Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Дуализирующие накрытия плоскости,
Изв. РАН. Сер. матем., 2015, том 79, выпуск 5, 163–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 11:34:31

УДК 512.7+515.1

Вик. С. Куликов

Дуализирующие накрытия плоскости

В статье исследованы свойства дуализирующих накрытий плоскости, ассоциированных с плоскими кривыми, и полностью описано множество кривых, для которых галуизации дуализирующих накрытий имеют в качестве своих особых точек только факторособенности.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: двойственные кривые, накрытия плоскости, факторособенности, группы, порожденные отражениями.

DOI: 10.4213/im8368

Введение

В настоящей работе все многообразия определены над комплексными числами $\mathbb{C}$.

Пусть $h: X \rightarrow Y$ – накрытие, т.е. конечный морфизм нормальной неприводимой поверхности X на неособую поверхность Y , и пусть $B \subset Y$ – кривая ветвления (внизу) накрытия h , $R \subset h^{-1}(B) \subset X$ – кривая ветвления (вверху) и $X \setminus h^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ – неразветвленная часть накрытия. Накрытие $X \setminus h^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ степени d определяет гомоморфизм h_* из фундаментальной группы $\pi_1(Y \setminus B, p)$ в симметрическую группу $\mathbb{S}_d$, действующую на слое $h^{-1}(p)$, состоящем из d точек. Гомоморфизм h_* называется *монодромией* накрытия h и определяется накрытием h однозначно, если мы перенумеруем точки из $h^{-1}(p)$, а его образ $G := \text{Im } h_* \subset \mathbb{S}_d$ называется *группой монодромии* накрытия h . Обратно, теорема Грауэрта–Реммерта–Римана–Штейна о продолжении [1] гласит, что класс сопряженности гомоморфизма h_* определяет накрытие h однозначно с точностью до изоморфизма.

Вложение Кэли $i: G \hookrightarrow \mathbb{S}_{|G|}$ (G действует на себе умножениями справа) и гомоморфизм h_* определяют гомоморфизм $f_* = i \circ h_*: \pi_1(Y \setminus B) \rightarrow \mathbb{S}_{|G|}$, который определяет накрытие Галуа $f: Z \rightarrow Y$ с группой Галуа $\text{Im } f_* = G$. Морфизм f (и поверхность Z) называется *галуизацией накрытия h* .

Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – плоская алгебраическая кривая, $\widehat{\mathbb{P}}^2$ – двойственная плоскость и $I \subset \mathbb{P}^2 \times \widehat{\mathbb{P}}^2$ – многообразие инцидентности (многообразие полных флагов на $\mathbb{P}^2$). Морфизм $X \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$ нормализации прообраза кривой C в I называется *дуализирующим накрытием* плоскости, ассоциированным с кривой C .

В данной статье исследуются неприводимые приведенные кривые $C \subset \mathbb{P}^2$, для которых галуизации дуализирующих накрытий имеют в качестве своих

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

особых точек только факторособенности. Отметим, что дуализирующие накрытия, ассоциированные с плоскими кривыми, имеющими только простейшие особые точки, использовались уже в ряде работ для построения накрытий, обладающих теми или иными специальными свойствами (см., например, [2]–[4]). Однако автор уверен, что исследование свойств дуализирующих накрытий, ассоциированных с плоскими кривыми, имеющими произвольные особенности, даст возможность построить много новых нетривиальных примеров поверхностей с теми или иными интересными свойствами.

Статья организована следующим образом. В § 1 дано определение и исследованы свойства дуализирующих накрытий. В § 2 напоминаются некоторые факты о конечных накрытиях поверхностей, вычисляются локальные группы монодромии дуализирующих накрытий (теорема 2), а также формулируется основной результат – теорема 4, где дано полное описание плоских кривых, для которых галувизации ассоциированных с ними дуализирующих накрытий имеют только факторособенности в качестве своих особых точек. В § 3 дано доказательство теоремы 4.

Если (U, o) – росток поверхности, то через $\text{Sing } U$ будем обозначать его топологический тип особенности в точке o и через $\text{Sing } B$ – топологический тип особенности ростка кривой $(B, O) \subset (\mathbb{C}^2, O)$. Ниже, как обычно, используем следующие обозначения для типов особенностей: $A_n = \text{Sing}\{w_1^2 + w_2^{n+1} = 0\}$, $n \geq 0$ (при $n = 0$ особенность типа A_0 означает, что кривая B неособа в точке O); $D_n = \text{Sing}\{w_2(w_1^2 + w_2^{n-2}) = 0\}$, $n \geq 4$; $E_6 = \text{Sing}\{w_1^3 + w_2^4 = 0\}$; $E_7 = \text{Sing}\{w_1(w_1^2 + w_2^3) = 0\}$; $E_8 = \text{Sing}\{w_1^3 + w_2^5 = 0\}$. Если одномерная особенность $(B, O) = \{F(w_1, w_2) = 0\}$ имеет тип T , то тип двумерной особенности $(U, o) = \{F(w_1, w_2) = w_3^2\} \subset \mathbb{C}^3$ будет обозначаться той же буквой T . (Двумерная особенность типа A_0 означает, что росток поверхности (U, o) неособ в точке o .) Как обычно, двумерная особенность типа $\frac{1}{n}(1, q)$ – это циклическая факторособенность $\mathbb{C}^2/G$, где $G \subset \text{GL}(\mathbb{C}, 2)$ – циклическая группа, порожденная линейным преобразованием

$$g = \begin{pmatrix} e^{2\pi i/n} & 0 \\ 0 & e^{2\pi qi/n} \end{pmatrix}.$$

§ 1. Кривые ветвления дуализирующих накрытий

Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая приведенная кривая степени $\deg C = d \geq 2$. Обозначим через $\nu: \overline{C} \rightarrow C$ нормализацию кривой C и рассмотрим точку $p \in \overline{C}$ и ее образ $P = \nu(p) \in \mathbb{P}^2$. Выберем однородные координаты (x_1, x_2, x_3) на $\mathbb{P}^2$ такие, что $P = (0, 0, 1)$. Мы можем выбрать локальный параметр t в комплексно-аналитической окрестности $U \subset \overline{C}$ точки p так, что отображение ν будет задаваться следующими формулами:

$$x_1 = \sum_{i=d_p}^{\infty} a_i t^i, \quad x_2 = t^{r_p}, \quad x_3 = 1, \quad (1)$$

где $a_{d_p} \neq 0$ и $d_p > r_p \geq 1$. Назовем число r_p *кратностью особенности* ростка $\nu(U)$ в точке $P = \nu(p)$, прямую $l_p = \{x_1 = 0\}$ – *касательной прямой* к C в точке P и число d_p – *касательной кратностью* ростка $\nu(U)$ в точке P .

Пусть $\hat{C} \subset \hat{\mathbb{P}}^2$ – двойственная кривая к кривой C (кривая $\hat{C}$ состоит из касательных прямых l_p , $p \in \overline{C}$, к кривой C). Граф соответствия между кривыми C и $\hat{C}$ – это кривая $\check{C}$ в $\mathbb{P}^2 \times \hat{\mathbb{P}}^2$ (так называемое раздутие Нэша кривой C), которая лежит в многообразии инцидентности $I = \{(P, l) \in \mathbb{P}^2 \times \hat{\mathbb{P}}^2 \mid P \in l\}$,

$$\check{C} = \{(\nu(p), l_p) \in I \mid p \in \overline{C} \text{ и } l_p \text{ – касательная прямая к } C \text{ в точке } \nu(p) \in C\}.$$

Ниже через $L_P \subset \hat{\mathbb{P}}^2$ обозначается прямая, двойственная точке $P \in C \subset \mathbb{P}^2$.

Пусть $\text{rg}_1: \mathbb{P}^2 \times \hat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ и $\text{rg}_2: \mathbb{P}^2 \times \hat{\mathbb{P}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^2$ – проекции на множители, $X' = \text{rg}_1^{-1}(C) \cap I$ и $h': X' \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^2$ – ограничение проекции rg_2 на X' . Очевидно, $h'^{-1}(l)$ состоит из точек $(P, l) \in \mathbb{P}^2 \times \hat{\mathbb{P}}^2$ таких, что $P \in C \cap l$, и поэтому $\deg h' = \deg C = d$.

Пусть $\nu': X \rightarrow X'$ – морфизм нормализации поверхности X' . Морфизм $h = h' \circ \nu': X \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^2$ называется *дуализирующим накрытием* плоскости, ассоциированным с кривой $C \subset \mathbb{P}^2$. Имеем $\deg h = d$. Легко видеть, что X изоморфно расслоенному произведению $\overline{C} \times_C X'$ нормализации $\nu: \overline{C} \rightarrow C$ и проекции $\text{rg}_1: X' \rightarrow C$. Проекция $\text{rg}_1: X' \rightarrow C$ задает на X' структуру линейчатой поверхности, и эта структура индуцирует линейчатую структуру на X над $\overline{C}$. Отметим, что $\tilde{C} = \nu'^{-1}(\check{C}) \subset X$ является сечением этой линейчатой структуры, а образ $h(F_p)$ слоя F_p является прямой $L_{\nu(p)} \subset \hat{\mathbb{P}}^2$, двойственной к точке $\nu(p) \in C \subset \mathbb{P}^2$.

Следующая теорема описывает свойства дуализирующих накрытий.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $h: X \rightarrow \hat{\mathbb{P}}^2$ – дуализирующее накрытие, ассоциированное с кривой $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg C = d$. Тогда X является гладкой линейчатой поверхностью.

Кривая ветвления (вверху) накрытия h – это кривая $\bar{R} = \tilde{C} \cup \tilde{F}$, где $\tilde{F} = \bigcup_{r_p \geq 2} F_p$ и объединение взято по всем точкам $p \in \overline{C}$, кратности r_p которых не меньше двух. Ограничение накрытия h на каждую компоненту кривой $\bar{R}$ является бирациональным морфизмом на образ этой компоненты.

Локальная степень $\deg_q h$ накрытия h в точке $q = F_p \cap \tilde{C}$ равна касательной кратности d_p , $\deg_q h = r_p$ во всех точках $q \in F_p \setminus \tilde{C}$ и $\deg_q h = 2$ для всех точек $q \in \tilde{C} \setminus \tilde{F}$.

Кривая ветвления (внизу) накрытия h – это кривая $\bar{B} = \hat{C} \cup \hat{L}$, где $\hat{L} = \bigcup_{r_p \geq 2} L_{\nu(p)}$, а $L_{\nu(p)}$ – это прямые, двойственные точкам $\nu(p) \in C$, и объединение взято по всем точкам $p \in \overline{C}$, кратности r_p которых не меньше двух.

Через точку $l \in \hat{\mathbb{P}}^2$ проходят все ветви кривой $\hat{C}$, двойственные тем ветвям кривой C , для которых l является касательной, и те прямые L_P , которые двойственны точкам $P \in C \cap l$, через которые проходят особые ветви кривой C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $X \simeq \{(p, l) \in \overline{C} \times \hat{\mathbb{P}}^2 \mid p \in \overline{C}, \nu(p) \in l\}$.

Пусть t – локальный параметр на кривой $\overline{C}$ в малой окрестности $U \subset \overline{C}$ точки $p \in \overline{C}$, и пусть морфизм нормализации ν задан в U следующими функциями:

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad x_3 = \phi_3(t). \quad (2)$$

Если (y_1, y_2, y_3) – координаты в $\widehat{\mathbb{P}}^2$, двойственные координатам (x_1, x_2, x_3) в $\mathbb{P}^2$, то поверхность X в окрестности $U \times \widehat{\mathbb{P}}^2 \subset \overline{C} \times \widehat{\mathbb{P}}^2$ задается уравнением

$$y_1\phi_1(t) + y_2\phi_2(t) + y_3\phi_3(t) = 0.$$

В частности, если отображение ν задано функциями (1), то $X \cap (U \times \widehat{\mathbb{P}}^2)$ лежит в $U \times \mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}^2 = \{y_1 \neq 0\}$ – аффинная плоскость в $\widehat{\mathbb{P}}^2$, и $X \cap (U \times \mathbb{C}^2)$ задается уравнением

$$\sum_{i=d_p}^{\infty} a_i t^i + z_2 t^{r_p} + z_3 = 0, \quad (3)$$

где $z_i = y_i/y_1$, $i = 2, 3$. Следовательно, X является гладкой поверхностью и (t, z_2) являются координатами в $X \cap (U \times \mathbb{C}^2)$.

Ограничение $h_U: X \cap (U \times \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ накрытия h на $X \cap (U \times \mathbb{C}^2)$ является ограничением проекции $(t, z_2, z_3) \mapsto (z_2, z_3)$ и поэтому задается формулами

$$z_2 = z_2, \quad z_3 = -\left(\sum_{i=d_p}^{\infty} a_i t^i + z_2 t^{r_p}\right). \quad (4)$$

Его якобиан равен

$$J(h_U) = -t^{r_p-1} \left(\sum_{i=d_p}^{\infty} i a_i t^{i-r_p} + r_p z_2 \right),$$

и поэтому h_U разветвлено с кратностью два вдоль кривой R , заданной уравнением

$$\frac{1}{r_p} \sum_{i=d_p}^{\infty} i a_i t^{i-r_p} + z_2 = 0, \quad (5)$$

и вдоль слоя $F_p = \{t = 0\}$ с кратностью r_p , если $r_p \geq 2$, т.е. $h(F_p) = L_p \subset \widehat{\mathbb{P}}^2$ является компонентой кривой ветвления $\overline{B} \subset \widehat{\mathbb{P}}^2$ накрытия h , если $r_p \geq 2$. Отметим, что R является сечением линейчатой структуры $X \cap (U \times \mathbb{C}^2) \rightarrow U$ и, более того, единственным сечением, содержащимся в кривой ветвления (вверху). Следовательно, чтобы доказать, что R является ростком кривой $\tilde{C}$, мы можем предполагать, что образ $\nu(p)$ является гладкой точкой кривой C , т.е. что $r_p = 1$ и $\phi_2(t) = t$. Тогда R задано уравнением $\phi_1'(t) + z_2 = 0$ и ограничение накрытия h_U на R задано функциями

$$y_1 = 1, \quad y_2 = -\phi_1'(t), \quad y_3 = -\phi_1(t) + t\phi_1'(t). \quad (6)$$

Простая проверка показывает, что уравнения (6) вместе с уравнениями

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = t, \quad x_3 = 1$$

(определяющими росток $\nu(U)$) – это параметризация кривой $\check{C} \subset I$ над $\nu(U)$.

