Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Ковалёв, Определитель матрицы напряжений и восстановимость шарнирных конструкций по внутренним напряжениям, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 3, 43–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8370>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:59:45

УДК 514+531.8

М. Д. Ковалёв

Определитель матрицы напряжений и восстановимость шарнирных конструкций по внутренним напряжениям

Рассматриваются статико-геометрические свойства плоских шарнирно-рычажных конструкций, часть шарниров которых закреплена. Обнаружен ряд свойств определителя матрицы напряжений для таких конструкций. В частности, установлено необходимое и достаточное условие неприводимости этого определителя как многочлена. С использованием свойства неприводимости доказано существование несократимых полностью напряженных конструкций с неколлинеарными закрепленными шарнирами для двух бесконечных последовательностей структурных схем. Приведен пример конструкции, для которой можно восстановить положения всех свободных шарниров, зная ее пространство внутренних напряжений и положения закрепленных шарниров. Однако это нельзя сделать зная не все пространство внутренних напряжений, а лишь какое-либо одно произвольное напряжение.

Библиография: 12 наименований.

Ключевые слова: шарнирно-рычажная конструкция с заданным закреплением, внутреннее напряжение, матрица напряжений.

DOI: 10.4213/im8370

§ 1. Введение

Строение шарнирной конструкции, составленной из рычагов – прямолинейных стержней, соединенных на концах между собой шарнирами, описывается некоторым графом – структурной схемой. При составлении этой схемы мы будем рычагам конструкции сопоставлять ребра структурной схемы, а шарнирам – ее вершины¹ (рис. 1, 2).

Итак, *шарнирной структурной схемой* (ШСС) мы называем абстрактный связный граф $G(V, E)$ без петель и кратных ребер с ребрами, отвечающими рычагам конструкции, и вершинами двух видов: кружками, отвечающими свободным (незакрепленным) шарнирам, и крестиками, отвечающими закрепленным шарнирам. Пусть $V_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ – непустое множество кружков, $V_2 = \{v_{m+1}, \dots, v_{m+n}\}$ – возможно и пустое множество крестиков и $V = V_1 \cup V_2$. При этом должны быть выполнены следующие условия: подграф $G_1(V_1, E_1)$ графа $G(V, E)$, порожденный кружками², связан и нет ребер, соединяющих крестик с крестиком. Если множество крестиков (закрепленных шарниров)

¹В теории механизмов обычно поступают наоборот, т. е. в качестве структурной схемы шарнирного механизма берут реберный граф схемы, рассматриваемой нами.

²Его вершинами являются все свободные шарниры, а ребрами все ребра графа $G(V, E)$, соединяющие пары свободных шарниров.

пусто, то ШСС будем называть *незакрепленной*, в противном случае – *закрепленной*. Будем называть вершины графа, отвечающие свободным шарнирам, *свободными* вершинами, а закрепленным шарнирам – *закрепленными* вершинами.

При исследовании статических свойств шарнирных конструкций важное значение имеет матрица напряжений Ω [1]–[3]. Ее вид однозначно определяется ШСС. Объясним как она выписывается. Как известно, силы в идеальной шарнирной конструкции действуют лишь вдоль ее рычагов. Пусть $p_i p_j$ – рычаг с концевыми шарнирами, оси которых находятся в точках $p_i, p_j \in \mathbb{R}^2$. Силу f_{ij} , с которой этот рычаг действует на шарнир p_i , принято записывать как $\omega_{ij}(p_i - p_j)$, где скаляр ω_{ij} называется *внутренним напряжением рычага* $p_i p_j$. К шарниру p_j этот рычаг прилагает силу $f_{ji} = \omega_{ji}(p_j - p_i)$. Так как действие равно противодействию, то $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Величины напряжений ω_{ij} указывают меру напряженности рычагов: если $\omega_{ij} < 0$, то рычаг $p_i p_j$ растянут, если же $\omega_{ij} > 0$, то он сжат. Пусть $\omega = \{\omega_{ij}\}$ – набор внутренних напряжений всех рычагов для заданной ШСС.

Матрица напряжений $\Omega(\omega)$ является симметрической порядка, равного числу свободных шарниров схемы, и зависит от внутренних напряжений ω_{ij} рычагов следующим образом. Элемент Ω_{ii} равен сумме $\sum \omega_{ij}$ напряжений по всем рычагам, смежным в ШСС i -му свободному шарниру. А при $i \neq j$ элемент $\Omega_{ij} = -\omega_{ij}$, если j -й шарнир смежен i -му, и $\Omega_{ij} = 0$ в противном случае. Если ШСС незакрепленная, то сумма всех строк матрицы $\Omega(\omega)$ равна нулевой строке и определитель $\det \Omega(\omega) \equiv 0$.

