Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Адян, В. С. Атабекян, Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n -периодических произведений групп, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 6, 3–17

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8369>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:59:09

УДК 512.54+512.543.5

С. И. Адян, В. С. Атабекян

Характеристические свойства и равномерная неаменабельность n -периодических произведений групп

Доказано, что n -периодические произведения, введенные С. И. Адяном в 1976 г., однозначно характеризуются некоторыми вполне конкретными свойствами. С использованием этих свойств доказывается, что, если некоторая нециклическая подгруппа H n -периодического произведения данного семейства групп не сопряжена никакой подгруппе компонент этого произведения, то в H содержится подгруппа, изоморфная свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$. Это означает, что подгруппа H содержит и лежащие в $B(2, n)$ свободные периодические группы $B(m, n)$ любого ранга $m > 2$ [1, с. 26]. Если при этом подгруппа H конечно порождена, то она равномерно неаменабельна. В статье также описываются конечные подгруппы n -периодических произведений.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: n -периодическое произведение, свободная периодическая группа, простая группа, аменабельная группа, равномерная неаменабельность, экспоненциальный рост.

DOI: 10.4213/im8369

§ 1. Введение

Понятие периодического произведения фиксированного периода n (т. е. n -периодического произведения) данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ было введено в работе С. И. Адяна [2]. Эта операция, обозначаемая через $\prod_{i \in I}^n G_i$, определяется на классе всех групп для каждого нечетного $n \geq 665$ как факторгруппа свободного произведения $F = \prod_{i \in I}^* G_i$ заданного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ по специально выбранной нормальной подгруппе, которая задается некоторой системой определяющих соотношений вида $A^n = 1$ (см. также [3]). Эта система соотношений определяется сложной совместной индукцией по натуральному параметру, называемому рангом, на основе теории Новикова–Адяна, подробно изложенной в монографии [4].

Эти операции умножения групп обладают основными свойствами классических операций свободного и прямого произведений групп: они являются точными, ассоциативными и наследственными по подгруппам. На самом деле n -периодические произведения обладают и многими другими важными свойствами. В частности, в работе С. И. Адяна [5] было доказано, что периодическое произведение нечетного периода $n \geq 665$ данного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, не содержащих инволюций, является простой группой в том и только том случае, если

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Государственного комитета по науке МОН Республики Армения в рамках совместной научной программы (проекты 15-51-05012-Арм_а и 15RF-054 соответственно).

каждый множитель G_i становится единичной группой при добавлении к его соотношениям тождества $x^n = 1$. Позже, в совместной работе авторов [6] было доказано, что если хотя бы для одного из множителей G_i тождество $x^n = 1$ не выполняется, то n -периодическое произведение будет хопфовой группой, т. е. все его сюръективные эндоморфизмы будут автоморфизмами.

Периодическим произведением показателя n семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ называется группа, получающаяся в результате добавления к соотношениям свободного произведения $F = \prod_{i \in I}^* G_i$ всех определяющих соотношений вида $A^n = 1$, где A есть элементарный период некоторого ранга α при определенной классификации периодических слов свободного произведения F при условии, что A^n входит в некоторое минимизированное в ранге $\alpha - 1$ слово из класса $\mathcal{M}_{\alpha-1}$ (см. [2, определение п. 8]). Согласно [2, теорема 2] равенство $X^n = 1$ в группе $G = \prod_{i \in I}^n G_i$ выполняется для каждого слова X из свободного произведения F , которое не сопряжено в группе G никакому элементу подгрупп G_i , $i \in I$. Кроме того, в силу [2, теорема 3] каждый множитель G_i , $i \in I$, тождественно вкладывается в n -периодическое произведение G .

На самом деле, приведенные выше свойства n -периодических произведений являются характеристическими в том смысле, что верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть число $n \geq 665$ нечетно и множители $\{G_i\}_{i \in I}$ не содержат инволюций. Тогда свободное произведение $F = \prod_{i \in I}^* G_i$ содержит единственную нормальную подгруппу M , удовлетворяющую следующим условиям:

- а) подгруппа M имеет тривиальное пересечение со всеми компонентами G_i ;
- б) подгруппа M является нормальным замыканием некоторого множества $\mathcal{R}$ слов вида $C^n \in F$ и, если элемент $X \in F$ не сопряжен в F/M никакому элементу из компонент G_i , то $X^n = 1$ в факторгруппе F/M .

Это означает, что если некоторая нормальная подгруппа M свободного произведения $F = \prod_{i \in I}^* G_i$ удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 1, то факторгруппа F/M есть n -периодическое произведение семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$.

Интересным приложением теоремы 1 является следующий результат, утверждающий, что n -периодические произведения содержат достаточно большие подгруппы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G есть n -периодическое произведение произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций, где $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда каждая нециклическая подгруппа H группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе компонент G_i , содержит подгруппу, изоморфную свободной периодической группе $B(2, n)$. Это означает, что подгруппа H содержит и лежащие в $B(2, n)$ свободные периодические группы $B(t, n)$ любого ранга $t > 2$ [1, с. 26].

Свободная периодическая группа $B(t, n)$ периода n и ранга t является n -периодическим произведением t циклических групп порядка n (см. [2, теорема 5]) и задается следующим образом:

$$B(t, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_m \mid x^n = 1 \rangle,$$

где x пробегает множество всех несократимых слов в групповом алфавите $a_1, \dots, a_m, a_1^{-1}, \dots, a_m^{-1}$.

Хорошо известно (см. [4, теорема 2.15], что для любого нечетного $n \geq 665$ и ранга $m > 1$ группа $B(m, n)$ имеет экспоненциальный рост, показатель которого при увеличении периода n приближается к показателю роста для абсолютно свободной группы того же ранга. Недавно С. И. Адяна в работе [7] указал новые оценки $n \geq 101$ для периодов бесконечных бернсайдовых групп $B(m, n)$. Понятно, что это позволяет распространить на периоды $n \geq 101$ также и понятие n -периодического произведения.