Чтобы вычислить степень $\deg_q h_U$ накрытия $h_U: X \cap (U \times \mathbb{C}^2) \rightarrow \mathbb{C}^2$ в точке $q = (0, 0, 0)$, заметим, что кривая $\{z_2 = 0\}$ не принадлежит кривой ветвления

накрытия h_U , так как $a_{d_p} \neq 0$ в уравнении (5). Затем, можно выбрать новый параметр t_1 такой, что $t_1^{d_p} = \sum_{i=d_p}^{\infty} a_i t^i$. Тогда h_U задается уравнениями вида

$$z_2 = z_2, \quad z_3 = -\left(t_1^{d_p} + z_2 \sum_{i=r_p}^{\infty} c_i t_1^i\right) \quad (7)$$

и для того, чтобы вычислить $\deg_q h_U$, достаточно вычислить число точек, лежащих в $h_U^{-1}((z_{2,0}, z_{3,0}))$, где точка $(z_{2,0}, z_{3,0}) \in \text{Im } h_U$ такова, что $z_{2,0} = 0$, $z_{3,0} \neq 0$ и $|z_{3,0}| \ll 1$. Из уравнений (7) следует, что это число равно d_p . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если неприводимый росток (C', p) кривой C задан параметризацией (1), то из (4) и (5) следует, что росток $(\widehat{C}', l)$ кривой $\widehat{C}$, двойственный ростку (C', p) , задается параметризацией

$$z_2 = -\frac{1}{r_p} \sum_{i=d_p}^{\infty} i a_i t^{i-r_p}, \quad z_3 = \frac{1}{r_p} \sum_{i=d_p}^{\infty} (i - r_p) a_i t^i \quad (8)$$

и, следовательно, касательные кратности d_p и d_l ростков (C', p) и $(\widehat{C}', l)$ равны друг другу.

§ 2. О локальных группах монодромий

2.1. Для того чтобы понять поведение накрытия $f: Z \rightarrow Y$ над точкой $O \in Y$, часто бывает удобно выбрать небольшую окрестность (в комплексно-аналитической топологии) $V \subset Y$ этой точки такую, что число k связанных компонент $U_1, \dots, U_k$ прообраза $f^{-1}(V)$ равно числу точек, принадлежащих прообразу $f^{-1}(O)$, и рассмотреть ограничение морфизма f на каждую связную компоненту U_j , $f_j = f|_{U_j}: U_j \rightarrow V$. Обозначим через d_j степень накрытия f_j , $d = d_1 + \dots + d_k$, и в этом случае для каждой точки $o_i = U_i \cap f^{-1}(O)$ имеем $\deg_{o_i} f = d_i$. Нумерация точек в слое $f^{-1}(p)$ и разложение $f^{-1}(V) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_k$ определяют разбиение $[1, d] = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_k$ целочисленного сегмента $[1, d] = \{1, \dots, d\}$, а именно, $i \in I_j$ тогда и только тогда, когда $q_i \in f^{-1}(p) \cap U_j$.

Если задано разбиение $J = \{I_1, \dots, I_k\}$ сегмента $[1, d]$, то обозначим через $\mathbb{S}_{I_j} \subset \mathbb{S}_d$ симметрическую группу, действующую на I_j , и пусть

$$\mathbb{S}_J = \mathbb{S}_{I_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{I_k} \subset \mathbb{S}_d.$$

Не ограничивая общности, можем предполагать, что базисная точка p лежит в V . Тогда вложение $i: V \hookrightarrow Y$ определяет гомоморфизмы

$$i_*: \pi_1(V \setminus B, p) \rightarrow \pi_1(Y \setminus \overline{B}, p), \quad \varphi = f_* \circ i_*: \pi_1(V \setminus B, p) \rightarrow \mathbb{S}_d,$$

где $B = V \cap \overline{B}$. Очевидно, образ $\text{Im } \varphi = G_{\text{loc}, O} \subset G$ является подгруппой группы $\mathbb{S}_J = \mathbb{S}_{I_1} \times \dots \times \mathbb{S}_{I_k} \subset \mathbb{S}_d$ (группа $G_{\text{loc}, O}$ называется *локальной группой монодромии* накрытия f в точке O). Отметим, что каждое накрытие $f_j: U_j \rightarrow V$ определяется однозначно с точностью до изоморфизма гомоморфизмом

$$\varphi_j = \text{pr}_j \circ \varphi: \pi_1(V \setminus B, p) \rightarrow \mathbb{S}_{I_j},$$

где $\text{pr}_j: \mathbb{S}_{I_1} \times \cdots \times \mathbb{S}_{I_k} \rightarrow \mathbb{S}_{I_j}$ – проекция на j -й множитель. Кроме того, если $f: Z \rightarrow Y$ является накрытием Галуа и поверхность Z неприводима, то $d_1 = \cdots = d_k = |G_{\text{loc}, O}|$, $k = (G: G_{\text{loc}, O})$ и множество $\{U_1, \dots, U_k\}$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством левых смежных классов $gG_{\text{loc}, O}$ группы $G_{\text{loc}, O}$ в группе G , а все накрытия $f_j: U_j \rightarrow V$, $\deg f_j = |G_{\text{loc}, O}|$ являются изоморфными накрытиями Галуа с группой Галуа $G_{\text{loc}, O}$ (изоморфизмы индуцируются действием группы G на Z).

Очевидно, что если $O \notin \overline{B}$, то $k = d$ и накрытия $f_j: U_j \rightarrow V$ являются аналитическими изоморфизмами. Поэтому ниже мы предполагаем, что $O \in \overline{B}$. Кроме того, предполагаем, что V аналитически изоморфна бидиску $D \subset \mathbb{C}^2$ с центром в точке $O = (0, 0)$, где

$$D \simeq D_1 \times D_2, \quad D_i = \{z_i \in \mathbb{C} \mid |z_i| \leq \varepsilon_i\}, \quad i = 1, 2,$$

и мы будем отождествлять окрестность V с этим бидиском.

Хорошо известно, что группа $\pi_1(D \setminus B, p)$ порождается так называемыми *геометрическими порождающими* γ_q , т.е. элементами, представленными петлями Γ_q , $q \in B \setminus \{O\}$, следующего вида. Пусть $L \subset \mathbb{C}^2$ – прямая, пересекающая кривую B трансверсально в точке q , и пусть $S_1 \subset L \cap D$ – окружность малого радиуса с центром в точке q . Выбор ориентации на $\mathbb{C}^2$ определяет ориентацию на S_1 , и тогда Γ_q – это петля, состоящая из пути l , лежащего в $D \setminus B$ и соединяющего точку p с некоторой точкой $q_1 \in S_1$, петли S_1 (с положительной ориентацией), начинающейся и заканчивающейся в точке q_1 , и возврата назад в точку p вдоль пути l (конечно, следует отметить, что геометрическая порождающая γ_q зависит не только от выбора точки q , но и от выбора пути l ; при выборе разных путей порождающие γ_q сопряжены друг с другом в $\pi_1(D \setminus B, p)$).

Рассмотрим снова конечное накрытие $f: Z \rightarrow Y$ степени d , разветвленное вдоль кривой $\overline{B} \subset Y$, и пусть $D \subset Y$ – это бидиск, обладающий описанными выше свойствами. Пусть $B = D \cap \overline{B} = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ – разложение на неприводимые компоненты. Обозначим через $r_i = (r_{i,1}, \dots, r_{i,m_i})$ цикловой тип перестановки $f_*(\gamma_q) \in \mathbb{S}_d$, $r_{i,1} + \cdots + r_{i,m_i} = d$, где $q \in B_i$ и $\gamma_q \in \pi_1(D \setminus B, p)$ – геометрическая порождающая. Тогда $f^{-1}(B_i)$ состоит из m_i неприводимых компонент $C_{i,1}, \dots, C_{i,m_i} \subset f^{-1}(D)$ и $r_{i,j}$ – это индекс ветвления накрытия f вдоль кривой $C_{i,j}$. В частности, если f – накрытие Галуа, то $r_{i,j_1} = r_{i,j_2}$ для $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq m_i$.

Пусть бидиск $D = D_1 \times D_2$ выбран таким образом, что ограничение проекции $\text{pr}_1: D^2 \rightarrow D_1$ на $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k \subset D$ является собственным отображением, имеющим единственную критическую точку $O \in B$, и его степень n равна кратности особенности кривой B в точке O , и пусть n_i – это степень, ограничения проекции pr_1 на B_i , $n = n_1 + \cdots + n_k$. Как хорошо известно (см., например, [5]), в этом случае обход вдоль границы диска D_1 определяет брэйд-монодромию кривой B , т.е. некоторый элемент $b = b(B)$ группы кос Br_n , одно из определений которой – это подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ свободной группы $\mathbb{F}^n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$, состоящая из автоморфизмов, переводящих порождающие элементы x_i в элементы, сопряженные с порождающими элементами, и оставляющих неподвижным произведение $x_1 x_2 \cdots x_n$. Если $a_1, \dots, a_{n-1}$ – стандартные (артиновы) порождающие элементы группы Br_n , то (правое) действие

группы Br_n на группе $\mathbb{F}^n$ задается следующими формулами:

$$\begin{aligned}(x_j)a_i &= x_j, \quad \text{если } j \neq i, i+1, \\ (x_i)a_i &= x_i x_{i+1} x_i^{-1}, \\ (x_{i+1})a_i &= x_i.\end{aligned}\tag{9}$$

По теореме ван Кампена–Зариского фундаментальная группа $\pi_1(D \setminus B, p)$ с базисной точкой $p = (z_{1,0}, z_{2,0}) \in D \setminus B$ порождается хорошим геометрическим базисом $x_1, \dots, x_n$ (определение хорошего базиса см., например, в [5]) свободной группы $\pi_1(L \setminus B, p) \simeq \mathbb{F}^n$, где $L = \{z_1 = z_{1,0}\}$, и имеет следующее копредставление:

$$\pi_1(D \setminus B, p) \simeq \langle x_1, \dots, x_n \mid x_i = (x_i)b, i = 1, \dots, n \rangle,\tag{10}$$

где b – брэйд-монодромия кривой B .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в копредставлении (10) среди порождающих группу $\pi_1(D \setminus B, p)$ элементов $x_1, \dots, x_n$ имеется ровно n_i геометрических порождающих, представленных обходами вокруг кривой B_i .

2.2. Приведем копредставления групп $\pi_1(D \setminus B)$ для некоторых конкретных кривых B .

Если $B = B_1 \cup B_2$ имеет особенность типа A_{2n-1} , то $b(B) = a_1^{2n}$ и легко видеть, что $\pi_1(D \setminus B) = \langle x_1, x_2 \mid (x_1 x_2)^n = (x_2 x_1)^n \rangle$. При этом геометрическая порождающая x_1 – это обход вокруг B_1 , а x_2 – обход вокруг B_2 .

Если B имеет особенность типа A_{2n} , то $b(B) = a_1^{2n+1}$ и поэтому $\pi_1(D \setminus B) = \langle x_1, x_2 \mid (x_1 x_2)^n x_1 = x_1 (x_2 x_1)^n \rangle$, где x_1 и x_2 – геометрические порождающие.

Если $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ имеет особенность типа D_{2n+2} , где $B_2 \cup B_3$ имеет особенность типа A_{2n-1} , то $b(B) = a_1 a_2^2 a_1 a_2^{2n}$ и легко видеть, что

$$\begin{aligned}\pi_1(D \setminus B) &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = (x_2 x_3) x_1 (x_2 x_3)^{-1}, \\ x_2 &= x_1 (x_2 x_3)^n x_2 (x_2 x_3)^{-n} x_1^{-1}, \\ x_3 &= x_1 (x_2 x_3)^{n-1} x_2 x_3 x_2^{-1} (x_2 x_3)^{1-n} x_1^{-1} \rangle,\end{aligned}$$

при этом x_1 – обход вокруг B_1 , x_2 – обход вокруг B_2 , а x_3 – обход вокруг B_3 .

Если $B = B_1 \cup B_2$ имеет особенность типа D_{2n+3} , где B_2 имеет особенность типа A_{2n} , то $b(B) = a_1 a_2^2 a_1 a_2^{2n+1}$ и легко видеть, что

$$\begin{aligned}\pi_1(D \setminus B) &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = (x_2 x_3) x_1 (x_2 x_3)^{-1}, \\ x_2 &= x_1 (x_2 x_3)^n x_2 x_3 x_2^{-1} (x_2 x_3)^{-n} x_1^{-1}, \\ x_3 &= x_1 (x_2 x_3)^n x_2 (x_2 x_3)^{-n} x_1^{-1} \rangle.\end{aligned}$$

при этом x_1 – обход вокруг B_1 , а x_2 и x_3 – обходы вокруг B_2 .