В случае закрепленной ШСС определитель $\det \Omega(\omega)$ является многочленом от внутренних напряжений рычагов, не равным нулю тождественно. Как оказалось, он обладает рядом замечательных свойств. По-видимому, здесь они исследуются впервые. Часть свойств будет установлена в теореме 1 следующего § 2. В этом же параграфе будет доказана теорема 4, дающая критерий неприводимости многочлена $\det \Omega(\omega)$. В § 3 содержатся сведения из геометрии и статики шарнирных конструкций, в нем обсуждается задача восстановимости шарнирной конструкции по внутреннему напряжению. В § 4 обсуждается задача восстановимости шарнирной конструкции по пространству внутренних напряжений. Приведен пример шарнирной конструкции, обладающей интересным статико-геометрическим свойством и дающей ответ на ранее поставленный вопрос. В § 5 приводятся следствия полученных свойств многочлена $\det \Omega(\omega)$ для задач статики закрепленных шарнирных конструкций.

Близкой к тематике данной статьи является теорема Татта (Tutte's embedding theorem)[4], полученная в теории вложений графов в плоскость.

§ 2. Свойства определителя матрицы напряжений

Далее рассматриваем многочлены над полем действительных чисел. *Нулевым* называем многочлен, все коэффициенты которого равны нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ *линейным по переменной* x_1 , если он представим в виде $x_1 Q(x_2, \dots, x_k) + R(x_2, \dots, x_k)$, где не зависящие от x_1 многочлены Q и R могут быть и нулевыми.

Многочлен $P(x_1, x_2, \dots, x_k)$ тогда и только тогда зависит от переменной x_1 , когда многочлен $Q(x_2, \dots, x_k)$ ненулевой. При доказательстве свойств определителя матрицы напряжений будем обозначать через ω_i^j напряжение рычага $p_i p_j$, соединяющего свободный шарнир p_i с закрепленным шарниром p_j . Напряжения рычагов, соединяющих между собой свободные шарниры обозначаем как и прежде через ω_{ij} . Для матрицы напряжений, отвечающей незакрепленной ШСС, сумма столбцов равна нулевому столбцу, а следовательно, ее определитель есть тождественно нулевой многочлен от своих переменных ω_{ij} . Если же ШСС имеет хотя бы один закрепленный шарнир, то при всех положительных ω_{ij} , ω_i^k имеем $\det \Omega(\omega) \neq 0$ [3]. Следующая теорема справедлива для произвольной закрепленной ШСС.

ТЕОРЕМА 1. *Определитель $\det \Omega(\omega)$ матрицы напряжений для закрепленной ШСС является линейным по каждому своему аргументу однородным многочленом степени, равной порядку m матрицы, и зависит от напряжения каждого из рычагов. Каждый его одночлен содержит хотя бы один множитель вида ω_i^j , и коэффициенты при всех одночленах равны 1 или 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим матрицу $\Omega'(\omega)$, получающуюся из $\Omega(\omega)$ отбрасыванием всех величин вида ω_i^j . Эта матрица отвечает ШСС, полученной из исходной отбрасыванием закрепленных шарниров, и ее определитель есть тождественно равный нулю многочлен. Но члены определителя $\det \Omega(\omega)$, содержащие лишь произведения элементов вида ω_{ij} , в точности те же самые, что и определителя $\det \Omega'(\omega)$. Они составляют нулевой многочлен.

Очевидно, что каждый член многочлена $\det \Omega(\omega)$ имеет степень, равную порядку m матрицы $\Omega(\omega)$. По всем напряжениям матрицы $\Omega(\omega)$ многочлен $\det \Omega(\omega)$ имеет степень, не превосходящую 1. Действительно, напряжения ω_i^j , отвечающие рычагам между свободными и закрепленными шарнирами, входят лишь в один диагональный элемент определителя. По напряжениям ω_{ij} степень многочлена $\det \Omega(\omega)$ на первый взгляд равна 2, но на самом деле она меньше, потому что квадратичные члены сокращаются. Действительно, рассмотрим для элемента ω_{ij} лапласовское разложение $\det \Omega(\omega)$ по i -й и j -й строкам. Квадратично элемент ω_{ij} может входить лишь в один член этого разложения:

$$\begin{vmatrix} \omega_{ij} + A & -\omega_{ij} \\ -\omega_{ij} & \omega_{ij} + B \end{vmatrix} = \omega_{ij}(A + B) + AB,$$

где слагаемые A и B не содержат ω_{ij} .