Теорема 2 является естественным обобщением теоремы 1 из работы В. С. Атабеяна [8]. Из нее, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого нечетного $n \geq 1003$ каждая нециклическая конечная подгруппа n -периодического произведения произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций сопряжена некоторой подгруппе одной из компонент G_i .*

Группа G называется *аменабельной*, если для нее существует конечно-аддитивная мера μ , определенная на σ -алгебре всех подмножеств группы G и принимающая значения в интервале $[0, 1]$, такая, что $\mu(G) = 1$ и $\mu(gA) = \mu(A)$ для любых $g \in G$ и $A \subset G$. Класс аменабельных групп замкнут относительно операций взятия подгруппы, факторгруппы, индуктивного предела и расширения. Все конечные группы и все конечно порожденные разрешимые группы аменабельны. С другой стороны, любая группа, содержащая свободную подгруппу ранга 2, неаменабельна (см. [9]). Примеры неаменабельных групп, которые не содержат свободных подгрупп ранга 2, были впервые указаны в работе А. Ю. Ольшанского [10]. Построенные в [10] периодические группы имели сложную конструкцию и неограниченно возрастающие порядки элементов.

Первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющих нетривиальному тождеству, были указаны С. И. Адяном в работе [11]. Он доказал, что неаменабельными являются относительно свободные периодические группы $B(m, n)$ при всех нечетных $n \geq 665$ и $m > 1$. В работе [11] было также доказано, что случайные блуждания на этих группах не возвратны. Тем самым была решена известная проблема Кестена. Очевидно, группы $B(m, n)$ не содержат свободных подгрупп. Отметим, что в обеих работах [10] и [11] был использован доказанный Р. И. Григорчуком [12] критерий аменабельности группы, основанный на понятии показателя роста нормальной подгруппы.

Конечно порожденные аменабельные группы можно описать также с помощью так называемой константы Фелнера. *Константой Фелнера группы G относительно данного конечного порождающего множества S* называется число

$$\text{Fol}_S(G) = \inf_A \frac{|\partial_S(A)|}{|A|},$$

где $\partial_S(A) = \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in S^{\pm 1}\}$ и инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$.

Конечно порожденная группа аменабельна тогда и только тогда, когда $\text{Fol}_S(G) = 0$ для некоторого конечного порождающего множества S (см. [13]).

Группа G называется *равномерно неаменабельной*, если $\inf_S \text{Fol}_S(G) > 0$, где инфимум берется по всем конечным порождающим множествам S группы G .

В работе [14] было доказано, что для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ любая конечно порожденная нециклическая подгруппа H свободной бернсайдовой

группы $B(m, n)$ равномерно неаменабельна. В частности, для любого $m \geq 2$ и нечетного $n \geq 1003$ свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ равномерно неаменабельна (см. также [15], [16]). Естественным обобщением этих результатов является следующая теорема, которую мы докажем в § 4 настоящей статьи.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть G – n -периодическое произведение произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций, где $n \geq 1003$ нечетно. Тогда любая конечно порожденная подгруппа H группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе компонента G_i , равномерно неаменабельна.*

Говорят, что группа G имеет равномерный экспоненциальный рост, если для всех конечных порождающих множеств S степень роста группы G относительно S ограничена снизу фиксированным числом $\varepsilon > 1$. Поскольку любая равномерно неаменабельная конечно порожденная группа имеет равномерный экспоненциальный рост (см. [17]), то из теоремы 3 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *При нечетных $n \geq 1003$ в n -периодических произведениях семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций каждая конечно порожденная подгруппа, которая не сопряжена никакой подгруппе компонента G_i , имеет равномерный экспоненциальный рост.*

Это следствие дает положительный ответ в усиленной форме для всех нечетных $n \geq 1003$ на вопрос де ля Арпа (см. [18, с. 12]): имеют ли бесконечные свободные периодические группы $B(m, n)$ равномерный экспоненциальный рост?

В работе [6] было доказано, что если нечетное число $n \geq 665$ является собственным делителем числа r , то n -периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая хопфова группа, которая не финитно аппроксимируема. Поэтому имеем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если число $n \geq 1003$ является собственным делителем нечетного числа r , то n -периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть не простая хопфова, не финитно аппроксимируемая и равномерно неаменабельная группа периода r .*

С другой стороны, согласно критерию простоты из работы С. И. Адяна [5], если r и n – взаимно простые числа, то n -периодическое произведение циклических групп периода r есть простая группа, так как в таком случае циклическая группа периода r становится единичной при добавлении тождества $x^n = 1$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Если нечетное число r взаимно просто с нечетным числом $n \geq 1003$, то n -периодическое произведение конечного числа циклических групп периода r есть простая равномерно неаменабельная группа периода nr .*

В частности, 1003-периодическое произведение двух циклических групп порядка 3 – равномерно неаменабельная простая группа, в которой выполняется тождество $x^{3009} = 1$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Как уже было отмечено выше, в работе [2] существование в свободном произведении семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ нормальной подгруппы, которая удовлетворяет условиям а) и б) теоремы 1, было доказано для каждого нечетного $n \geq 665$. Нам нужно доказать единственность такой подгруппы.

Обозначим через N нормальную подгруппу свободного произведения $F = \prod_{i \in I}^* G_i$, факторгруппа по которой является n -периодическим произведением. Другими словами, N есть нормальное замыкание в свободном произведении F всех слов вида A^n , где A есть элементарный период некоторого ранга α и при этом слово A^n входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$ (см. [2, п. 8]).

Рассмотрим произвольную нормальную подгруппу M группы F , удовлетворяющую условиям а) и б) теоремы 1. Наша цель доказать, что нормальные подгруппы N и M совпадают. Для этого мы построим некоторую группу $\Gamma(n, M)$ по аналогии с тем, как в п. 2.2 главы VII монографии [4] была построена группа $\Gamma(n, \Pi)$. При построении группы $\Gamma(n, M)$ мы будем следовать схеме индуктивного определения n -периодического произведения, согласовывая выбор элементарных периодов с подгруппой M следующим образом.