Если B имеет особенность типа E_6 , то $b(B) = (a_1 a_2)^4$ и легко видеть, что

$$\begin{aligned}\pi_1(D \setminus B) &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = (x_1 x_2 x_3)^2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{-2}, \\ x_2 &= (x_1 x_2 x_3) x_1 (x_1 x_2 x_3)^{-1}, \\ x_3 &= (x_1 x_2 x_3) x_2 (x_1 x_2 x_3)^{-1} \rangle.\end{aligned}$$

Если $B = B_1 \cup B_2$ имеет особенность типа E_7 , где B_2 имеет особенность типа A_2 , то $b(B) = (a_1 a_2 a_1)^3$ и легко видеть, что

$$\begin{aligned}\pi_1(D \setminus B) &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = (x_1 x_2 x_3)^2 x_3 (x_1 x_2 x_3)^{-2}, \\ x_2 &= (x_1 x_2 x_3)^n x_1 x_2 x_1^{-1} (x_1 x_2 x_3)^{-n}, \\ x_3 &= (x_1 x_2 x_3) x_1 (x_1 x_2 x_3)^{-1} \rangle.\end{aligned}$$

Отметим, что геометрическая порождающая x_2 представляется обходом вокруг ветви B_1 .

2.3. Вернемся к рассмотрению дуализирующих накрытий. Пусть $(C, O) = C_1 \cup \dots \cup C_n \subset D$ – росток неприводимой приведенной кривой $C \subset \mathbb{P}^2$, C_i – его неприводимые компоненты и l – прямая, проходящая через точку O . Скажем, что росток C_i является *особым по отношению к прямой l* , если индекс пересечения $(C_i, l)_{D, O} = m_i \geq 2$, и скажем, что O является *особой точкой прямой l по отношению к C* , если у (C, O) имеется хотя бы один особый по отношению к l росток. Пусть среди неособых ростков кривой (C, O) имеется не более двух, касающихся прямой l , и если два неособых ростка, пусть это C_1 и C_2 , касаются прямой l , то объединим их в один особый росток $C_{1,2} = C_1 \cup C_2$ типа A_{2k-1} , где $k = (C_1, C_2)_{D, O}$. Если T_i – тип особенности неприводимого ростка C_i , то через $t_{l, O}(C_i) = T_{i, m_i}$ обозначим *тип особенности по отношению к l ростка C_i* , а в случае приводимого особого ростка $C_{1,2} = C_1 \cup C_2$ его *тип особенности по отношению к l* будет обозначаться $t_{l, O}(C_{1,2}) = A_{2k-1, m_1, m_2}$. Набор $p_l(C) = (t_{l, O_1}(C); \dots; t_{l, O_N}(C))$ называется *паспортом особенностей кривой C по отношению к l* , где $\{O_1, \dots, O_N\} \subset C \cap l$ – множество особых по отношению к C точек из l , а $t_{l, O_j}(C) = (t_{l, O_j}(C_{j,1}), \dots, t_{l, O_j}(C_{j,n_j}))$ – набор особенностей по отношению к l кривой C в точке O_j . Например, $p_l(C) = (A_{3,3,2}; A_{0,5}; A_{2,3} + 2E_{8,3}; \sum T_{i,r})$ означает, что l имеет четыре особые точки по отношению к C , в первой из которых l касается с кратностями три и два двух неособых ветвей кривой C , и которые касаются друг друга с кратностью два, во второй точке прямая l касается с неособой ветвью кривой C с кратностью пять, в третьей точке l трансверсально пересекается с двумя особыми ветвями кривой C типа E_8 и касается с третьей особой ветвью типа A_2 , а в четвертой точке имеет неопределенный набор особенностей, про который известно только, что каждая из этих особенностей имеет кратность r и пересекается с l трансверсально. Все остальные ветви кривой C , с которыми пересекается l , неособы, и с ними l пересекается трансверсально.

Пусть в обозначениях, введенных в § 1, прямая l и кривая C степени d в $\mathbb{P}^2$ пересекаются в n точках $P_1, \dots, P_n$, пусть для $i = 1, \dots, n$ прообраз $\nu^{-1}(P_i) = \{p_{i,1}, \dots, p_{i,m_i}\} \subset \overline{C}$ состоит из m_i точек, и пусть для первых $k_i \leq m_i$ точек $p_{i,1}, \dots, p_{i,k_i}$ прямая l является касательной к ростку $\nu((\overline{C}, p_{i,j}))$, $j \leq k_i$, кривой C в точке P_i , а для остальных ростков прямая l не является касательной. Кроме того, пусть $\{p_{i,1}, \dots, p_{i,k_i,1}, p_{i,k_i+1}, \dots, p_{i,k_i+k_{i,2}}\}$, $k_{i,1} \leq k_i$, $k_i + k_{i,2} \leq m_i$, – множество тех точек, кратности $r_{p_{i,j}}$ которых не меньше двух. Тогда из теоремы 1 следует, что прообраз $h^{-1}(D)$ малой окрестности D точки l распадается на $m = m_1 + \dots + m_n$ окрестностей $U_{i,j}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m_i$, взаимно однозначно соответствующих точкам $p_{i,j}$, ограничение $h_{i,j}: U_{i,j} \rightarrow D$

накрытия h на $U_{i,j}$ имеет степень $s_{p_{i,j}} > r_{p_{i,j}}$ при $j \leq k_{i,1}$ и разветвлено с кратностью два над ростком $\widehat{C}_{i,j}$ кривой $\widehat{C}$, двойственным к ростку $v((\overline{C}, p_{i,j}))$, и с кратностью $r_{p_{i,j}}$ над прямой L_{P_i} ; при $k_{i,1} < j \leq k_i$ накрытие $h_{i,j}$ имеет степень $d_{p_{i,j}}$ и оно разветвлено с кратностью два над ростком $\widehat{C}_{i,j}$ кривой $\widehat{C}$, двойственным к ростку $\nu((\overline{C}, p_{i,j}))$; а при $j > k_i$ накрытие $h_{i,j}$ имеет степень $r_{p_{i,j}}$ и разветвлено с кратностью $r_{p_{i,j}}$ над прямой L_{P_i} при $k_i < j \leq k_i + k_{i,2}$. Следовательно, кривая ветвления $B \subset D$ накрытия h имеет вид

$$B = \left(\bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^{k_i} \widehat{C}_{i,j} \right) \cup \left(\bigcup_{k_{i,1} + k_{i,2} \neq 0} L_{P_i} \right). \quad (11)$$

Как и выше, разложение $h^{-1}(D) = \bigsqcup U_{i,j}$ определяет разбиение $J = \{I_{i,j}\}$ сегмента $[1, d]$, где каждое множество $I_{i,j}$ соответствует окрестности $U_{i,j}$ и имеет мощность $d_{p_{i,j}} > r_{p_{i,j}}$ при $j \leq k_i$ и $-r_{p_{i,j}}$ при $j > k_i$.

Рассмотрим локальную группу Галуа $G_{\text{loc}, l} \subset \mathbb{S}_d$ накрытия h . Из вышеизложенного следует, что $G_{\text{loc}, l}$ порождается транспозициями τ , которые являются образами геометрических порождающих – обходов вокруг кривых $\widehat{C}_{i,j}$, и перестановок σ_i , которые являются образами геометрических порождающих – обходов вокруг прямых L_{P_i} и имеют цикловой тип $(r_{p_{i,1}}, \dots, r_{p_{i,k_{i,1}}}, r_{p_{i,k_{i,1}+1}}, \dots, r_{p_{i,k_i+k_{i,2}}})$ (здесь указаны только длины нетривиальных циклов). Согласно замечанию 2 порождающие перестановки σ_i взаимно однозначно соответствуют прямым L_{P_i} . Обозначим

$$r_i := r_{l, P_i} := \text{Н.О.К.}(r_{p_{i,k_{i,1}+1}}, \dots, r_{p_{i,k_i+k_{i,2}}}), \\ \bar{r}_i := \bar{r}_{P_i} := \text{Н.О.К.}(r_i, r_{p_{i,1}}, \dots, r_{p_{i,k_{i,1}}}).$$

Отметим, что число $\bar{r}_i$ – это кратность ветвления галуизации дуализирующего накрытия $f: Z \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$ вдоль прямой L_{P_i} .

ТЕОРЕМА 2. *Во введенных выше обозначениях локальная группа Галуа $G_{\text{loc}, l}$ в точке $l \in \widehat{\mathbb{P}}^2$ дуализирующего накрытия h , ассоциированного с кривой $C \subset \mathbb{P}^2$ и разветвленного в кривой B (см. (11)) – это прямое произведение симметрических групп и циклических групп C_{r_i} порядка r_i :*

$$G_{\text{loc}, l} \simeq \left(\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{k_i} \mathbb{S}_{d_{p_{i,j}}} \right) \times \left(\prod_{k_{i,2} \neq 0} C_{r_i} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать теорему, достаточно применить к дуализирующим накрытиям (см. теорему 1) приведенные в п. 2.1 факты о локальных группах Галуа и использовать следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть G – подгруппа в $\mathcal{S}_d$, порожденная некоторым множеством транспозиций $\{\tau_i\}$ и некоторым множеством других перестановок $\{\sigma_j\}$ (среди которых, возможно, также имеются транспозиции), и пусть $\sigma_j = c_{j,1} \cdots c_{j,n_j}$ – разложения перестановок σ_j в произведения попарно непересекающихся циклов. Пусть $J = \{I_1, \dots, I_k\}$ – разбиение сегмента $[1, d]$, инвариантное относительно действия группы G и такое, что*

- (i) группа G действует транзитивно на каждом $I_l \in J$;
- (ii) существует число $m \leq k$ такое, что для любого $l \leq m$ найдется порождающая транспозиция $\tau_i \in G$ такая, что τ_i действует нетривиально на I_l , а для $l > m$ таких транспозиций нет;
- (iii) для каждого $l \leq k$ в G найдется не более одной порождающей перестановки $\sigma_{j(l)}$, которая действовала бы нетривиально на I_l , и если порождающая перестановка $\sigma_{j(l)}$ действует нетривиально на I_l , то существует только один цикл $c_{j(l), i(l)}$, входящий в разложение на циклы перестановки $\sigma_{j(l)}$ такой, что $c_{j(l), i(l)}$ действует нетривиально на I_l ;
- (iv) если для $l \leq m$ цикл $c_{j(l), i(l)}$ перестановки $\sigma_{j(l)}$ действует нетривиально на I_l , то длина этого цикла строго меньше мощности множества I_j .

Тогда

$$G \simeq S_{J_1} \times \cdots \times S_{J_m} \times \prod_{\sigma_j} C_{r_j},$$

где C_{r_j} – циклические группы порядков r_j , равных порядкам ограничения действия перестановок σ_j на $I_{m+1} \sqcup \cdots \sqcup I_k$, и произведение взято по всем перестановкам σ_j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можем считать, что множество порождающих транспозиций $\{\tau_i\}$ замкнуто относительно сопряжений в G , и, очевидно, для доказательства леммы достаточно показать, что для любого $l \leq m$ имеет место включение $S_{I_l} \subset G$.

Рассмотрим множество I_l для некоторого $l \leq m$. Снова, не ограничивая общности, можем считать, что $I_l = \{1, 2, \dots, a\}$. Пусть $H \subset G$ – подгруппа, порожденная порождающими группу G транспозициями, которые действуют нетривиально на I_l . Если H действует транзитивно на I_l , то $H = S_{I_l}$.

Пусть H действует не транзитивно на I_l . Тогда из условий (i) и (iii) следует, что найдется единственная порождающая перестановка (пусть это σ_1), которая действует нетривиально на I_l , и в разложении этой перестановки на циклы имеется единственный цикл (пусть это c_1), который действует нетривиально на I_l . Так как G действует транзитивно на I_l и согласно условию (iv) длина цикла c_1 строго меньше мощности множества I_l , то в H найдется транспозиция τ_1 , которая переводит элемент, входящий в цикл c_1 , в элемент, не входящий в него. Не ограничивая общности, можем считать, что $c_1 = (1, 2, \dots, b)$, где $b < a$, и $\tau_1 = (b, b+1)$. Имеем $\sigma_1^{-j} \tau_1 \sigma_1^j = (b-j, b+1) \in H$ при $j = 1, \dots, b-1$, и поэтому $S_{[1, b+1]} \subset H$. Применяя еще раз условия (i) и (iii), получаем, что $S_{I_l} \subset G$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3 [6]. *Группа Галуа $G \subset S_d$ дуализирующего накрытия $h: X \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$, ассоциированного с кривой $C \subset \mathbb{P}^2$, $\deg C = d$, совпадает с S_d .*

Наш основной результат – это следующая

ТЕОРЕМА 4. *Галувизация $f: Z \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$ дуализирующего накрытия $h: X \rightarrow \widehat{\mathbb{P}}^2$, ассоциированного с неприводимой приведенной кривой $C \subset \mathbb{P}^2$, имеет в качестве своих особых точек только факторособенности тогда и только тогда, когда кривая C удовлетворяет следующим условиям:*

(i) если неприводимый росток (C_i, P) кривой C является особым в точке P , то C_i имеет особенность либо типа A_2 , либо типа E_6 , и, более того, если через P проходит несколько особых ростков, то они имеют один и тот же тип;

(ii) паспорт особенностей кривой C по отношению к любой прямой $l \in \mathbb{P}^2$ совпадает с одним из следующих паспортов, и тогда поверхность Z над точкой l имеет следующие особенности:

- (1) $p_l(C) = (A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (2) $p_l(C) = (nA_{2,2} + mE_{6,3})$, $nm = 0$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (3) $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (4) $p_l(C) = (A_{0,2}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (5) $p_l(C) = (nA_{2,2} + mE_{6,3}; kA_{2,2} + lE_{6,3})$, $nm = kl = 0$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (6) $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2}; A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_1$;
- (7) $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}(n+1)-1}$, где $\delta(\cdot) - \delta$ -функция;
- (8) $p_l(C) = (A_{0,2}; nA_{2,2}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}(n+1)-1}$;
- (9) $p_l(C) = (n_1A_{2,2}; n_2A_{2,2}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}(n+1)-1}$;
- (10) $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2}; A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_{2n+1}$;
- (11) $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}(n+1)-1}$;
- (12) $p_l(C) = (A_{0,2} + mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}-1}$;
- (13) $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2})$, $\text{Sing } Z = A_n$;
- (14) $p_l(C) = (A_{0,2} + nA_{2,2})$, $\text{Sing } Z = A_1$;
- (15) $p_l(C) = (A_{0,3}; A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_1$;
- (16) $p_l(C) = (A_{0,3}; mA_{2,2} + kE_{6,3})$, $mk = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}-1}$;
- (17) $p_l(C) = (A_{0,3})$, $\text{Sing } Z = A_0$;
- (18) $p_l(C) = (A_{2,3} + nA_{2,3}; A_{0,2})$, $\text{Sing } U = A_5$;
- (19) $p_l(C) = (A_{2,3} + nA_{2,3}; mA_{2,3} + kE_{6,3})$, $nk = 0$, $\text{Sing } U = A_{2^{1-\delta(m)}3^{1-\delta(k)}-1}$;
- (20) $p_l(C) = (A_{2,3} + mA_{2,3})$, $\text{Sing } U = A_0$;
- (21) $p_l(C) = (A_{2,3}; A_{0,2})$, $\text{Sing } Z = A_3$;
- (22) $p_l(C) = (A_{2,3}; nA_{2,2} + mE_{6,3})$, $nm = 0$, $\text{Sing } Z = A_{2q-1}$;
- (23) $p_l(C) = (A_{2,3})$, $\text{Sing } Z = A_1$;
- (24) $p_l(C) = (A_{0,2} + nE_{6,3})$, $\text{Sing } Z = A_2$;
- (25) $p_l(C) = (A_{0,2}; nE_{6,3}; mE_{6,3})$, $\text{Sing } Z = D_4$;
- (26) $p_l(C) = (nA_{2,2}; mE_{6,3}; kE_{6,3})$, $\text{Sing } Z = D_4$;
- (27) $p_l(C) = (A_{0,2} + nE_{6,3}; mA_{2,2})$, $\text{Sing } Z = E_6$.
- (28) $p_l(C) = (E_{6,4})$, $\text{Sing } Z = \frac{1}{6}(1, 1)$;
- (29) $p_l(C) = (E_{6,4} + nE_{6,3})$, $\text{Sing } Z = A_1$;
- (30) $p_l(C) = (A_{0,3} + nA_{2,2})$, $\text{Sing } Z = D_4$;
- (31) $p_l(C) = (A_{5,3,2})$, $\text{Sing } Z = D_4$;
- (32) $p_l(C) = (A_{0,4})$, $\text{Sing } Z = A_1$.

Доказательству теоремы 4 посвящен § 3, в котором для каждого паспорта $p_l(C)$ будет приведена локальная группа монодромии $G_{\text{loc},l}$ накрытия f .

§ 3. Локальные группы монодромий факторособенностей

3.1. Факторособенности. Пусть G – конечная группа, действующая на гладкой поверхности X . Как известно [7], для любой точки $q \in X$, неподвижной относительно действия подгруппы H группы G , действие группы H может быть линеаризовано, т.е. существуют локальные аналитические координаты в некоторой окрестности $\bar{U}$ точки q , относительно которых действие группы H является линейным.

Действие конечной группы $H \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ на $\mathbb{C}^2$ определяет действие этой группы на кольце многочленов $\mathbb{C}[u_1, u_2]$ и определяет конечный морфизм $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow Y$, где $Y = \mathrm{Спес} \mathbb{C}[u_1, u_2]^H$, а $\mathbb{C}[u_1, u_2]^H$ – подалгебра в $\mathbb{C}[u_1, u_2]$, состоящая из неподвижных относительно действия H многочленов.

Напомним, что если начало координат $\bar{o} \in \mathbb{C}^2$ является единственной неподвижной точкой при действии группы H и H действует на $\mathbb{C}^2 \setminus \{\bar{o}\}$ свободно, то росток (U, o) многообразия Y в точке $o = h(\bar{o})$ называется (двумерной) *факторособенностью*. Факторособенности достаточно хорошо изучены ([8], см. также [9]). Напомним также (см. [10]), что если $Y = \mathrm{Спес} \mathbb{C}[u_1, u_2]^H$ является гладким многообразием, то $\mathbb{C}[u_1, u_2]^H \simeq \mathbb{C}[w_1, w_2]$ и порождается двумя однородными в $\mathbb{C}[u_1, u_2]$ формами w_1, w_2 , а группа H в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ порождается *отражениями*, т.е. матрицами, одно из собственных значений которых равно единице.

Следующая лемма является хорошо известной (см., например, [11]).

ЛЕММА 2. Пусть (U, o) – росток факторособенности $\mathrm{Спес} \mathbb{C}[u_1, u_2]^H$, и пусть $f: (U, o) \rightarrow (D, O)$ – накрытие Галуа бидиска D с группой Галуа $G_{\mathrm{loc}, O}$, разветвленное в кривой $B \subset D$. Тогда найдется порожденная отражениями конечная группа $\mathcal{R} \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, которая включается в точную последовательность

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{R} \xrightarrow{g} G_{\mathrm{loc}, O} \rightarrow 1$$

такую, что эпиморфизм $f_*: \pi_1(D \setminus B, p) \rightarrow G_{\mathrm{loc}, O}$ поднимается до эпиморфизма $\bar{f}_*: \pi_1(D \setminus B, p) \rightarrow \mathcal{R}$ такого, что, во-первых, $f_* = g \circ \bar{f}_*$, а во-вторых, образы в $\mathcal{R}$ геометрических порождающих группы $\pi_1(D \setminus B, p)$ являются отражениями и имеют те же порядки, что и их образы в $G_{\mathrm{loc}, O}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Эпиморфизм $\bar{f}_*: \pi_1(D \setminus B, p) \rightarrow \mathcal{R}$ в лемме 2 определяет накрытие Галуа $\bar{f}: \bar{U} \rightarrow D$ с локальной группой Галуа $\mathcal{R}$, где $\bar{U}$ – некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{C}^2$. Накрытие $\bar{f}$ задается формулами $z_1 = w_1(u_1, u_2)$, $z_2 = w_2(u_1, u_2)$, где w_1, w_2 – однородные формы, порождающие кольцо $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{R}}$, и $\bar{f}$ разветвлено в той же кривой B и с теми же кратностями, что и накрытие f .

Конечные группы $\mathcal{R} \subset \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, порожденные отражениями, полностью классифицированы в [10] (см. также [12]): это либо циклические группы, либо прямые произведения двух циклических групп, либо серия групп, связанных с группами диэдра, либо конечное число спорадических групп, связанных соответственно с бинарными группами тетраэдра, октаэдра и икосаэдра. Сразу отметим, что для всех групп $\mathcal{R}$ кривые ветвления B будут состоять не более

чем из трех неприводимых компонент, и, не оговаривая это далее, договоримся, что если группа $\mathcal{R}$ задана копредставлением $\mathcal{R} = \langle y_1, y_2, \dots \mid \dots \rangle$, где y_i – это отражения, а $\pi_1(D \setminus B)$ задана копредставлением $\pi_1(D \setminus B) = \langle x_1, x_2, \dots \mid \dots \rangle$, где x_i – это геометрические порождающие, то эпиморфизм $\bar{f}_*$ отображает элементы x_i в элементы, сопряженные элементам y_i . Ниже мы рассмотрим все эти группы $\mathcal{R}$ и выясним, какие в них имеются нормальные подгруппы H , которые вместе с факторами $\mathcal{R}/H = G_{\text{loc},O}$ удовлетворяют лемме 2, т.е. для каких H выполнено следующее условие:

(F₁) если $\mathcal{R}$ порождена отражениями $y_1, y_2, \dots$, то H тривиально пересекается с циклическими группами, порожденными элементами $y_1, y_2, \dots$.

Кроме того, выясним, в каких случаях имеется равенство $G_{\text{loc},O} = G_{\text{loc},l}$, где $G_{\text{loc},l}$ – некоторая локальная группа монодромии дуализирующего накрытия. Из теоремы 2, аргументов в ее доказательстве и замечания 1 следует, что необходимыми для этого равенства являются следующие условия:

(F₂) $G_{\text{loc},O}$ раскладывается в прямое произведение симметрических и циклических групп (отметим, что если в это разложение входит циклическая группа второго порядка, то это либо $\mathbb{S}_2$, либо C_2);

(F₃) в $G_{\text{loc},O}$ входит сомножителем $\mathbb{S}_n$ с $n \geq 3$ тогда и только тогда, когда у B имеется неприводимая компонента B_1 , не являющаяся ростком прямой и имеющая касательную кратность, равную n , и если при этом B_1 неособа, то B также содержит росток прямой, касательной к B_1 ;

(F₄) если для обхода x_i вокруг компоненты $B_i \subset B$ его образ $f_*(x_i)$ имеет порядок $\bar{r}_i > 2$, то B_i является ростком прямой и в $G_{\text{loc},O}$ в качестве прямого сомножителя входит группа C_{q_i} , где либо $q_i = \bar{r}_i$, либо $2q_i = \bar{r}_i$, и во втором случае $f_*(x_i)$ лежит в произведении $C_{q_i} \times \mathbb{S}_{d_i} \subset G_{\text{loc},O}$; верно и обратное утверждение;

(F₅) если число сомножителей в $G_{\text{loc},O}$ меньше числа неприводимых компонент кривой ветвления B , то один из сомножителей – это $\mathbb{S}_n$ с $n \geq 3$ и в B имеются две компоненты (пусть это B_1 и B_2) такие, что соответствующие им геометрические порождающие x_1 и x_2 отображаются эпиморфизмом f_* в $\mathbb{S}_n$, при этом одна из них является ростком прямой, касающейся другой компоненты с кратностью n .

Обозначим через $\varepsilon_n = e^{2\pi i/n}$ первообразный корень из единицы. Далее через $\mathcal{Z}_{n,d}$ обозначается циклическая подгруппа в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$, порожденная элементом

$$z_{n,d} = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & \varepsilon_n^d \end{pmatrix}.$$

Если $d = 1$, то группа $\mathcal{Z}_{n,1}$ будет обозначаться через $\mathcal{Z}_n$, а ее порождающая $z_{n,1}$ – через z_n . Если накрытие Галуа $f: U \rightarrow D$ разветвлено над кривой $B = \bigcup B_i$, то через $r_f(B) = (r_1, r_2, \dots)$ обозначим набор кратностей, с которыми накрытие f ветвится над неприводимыми компонентами B_i кривой B .

Если n и $d < n$ – два взаимно простых натуральных числа, то фактор-особенность $\text{Spec } \mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{Z}_{n,d}}$ называется циклической факторособенностью и обозначается как особенность типа $\frac{1}{n}(1, d)$, и если $d = n - 1$, то это особенность типа A_{n-1} .

3.2. Случай абелевых групп. Особенности абелевых накрытий хорошо изучены (см., например, [13]). Это циклические факторособенности. Как известно [10], с точностью до сопряжения в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ конечная абелева группа A , порожденная отражениями в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$, – это либо циклическая группа $\mathcal{R}_{n,1}$ порядка n , порожденная отражением

$$y_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

либо прямое произведение $\mathcal{R}_{pm, qm} := \mathcal{C}_{pm} \times \mathcal{C}_{qm}$ двух циклических групп, порожденных соответственно отражениями y_1 и y_2 , где p и q – два взаимно простых натуральных числа и

$$y_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{pm} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{qm} \end{pmatrix}.$$

Порядок группы $\mathcal{R}_{qm, p}$ равен pqm^2 .

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{R}_{pm, qm}} = \mathbb{C}[u_1^{pm}, u_2^{qm}]$, т.е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = u_1^{pm}$ и $w_2 = u_2^{qm}$, его якобиан имеет вид $J(\bar{f}) = pqm^2 u_1^{pm-1} u_2^{qm-1}$. Поэтому кривая ветвления B накрытия $\bar{f}$ – это объединение координатных прямых $B_1 = \{w_1 = 0\}$ и $B_2 = \{w_2 = 0\}$, а $r_{\bar{f}}(B) = (pm, qm)$. Так как в этом случае группа $\pi_1(D \setminus B)$ является свободной абелевой группой, порожденной геометрическими порождающими x_1 и x_2 – обходами соответственно вокруг B_1 и B_2 , то с точностью до автоморфизмов группы $\mathcal{C}_{pm} \times \mathcal{C}_{qm}$ гомоморфизм $\bar{f}_*$ отображает x_1 в y_1 и x_2 в y_2 . Поэтому из условий (F_1) , (F_2) и (F_4) следует, что если f – галуизация дуализирующего накрытия плоскости, то реализуются только следующие случаи:

- D.1. $\mathrm{Sing} B = A_0$, $\mathrm{Sing} U = A_0$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathbb{S}_2$ и $p_l(C) = (A_{0,2})$;
- D.2. $\mathrm{Sing} B = A_0$, $\mathrm{Sing} U = A_0$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathcal{C}_q$ и $p_l(C) = (\sum T_{i, r_i})$, где $q = \mathrm{H.O.D.}(r_i)$;
- D.3. $\mathrm{Sing} B = A_1$, $\mathrm{Sing} U = A_0$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$ и $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2})$;
- D.4. $\mathrm{Sing} B = A_1$, $\mathrm{Sing} U = A_0$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_q$ и $p_l(C) = (A_{0,2}; \sum T_{i, r_i})$, где $r = \mathrm{H.O.D.}(r_i)$;
- D.5. $\mathrm{Sing} B = A_1$, $\mathrm{Sing} U = A_0$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathcal{C}_{q_1} \times \mathcal{C}_{q_2}$ и $p_l(C) = (\sum T_{i, r_i}; \sum T_{j, r_j})$, где $q_1 = \mathrm{H.O.D.}(r_i)$ и $q_2 = \mathrm{H.O.D.}(r_j)$.