Остается доказать, что каждый одночлен многочлена $\det \Omega(\omega)$ имеет коэффициент 1, а также, что $\det \Omega(\omega)$ зависит от всех напряжений. Докажем это по индукции. При $m = 1$ имеются лишь закрепленные ШСС с одной свободной вершиной v_1 и $n \geq 1$ закрепленными вершинами $v_2, \dots, v_{n+1}$. Для такой ШСС $\det \Omega(\omega) = \omega_1^2 + \omega_1^3 + \dots + \omega_1^{n+1}$ и наши утверждения верны.

Допустим справедливость этих утверждений для $\det \Omega_{m-1}(\omega)$ в случае произвольной закрепленной ШСС с $m - 1$ свободными шарнирами, и докажем их справедливость для закрепленной ШСС Z с m свободными шарнирами. Пронумеруем шарниры Z так, чтобы первый свободный шарнир был смежен $k \geq 1$ закрепленным. Тогда напряжения $\omega_1^{j_1}, \omega_1^{j_2}, \dots, \omega_1^{j_k}$, отвечающие рычагам, исходящим из него в закрепленные шарниры, входят в $\det \Omega_m(\omega)$, отвечающий Z , следующим образом: $(\omega_1^{j_1} + \omega_1^{j_2} + \dots + \omega_1^{j_k}) \det \Omega_{m-1}^*(\omega)$. Здесь $\det \Omega_{m-1}^*(\omega) -$

определитель матрицы напряжений, отвечающей ШСС Z^* , получающейся из Z отбрасыванием k рычагов, идущих из первого свободного шарнира в закрепленные, и отбрасыванием тех из этих закрепленных шарниров, которые смежны лишь первому свободному, а также переименованием первого (свободного в Z) шарнира в закрепленный. По предположению индукции $\det \Omega_{m-1}^*(\omega)$, зависит от всех своих переменных и все одночлены, присутствующие в нем, имеют коэффициенты, равные единице. Ясно, что совокупность членов $\det \Omega_m(\omega)$, содержащих напряжения $\omega_1^{j_1}, \omega_1^{j_2}, \dots, \omega_1^{j_k}$, также является многочленом, содержащим все напряжения ШСС Z^* , и имеющим коэффициенты, равные единице.

В случае, когда у ШСС Z имеется лишь один свободный шарнир, смежный закрепленным, доказательство очевидно, так как каждый одночлен многочлена $\det \Omega(\omega)$ зависит от одной из переменных $\omega_1^{j_1}, \omega_1^{j_2}, \dots, \omega_1^{j_k}$, а множество рычагов схемы Z^* вместе с рычагами, исходящими из шарнира p_1 в закрепленные шарниры, совпадает с множеством рычагов схемы Z . Если же у Z имеется более одного свободного шарнира, смежного закрепленным, то наше рассуждение нужно повторить для каждого такого шарнира. Поскольку любой одночлен многочлена $\det \Omega(\omega)$ содержит напряжение хотя бы одного рычага, соединяющего закрепленный шарнир схемы Z со свободным ее шарниром, то можно утверждать равенство единице коэффициентов всех одночленов.

СЛЕДСТВИЕ. Для произвольной закрепленной ШСС определитель матрицы напряжений при значениях напряжений одного знака не равен нулю.

Важным свойством определителя матрицы напряжений является его неприводимость над полем действительных чисел. Рассмотрим примеры.

Рис. 1

Матрица напряжений для ШСС с двумя свободными шарнирами v_1, v_2 , двумя закрепленными шарнирами v_3, v_4 и рычагами v_1v_2, v_1v_4, v_2v_3 (шарнирный четырехзвенник (рис. 1, a) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_1^4 + \omega_{12} & -\omega_{12} \\ -\omega_{12} & \omega_2^3 + \omega_{12} \end{bmatrix}.$$

Ее определитель $\omega_{12}(\omega_1^4 + \omega_2^3) + \omega_1^4 \omega_2^3$ является, как легко понять, неприводимым многочленом. С другой стороны, для ШСС (рис. 1, b) определитель матрицы

напряжений

$$\begin{vmatrix} \omega_1^4 + \omega_1^5 + \omega_{12} + \omega_{13} & -\omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + \omega_{23} & -\omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & \omega_{13} + \omega_{23} \end{vmatrix} = (\omega_1^4 + \omega_1^5) \begin{vmatrix} \omega_{12} + \omega_{23} & -\omega_{23} \\ -\omega_{23} & \omega_{13} + \omega_{23} \end{vmatrix}$$

приводим.

Далее мы получим необходимое и достаточное условие неприводимости определителя матрицы напряжений. Сначала докажем сохранение неприводимости определителя матрицы напряжений при двух действиях с ШСС: при вставке ребра и при вставке вершины.

Вставка ребра состоит в добавлении к графу $G(V, E)$ одного ребра. Добавленное ребро может соединять две свободные вершины графа $G(V, E)$, либо свободную вершину графа $G(V, E)$ с закрепленной вершиной, входящей в $G(V, E)$, а возможно и новой, не входящей в $G(V, E)$, закрепленной вершиной. При вставке ребра число свободных вершин ШСС не изменяется.