Пусть $\Gamma_0 = F$ – свободное произведение семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$. Индукцией по $\alpha \geq 1$ построим группу Γ_α в предположении, что группа $\Gamma_{\alpha-1}$ уже построена. При этом мы будем использовать терминологию из главы VII монографии [4]. Будем рассматривать только несократимые периодические слова, периоды которых D не сопряжены в группе F/M никакому элементу из компонент G_i при $i \in I$. Такие периоды D будем называть *отмеченными периодами*. Именно среди отмеченных периодов мы проведем классификацию минимальных и элементарных периодов рангов $\alpha \geq 1$, которые будем называть *отмеченными элементарными периодами* ранга α . При этом мы повторим все определения и построения из п. 2.2 главы VII монографии [4], заменив используемое там понятие отмеченного элементарного периода ранга α на только что введенное новое понятие отмеченного элементарного периода. В результате такой замены вместо построенной в конце п. 2.2 главы VII [4] группы $\Gamma(n, \Pi)$ мы получим по той же схеме новую группу, которую будем обозначать через $\Gamma(n, M)$. При этом все утверждения глав II–V из [4], доказанные для группы $\Gamma(n, \Pi)$, аналогичным образом будут доказываться для группы $\Gamma(n, M)$.

Далее аналогично лемме 4 из [2] мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.1. *Для всякого непустого слова $X \in \mathcal{A}_\alpha$ можно указать такое слово S из $\mathcal{A}_{\alpha+2}$ и такое слово Y , что выполнено соотношение $X = SYS^{-1}$ в ранге α , где Y либо есть элемент одной из групп G_i , либо имеет вид A^γ , где A – элементарный период некоторого ранга $\gamma \leq \alpha+1$ и A^γ входит в некоторое слово из множества $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

Из соответствующих аналогов [4, гл. IV, лемма 2.37, гл. IV, лемма 2.16] следует

ЛЕММА 2.2. *Если A есть отмеченный элементарный период некоторого ранга γ и A^γ входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то A имеет порядок n в группе $\Gamma(n, M)$.*

Следующее утверждение доказывается точно так же, как [4, гл. VI, лемма 2.3].

ЛЕММА 2.3. Если $X \sim^\alpha Y$, то $X = Y$ в $\Gamma(n, M)$.

Аналогично лемме 2.4 главы VI [4] (см. также [2, лемма 2]) доказывается

ЛЕММА 2.4. Для любого слова X существует некоторое абсолютно приведенное слово $Y \in \mathcal{A}_\alpha$ такое, что $X = Y$ в группе $\Gamma(n, M)$.

Как и в монографии [4] мы обозначим через $\mathcal{E}_\gamma$ множество всех отмеченных в данном ранге γ элементарных периодов D таких, что D^n входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. Через $\mathcal{E}^n$ обозначим нормальное замыкание множества слов вида D^n для всех $D \in \bigcup_{\gamma=1}^\infty \mathcal{E}_\gamma$. Очевидно, что $\mathcal{E}^n \subset N$.

Следующая лемма непосредственно вытекает из приведенных лемм 2.3 и 2.4 аналогично теореме 1 в [2].

ЛЕММА 2.5. Ядро естественного гомоморфизма $F \rightarrow \Gamma(n, M)$ совпадает с $\mathcal{E}^n$, т.е. тождественное отображение из группы $F/\mathcal{E}^n$ в группу $\Gamma(n, M)$ является изоморфизмом.

В силу леммы 2.5 мы можем не различать группы $F/\mathcal{E}^n$ и $\Gamma(n, M)$. Теперь докажем следующую лемму, из которой получим доказательство теоремы 1.

ЛЕММА 2.6. Имеет место равенство $M = \mathcal{E}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизмы $\tau_1: F \rightarrow F/M$ и $\tau_2: F \rightarrow F/\mathcal{E}^n$ и докажем включения $\mathcal{E}^n \subset \text{Ker}(\tau_1)$ и $M \subset \text{Ker}(\tau_2)$.

Пусть слово D принадлежит множеству $\bigcup_{\gamma=1}^\infty \mathcal{E}_\gamma$, т.е. D является отмеченным элементарным периодом некоторого ранга γ , и при этом D^n входит в некоторое слово из $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. По определению отмеченного элементарного периода слово D не сопряжено в F/M никакому элементу из G_i при $i \in I$. По условию b) теоремы 1 в факторгруппе F/M выполнено равенство $D^n = 1$. Следовательно, $\mathcal{E}^n \subset \text{Ker}(\tau_1) = M$.

Нам осталось доказать включение $M \subset \text{Ker}(\tau_2)$. По определению M является нормальным замыканием некоторого множества $\mathcal{R}$ несократимых слов вида $C^n \in F$. Пусть $C^n \in \mathcal{R}$. Предположим сначала, что C не сопряжено в F/M никакому элементу из G_i при $i \in I$. Поскольку $\mathcal{E}^n \subset M = \text{Ker}(\tau_1)$, то и в группе $F/\mathcal{E}^n$ слово C не сопряжено никакому элементу из G_i при $i \in I$. По лемме 2.1 элемент C сопряжен в $F/\mathcal{E}^n$ некоторой степени элементарного периода A некоторого ранга γ такого, что A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. Тогда и период A не сопряжен в F/M никакому элементу из G_i при $i \in I$. Следовательно, A является отмеченным периодом ранга γ . По лемме 2.2 имеем $A^n = 1$ в $F/\mathcal{E}^n$ и $A^n \in \text{Ker}(\tau_2)$. Поскольку C сопряжено в $F/\mathcal{E}^n$ некоторой степени периода A , то из соотношения $A^n \in \text{Ker}(\tau_2)$ вытекает, что $C^n \in \text{Ker}(\tau_2)$.

Осталось доказать то же самое в случае, если слово C сопряжено в F/M какому-то элементу x из G_i для некоторого $i \in I$. Рассмотрим этот случай. Поскольку $C^n \in M$, имеем $x^n \in M$. Тогда $x^n \in G_i \cap M$. Но в силу условия а) теоремы 1 $G_i \cap M = \{1\}$, т.е. $x^n = 1$ в G_i , а тогда $x^n = 1$ и в F . Следовательно, $C^n \in \text{Ker}(\tau_2)$, так как $C^n = 1$ в F . Таким образом, мы доказали, что в обоих случаях $C^n \in \text{Ker}(\tau_2)$. Тем самым, включение $M \subset \text{Ker}(\tau_2) = \mathcal{E}^n$ доказано. Лемма 2.6 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 1, в силу доказанного в лемме 2.6 равенства $M = \mathcal{E}^n$ и очевидного включения $\mathcal{E}^n \subset N$, нам остается лишь убедиться, что все элементарные периоды A данного ранга α такие, что A^n входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$, являются отмеченными.

