, **15**:1 (1981), 1–13.
9. Ю. С. Ильяшенко, "Мемуар Дюлака "О предельных циклах" и смежные вопросы локальной теории дифференциальных уравнений", *УМН*, **40**:6(246) (1985), 41–78; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, "Dulac's memoir "On limit cycles" and related problems of the local theory of differential equations", *Russian Math. Surveys*, **40**:6 (1985), 1–49.
10. Ю. С. Ильяшенко, "Сепаратрисные двуугольники аналитических векторных полей на плоскости", *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1986, № 4, 25–31; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, "Separatrix lunes of analytic vector fields of the plane", *Mosc. Univ. Math. Bull.*, **41**:4 (1986), 28–35.
11. Ю. С. Ильяшенко, "Теоремы конечности для предельных циклов", *УМН*, **45**:2(272) (1990), 143–200; англ. пер.: Yu. S. Ilyashenko, "Finiteness theorems for limit cycles", *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 129–203.
12. Э. Ч. Титчмарш, *Теория функций*, Гостехиздат, М., 1951, 507 с.; 2-е изд., Наука, М., 1980, 464 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, Oxford, 1939, x+454 pp.

Юлий Сергеевич Ильяшенко

(YULIJ S. ILYASHENKO)

Национальный исследовательский университет

"Высшая школа экономики", г. Москва;

Cornell University, Ithaca, NY, USA;

Независимый Московский университет

E-mail: yulijs@mccme.ru

Поступило в редакцию

03.02.2015

16.06.2015

Перевод с английского А. В. Домрина