ТЕОРЕМА 2. Пусть определитель Δ матрицы напряжений для закрепленной ШСС $G(V, E)$ неприводим, тогда и определитель Δ' матрицы напряжений для схемы $G'(V', E')$, полученной из $G(V, E)$ вставкой ребра, также неприводим.

Докажем сначала следующую лемму.

ЛЕММА 1. Если однородный многочлен P степени $k \geq 1$ неприводим, то его сумма с однородным многочленом yQ той же степени, где переменное y не входит в P и Q , также неприводима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим противное: $P + yQ = (Ay + B)C$, где многочлены A, B, C не зависят от y , и в силу приводимости $\deg C > 0$. В силу однородности (если однородный многочлен разложен на множители, то множители также однородны) $\deg B > 0$. Но тогда $P = BC$, поэтому P – приводим. Лемма доказана.

Пусть граф $G'(V', E')$ получен из $G(V, E)$ добавлением ребра $v_1 v_k$, соединяющего свободную вершину v_1 с закрепленной вершиной v_k . Тогда для определителей Δ' и Δ соответствующих матриц напряжений справедливо равенство

$$\Delta' = \Delta + \omega_1^k Q,$$

где не зависящий от ω_1^k многочлен Q ненулевой согласно теореме 1. Поскольку многочлен Δ не зависит от ω_1^k и неприводим по условию, то Δ' неприводим в силу леммы 1.

Пусть теперь граф $G'(V', E')$ получен из $G(V, E)$ добавлением ребра $v_1 v_2$, соединяющего свободные вершины v_1 и v_2 , несмежные в $G(V, E)$. Если левый верхний угол определителя Δ выглядел так:

$$\begin{vmatrix} A & 0 & * & \dots \\ 0 & B & * & \dots \\ * & * & * & \dots \end{vmatrix},$$

то левый верхний угол определителя Δ' будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{vmatrix} A + \omega_{12} & -\omega_{12} & * & \dots \\ -\omega_{12} & B + \omega_{12} & * & \dots \\ * & * & * & \dots \end{vmatrix},$$

где A и B и члены, обозначенные звездочками, не зависят от ω_{12} . Сравнение определителей дает равенство

$$\Delta' = \Delta + \omega_{12}Q,$$

где многочлен Q не зависит от ω_{12} вследствие теоремы 1. Как и в предыдущем случае, неприводимость Δ' вытекает из неприводимости Δ и леммы 1. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим вставку вершины. Будем нумеровать вершины графа $G(V, E)$ начиная с двойки. Пусть в графе $G(V, E)$ имеется ребро v_2v_3 , соединяющее две вершины. Вставкой вершины v_1 в ребро v_2v_3 назовем переход от графа $G(V, E)$ к графу $G'(V', E')$, где $V' = V \cup v_1$, $E' = (E \setminus v_2v_3) \cup \{v_2v_1, v_1v_3\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть определитель Δ матрицы напряжений для схемы $G(V, E)$ с более чем одним³ свободным шарниром ($m \geq 2$) неприводим, тогда и определитель Δ' матрицы напряжений для схемы $G'(V', E')$, полученной вставкой вершины в ребро, также неприводим.

Рассмотрим сначала случай, когда вставка вершины v_1 производится в ребро, соединяющее свободную вершину v_2 с закрепленной вершиной v_3 . Левый верхний угол определителя Δ выглядит так:

$$\begin{vmatrix} \omega_2^3 + A & * & * & \dots \\ * & * & * & \dots \end{vmatrix},$$

где слагаемое A и члены, отмеченные звездочкой, не зависят от ω_2^3 . Таким образом, $\Delta = \omega_2^3 R + Q$, где многочлены R и Q не зависят от ω_2^3 . Вследствие теоремы 1 многочлен R степени $m-1 \geq 1$ ненулевой, а в силу неприводимости Δ многочлен Q степени m также ненулевой и взаимно прост с R .

Левый верхний угол определителя Δ' выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \omega_1^3 + \omega_{12} & -\omega_{12} & 0 & 0 & \dots \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + A & 0 & * & \dots \\ 0 & * & * & * & \dots \\ 0 & * & * & * & \dots \end{vmatrix}.$$

Разлагая определитель по первой строке и отбрасывая квадратичные по ω_{12} члены, получим

$$\Delta' = (\omega_1^3 + \omega_{12})Q + \omega_1^3 \omega_{12} R,$$

где многочлены R и Q такие же, как и выше, и не зависят от ω_1^3 и ω_{12} . Докажем неприводимость многочлена Δ' . Действительно, он однороден и линеен по

³Для закрепленной ШСС, состоящей из одной свободной вершины v_2 , одной закрепленной вершины v_3 и одного ребра v_2v_3 , определитель Δ матрицы напряжений, равный ω_2^3 , неприводим. Однако определитель Δ' матрицы напряжений схемы, полученной вставкой вершины v_1 , равный $\omega_1^3 \omega_{12}$, приводим.