3.3. Случай диэдральных групп. Как известно [10], с точностью до сопряжения в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ конечные группы, порожденные отражениями и связанные с группой диэдра, – это обобщенные группы диэдра $\mathcal{D}_{pq, q}$, $pq \geq 2$, порядка $2q^2p$ (в [10] они обозначены через $\mathfrak{G}(pq, q, 2)$), которые имеют следующее представление:

$$\mathcal{D}_{pq, q} = \langle y_1, y_2, y_3 \mid y_1^2 = y_2^2 = y_3^q = (y_1 y_2)^{pq} = [y_1 y_2, y_3] = 1, y_1 y_3 y_1 = y_3 (y_1 y_2)^p \rangle,$$

где

$$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{pq}^{-1} \\ \varepsilon_{pq} & 0 \end{pmatrix}, \quad y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_q \end{pmatrix}$$

являются отражениями (если $q = 1$, то $\mathcal{D}_{p,1}$ – это обычная группа диэдра порядка $2p$). Простая проверка показывает, что

$$\mathcal{D}_{pq,q} \simeq (\mathcal{C}_q \times \mathcal{Z}_{pq,pq-1}) \ltimes \mathcal{C}_2, \quad (12)$$

где $\mathcal{C}_2$ порождена элементом y_1 , $\mathcal{Z}_{pq,pq-1}$ порождена элементом $y_1 y_2 = z_{pq,pq-1}$, а $\mathcal{C}_q$ порождена элементом y_3 и выполнены равенства $y_1 y_3 y_1 = y_3 z_{q,q-1}$ и $y_1 z_{pq,pq-1} y_1 = z_{pq,pq-1}^{-1}$. Поэтому легко видеть, что удовлетворяющие условию (F_1) нормальные подгруппы $H \subset \mathcal{D}_{pq,q}$ – это подгруппы $\langle z_{pq,pq-1}^k \rangle$ группы $\mathcal{Z}_{pq,pq-1}$, а также при $q = 2m$ нормальные замыкания $N_{p,m,k,i}$, $i = 1, 2$, групп, порожденных элементами $z_{pq,pq-1}^k$ и $y_3^m y_i$, и нормальные замыкания $N_{2n,m,k,1,2}$ групп, порожденных тремя элементами $z_{pq,pq-1}^k$, $y_3^m y_1$ и $y_3^m y_2$, если также и $p = 2n$ является четным числом.

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{D}_{pq,q}} = \mathbb{C}[u_1^{pq} + u_2^{pq}, u_1^q u_2^q]$, поэтому накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = u_1^{pq} + u_2^{pq}$, $w_2 = u_1^q u_2^q$ и его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = pq^2 u_1^{q-1} u_2^{q-1} (u_1^{pq} - u_2^{pq}).$$

Следовательно, дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением

$$\begin{aligned} (u_1^q u_2^q)(u_1^{pq} - u_2^{pq})^2 &= 0, & \text{если } q > 1, \\ (u_1^{pq} - u_2^{pq})^2 &= 0, & \text{если } q = 1. \end{aligned}$$

А так как $(u_1^{pq} - u_2^{pq})^2 = (u_1^{pq} + u_2^{pq})^2 - 4(u_1^q u_2^q)^p = w_1^2 - 4w_2^p$, то, если $q > 1$, кривая B имеет уравнение $w_2(w_1^2 - 4w_2^p) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над кривой $B_1 = \{w_1^2 - 4w_2^p = 0\}$ с кратностью два и над кривой $B_2 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью q , а если $q = 1$, то B совпадает с B_1 и задается уравнением $w_1^2 - 4w_2^p = 0$. Поэтому $\text{Sing } B = D_{p+2}$, если $p > 1$ и $q > 1$, $\text{Sing } B = A_{p-1}$, если $q = 1$, и если $p = 1$, то $\text{Sing } B = A_3$. Кроме того, если $p = 2m$, то B_1 распадается на две ветви – B'_1 и B''_1 .

Легко проверить, что группы $N_{p,m,k,i}$ и $N_{2n,m,k,1,2}$ не удовлетворяют условию (F_5) и что если $H \subset \mathcal{Z}_{pq,pq-1}$ удовлетворяет условию (F_2) , то возможны только следующие случаи:

- (1) $p > 1$, $H = \mathcal{Z}_{pq,pq-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_2$;
- (2) $p = 2k$, $H = \mathcal{Z}_{kq,kq-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$;
- (3) $p = 3n$, $H = \mathcal{Z}_{qn,qn-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $p = 6n$, $H = \mathcal{Z}_{qn,qn-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_3$;
- (5) $p = 6n$, $H = \mathcal{Z}_{2qn,2qn-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathbb{S}_3$;
- (6) $p \not\equiv 0 \pmod{3}$, $q = 3n$, $H = \mathcal{Z}_{pn,pn-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathbb{S}_3$;
- (7) $p \not\equiv 0 \pmod{3}$, $q = 3n$, $pn = 2m$, $H = \mathcal{Z}_{m,m-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_3$;
- (8) $p = 1$, $H = \mathcal{Z}_{q,q-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathcal{C}_2$;
- (9) $p = 1$, $q = 3n$, $H = \mathcal{Z}_{n,n-1}$ и $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_q \times \mathbb{S}_3$.

Однако случаи (1), (6), (7) и (9) не удовлетворяют условию (F_3) (и условию (F_5) в случае (1), если p четно).

В остальных случаях, учитывая условия (F_3) – (F_5) , получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможны следующие случаи:

D.6. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = A_1$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2}; A_{0,2})$;

- D.7. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{0,2}; A_{0,2}; \sum T_{i,r_i})$, $q = \text{H.O.D.}(r_i)$;
- D.8. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{0,2}; \sum T_{i,2}; \sum T_{j,r_j})$, $q = \text{H.O.D.}(r_j)$;
- D.9. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (\sum T_{i,2}; \sum T_{j,2}; \sum T_{k,r_k})$, $q = \text{H.O.D.}(r_k)$;
- D.10. $\text{Sing } B = D_{2n+4}$, $\text{Sing } U = A_{2n+1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2}; A_{0,2})$;
- D.11. $\text{Sing } B = D_{2n+4}$, $\text{Sing } U = A_{q(n+1)-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2}; \sum T_{i,r_i})$, $q = \text{H.O.D.}(r_i)$;
- D.12. $\text{Sing } B = D_6$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{0,2} + \sum T_{i,2}; \sum T_{j,r_j})$, $q = \text{H.O.D.}(r_j) > 1$;
- D.13. $\text{Sing } B = A_{2n+1}$, $\text{Sing } U = A_n$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{2n+1,2,2})$;
- D.14. $\text{Sing } B = A_3$, $\text{Sing } U = A_1$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_2$, $p_l(C) = (A_{0,2} + \sum T_{i,2})$;
- D.15. $\text{Sing } B = D_5$, $\text{Sing } U = A_1$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{0,3}; A_{0,2})$;
- D.16. $\text{Sing } B = D_5$, $\text{Sing } U = A_q$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{0,3}; \sum T_{i,r_i})$, $q = \text{H.O.D.}(r_i) > 1$;
- D.17. $\text{Sing } B = A_2$, $\text{Sing } U = A_0$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3$, $p_l(C) = (A_{0,3})$;
- D.18. $\text{Sing } B = D_8$, $\text{Sing } U = A_5$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_2$, $p_l(C) = (A_{2,3} + \sum T_{i,2}; A_{0,2})$;
- D.19. $\text{Sing } B = D_8$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{2,3} + \sum T_{i,2}; \sum T_{j,r_j})$, $q = \text{H.O.D.}(r_j) > 1$;
- D.20. $\text{Sing } B = A_5$, $\text{Sing } U = A_0$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_2$, $p_l(C) = (A_{2,3} + \sum T_{i,2})$;
- D.21. $\text{Sing } B = D_6$, $\text{Sing } U = A_3$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{2,3}; A_{0,2})$;
- D.22. $\text{Sing } B = D_6$, $\text{Sing } U = A_{2q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{2,3}; \sum T_{i,r_i})$, $q = \text{H.O.D.}(r_i) > 1$;
- D.23. $\text{Sing } B = A_5$, $\text{Sing } U = A_1$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3$, $p_l(C) = (A_{2,3})$;
- D.24. $\text{Sing } B = A_3$, $\text{Sing } U = A_{q-1}$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_q$, $p_l(C) = (A_{0,2} + \sum T_{i,r_i})$, $q = \text{H.O.D.}(r_i) > 2$.

Случаю (2) соответствуют случаи D.6–D.14; случаю (3) соответствуют случаи D.15–D.17; случаю (4) соответствуют случаи D.18–D.20; случаю (5) соответствуют случаи D.21–D.23 и случаю (8) соответствует случай D.24.

3.4. Случай тетраэдральных групп. Как известно [10], в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ имеется с точностью до сопряжения ровно четыре конечные группы, порожденные отражениями и тесно связанные с бинарной группой тетраэдра ВТ (в [10] это группы с номерами 4–7). Среди них имеется *максимальная тетраэдральная группа* $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$, *порожденная отражениями* (группа с номером 7 в [10]), а остальные три являются ее подгруппами. Чтобы задать нужное нам копредставление группы $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$, напомним, что группа ВТ порождается двумя элементами s и t и имеет следующее копредставление:

$$\text{ВТ} = \langle s, t \mid s^2 = t^3, s^4 = (st)^3 = [s^2, t] = 1 \rangle,$$

а также имеет представление в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_8 & \varepsilon_8^3 \\ \varepsilon_8 & \varepsilon_8^7 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} \varepsilon_4 & 0 \\ 0 & \varepsilon_4^3 \end{pmatrix}.$$

Коммутант $[BT, BT]$ совпадает с нормальным замыканием циклической подгруппы, порожденной элементом s , и изоморфен группе кватернионов Q_8 , а фактор по нему, $BT/[BT, BT]$, изоморфен циклической группе третьего порядка C_3 . Кроме коммутанта в BT имеется еще одна нетривиальная нормальная подгруппа – ее центр $Z(BT)$, который порождается элементом второго порядка s^2 и фактор по которому, $BT/Z(BT)$, изоморфен знакопеременной группе A_4 .

Как известно (см. [14]), алгебра $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{BT}$ порождается тремя однородными формами, две из которых, $\varphi_4(u_1, u_2)$ и $\psi_4(u_1, u_2)$, имеют степень четыре, а третья, $\theta_6(u_1, u_2) = J(\varphi_4, \psi_4)$ (якобиан форм φ_4 и ψ_4), имеет степень шесть. Эти формы связаны соотношением

$$\theta_6^2 = \varphi_4^3 - \psi_4^3.$$

3.4.1. Группа $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$ имеет порядок 144 и является прямым произведением с объединенной подгруппой групп $\mathcal{Z}_{12}$ и BT ,

$$\mathcal{RT}_{(3,3,2)} = \mathcal{Z}_{12,1} \times_{\{z_{12}^6=s^2\}} BT = \langle y_1 = z_{12}^2 t, y_2 = z_{12}^8 (st)^2, y_3 = z_{12}^3 s \rangle,$$

где y_1 и y_2 – 3-отражения, а y_3 – 2-отражение.

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RT}_{(3,3,2)}} = \mathbb{C}[\varphi_4^3, \psi_4^3]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_4^3$, $w_2 = \psi_4^3$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = 9\varphi_4^2\psi_4^2 J(\varphi_4, \psi_4) = 9\varphi_4^2\psi_4^2\theta_6,$$

поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_4^3\psi_4^3\theta_6^2 = 0$. А так как $\theta_6^2 = \varphi_4^3 - \psi_4^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ задается уравнением $w_1 w_2 (w_1 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над кривыми $B_1 = \{w_1 = 0\}$ и $B_2 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью три, а над кривой $B_3 = \{w_1 - w_2 = 0\}$ с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа D_4 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими – x_1 , x_2 и x_3 . Пусть $\bar{f}_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow \mathcal{RT}_{(3,3,2)}$ – эпиморфизм из леммы 2. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\bar{f}_*(x_1)$ и $\bar{f}_*(x_2)$ являются 3-отражениями, а $\bar{f}_*(x_3)$ – 2-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп H в $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = BT$, $G_{loc,O} = C_2 \times C_3$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{loc,O} = S_3$;
- (3) $H = Q_8$, $G_{loc,O} = C_2 \times C_3 \times C_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_{12}$, $G_{loc,O} = A_4$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_6$, $G_{loc,O} = C_2 \times A_4$;
- (6) $H = \mathcal{Z}_4$, $G_{loc,O} = C_3 \times A_4$;
- (7) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{loc,O} = \mathcal{Z}_4 \times_{z_{12}^6=s^2} BT$;
- (8) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{loc,O} = C_6 \times A_4$;
- (9) $H = \{1\}$, $G_{loc,O} = \mathcal{RT}_{(3,3,2)}$.