В силу [4, гл. IV, лемма 2.16] любой элементарный период в группе $F/\mathcal{E}^n$ не сопряжен никакому элементу из G_i при $i \in I$. Пусть X – некоторый не отмеченный элементарный период группы $F/\mathcal{E}^n$. Тогда по определению отмеченных периодов слово X сопряжено в F/M какому-то элементу g_i одной из групп G_i , $i \in I$. Так как $M = \mathcal{E}^n$, то X сопряжено в $F/\mathcal{E}^n$ некоторому элементу $g_i \in G_i$. Это противоречит условию, что X – элементарный период группы $F/\mathcal{E}^n$. Значит, все элементарные периоды группы $F/\mathcal{E}^n$ отмеченные. Теорема 1 доказана.

§ 3. Свободные периодические подгруппы n -периодических произведений

Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Рассмотрим n -периодическое произведение $G = \prod_{i \in I} G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций.

ЛЕММА 3.1. Пусть $H = \langle X, Y \rangle$ – нециклическая подгруппа группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе групп G_i , $i \in I$. Тогда по крайней мере один из трех элементов X , Y и XY равен в G элементу вида UA^rU^{-1} , где A есть элементарный период некоторого ранга γ и A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы элементы X и Y не принадлежат одной и той же подгруппе, сопряженной одной из групп G_i . В силу [2, теорема 8] из нециклическости подгруппы $H = \langle X, Y \rangle$ вытекает, что X и Y не перестановочны в группе G . Согласно [2, лемма 5] для элемента $X \in G$ можно указать такие слова Z и T , что $X = T Z T^{-1}$ в G , где либо Z есть слово вида A^r (A – элементарный период некоторого ранга γ и A^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$), либо Z есть элемент одной из групп $\{G_i\}_{i \in I}$.

В первом случае утверждение леммы очевидно. Рассмотрим второй случай. Заменив H на сопряженную подгруппу, можем без ограничения общности считать, что существуют элементы $a \in G_k$ и $b \in G_j$ такие, что $X = a$ и $Y = T b T^{-1}$ в G для некоторого слова T . В силу [4, гл. VI, лемма 2.4] можно считать, что T – абсолютно приведенное слово, т. е. $T \in \mathcal{A}$. Покажем, что слово $a T b T^{-1}$ можно выбрать в качестве искомого слова $U A^r U^{-1}$. Предположим обратное. Тогда в силу [2, лемма 5] можно найти такой элемент c из некоторой подгруппы G_l при $l \in I$, что $a T b T^{-1} = S c S^{-1}$ в G для некоторого слова $S \in \mathcal{A}$.

Выбрав α достаточно большим, можем считать, что $S \in \mathcal{A}_\alpha \cap \mathcal{M}_\alpha$ и $S c S^{-1} \in \mathcal{R}_0$. Пусть при некотором β выполнено соотношение $S c S^{-1} \notin \mathcal{K}_\beta$. Выберем такое β минимальным. Тогда в силу [4, гл. IV, п. 1.19] найдется некоторое нормированное вхождение $V \in \text{Норм}(\beta, S c S^{-1}, n - 217)$. Допустим, что $V = P * E * Q$. Можем считать, что $\beta \leq \alpha$. В силу [4, гл. IV, лемма 1.18] приведенные подслова S и S^{-1} не могут содержать более $(n + 1)/2 + 42$ участков. Поэтому элементарное слово E ранга β имеет вид $E = S_1 c S_2$, где выделена центральная буква c слова $S c S^{-1}$. При этом каждое из подслов S_1 и S_2 слова E

содержит не более $(n+1)/2 + 42$ участков, а значит, и не менее $2p$ участков, так как $n - 217 - (n+1/2 + 43) > 2p$. Эти вхождения элементарных p -степеней S_1 и S_2 согласованы, так как вхождение V является их общим продолжением. Тогда в силу [4, гл. II, лемма 5.17] под слова S_1 и S_2 родственны. Без ограничения общности можем считать, что длина S_1 не больше длины S_2 . Тогда S_1^{-1} будет началом S_2 . Это означает, что элементарные p -степени S_1^{-1} и S_2 тоже родственны, а это противоречит [4, гл. II, п. 5.22]. Следовательно, имеем $ScS^{-1} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$. Аналогичным образом получим $TbT^{-1} \in \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$. Тогда приведенная форма слова $aTbT^{-1}$ согласно [4, гл. IV, лемма 1.22] принадлежит $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_i$. В силу [4, гл. IV, п. 2.16] равенство $aTbT^{-1} = ScS^{-1}$ справедливо в свободном произведении семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$. Легко понять, что из равенства $aTbT^{-1} = ScS^{-1}$ в свободном произведении вытекает, что $|S| = |T|$, а это возможно только при $S = T$, $b = c$ и $a = 1$, но это противоречит тому, что $X = a$ – нетривиальный элемент. Полученное противоречие завершает доказательство леммы 3.1.

Заметим, что леммы 2.8, 3.2, 6.6, 7.2 из работы [19] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах под эквивалентностью в ранге α подразумевать эквивалентность в ранге α в смысле работы [2], где было введено n -периодическое произведение.

Следующая лемма является аналогом леммы 7.3 из [19].