каждой переменной. Если он разлагается в произведение двух многочленов положительной степени, то либо один из них зависит от ω_1^3 и ω_{12} , а другой не зависит от этих переменных. Либо один множитель зависит от ω_1^3 , а другой зависит от ω_{12} . В первом случае разложение должно иметь вид $[(\omega_1^3 + \omega_{12})U + \omega_1^3 \omega_{12}V]W$, где многочлены U, V, W не зависят от ω_1^3 и ω_{12} и $\deg W \geq 1$. Это противоречит взаимной простоте многочленов R и Q . Во втором случае разложение имеет вид $(U\omega_1^3 + V)(W\omega_{12} + Z)$, где многочлены U, V, W, Z не зависят от ω_1^3 и ω_{12} . Но тогда хотя бы один из многочленов V и Z нулевой, откуда вытекает, что Q также нулевой многочлен. Но Q – многочлен степени m .

Рассмотрим теперь случай вставки вершины v_1 в ребро, соединяющее две свободные вершины v_2 и v_3 . Левый верхний угол определителя Δ выглядит так:

$$\begin{vmatrix} \omega_{23} + A & -\omega_{23} & * & * & \dots \\ -\omega_{23} & \omega_{23} + B & * & * & \dots \\ * & * & * & * & \dots \\ * & * & * & * & \dots \end{vmatrix},$$

где слагаемые A и B и члены, отмеченные звездочкой, не зависят от ω_{23} . Левый верхний угол определителя Δ' выглядит следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \omega_{12} + \omega_{13} & -\omega_{12} & -\omega_{13} & 0 & 0 & \dots \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + A & 0 & * & * & \dots \\ -\omega_{13} & 0 & \omega_{13} + B & * & * & \dots \\ 0 & * & * & * & * & \dots \\ 0 & * & * & * & * & \dots \end{vmatrix}.$$

Приравнивая в этом определителе к нулю последовательно ω_{12} и ω_{13} , прибавляя первый столбец к третьему и, соответственно, ко второму и раскрывая получившийся определитель по первой строке, приходим к следующему равенству:

$$\Delta' = (\omega_{12} + \omega_{13})Q + \omega_{12}\omega_{13}P,$$

где многочлены Q и P не зависят от переменных ω_{12}, ω_{13} . Многочлен Q является определителем, отличающимся от Δ лишь отсутствием членов, содержащих элемент ω_{23} .

Многочлены Q и P ненулевые и взаимно просты. Действительно, подставим $\omega_{12} = \omega_{13} = \omega$ в определитель Δ' . Умножая первый столбец получившегося определителя на $1/2$ и прибавляя его ко второму и третьему столбцам, а затем разлагая определитель по первой строке, получим равенство

$$\Delta'|_{(\omega_{12}=\omega_{13}=\omega)} = 2\omega\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)} = 2\omega Q + \omega^2 P.$$

Откуда

$$\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)} = Q + \frac{\omega}{2}P.$$

Здесь $\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)}$ есть однородный многочлен степени, равной числу $m \geq 2$ свободных шарниров в G , неприводимый по условию теоремы. Многочлен Q ненулевой, так как в противном случае $\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)} = \frac{\omega}{2}P$, и многочлен $\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)}$ был бы приводим. Многочлен P также ненулевой, поскольку Q не зависит от ω , а многочлен $\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)}$ вследствие теоремы 1 зависит от ω .

Допустим Q и P имеют в качестве общего делителя многочлен R положительной степени. Тогда и многочлен $\Delta|_{(\omega_{23}=\omega/2)}$ имеет делителем R , что противоречит его неприводимости.

Докажем неприводимость многочлена $\Delta' = (\omega_{12} + \omega_{13})Q + \omega_{12}\omega_{13}P$. Допустим противное и разберем два возможных случая.

Первый случай. Многочлен Δ' разлагается в произведение многочленов, один из которых зависит от ω_{12} , а второй от ω_{13} :

$$\Delta' = (R\omega_{12} + S)(U\omega_{13} + V),$$

где R, S, U и V – многочлены, не зависящие от ω_{12}, ω_{13} . Многочлены S и V одновременно, очевидно, не могут быть ненулевыми. Допустим $V \equiv 0$. Тогда ω_{13} делит Δ' . Это противоречит тому, что многочлен Q ненулевой. Точно так же разбирается случай $S \equiv 0$.