Среди них только первые три удовлетворяют условию (F_2) , а условию (F_4) только случай (3), так как B_1 и B_2 должны быть прямыми, а B_3 – либо прямой, либо росток кривой $\hat{C}$ и в $G_{loc,l}$ должны входить не менее двух прямых сомножителей – циклических групп порядка три. В итоге получаем, что если

f – галуизация дуализирующего накрытия плоскости, то возможен только случай (3):

D.25. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = D_4$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_3$ и $p_l(C) = (A_{0,2}; \sum T_{i,3}; \sum T_{j,3})$;

D.26. $\text{Sing } B = D_4$, $\text{Sing } U = D_4$, $G_{\text{loc},l} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_3$ и $p_l(C) = (\sum T_{i,2}; \sum T_{j,3}; \sum T_{k,3})$.

3.4.2. Группа $\mathcal{RT}_{(3,3)}$ является подгруппой индекса два в $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$ (она имеет номер 5 в [10]),

$$\mathcal{RT}_{(3,3)} = \langle y_1 = z_{12}^2 t, y_2 = z_{12}^8 (st)^2 \rangle = \mathcal{Z}_6 \times_{\{z_6^3 = s^2\}} \text{BT},$$

где y_1 и y_2 – 3-отражения. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RT}_{(3,3)}} = \mathbb{C}[\varphi_4^3, \theta_6]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_4^3$, $w_2 = \theta_6$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\varphi_4^3, \sqrt{\varphi_4^3 - \psi_4^3}\right) = \frac{9}{2\sqrt{\varphi_4^3 - \psi_4^3}} \varphi_4^2 \psi_4^2 J(\varphi_4, \psi_4) = \frac{9}{2} \varphi_4^2 \psi_4^2$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_4^3 \psi_4^3 = 0$. А так как $\psi_4^3 = \varphi_4^3 - \theta_6^2$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_1(w_1 - w_2^2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над кривыми $B_1 = \{w_1 = 0\}$ и $B_2 = \{w_1 - w_2^2 = 0\}$ с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа A_3 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Пусть $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow \mathcal{RT}_{(3,3)}$ – эпиморфизм из леммы 2. В этом случае $\bar{f}_*(x_1)$ и $\bar{f}_*(x_2)$ являются 3-отражениями и, как и в случае группы $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$, легко видеть, что для нормальных подгрупп H , удовлетворяющих условию (F_1) , имеют место следующие случаи:

- (1) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3$;
- (3) $H = Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_6$, $G_{\text{loc},O} = \mathbb{A}_4$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{\text{loc},O} = \text{BT}$;
- (6) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3 \times \mathbb{A}_4$;
- (7) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{RT}_{(3,3)}$.

Очевидно, что ни один из этих случаев не удовлетворяет условию (F_4) , так как B_1 и B_2 не могут быть одновременно прямыми (они касаются друг друга).

3.4.3. Группа $\mathcal{RT}_{(3,2)}$ является подгруппой индекса три в $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$ (она имеет номер 6 в [10]),

$$\mathcal{RT}_{(3,2)} = \langle y_1 = z_{12}^2 t, y_3 = z_{12}^3 s \rangle = \langle z_{12}^3, z_{12}^2 t, s \rangle,$$

где y_1 – 3-отражение и y_3 – 2-отражение. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RT}_{(3,2)}} = \mathbb{C}[\varphi_4, \psi_4^3]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_4$, $w_2 = \psi_4^3$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J(\varphi_4, \psi_4^3) = 3\psi_4^2 J(\varphi_4, \psi_4) = 3\psi_4^2 \theta_6$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\psi_4^3 \theta_6^2 = 0$. А так как $\theta_6^2 = \varphi_4^3 - \psi_4^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением

$w_2(w_1^3 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью три и над $B_2 = \{w_1^3 - w_2 = 0\}$ с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа A_5 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Пусть $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow \mathcal{RT}_{(3,2)}$ – эпиморфизм из леммы 2 и в этом случае $f_*(x_1)$ является 3-отражением и $f_*(x_2)$ – 2-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп H , удовлетворяющих условию (F_1) , имеют место следующие случаи:

- (1) $H = Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{A}_4$;
- (3) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{RT}_{(3,2)}$.

Очевидно, что все эти случаи не удовлетворяют одновременно условиям (F_2) – (F_4) , так как B_1 должна быть прямой, но тогда B_2 должна быть двойственна особому росту кривой C типа A_2 и поэтому в $G_{\text{loc},O}$ должна входить группа $\mathbb{S}_3$.

3.4.4. Группа $\mathcal{RT}_{(3)}$ (группа номер 4 в [10]) является подгруппой индекса шесть в $\mathcal{RT}_{(3,3,2)}$,

$$\mathcal{RT}_{(3)} = \langle y_1 = z_{12}^2 t, y_4 = z_{12}^8 s t \rangle = \langle s, z_{12}^2 t \rangle,$$

где y_1 и y_4 являются 3-отражениями. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RT}_{(3)}} = \mathbb{C}[\psi_4, \theta_6]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_4$, $w_2 = \theta_6$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\psi_4, \sqrt{\varphi_4^3 - \psi_4^3}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{\varphi_4^3 - \psi_4^3}} \varphi_4^2 J(\varphi_4, \psi_4) = \frac{-3}{2} \varphi_4^2.$$

Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_4^3 = 0$. А так как $\psi_4^3 = \varphi_4^3 - \theta_6^3$, то кривая B задается уравнением $w_1^3 + w_2^2 = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над ней с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа A_2 , и поэтому не может быть прямой, что противоречит условию (F_4) .

3.5. Как известно [10], в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$ имеется с точностью до сопряжения ровно восемь конечных групп, порожденных отражениями и тесно связанных с группой ВО (в [10] это группы с номерами 8–15). Среди них имеется *максимальная октаэдральная группа* $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$, порожденная отражениями (группа номер 11 в [10]), а остальные семь являются ее подгруппами. Чтобы задать нужное нам копредставление группы $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$, напомним, что бинарная группа октаэдра ВО порождается двумя элементами s и t и имеет следующее копредставление:

$$\text{BO} = \langle s, t \mid s^2 = t^3 = (st)^4, s^4 = 1 \rangle.$$

Ее коммутант $[\text{BO}, \text{BO}]$ порождается элементами t и sts и изоморфен бинарной группе тетраэдра ВТ. Нормальное замыкание в ВО элемента $(sts)t = (st)^2$ при отождествлении $[\text{BO}, \text{BO}]$ с ВТ совпадает с $Q_8 \subset \text{ВТ}$, и кроме этих двух нормальных подгрупп в ВО имеется еще только одна нетривиальная нормальная подгруппа, а именно ее центр $Z(\text{ВО})$, порожденный элементом t^3 . Факторгруппа $\text{ВО}/[\text{ВО}, \text{ВО}]$ является циклической группой второго порядка, группа $\text{ВО}/Q_8$ изоморфна симметрической группе $\mathbb{S}_3$, а группа $\text{ВО}/Z(\text{ВО})$ изоморфна симметрической группе $\mathbb{S}_4$.

Группа ВО имеет следующее представление в $GL(2, \mathbb{C})$:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_8 & \varepsilon_8 \\ \varepsilon_8^3 & \varepsilon_8^7 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varepsilon_4 & 1 \\ -1 & \varepsilon_4^3 \end{pmatrix}.$$

Как известно (см. [14]), алгебра $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\text{ВО}}$ порождается тремя однородными формами, две из которых, $\varphi_6(u_1, u_2)$ и $\psi_8(u_1, u_2)$, имеют степени шесть и восемь, а третья, $\theta_{12}(u_1, u_2) = J(\varphi_6, \psi_8)$ (якобиан форм φ_6 и ψ_8), имеет степень двенадцать. Эти формы связаны соотношением

$$\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3.$$

3.5.1. Группа $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ – это прямое произведение с объединенной подгруппой группы $\mathcal{Z}_{24}$ и ВО,

$$\mathcal{RO}_{(2,3,4)} = \mathcal{Z}_{24} \times_{\{z_{24}^{12}=s^2\}} \text{ВО}.$$

Порядок группы $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ равен 576. Следующие элементы являются отражениями в $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$: 2-отражение $y_1 = z_{24}^6 s$, 3-отражение $y_2 = z_{24}^4 t$ и 4-отражение $y_3 = z_{24}^{15} t^2 s = z_{24}^{15} (st)^{-1}$. Легко видеть, что группа $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ порождается отражениями y_1 , y_2 и y_3 , так как $y_1 y_2 y_3 = z_{24}$.

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2,3,4)}} = \mathbb{C}[\varphi_6^4, \psi_8^3]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_6^4$, $w_2 = \psi_8^3$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = 12\varphi_6^3 \psi_8^2 J(\varphi_6, \psi_8) = 12\varphi_6^3 \psi_8^2 \theta_{12}$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\varphi_6^4 \psi_8^3 \theta_{12}^2 = 0$. А так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ задается уравнением $w_1 w_2 (w_1 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1 = 0\}$ с кратностью четыре, над $B_2 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью три и над $B_3 = \{w_1 - w_2 = 0\}$ с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа D_4 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow \mathcal{RO}_{(3,3,2)}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ является 4-отражением, $\bar{f}_*(x_2)$ является 3-отражением, а $\bar{f}_*(x_3)$ – 2-отражением. Для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(3,3,2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{ВО}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \text{ВТ}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $H = Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_3 \times \mathbb{S}_3$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_6$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathbb{S}_4$;
- (6) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{Z}_8 \times_{z_{24}^{12}=s^2} \text{ВО}$;
- (7) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_3 \times \mathbb{S}_4$;
- (8) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RO}_{(2,3,4)}$.

Легко видеть, что только случай (2) удовлетворяет всем условиям (F_2) – (F_5) .

Действительно, B_1 и B_2 должны быть прямыми, а B_3 – либо прямая, либо неособый росток кривой $\hat{C}$, и в $G_{\text{loc}, l}$ должны входить три сомножителя,

два из которых – циклические группы, и если третий сомножитель – симметрическая группа (случаи (4) и (7)), то l является точкой перегиба ростка B_3 . Следовательно, двойственный этому ростку росток кривой C в точке P является особым, и поэтому через точку l должна проходить касательная прямая $L_P \subset \overline{B}$ к ростку B_3 .

Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможны следующие случаи:

$$D.27. \text{ Sing } B = D_4, G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_4, p_l(C) = (A_{0,2}; \sum T_{i,3}; \sum T_{j,4} + \sum T_{k,2});$$

$$D.28. \text{ Sing } B = D_4, G_{\text{loc},l} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_4, p_l(C) = (\sum T_{i,2}; \sum T_{j,3}; \sum T_{k,4} + \sum T_{l,2}).$$

3.5.2. В группе $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ имеется две подгруппы индекса два. Одна из них – это группа номер 15 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(2,3,2)} = \langle y_1, y_2, y_3^2 \rangle \simeq \mathcal{Z}_{12} \times_{\{z_{12}^6 = s^2\}} \text{BO}.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2,3,2)}} = \mathbb{C}[\varphi_6^2, \theta_{12}^2]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_6^2$, $w_2 = \theta_{12}^2$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = 6\varphi_6\psi_8^2 J(\varphi_6, \psi_8) = 12\varphi_6\psi_8^2\theta_{12},$$

так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$. Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_6^2\psi_8^3\theta_{12}^2 = 0$. И так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ задается уравнением $w_1w_2(w_1^2 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1 = 0\}$ и $B_2 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью два, а над $B_3 = \{w_1^2 - w_2 = 0\}$ с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа D_6 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc},O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ и $\bar{f}_*(x_2)$ являются 2-отражениями, а $\bar{f}_*(x_3)$ – 3-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(2,3,2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BO}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $H = Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathbb{S}_3$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_6$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_4$;
- (6) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{Z}_4 \times_{z_{24}^{12} = s^2} \text{BO}$;
- (7) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_6 \times \mathbb{S}_4$;
- (8) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{RO}_{(2,3,4)}$.

Легко видеть, что только случай (2) удовлетворяет всем условиям (F_2) – (F_5) .

Например, случай (4) не удовлетворяет теореме 2, так как в этом случае B_3 должна быть прямой, но тогда кривая B_2 должна быть двойственна особому ростку кривой C и поэтому должна касаться ростка кривой B с кратностью больше двух.

Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможен следующий случай:

$$D.29. \text{ Sing } B = D_6, G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_2, p_l(C) = (A_{0,2} + \sum T_{i,3}; \sum T_{i,2}), \text{ Sing } U = E_6.$$

3.5.3. Вторая подгруппа индекса два в $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ – это группа номер 10 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(3,4)} = \langle y_2, y_3 \rangle = \langle z_{24}^2, z_{24}s, t \rangle.$$

Она порождается отражениями y_2 и y_3 . Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(3,4)}} = \mathbb{C}[\psi_8^3, \theta_{12}]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_8^3$, $w_2 = \theta_{12}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\psi_8^3, \sqrt{\varphi_6^4 - \psi_8^3}\right) = \frac{-6}{\sqrt{\varphi_6^4 - \psi_8^3}} \psi_8^2 \varphi_6^3 J(\varphi_6, \psi_8) = -6\psi_8^2 \varphi_6^3.$$

Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\psi_8^3 \varphi_6^4 = 0$. А так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ задается уравнением $w_1(w_1 + w_2^2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1 = 0\}$ с кратностью три и над $B_3 = \{w_1 + w_2^2 = 0\}$ с кратностью четыре. Кривая B имеет особенность типа A_3 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_2)$ является 4-отражением и $\bar{f}_*(x_1)$ является 3-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(3,4)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_3 \ltimes \mathcal{C}_4$;
- (3) $H = Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = (\mathcal{C}_3 \ltimes \mathcal{C}_4) \times \mathcal{C}_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc}, O} = (\mathbb{A} \ltimes \mathcal{C}_4) \times \mathcal{C}_3$;
- (5) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RO}_{(3,4)}$.