ЛЕММА 3.2. Пусть $n \geq 1003$ – нечетное число и $H = \langle X, Y \rangle$ – нециклическая подгруппа группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе групп G_i , $i \in I$. Тогда верны следующие утверждения:

- 1) H содержит нециклическую подгруппу вида $U\langle A, C \rangle U^{-1}$ такую, что C есть элементарный период некоторого ранга τ и $C \sim \tau^{-1} [A^d, Z^{-1}A^dZ]$, где A – минимизированный элементарный период некоторого ранга γ , $Z \in \mathcal{M}_{\tau-1}$, $\gamma \leq \tau - 1$ и $d = 191$;
- 2) длины слов UAU^{-1} и UCU^{-1} относительно порождающих X и Y удовлетворяют неравенствам

$$|UAU^{-1}|_{\{X,Y\}} < (123)^4 \cdot n, \quad |UCU^{-1}|_{\{X,Y\}} < (123)^4 \cdot n. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.1 по крайней мере один из элементов X , Y , XY сопряжен слову вида A_1^r , где A_1 есть элементарный период некоторого ранга γ и A_1^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$. Заменяя H на сопряженную подгруппу, без ограничения общности можем считать, что $A_1^r \in H$, причем $|A_1|_{\{X,Y\}} \leq 2$. Из нециклическости подгруппы H согласно [2, теорема 8] заключаем, что один из элементов X и Y не перестановочен с A_1 . Обозначим этот элемент через Z . Ясно, что $|Z|_{\{X,Y\}} = 1$. В силу [4, гл. VI, п. 2.4] и [4, гл. IV, п. 3.12] можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_\alpha \cap \mathcal{A}_{\alpha+1}$ для некоторого $\alpha \geq \gamma$. Как и в лемме 7.3 из [19], найдется такое число s , что $186 < rs < (n+1)/2 - 148$. По выбору, A_1 и Z не перестановочны, значит, не перестановочны также A_1 и $ZA_1^{\pm 1}Z^{-1}$. Тогда в силу лемм 3.2 и 7.2 из [19] коммутатор $[A_1^{rs}, ZA_1^{rs}Z^{-1}]$ сопряжен в G некоторому элементарному периоду D некоторого ранга $\delta \geq \gamma + 1$. Обозначим

$$X_1 = A_1^{rs}, \quad Y_1 = ZA_1^{rs}Z^{-1}.$$

Заметим, что

$$|X_1|_{\{X,Y\}} \leq 2s < 2n, \quad |Y_1|_{\{X,Y\}} \leq 2s + 2 < 2n.$$

Пусть $[X_1, Y_1] = Z_1^{-1} D Z_1$, где $Z_1 \in \mathcal{M}_\lambda \cap \mathcal{A}_{\lambda+1}$ для некоторого $\lambda \geq \delta$. Тогда, вновь применив леммы 3.2, 7.2 и 2.8 из [19], получим, что коммутатор $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = [A_1^{rs}, Z_1^{-1} D^d Z_1]$ сопряжен в G некоторому минимизированному элементарному периоду B некоторого ранга $\mu \geq \delta + 1$. Допустим, что $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = Z_2^{-1} B Z_2$. Таким образом, в подгруппе $H = \langle X, Y \rangle$ содержатся элементы $[X_1, Y_1] = Z_1^{-1} D Z_1$ и $[X_1, [X_1, Y_1]^d] = Z_2^{-1} B Z_2$. Можно считать, что $Z_3^{-1} = Z_1 Z_2^{-1} \in \mathcal{M}_\nu \cap \mathcal{A}_{\nu+1}$, где $\nu \geq \mu$. Согласно [19, лемма 3.2] найдем приведенную форму C коммутатора $[D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3]$. В силу [19, лемма 7.2] C – элементарный период некоторого ранга $\tau \geq \mu + 1$. Согласно [19, формула (3.6)] имеет место равенство

$$C = {}^\mu w [D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3] w^{-1} \quad w \in \Theta(D, D_1).$$

Рассмотрим элементарные периоды

$$A = w D w^{-1}, \quad C = w [D^d, Z_3^{-1} B^d Z_3] w^{-1}.$$

Из определений следует, что

$$\begin{aligned} A &= w Z_1 [X_1, Y_1] Z_1^{-1} w^{-1}, \\ C &= w Z_1 [[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d] Z_1^{-1} w. \end{aligned}$$

Значит, если $U = Z_1^{-1} w^{-1}$, то $U A U^{-1} \in H$, $U C U^{-1} \in H$ и

$$\begin{aligned} |U A U^{-1}|_{\{X, Y\}} &= |[X_1, Y_1]|_{\{X, Y\}} < 8n, \\ |U C U^{-1}|_{\{X, Y\}} &= |[X_1, Y_1]^d, [X_1, [X_1, Y_1]^d]^d|_{\{X, Y\}} < 8nd(4d^2 + 3). \end{aligned}$$

Остается заметить, что $8nd(4d^2 + 3) < (123)^4 \cdot n$.

Пусть $B(2, n)$ – свободная бернсайдова группа со свободными порождающими b_1, b_2 и $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Рассмотрим свободное произведение $B(2, n) * \prod_{i \in I}^* G_i$ группы $B(2, n)$ и семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$. Выберем произвольную нециклическую подгруппу H n -периодического произведения $\prod_{i \in I}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, которая не сопряжена никакой подгруппе групп G_i , и докажем, что она содержит подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$ ранга 2. Для этой цели для каждого натурального ранга α к системе определяющих соотношений свободного произведения $B(2, n) * \prod_{i \in I}^* G_i$ будем добавлять новые определяющие соотношения таким образом, чтобы в пределе получить некоторую вспомогательную группу $\Gamma(B)$, которая на самом деле изоморфна n -периодическому произведению $\prod_{i \in I}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ и содержит 2 элемента вида

$$C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200}, \quad C^{300} A C^{300} A^2 \dots A^{n-1} C^{300},$$

которые порождают свободную бернсайдову группу периода n и ранга 2 с этими порождающими. При этом будут использоваться как основные идеи работы [2], где вводится и исследуется n -периодическое произведение, так и идеи совместной работы С. И. Адяна и И. Г. Лысёнка [19], где для всех нечетных $n \geq 1003$ были построены “монстры” Тарского. Проводимые ниже рассуждения близки к рассуждениям из § 3 работы В. С. Атабеяна [20].

Согласно п. 1) леммы 3.2 подгруппа H содержит такую нециклическую подгруппу вида $U\langle A, C \rangle U^{-1}$, что C – элементарный период некоторого ранга τ и $C \sim^{\tau-1} [A^d, Z^{-1}A^dZ]$, где A – минимизированный элементарный период некоторого ранга γ , $Z \in \mathcal{M}_{\tau-1}$ и $\gamma \leq \tau - 1$.