Второй случай. От ω_{12} и ω_{13} зависит лишь один множитель разложения:

$$\Delta' = (R\omega_{12} + S\omega_{13} + U\omega_{12}\omega_{13})V,$$

где опять R, S, U и V – многочлены, не зависящие от ω_{12}, ω_{13} , причем V – многочлен положительной степени. Но в этом случае $R = S$ есть многочлены положительной степени, и $Q = RV, P = UV$ имеют общий делитель V , а значит, не являются взаимно простыми. Теорема доказана.

Путем вставки вершин из ШСС шарнирного четырехзвенника можно получить ШСС, представляющую собой цепь произвольной длины, состоящую из свободных вершин, лишь начальная и конечная вершины которой смежны закрепленным вершинам. Согласно теореме 3 такой цепи отвечает матрица напряжений с определителем – неприводимым многочленом.

Сопоставим закрепленной ШСС $G(V, E)$ другую закрепленную ШСС, граф G' которой отличается от графа $G(V, E)$ лишь тем, что каждая его свободная вершина смежна не более чем одной закрепленной. Если в графе $G = G(V, E)$ имелись свободные вершины смежные более чем одной закрепленной, то граф G' получается из G отбрасыванием части ребер, смежных закрепленным вершинам, и, возможно, части закрепленных вершин. А именно, если свободная вершина v_i была смежна закрепленным вершинам $v_j, \dots, v_k$, то следует оставить лишь одно ребро, например $v_i v_j$, и отбросить остальные ребра, исходящие из v_i в закрепленные вершины.

ЛЕММА 2. *Определитель $\det \Omega$ матрицы напряжений для закрепленной ШСС G неприводим тогда и только тогда, когда неприводим определитель $\det \Omega'$ для матрицы напряжений ШСС G' .*

Пусть в графе G имеются ребра $v_1 v_u, v_1 v_w, \dots, v_1 v_z$, соединяющие свободную вершину v_1 с закрепленными вершинами, а граф G_1 получается из G удалением ребер $v_1 v_w, \dots, v_1 v_z$ и их концевых закрепленных вершин, если они несмежны вершинам G , отличным от v_1 . Пусть графу G_1 отвечает определитель $\det \Omega_1$ матрицы напряжений. Тогда можно согласно теореме 1 написать $\det \Omega_1 = A\omega_1^u + B$ и $\det \Omega = A(\omega_1^u + \omega_1^w + \dots + \omega_1^z) + B$, где многочлены A и B не зависят от переменных $\omega_1^u, \omega_1^w, \dots, \omega_1^z$. Многочлен $\det \Omega_1$ однороден и, очевидно, приводим тогда и только тогда, когда многочлены A и B имеют общий делитель положительной степени. То же самое можно сказать и о многочлене $\det \Omega$. Таким образом, многочлены $\det \Omega_1$ и $\det \Omega$ либо оба неприводимы,

либо оба приводимы. Повторяя это рассуждение нужное число раз, докажем лемму 2.

Сопоставим закрепленной ШСС $G(V, E)$ граф G' , а графу G' – граф G^* с одной закрепленной вершиной, полученный отождествлением всех закрепленных вершин графа G' . Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 3. *Определитель матрицы напряжений ШСС G^* неприводим тогда и только тогда, когда неприводим определитель матрицы напряжений ШСС G' .*

Вершину графа называем *разделяющей*⁴, если при ее удалении (вместе со смежными ребрами) получается несвязный граф. Граф без разделяющих вершин часто называют *блоком*.

ТЕОРЕМА 4. *Определитель матрицы напряжений, отвечающей закрепленной ШСС G , неприводим тогда и только тогда, когда соответствующий граф G^* не имеет разделяющей вершины.*

0. Определители матриц напряжений всех ШСС с одним свободным и $k \geq 1$ закрепленными шарнирами являются многочленами первой степени, а потому неприводимы. Соответствующие графы G^* состоят из одного ребра, а значит, являются блоком.

1. Граф – треугольник G_0^* , отвечающий ШСС G_0 шарнирного четырехзвенника, не имеет разделяющей вершины. Все графы G^* , получающиеся последовательными вставками в него ребра и вершины, также не имеют разделяющей вершины. Поскольку G_0 отвечает неприводимый определитель матрицы напряжений, то и всем ШСС G , которым отвечает граф G^* , также отвечают (в силу теоремы 3) матрицы напряжений с неприводимым определителем.