Очевидно, что ни один из этих случаев не удовлетворяет всем условиям (F_1) – (F_5) . Например, случай (1) не удовлетворяет условию (F_4) , так как B_1 и B_2 не могут быть одновременно прямыми.

3.5.4. В $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ имеется подгруппа индекса три, порожденная отражениями, это группа номер 9 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(2,4)} = \langle y_1, y_3 \rangle \simeq \mathcal{Z}_8 \times_{\{z_8^4 = s^2\}} \text{BO}.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2,4)}} = \mathbb{C}[\psi_8, \theta_{12}^2]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_6$, $w_2 = \theta_{12}^2$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = -4\varphi_6^3 J(\varphi_6, \psi_8) = -4\varphi_6^3 \theta_{12},$$

так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$. Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_6^4 \theta_{12}^2 = 0$. И так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_2(w_1^3 + w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью два и над $B_2 = \{w_1^3 - w_2 = 0\}$ с кратностью четыре. Кривая B имеет особенность типа A_5 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ – 2-отражение, а $\bar{f}_*(x_2)$ – 4-отражение. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(3,4)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BO}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4$;
- (2) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_4 \times \mathcal{C}_2$;

- (3) $H = Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_4 \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_4$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_4$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_4 \times \mathbb{S}_4$;
- (6) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{RO}_{(2,4)}$.

Легко видеть, что только случай (3) удовлетворяет всем условиям (F_2) – (F_5) . Например, случаи (2), (4) и (5) не удовлетворяют этим условиям, так как иначе B_2 должна быть прямой, но тогда B_1 должна быть двойственной особому росту кривой C типа A_2 и поэтому в $G_{\text{loc},l}$ должна входить группа $\mathbb{S}_3$ в качестве сомножителя. Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможен следующий случай:

D.30. $\text{Sing } B = A_5$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_4$ и $p_l(C) = (A_{2,3} + \sum T_{i,4} + \sum T_{j,2})$.

3.5.5. В группе $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ имеется порожденная отражениями подгруппа индекса четыре (группа номер 14 в [10]):

$$\mathcal{RO}_{(2,3)} = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle z_{12}^2, z_{12}s, t \rangle.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2,3)}} = \mathbb{C}[\varphi_6, \theta_{12}^2]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_8$, $w_2 = \theta_{12}^2$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = -3\psi_8^2 J(\varphi_6, \psi_8) = -3\psi_8^2 \theta_{12},$$

так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$. Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\psi_8^3 \theta_{12}^2 = 0$. И так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то кривая $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_2(w_1^4 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью два и над $B_2 = \{w_1^4 - w_2 = 0\}$ с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа A_7 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc},o}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ является 2-отражением, а $\bar{f}_*(x_2)$ – 3-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(2,3)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_3 \times Q_8$, $G_{\text{loc},o} = \mathbb{S}_3$;
- (3) $H = Q_8$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3 \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_6$, $G_{\text{loc},O} = \mathbb{S}_4$;
- (5) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{\text{loc},O} = BO$;
- (6) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{C}_3 \times \mathbb{S}_4$;
- (7) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc},O} = \mathcal{RO}_{(2,3)}$.

Легко видеть, что только случаи (4) и (6) удовлетворяют всем условиям (F_2) – (F_5) . Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможны следующие случаи:

D.31. $\text{Sing } B = A_7$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_4$, $\text{Sing } U = \frac{1}{6}(1, 1)$, $p_l(C) = (E_{6,4})$;

D.32. $\text{Sing } B = A_7$, $G_{\text{loc},l} = \mathbb{S}_4 \times \mathcal{C}_3$, $\text{Sing } U = A_1$, $p_l(C) = (E_{6,4} + \sum T_{i,3})$.

Очевидно, что остальные случаи не удовлетворяют всем условиям (F_2) – (F_5) , так как B_2 должна быть прямой, но тогда B_1 должна быть двойственной особому росту кривой C типа E_6 и поэтому в $G_{\text{loc},l}$ должна входить в качестве сомножителя группа $\mathbb{S}_4$.

3.5.6. В группе $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ имеется две порожденные отражениями подгруппы индекса шесть. Одна из них – это группа номер 8 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(4)} = \langle y_3, y_4 \rangle = \langle z_8^2, z_8 s, t \rangle,$$

где $y_4 = z_{24}^{21}(ts)^{-1}$ также является 4-отражением. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(4)}} = \mathbb{C}[\psi_8, \theta_{12}]$ (см. [10]), т.е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_8$, $w_2 = \theta_{12}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\psi_8, \sqrt{\varphi_6^4 - \psi_8^3}\right) = \frac{-2}{\sqrt{\varphi_6^4 - \psi_8^3}} \varphi_6^3 J(\varphi_6, \psi_8) = -2\varphi_6^3$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\varphi_6^4 = 0$. А так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то кривая B задается уравнением $(w_1^3 + w_2^2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над B с кратностью четыре. Кривая B имеет особенность типа A_2 , т.е. не является прямой, и поэтому не выполнено условие (F_4) .

3.5.7. Вторая порожденная отражениями подгруппа индекса шесть в группе $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ – это группа номер 13 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(2,2)} = \langle y_1, y_5, y_3^2 \rangle \simeq \mathcal{Z}_4 \times_{\{z_4^2=s^2\}} \text{BO},$$

где $y_5 = z_{24}^6 t s t^2$ также является 2-отражением. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2,2)}} = \mathbb{C}[\varphi_6^2, \psi_8]$ (см. [10]), т.е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_8^2$, $w_2 = \psi_8$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = 2\varphi_6 J(\varphi_6, \psi_8) = 2\varphi_8 \theta_{12}$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\varphi_6^2 \theta_{12}^2 = 0$. А так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то кривая $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_1(w_1^2 - w_2^3) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1^2 - w_2^3 = 0\}$ и $B_2 = \{w_1 = 0\}$ с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа E_7 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 (x_1 и x_2 – обходы вокруг кривой B_1). Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$, $\bar{f}_*(x_2)$ и $\bar{f}_*(x_3)$ – это 2-отражения, $\bar{f}_*(x_2)$ и $\bar{f}_*(x_3)$ сопряжены друг с другом в $G_{\text{loc}, O}$. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(2,2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BO}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2$;
- (2) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2$;
- (3) $H = Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_3$;
- (4) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{S}_4$;
- (5) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RO}_{(2,2)}$.

Легко видеть, что только случай (3) удовлетворяет условиям (F_2) – (F_5) . Действительно, так как B_1 имеет тип особенности A_2 , то B_1 двойственна ростку кривой C в точке простого перегиба и, следовательно, в $G_{\text{loc}, l}$ должна входить группа $\mathbb{S}_3$ в качестве прямого сомножителя. Получаем, что для галувизаций дуализирующих накрытий возможны следующие случаи:

D.33. $\text{Sing } B = E_7$, $G_{\text{loc}, l} = \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_2$, $p_l(C) = (A_{5,3,2})$;

D.34. $\text{Sing } B = E_7$, $G_{\text{loc}, l} = \mathbb{S}_3 \times \mathcal{C}_2$, $p_l(C) = (A_{0,3} + \sum T_{i,2})$.

3.5.8. Наконец, в группе $\mathcal{RO}_{(2,3,4)}$ имеется порожденная отражениями подгруппа индекса двенадцать – это группа номер 12 в [10]:

$$\mathcal{RO}_{(2)} = \langle y_1, y_5, y_6 \rangle = \langle z_4 s, t \rangle,$$

где $y_6 = z_{24}^6 t s t^2$ также является 2-отражением. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RO}_{(2)}} = \mathbb{C}[\varphi_6, \psi_8]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_6$, $w_2 = \psi_8$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J(\varphi_6, \psi_8) = \theta_{12}.$$

Дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\theta_{12}^2 = 0$. А так как $\theta_{12}^2 = \varphi_6^4 - \psi_8^3$, то B задается уравнением $w_1^4 - w_2^3 = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над B с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа E_6 . Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$, $\bar{f}_*(x_2)$ и $\bar{f}_*(x_3)$ являются сопряженными 2-отражениями. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RO}_{(2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BT}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2$;
- (2) $H = Q_8$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{S}_3$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{S}_4$;
- (4) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RO}_{(2)}$.

Как и в предыдущем пункте, легко видеть, что возможен только случай (3). Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможен следующий случай:

$$D.35. \text{Sing } B = E_6, G_{\text{loc}, l} = \mathbb{S}_4 \text{ и } p_l(C) = (A_{0,4}).$$

3.6. Как известно, бинарная группа икосаэдра BI порождается двумя элементами s и t и имеет следующее копредставление:

$$\text{BI} = \langle s, t \mid s^2 = t^3 = (st)^5, t^3 = s^4 = [s^2, t] = 1 \rangle.$$

В BI имеется только одна нетривиальная нормальная подгруппа, а именно, ее центр $Z(\text{BI})$, порожденный элементом s^2 . Факторгруппа $\text{BI}/Z(\text{BI})$ изоморфна знакопеременной группе $\mathbb{A}_5$.

Группа BI имеет следующее представление в $\text{GL}(2, \mathbb{C})$:

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varepsilon_5^2 - \varepsilon_5^4 & \varepsilon_5^4 - 1 \\ 1 - \varepsilon_5 & \varepsilon_5^3 - \varepsilon_5 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varepsilon_5^4 - \varepsilon_5 & \varepsilon_5^2 - \varepsilon_5^3 \\ \varepsilon_5^2 - \varepsilon_5^3 & \varepsilon_5 - \varepsilon_5^4 \end{pmatrix}.$$

Алгебра $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\text{BI}}$ порождается тремя однородными формами (см. [14]), две из которых, $\varphi_{12}(u_1, u_2)$ и $\psi_{20}(u_1, u_2)$, имеют степень двенадцать и двадцать, а третья, $\theta_{30}(u_1, u_2) = J(\varphi_{12}, \psi_{20})$ (якобиан форм φ_{12} и ψ_{20}), имеет степень тридцать. Эти формы связаны соотношением

$$\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3.$$

3.6.1. Как известно [10], в $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ имеется с точностью до сопряжения ровно семь конечных групп, порожденных отражениями и тесно связанных с группой BI (в [10] это группы с номерами 16–22). Среди них имеется *максимальная икосаэдральная группа* $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$, порожденная отражениями (группа номер 19 в [10]), а остальные шесть являются ее подгруппами.

Группа $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ – это прямое произведение с объединенной подгруппой групп $\mathcal{Z}_{60}$ и BI ,

$$\mathcal{RI}_{(2,3,5)} = \mathcal{Z}_{60} \times_{\{z_{60}^{30}=s^2\}} \mathrm{BI}.$$

Порядок группы $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ равен 3600. Следующие элементы являются отражениями в $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$: $y_1 = z_{60}^{15}s$ (2-отражение), $y_2 = z_{60}^{40}t$ (3-отражение) и $y_3 = z_{60}^6(st)^{-1}$ (5-отражение). Легко видеть, что группа $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ порождается отражениями y_1 , y_2 и y_3 , так как $y_1 y_2 y_3 = z$. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(2,3,5)}} = \mathbb{C}[\varphi_{12}^5, \psi_{20}^3]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_{12}^5$, $w_2 = \psi_{20}^3$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = 15\varphi_{12}^4\psi_{20}^2 J(\varphi_{12}, \psi_{20}) = 15\varphi_{12}^4\psi_{20}^2\theta_{30},$$

поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\varphi_{12}^5\psi_{20}^3\theta_{30}^2 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ задается уравнением $w_1 w_2 (w_1 - w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1 = 0\}$ с кратностью пять, над $B_2 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью три и над $B_3 = \{w_1 - w_2 = 0\}$ с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа D_4 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\mathrm{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ является 5-отражением, $\bar{f}_*(x_2)$ – 3-отражением, а $\bar{f}_*(x_3)$ – 2-отражением.

Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RI}_{(2,3,5)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \mathrm{BI}$, $G_{\mathrm{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_5$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_{2n}$, $G_{\mathrm{loc}, O} = \mathcal{C}_m \times \mathbb{A}_5$, где $nm = 30$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_n$, $G_{\mathrm{loc}, O} = \mathcal{Z}_{2m} \times_{\{z_{2m}^m=s^2\}} \mathrm{BI}$, где $nm = 30$;
- (4) $H = \{1\}$, $G_{\mathrm{loc}, O} = \mathcal{RI}_{(2,3,5)}$.

Условию (F_2) (и всем остальным) удовлетворяет только случай (1). Получаем, что для галуизаций дуализирующих накрытий возможны следующие случаи:

D.36. $\mathrm{Sing} B = D_4$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathbb{S}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_5$, $p_l(C) = (A_{0,2}; \sum T_{i,3}; \sum T_{j,5})$;

D.37. $\mathrm{Sing} B = D_4$, $G_{\mathrm{loc}, l} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \times \mathcal{C}_5$, $p_l(C) = (\sum T_{i,2}; \sum T_{j,3}; \sum T_{k,5})$.