Зафиксируем выбранный в соответствии с леммой 3.2 ранг τ и индукцией по рангу α построим искомую вспомогательную группу $\Gamma(B)$ следующим образом. Для $\alpha < \tau$ группу Γ_α определим как группу, полученную из группы $\Gamma_{\alpha-1}$ после добавления всевозможных определяющих соотношений вида A^n для всех элементарных периодов ранга α в смысле работы [2]. При этом, по определению, Γ_0 есть свободное произведение: $\Gamma_0 = B(2, n) * \prod_{i \in I}^* G_i$.

Далее, для построения группы Γ_τ обозначим через $\bar{\Psi}_\tau$ множество, состоящее из одного элементарного периода C ранга τ из леммы 3.2, а через Φ_τ обозначим множество слов, содержащее ровно два слова

$$C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}b_1, \quad (2)$$

$$C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}b_2, \quad (3)$$

где A – элементарный период из леммы 3.2. По определению группа Γ_τ получается из группы $\Gamma_{\tau-1}$ путем добавления всевозможных определяющих соотношений вида $E^n = 1$ для всех элементарных периодов E ранга τ и определяющих соотношений вида $R = 1$, где $R \in \Phi_\tau$, т.е. R имеет вид (2) или (3). Для всех остальных рангов $\alpha > \tau$ группа Γ_α по определению опять получается из группы $\Gamma_{\alpha-1}$ путем добавления всевозможных определяющих соотношений вида $E^n = 1$ для всех элементарных периодов E ранга α . В качестве искомой группы возьмем группу $\Gamma(B)$, которая получается из группы Γ_0 путем добавления всех описанных выше определяющих соотношений каждой из групп Γ_α ($\alpha \geq 1$).

Как видно из построения группы $\Gamma(B)$, она является несколько упрощенным вариантом группы Γ из [19, §1] с той лишь разницей, что вместо свободной группы в качестве базовой группы в нашем случае выбрано заданное свободное произведение групп.

Забегая вперед, отметим, что мы докажем, что группа $\Gamma(B)$ на самом деле совпадает с n -периодическим произведением $\prod_{i \in I}^n G_i$ семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$, в котором элементы

$$C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}, \quad C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}$$

порождают свободную бернсайдову группу периода n и ранга 2.

Совместной индукцией по рангу α вводятся все понятия из [4, гл. I, §4]: период ранга α , ядро ранга α , приведенное слово ранга α , поворот ранга α , эквивалентность слов ранга α , взаимно нормированные вхождения ранга α , элементарный период ранга α и так далее, а также для ранга τ вводятся их квазианалоги и обобщения из [19, §1]: квазипериодическое слово ранга τ , квазиэлементарное слово ранга τ , обобщенное элементарное слово ранга τ и так далее. Подчеркнем, что для рангов $\alpha > \tau$ все нововведенные понятия из [19, §1] (квазипериодическое слово ранга α , квазиэлементарное слово ранга α , обобщенное элементарное слово ранга α и т.д.) теряют смысл, поскольку, по определению, при $\alpha > \tau$ множества Φ_α и $\mathcal{H}_\alpha$ пусты (см. [19, §1]). Поэтому во всех утверждениях, в которых участвуют множества Φ_α и $\mathcal{H}_\alpha$ и возникающие на их

основе понятия, следует считать, что $\alpha = \tau$. Определение смыкания ранга α вводится так, как это сделано в [2, п. 5] для свободных произведений. С учетом изменений, предложенных в [2, п. 5–7], связанных с изменением определения смыкания, проверяется, что введенные понятия удовлетворяют всем рассмотренным в [4, гл. I–V] свойствам, а также, что для группы $\Gamma(B)$ справедливы аналогии лемм 1–5 работы [2] с указанными выше поправками.

Например, аналог леммы 5 из [2] теперь формулируется следующим образом.

ЛЕММА 3.3. *Для всякого слова X , не равного 1, в группе $\Gamma(B)$ можно указать такие слова Y и T , что $X = TYT^{-1}$ в $\Gamma(B)$, а Y есть либо буква алфавита одной из групп G_i , либо буква из группы $B(2, n)$, либо слово вида A^r , где A есть элементарный период некоторого ранга $\gamma \leq \alpha + 1$ и A^q входит в некоторое слово из класса $\mathcal{M}_{\gamma-1}$.*

Из леммы 3.3 непосредственно вытекает следующий аналог [2, теорема 2].

ЛЕММА 3.4. *Если слово X не сопряжено в $\Gamma(B)$ никакому элементу подгрупп G_i , то $X^n = 1$ в группе $\Gamma(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.3 достаточно рассмотреть лишь случай, когда $X = TYT^{-1}$ в $\Gamma(B)$ и Y есть буква из группы $B(2, n)$. Но тогда $Y^n = 1$ по определению группы $B(2, n)$.

ЛЕММА 3.5. *Группа $B(2, n)$ вкладывается в группу $\Gamma(B)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно повторить рассуждения, приведенные в работе [2] при доказательстве теоремы 3. Приведем их в настоящей работе ввиду их краткости.

В силу [4, гл. VI, п. 1.3] и [4, гл. IV, п. 2.16] имеет место импликация

$$X \in \mathcal{A}_1 \implies (X \sim Y \iff X \equiv Y). \quad (4)$$

Так как все элементы группы $B(2, n)$ принадлежат множеству $\mathcal{A}_1$, то из соотношения (4) следует, что для любых двух элементов x и y группы $B(2, n)$ имеем

$$x = y \text{ в } \Gamma(B) \iff x \sim y \iff x \equiv y \iff x = y \text{ в } B(2, n),$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3.6. *Слова $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}$ и $C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}$ порождают в $\Gamma(B)$ подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.5 элементы b_1^{-1} , b_2^{-1} порождают подгруппу, изоморфную группе $B(2, n)$. Тогда из определяющих соотношений $R_1 = 1$, $R_2 = 1$ группы $\Gamma(B)$, где R_1 и R_2 совпадают со словами (2), (3) соответственно, вытекает, что слова $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}$ и $C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}$ порождают в $\Gamma(B)$ подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$.

ЛЕММА 3.7. *Каждая группа G_i , $i \in I$, тождественно вкладывается в группу $\Gamma(B)$.*

Доказывается аналогично лемме 3.5.