2. Если граф G^* имеет разделяющую вершину, то определитель матрицы напряжений для соответствующей ШСС приводим. Действительно, определитель Δ матрицы напряжений Ω для ШСС G^* состоит из строки и столбца с номером k , отвечающих разделяющей вершине v_k , и двух блоков. Пусть при удалении вершины v_k получается компонента связности, содержащая закрепленную вершину, и ее вершины имеют, для определенности, номера $1, \dots, k-1$ и другие компоненты, вершины которых имеют номера $k+1, \dots, m$. Тогда в матрице Ω имеются два блока из нулей: размером $(m-k) \times (k-1)$ – в левом нижнем ее углу и размером $(k-1) \times (m-k)$ – в правом верхнем углу. Действительно, в ШСС нет ребер, которым отвечают элементы матрицы из этих блоков. Прибавляя к k -й строке определителя Δ строки, стоящие под этой строкой, получим определитель Δ' с нулевыми элементами в k -й строке и в столбцах с номерами $k+1, \dots, m$. (Это следует из того, что последние $m-k$ свободных вершин не смежны ни одной закрепленной вершине.) Разлагая Δ' по первым k строкам, получим один ненулевой член разложения. Итак, $\Delta = \Delta' = \Delta_1 \Delta_2$, где Δ_1 – минор k -го порядка, стоящий в левом верхнем углу Δ' , а Δ_2 – минор $(m-k)$ -го порядка, стоящий в правом нижнем углу Δ' .

3. Любой блок можно получить из треугольника путем вставок вершин и ребер.

Пусть G^* – произвольный граф без разделяющих вершин, т. е. блок с одной помеченной вершиной, скажем v_1 , отвечающей закрепленным шарнирам.

⁴В книге Харари [5] такая вершина называется точкой сочленения.

Пусть G^* содержит более трех вершин. Будем пользоваться следующим утверждением (теорема 3.3 из книги Харари [5]): любая вершина и любое ребро блока с не менее чем тремя вершинами принадлежат некоторому простому циклу в нем. Из этого утверждения вытекает следующее утверждение. Пусть в блоке G^* произвольным образом выбран связный подграф G^1 , содержащий хотя бы одно ребро, и пусть вершина $v \in G^* \setminus G^1$. Тогда в G^1 найдутся такие две вершины $u \neq w$, что в G^* есть две простые цепи vu и vw , имеющие общей лишь вершину v и не включающие, кроме вершин u и w , других вершин G^1 . Действительно, возьмем простой цикл C в G^* , содержащий ребро $u'w' \subset G^1$ и вершину v . В качестве вершин u и w достаточно взять две ближайшие к v в цепях vu' и vw' вершины из G^1 . Будем называть простые цепи vu и vw цепями, соединяющими вершину v с подграфом G^1 .

Построим, пользуясь вставкой ребер и вершин, начиная с графа треугольника G_0 конечную последовательность G_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, $G_i \subset G_{i+1}$, подграфов графа G^* , содержащих вершину v_1 и оканчивающуюся графом G^* . Если число вершин в блоке G^* больше трех, то наибольший (по числу ребер) простой цикл C_0 в G^* , содержащий вершину v_1 , имеет длину больше трех и получается последовательной вставкой вершин из треугольного цикла $v_1v_2v_3$, где v_2 и v_3 — две вершины графа G^* , смежные v_1 . В качестве графа G_0 берем цикл $v_1v_2v_3$. В качестве графа G_1 берем цикл C_0 . Если все вершины G^* входят в G_1 , то для получения G^* остается вставить недостающие ребра G^* .

Если же в G^* имеются вершины, не входящие в G_1 , то для любой вершины $v \in G^* \setminus G_1$ имеются цепи, соединяющие v с графом G_1 . Из всех таких пар цепей выберем пару vu и vw , составляющую простую цепь C_1 с наибольшим числом ребер. В качестве графа G_2 возьмем $G_1 \cup C_1$. Покажем, что G_2 получается из G_1 вставкой ребра и вершин. Действительно, вершины u и w несмежны в графе G_1 , так как в противном случае в G^* имелся бы простой цикл $(C_0 \setminus uw) \cup C_1$ длины большей, чем длина C_0 . Итак, граф G_2 получается из G_1 вставкой ребра uw и последующей вставкой нужного числа вершин в это ребро. Если все вершины G^* входят в G_2 , то для получения G^* остается вставить в G_2 недостающие ребра графа G^* .