3.6.2. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ имеется подгруппа индекса два (группа номер 18 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(3,5)} = \langle y_2, y_3 \rangle \simeq \mathcal{Z}_{30} \times_{\{z_{30}^{15}=s^2\}} \mathrm{BI}.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(3,5)}} = \mathbb{C}[\psi_{20}^3, \theta_{30}]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_{20}^3$, $w_2 = \theta_{30}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\psi_{20}^3, \sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}\right) = \frac{-15}{2\sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}} \psi_{20}^2 \varphi_{12}^4 J(\varphi_{12}, \psi_{20}) = \frac{-15}{2} \psi_{20}^2 \varphi_{12}^4$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\psi_{20}^3 \varphi_{12}^5 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_1(w_1 + w_2^2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_1 = 0\}$ с кратностью три и над $B_2 = \{w_1 + w_2^2 = 0\}$ с кратностью пять. Кривая B имеет особенность типа A_3 .

Очевидно, что кривая B не удовлетворяет условию (F_4) , так как B_1 и B_2 не могут быть одновременно двумя прямыми (они пересекаются нетрансверсально).

3.6.3. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ имеется подгруппа индекса три (группа номер 17 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(2,5)} = \langle y_1, y_3 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{20} \times_{\{z_{20}^{10}=s^2\}} \text{BI}.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(2,5)}} = \mathbb{C}[\psi_{20}, \theta_{30}^2]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_{20}$, $w_2 = \theta_{30}^2$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J(\psi_{20}, \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3) = -5\varphi_{12}^4 \theta_{30}$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\theta_{30}^2 \varphi_{12}^5 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_2(w_1^3 + w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_2 = 0\}$ с кратностью два и над $B_2 = \{w_1^3 + w_2 = 0\}$ с кратностью пять. Кривая B имеет особенность типа A_5 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ — эпиморфизм из леммы 2, определяющий накрытие Галуа $f: U \rightarrow D$, то $\bar{f}_*(x_1)$ является 2-отражением, а $\bar{f}_*(x_2)$ — 5-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RI}_{(2,5)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BI}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{C}_2 \times \mathbb{C}_5$;
- (2) $H = \mathbb{Z}_{2n}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{C}_m \times \mathbb{A}_5$, где $nm = 10$;
- (3) $H = \mathbb{Z}_5$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{Z}_4 \times_{\{z_2=s^2\}} \text{BI}$;
- (4) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RI}_{(3,5)}$.

Очевидно, что ни один из этих случаев не удовлетворяет условиям (F_3) и (F_4) , так как B_2 должна быть прямой, но тогда кривая B_1 должна быть двойственной особому ростку кривой C с особенностью типа A_2 и поэтому в $G_{\text{loc}, l}$ должна входить группа $\mathbb{S}_3$ в качестве сомножителя.

3.6.4. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ имеется подгруппа индекса пять (группа номер 21 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(2,3)} = \langle y_1, y_2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_{12} \times_{\{z_{12}^6=s^2\}} \text{BI}.$$

Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(2,3)}} = \mathbb{C}[\varphi_{12}, \theta_{30}^2]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_{12}$, $w_2 = \theta_{30}^2$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J(\varphi_{12}, \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3) = 3\psi_{20}^2 \theta_{30}$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается следующим уравнением: $\theta_{30}^2 \psi_{20}^3 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления $B = B_1 \cup B_2$ задается уравнением $w_2(w_1^5 + w_2) = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над $B_1 = \{w_2 = 0\}$

с кратностью два и над $B_2 = \{w_1^5 + w_2 = 0\}$ с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа A_9 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается двумя геометрическими порождающими x_1 и x_2 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$ является 2-отражением, а $\bar{f}_*(x_2)$ – 3-отражением. Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RI}_{(2,3)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BI}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_{2n}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_m \times \mathbb{A}_5$, где $nm = 6$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_3$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{Z}_4 \times_{\{z_2=s^2\}} \text{BI}$;
- (4) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RI}_{(3,5)}$.

Очевидно, что ни один из этих случаев не удовлетворяет условиям (F_3) и (F_4) , так как B_2 должна быть прямой, но тогда кривая B_1 должна быть двойственной особому ростку кривой C с особенностью, эквивалентной особенности, заданной уравнением $z_1^5 + z_2^4 = 0$, и поэтому в $G_{\text{loc}, l}$ в качестве сомножителя должна входить симметрическая группа $\mathbb{S}_4$.

3.6.5. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ есть подгруппа индекса шесть (группа номер 16 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(5)} = \langle y_3, y_4 \rangle \simeq \mathcal{Z}_5 \times \text{BI},$$

где $y_4 = z_{60}^{36}(ts)^{-1}$ – также 5-отражение. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(5)}} = \mathbb{C}[\psi_{20}, \theta_{30}]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \psi_{20}$, $w_2 = \theta_{30}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\psi_{20}, \sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}\right) = \frac{-5}{2\sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}} \varphi_{12}^4 J(\varphi_{12}, \psi_{20}) = \frac{-5}{2} \varphi_{12}^4$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\varphi_{12}^5 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления B задается уравнением $w_1^3 + w_2^2 = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над B с кратностью пять. Кривая B имеет особенность типа A_2 и поэтому не удовлетворяет условию (F_4) .

3.6.6. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ имеется порожденная отражениями подгруппа индекса десять (группа номер 20 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(3)} = \langle y_3, y_5 \rangle \simeq \mathcal{Z}_5 \times \text{BI},$$

где $y_5 = z_{60}^{10}sts$ – также 5-отражение. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(3)}} = \mathbb{C}[\varphi_{12}, \theta_{30}]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_{12}$, $w_2 = \theta_{30}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J\left(\varphi_{12}, \sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}\right) = \frac{-3}{2\sqrt{\varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3}} \psi_{20}^2 J(\varphi_{12}, \psi_{20}) = \frac{-3}{2} \psi_{20}^2$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\psi_{20}^3 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая ветвления B задается уравнением $w_1^5 - w_2^2 = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над B с кратностью три. Кривая B имеет особенность типа A_4 и поэтому не удовлетворяет условию (F_4) .

3.6.7. В группе $\mathcal{RI}_{(2,3,5)}$ имеется порожденная отражениями подгруппа индекса пятнадцать (группа номер 22 в [10]):

$$\mathcal{RI}_{(2)} = \langle y_1, y_6, y_7 \rangle \simeq \mathcal{Z}_4 \times_{\{z_4^2=s^2\}} \text{BI},$$

где $y_6 = z_4 t^2 s t$, $y_7 = z_4^3 s t s t^2 s$ – также 2-отражения. Имеем $\mathbb{C}[u_1, u_2]^{\mathcal{RI}_{(2)}} = \mathbb{C}[\varphi_{12}, \psi_{20}]$ (см. [10]), т. е. накрытие $\bar{f}$ задано функциями $w_1 = \varphi_{12}$, $w_2 = \psi_{20}$, его якобиан имеет вид

$$J(\bar{f}) = J(\varphi_{12}, \psi_{20}) = \theta_{30}$$

и поэтому дивизор ветвления $\bar{f}^*(B)$ накрытия $\bar{f}$ задается уравнением $\theta_{30}^2 = 0$. А так как $\theta_{30}^2 = \varphi_{12}^5 - \psi_{20}^3$, то кривая B задается уравнением $w_1^5 - w_2^3 = 0$ и $\bar{f}$ разветвлено над B с кратностью два. Кривая B имеет особенность типа E_8 .

Группа $\pi_1(D \setminus B)$ порождается тремя геометрическими порождающими x_1 , x_2 и x_3 . Если $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ – эпиморфизм из леммы 2, то $\bar{f}_*(x_1)$, $\bar{f}_*(x_2)$ и $\bar{f}_*(x_3)$ являются 3-отражениями.

Легко видеть, что для нормальных подгрупп $H \subset \mathcal{RI}_{(2)}$, удовлетворяющих условию (F_1) , возможны только следующие случаи:

- (1) $H = \text{BI}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2$;
- (2) $H = \mathcal{Z}_4$, $G_{\text{loc}, O} = \mathbb{A}_5$;
- (3) $H = \mathcal{Z}_2$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{C}_2 \times \mathbb{A}_5$;
- (4) $H = \{1\}$, $G_{\text{loc}, O} = \mathcal{RI}_{(2)}$.

Очевидно, что эти случаи не удовлетворяют условию (F_3) , так как кривая B не является прямой и поэтому она должна быть двойственна ветви кривой C , более того, двойственна особой ветви, поэтому в $G_{\text{loc}, l}$ должна входить сомножителем группа $\mathbb{S}_n$ с $n \geq 3$.

3.7. Завершение доказательства теоремы 4. Согласно теореме 3 группы $G_{\text{loc}, l}$ – это прямые произведения симметрических групп и циклических групп. Из полученного списка $D.1$ – $D.37$ возможных случаев следует, что если в эти произведения входит симметрическая группа $\mathbb{S}_r$ с $r \geq 3$, то такая группа только одна – это либо $\mathbb{S}_3$, либо $\mathbb{S}_4$. Более того, если входит $\mathbb{S}_4$ (это имеет место только в случаях $D.31$, $D.32$ и $D.35$), то дополнительным сомножителем может быть только циклическая группа $\mathcal{C}_3$ (случай $D.32$). Следовательно, касательная кратность d_p не превосходит четырех для любого ростка (U, p) кривой $\bar{C}$, и поэтому кратность особенности r_p любого ростка кривой $\bar{C}$ не превосходит трех, так как $r_p < d_p$. Снова рассматривая случаи $D.31$, $D.32$ и $D.35$, видим, что если через точку P проходит один или несколько особых неприводимых ростков кривой C , один из которых имеет кратность $r_p = 3$, то все эти ростки имеют ту же кратность (случаи $D.31$ и $D.32$) и, следовательно, тип этих особенностей – это E_6 и все эти ветви пересекаются между собой трансверсально. А если среди особых ветвей кривой C , проходящих через некоторую точку P_1 , нет особых ветвей типа E_6 , то все эти ветви имеют касательную кратность $d_p = 3$ и кратность $r_p < d_p = 3$, т. е. это особые ветви типа A_2 , которые также имеют трансверсальное пересечение друг с другом. Следовательно, если в $\bar{B}$ входит прямая L_P , то f ветвится вдоль L_P с кратностью $\bar{r}_P = 3$ или $\bar{r}_P = 2$, т. е. если в $G_{\text{loc}, l}$ входит прямым сомножителем циклическая группа $\mathcal{C}_n$, то $n = 3$ или $n = 2$ и поэтому случаи $D.27$, $D.28$, $D.30$, $D.36$ и $D.37$ возможны только если

галуивизация Z дуализирующего накрытия плоскости имеет кроме циклических особенностей и другие особенности.

Все случаи $D.1$ – $D.37$ за исключением случаев $D.27$, $D.28$, $D.30$, $D.36$ и $D.37$ перечислены в формулировке теоремы 4. Для кривой ветвления B в каждом из случаев $D.1$ – $D.37$ в п. 2.2 приведено копредставление фундаментальной группы $\pi_1(D \setminus B)$, порожденной геометрическими порождающими x_i , и рутинная проверка, которую мы оставляем читателю, показывает, что в каждом из случаев $D.1$ – $D.37$ эпиморфизмы $f_*: \pi_1(D \setminus B) \rightarrow G_{\text{loc}, O}$ однозначно с точностью до автоморфизмов групп $G_{\text{loc}, O}$ определяются свойствами (F_1) – (F_5) , т. е. они действительно реализуют локальные монодромии галуивизаций дуализирующих накрытий плоскости.

Список литературы

1. K. Stein, “Analytische Zerlegungen komplexer Räume”, *Math. Ann.*, **132** (1956), 63–93.
2. F. Catanese, “On a problem of Chisini”, *Duke Math. J.*, **53**:1 (1986), 33–42.
3. Вик. С. Куликов, “О гипотезе Кизини”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 83–116; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “On Chisini’s conjecture”, *Izv. Math.*, **63**:6 (1999), 1139–1170.
4. F. Bogomolov, Vik. S. Kulikov, “On the irreducibility of Hilbert scheme of surfaces of minimal degree”, *Cent. Eur. J. Math.*, **11**:2 (2013), 254–263.
5. Вик. С. Куликов, “Кривые Гурвица”, *УМН*, **62**:6(378) (2007), 3–86; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Hurwitz curves”, *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1043–1119.
6. E. Ballico, A. Hefez, “On the Galois group associated to a generically étale morphism”, *Comm. Algebra*, **14**:5 (1986), 899–909.
7. H. Cartan, “Quotient d’un espace analytique par un groupe d’automorphismes”, *Algebraic geometry and topology*, A symposium in honor of S. Lefschetz (Princeton, 1954), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1957, 90–102.
8. E. Brieskorn, “Rationale Singularitäten komplexer Flächen”, *Invent. Math.*, **4**:5 (1967/1968), 336–358.
9. Ю. Г. Прохоров, *Особенности алгебраических многообразий*, МЦНМО, М., 2009, 128 с.
10. G. C. Shephard, J. A. Todd, “Finite unitary reflection groups”, *Canadian J. Math.*, **6** (1954), 274–304.
11. F. Catanese, “Automorphisms of rational double points and moduli spaces of surfaces of general type”, *Compositio Math.*, **61**:1 (1987), 81–102.
12. A. M. Cohen, “Finite complex reflection groups”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **9**:3 (1976), 379–436.
13. W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, 2nd ed., *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*, **4**, Springer-Verlag, Berlin, 2004, xii+436 pp.
14. Ф. Клейн, *Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени*, Наука, М., 1989, 336 с.; пер. с нем.: F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner, Leipzig, 1884, xxviii+343 pp.

ВИКТОР СТЕПАНОВИЧ КУЛИКОВ

(VIKTOR S. KULIKOV)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

25.03.2015

02.06.2015