Заданные словами (2), (3) определяющие соотношения группы $\Gamma(B)$ показывают, что группа $\Gamma(B)$ порождается семейством групп $\{G_i\}_{i \in I}$.

ЛЕММА 3.8. *Группа $\Gamma(B)$ совпадает с n -периодическим произведением семейства $\{G_i\}_{i \in I}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем опираться на теорему 1 и докажем, что группа $\Gamma(B)$ совпадает с факторгруппой свободного произведения семейства $\{G_i\}_{i \in I}$ по некоторой подгруппе M , удовлетворяющей условиям теоремы 1. Заметим, что все определяющие соотношения группы $\Gamma(B)$, кроме заданных словами (2), (3) соотношений, имеют вид $A^n = 1$. Определяющие соотношения группы $B(2, n)$ тоже имеют вид $E^n = 1$ для некоторых слов E в групповом алфавите $b_1^{\pm 1}, b_2^{\pm 1}$. Используя слова (2), (3), заменим каждое определяющее соотношение группы $B(2, n)$, а также все определяющие соотношения вида $E^n = 1$ группы $\Gamma(B)$ на соотношения вида $D^n = 1$, где $D \in \prod_{i \in I}^* G_i$. Полученное таким образом множество слов D обозначим через $\mathcal{R}$. Тем самым, группа $\Gamma(B)$ задается следующим образом:

$$\Gamma(B) = \left\langle \bigcup_{i \in I} G_i, b_1, b_2 \mid D^n = 1, D \in \mathcal{R}, R_1 = 1, R_2 = 1 \right\rangle,$$

где слова R_1 и R_2 совпадают со словами (2), (3). Применяя преобразования Тие, мы избавимся от порождающих b_1, b_2 и от соотношений $R_1 = 1, R_2 = 1$. Тогда имеем

$$\Gamma(B) = \left\langle \bigcup_{i \in I} G_i \mid D^n = 1, D \in \mathcal{R} \right\rangle. \quad (5)$$

В силу представления (5) и леммы 3.4 условия пункта b) теоремы 1 выполнены. Условие пункта а) теоремы 1 выполнено в силу леммы 3.7. Следовательно, согласно заключению теоремы 1, группа $\Gamma(B)$ совпадает с n -периодическим произведением семейства $\{G_i\}_{i \in I}$. Лемма 3.8 доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. В силу леммы 3.8 имеет место равенство $\Gamma(B) = \prod_{i \in I}^n G_i$. По лемме 3.6 элементы $C^{200}AC^{200}A^2 \dots A^{n-1}C^{200}$ и $C^{300}AC^{300}A^2 \dots A^{n-1}C^{300}$ порождают в $\Gamma(B)$ подгруппу, изоморфную свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$. Остается заметить, что указанная свободная подгруппа содержится в сопряженной с H подгруппе $U^{-1}HU$. Теорема 2 доказана.

§ 4. Равномерно неаменабельные подгруппы n -периодических произведений

Здесь мы докажем теорему 3, которая была сформулирована во введении.

Пусть $n \geq 1003$ – нечетное число, G – n -периодическое произведение произвольного семейства групп $\{G_i\}_{i \in I}$ без инволюций и H – конечно порожденная нециклическая подгруппа группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе групп $G_i, i \in I$. Докажем, что H является равномерно неаменабельной группой. Доказательство проведем по схеме доказательства теоремы 1 работы [14].

ЛЕММА 4.1. Пусть S – произвольное конечное множество порождающих группы H . Тогда можно указать такие элементы $u, v \in H = \langle S \rangle$ и не зависящее от выбора множества S число L , что $\{u, v\}$ есть базис свободной периодической подгруппы ранга 2 и при этом длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $H = \langle S \rangle$ – нециклическая подгруппа группы G , которая не сопряжена никакой подгруппе групп G_i , $i \in I$, то существуют такие не перестановочные элементы $X, Y \in S$, что порожденная ими подгруппа $\langle X, Y \rangle$ тоже не сопряжена никакой подгруппе групп G_i , $i \in I$.

В силу лемм 3.6 и 3.8 слова

$$u \equiv C^{200} A C^{200} A^2 \dots C^{200} A^{n-1} C^{200}, \quad v \equiv C^{300} A C^{300} A^2 \dots C^{300} A^{n-1} C^{300}$$

составляют базис свободной периодической подгруппы ранга 2 в n -периодическом произведении G . Очевидно,

$$\begin{aligned} UuU^{-1} &= (UCU^{-1})^{200} (UAU^{-1}) \dots (UAU^{-1})^{n-1} (UCU^{-1})^{200}, \\ UvU^{-1} &= (UCU^{-1})^{300} (UAU^{-1}) \dots (UAU^{-1})^{n-1} (UCU^{-1})^{300}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 3.2 имеем $UuU^{-1}, UvU^{-1} \in \langle X, Y \rangle = H$. Используя неравенства (1), получаем

$$\begin{aligned} |UuU^{-1}|_{\{X, Y\}} &< \left(\frac{n(n-1)}{2} + 200n \right) (123)^4 \cdot n, \\ |UvU^{-1}|_{\{X, Y\}} &< \left(\frac{n(n-1)}{2} + 300n \right) (123)^4 \cdot n. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$|UuU^{-1}|_S \leq |UuU^{-1}|_{\{X, Y\}}, \quad |UvU^{-1}|_S \leq |UvU^{-1}|_{\{X, Y\}},$$

поскольку $\{X, Y\} \subseteq S$. В качестве L можно взять число $(n(n-1)/2 + 300n)(123)^4 \cdot n$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказана в работе [17].

ЛЕММА 4.2 [17, теорема 7.1]. Пусть G – конечно порожденная группа с множеством порождающих $S = \{x_1, \dots, x_s\}$, а H – некоторая подгруппа группы G с множеством порождающих $S_1 = \{y_1, \dots, y_k\}$. Обозначим через L максимальную длину элементов $y_1, \dots, y_k$ относительно порождающих $S = \{x_1, \dots, x_s\}$. Тогда

$$\text{Fol}_S(G) \geq \frac{1}{1 + kL} \text{Fol}_{S_1}(H).$$

Следующая лемма очевидна.

ЛЕММА 4.3. Пусть G_1 – конечнопорожденная группа с множеством порождающих S_1 , $\pi: G_1 \rightarrow G_2$ – изоморфизм групп, $S_2 \equiv \pi(S_1)$. Тогда $\text{Fol}_{S_1}(G_1) = \text{Fol}_{S_2}(G_2)$.

По лемме 4.1 существуют элементы $u, v \in H$ такие, что $\{u, v\}$ есть базис свободной периодической подгруппы ранга 2 и при этом длины элементов u, v относительно порождающего множества S удовлетворяют неравенствам $|u|_S < L$ и $|v|_S < L$, где число L не зависит от выбора множества S . Согласно лемме 4.2 имеем

$$\text{Fol}_S(H) \geq \frac{1}{1+2L} \text{Fol}_{\{u,v\}}(\langle u, v \rangle_G).$$

В силу леммы 4.3 число $b = \text{Fol}_{\{u,v\}}(\langle u, v \rangle_G)$ не зависит от выбора пары свободных порождающих u, v . Поскольку по теореме 5 из работы С. И. Адяна [11] группа $B(2, n)$ неабелева, то $b > 0$. Таким образом, для любого множества порождающих S нециклической подгруппы H имеем

$$\text{Fol}_S(H) \geq \frac{b}{1+2L} > 0,$$

откуда следуют неравенства

$$\text{Fol}(H) = \inf_S \text{Fol}_S(H) \geq \frac{b}{1+2L} > 0.$$

Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. С. И. Адян, “Проблема Бернсайда и связанные с ней вопросы”, *УМН*, **65**:5(395) (2010), 5–60; англ. пер.: S. I. Adian, “The Burnside problem and related topics”, *Russian Math. Surveys*, **65**:5 (2010), 805–855.
2. С. И. Адян, “Периодические произведения групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 3–21; англ. пер.: S. I. Adyan, “Periodic products of groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 1–19.
3. С. И. Адян, “Еще раз о периодических произведениях групп и проблеме А. И. Мальцева”, *Матем. заметки*, **88**:6 (2010), 803–810; англ. пер.: S. I. Adyan, “Once more on periodic products of groups and on a problem of A. I. Mal’tsev”, *Math. Notes*, **88**:6 (2010), 771–775.
4. С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975, 335 с.; англ. пер.: S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **95**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, xi+311 pp.
5. С. И. Адян, “О простоте периодических произведений групп”, *Докл. АН СССР*, **241**:4 (1978), 745–748; S. I. Adyan, “On the simplicity of periodic products of groups”, *Soviet Math. Dokl.*, **19**:4 (1978), 910–913.
6. С. И. Адян, В. С. Атабекян, “О хопфовости n -периодических произведений групп”, *Матем. заметки*, **95**:4 (2014), 483–491; англ. пер.: S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “The Hopfian property of n -periodic products of groups”, *Math. Notes*, **95**:4 (2014), 443–449.
7. С. И. Адян, “Новые оценки нечетных периодов бесконечных бернсайдовых групп”, *Избранные вопросы математики и механики*, Сборник статей. К 150-летию со дня рождения академика Владимира Андреевича Стеклова, Тр. МИАН, **289**, МАИК, М., 2015, 41–82; англ. пер.: S. I. Adian, “New estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **289** (2015), 33–71.

8. В. С. Атабекян, “О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 3–36; англ. пер.: V. S. Atabekian, “On subgroups of free Burnside groups of odd exponent $n \geq 1003$ ”, *Izv. Math.*, **73**:5 (2009), 861–892.
9. J. von Neumann, “Zur allgemeinen theorie des maes”, *Fundam. Math.*, **13** (1929), 73–116.
10. А. Ю. Ольшанский, “К вопросу о существовании инвариантного среднего на группе”, *УМН*, **35**:4(214) (1980), 199–200; англ. пер.: A. Yu. Ol’shanskii, “On the problem of the existence of an invariant mean on a group”, *Russian Math. Surveys*, **35**:4 (1980), 180–181.
11. С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1139–1149; англ. пер.: S. I. Adyan, “Random walks on free periodic groups”, *Math. USSR-Izv.*, **21**:3 (1983), 425–434.
12. Р. И. Григорчук, “Симметричные случайные блуждания на дискретных группах”, *Многокомпонентные случайные системы*, Наука, М., 1978, 132–152; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, “Symmetrical random walks on discrete groups”, *Multicomponent random systems*, Adv. Probab. Related Topics, **6**, eds. R. L. Dobrushin, Ya. G. Sinai, D. Griffeath, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980, 285–325.
13. E. Følner, “On groups with full Banach mean value”, *Math. Scand.*, **3** (1955), 243–254.
14. В. С. Атабекян, “Равномерная неаменательность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода”, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 516–523; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “Uniform nonamenability of subgroups of free Burnside groups of odd period”, *Math. Notes*, **85**:4 (2009), 496–502.
15. D. V. Osin, “Uniform non-amenability of free Burnside groups”, *Arch. Math. (Basel)*, **88**:5 (2007), 403–412.
16. В. С. Атабекян, “О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 483–490; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “Monomorphisms of free Burnside groups”, *Math. Notes*, **86**:4 (2009), 457–462.
17. G. N. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, E. Ventura, “Uniform non-amenability”, *Adv. Math.*, **197**:2 (2005), 499–522.
18. P. de la Harpe, “Uniform growth in groups of exponential growth”, *Geom. Dedicata*, **95** (2002), 1–17.
19. С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990; англ. пер.: S. I. Adyan, I. G. Lysenok, “On groups all of whose proper subgroups are finite cyclic”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:2 (1992), 905–957.
20. В. С. Атабекян, “О нормальных подгруппах в периодических произведениях С. И. Адяна”, *Алгоритмические вопросы алгебры и логики*, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Ивановича Адяна, Тр. МИАН, **274**, МАИК, М., 2011, 15–31; англ. пер.: V. S. Atabekyan, “On normal subgroups in the periodic products of S. I. Adian”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **274** (2011), 9–24.

СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ АДЯН

(SERGEY I. ADIAN)

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: sia@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

25.03.2015

16.05.2015

ВАРУЖАН СЕРГЕЕВИЧ АТАБЕКЯН

(VARUZHAN S. ATABEKYAN)

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: varujan@atabekyan.am