В противном случае повторим наше построение. Выберем в G^* простую цепь $C_2 = u_1w_1$ с наибольшим числом ребер, с некоторыми концевыми вершинами $u_1, w_1 \in G_2$, остальные вершины которой не входят в G_2 . В качестве графа G_3 возьмем $G_2 \cup C_2$. Покажем, что G_3 получается из G_2 вставкой ребра и вершин. Вершины u_1 и w_1 несмежны в графе G_2 . Действительно, если обе вершины u_1 и w_1 не принадлежат циклу C_0 или цепи C_1 , то они несмежны в G_2 . Тогда граф G_3 получается вставкой ребра u_1w_1 в граф G_2 и последующей вставкой нужного числа вершин в это ребро. Если же вершины u_1 и w_1 смежны в G_2 , то они обе принадлежат циклу C_0 или цепи C_1 . Допустим, они являются последовательными вершинами цепи C_1 . Тогда цепь C_1 не была бы цепью наибольшей длины в $(G^* \setminus G_1)$, соединяющей две вершины из G_1 , так как цепь $(C_1 \setminus u_1w_1) \cup C_2$ имеет длину большую, чем цепь C_1 . По такой же причине вершины u_1 и w_1 не могут быть смежными и в цикле C_0 .

Повторяя это рассуждение конечное число раз, мы каждый раз получаем подграф с большим числом вершин и в конце концов исчерпаем все вершины графа G^* . Останется вставить недостающие ребра, и мы получим последовательность вставок ребер и вершин, приводящую к графу G^* . Теорема доказана.

§ 3. О восстановимости закреплённой шарнирной конструкции по внутреннему напряжению

Пусть дана закреплённая ШСС. Задавая в евклидовой плоскости положения $p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ закреплённых шарниров $v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$ для этой ШСС, получаем (плоскую) закреплённую шарнирную схему (ЗШС) [3], [6]. Совокупность точек $p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ плоскости мы называем *закреплением* нашей ШСС.

Пусть задана ЗШС. Рассмотрим всевозможные отображения соответствующей ей ШСС как абстрактного графа $G(V, E)$ в плоскость, сопоставляющие закреплённым вершинам уже выбранные точки, свободным вершинам $v_i \in V_1$ – произвольные точки $p_i \in \mathbb{R}^2$, а ребрам графа $v_i v_j$ – отрезки $p_i p_j$ прямых, возможно вырождающиеся в точку, т. е. рычаги. Пусть (x_i, y_i) – декартовы координаты точки p_i , тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех отображений графа $G(V, E)$ в плоскость и точками $p = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_m, y_m)$ $2m$ -мерного евклидова пространства параметров $\mathbb{R}^{2m}$. Одно такое отображение, целиком определяемое заданием пары ЗШС, p , мы называем *шарнирником*⁵. С инженерной точки зрения шарнирник есть либо шарнирная ферма, либо определенное положение шарнирного механизма. Шарнирник, у которого хотя бы один рычаг имеет нулевую длину (и совпадают смежные шарниры), мы называем *сократимым*, в противном случае – *несократимым*.

Пусть $|E| = r$, тогда незакреплённая ШСС или, в случае закреплённой ШСС, соответствующая ЗШС определяет отображение евклидовых пространств $F: \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathcal{R}^r$, которое задается формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $v_i v_j \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов и называется *рычажным* (в англоязычной литературе – “rigidity mapping” или “edge function” [7], [8]). Пусть $C = F(\mathbb{R}^{2m})$ – образ рычажного отображения. Если $\dim C = r$, то рычажное отображение F и соответствующая ЗШС называются *правильными*. Правильная ЗШС в $\mathbb{R}^2$ называется *изостатической*, если $2m = r$. ЗШС конструкций рис. 2 являются изостатическими, ЗШС шарнирного четырехзвенника правильная, но не изостатическая.

Правильная ЗШС в $\mathbb{R}^d$ называется *изостатической*, если $dm = r$. Если закреплённой ШСС соответствует хотя бы одна изостатическая (правильная) в $\mathbb{R}^d$ ЗШС, то и ШСС называют *изостатической* (правильной) в $\mathbb{R}^d$.

ТЕОРЕМА 5. *Определитель матрицы напряжений, отвечающей закреплённой изостатической в $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, ШСС, неприводим.*

Действительно, для изостатической в $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, ШСС рассмотрим изостатическую ЗШС. Для отвечающего ей рычажного отображения $F: \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \mathcal{R}^r$ прообраз типичной точки $z \in \mathcal{R}^r$ есть конечная совокупность точек $p_i \in \mathbb{R}^{dm}$. Допустим, в графе G^* ШСС есть разделяющая вершина v_k , тогда хотя бы один из связных подграфов G^* , получающихся при удалении из него вершины v_k , не содержит закреплённой вершины. Этому подграфу отвечает часть типичного шарнирника, которую можно непрерывно вращать в $\mathbb{R}^d$ вокруг шарнира p_k . Итак, прообраз типичной точки $z \in \mathcal{R}^r$ в этом случае континуален, что противоречит изостатичности ШСС.

⁵В англоязычной литературе принят термин “framework”.

Условие равновесия сил, приложенных к i -му свободному шарниру со стороны смежных шарниров шарнирника, имеет вид

$$\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0,$$

где суммирование проводится по всем шарнирам, смежным i -му. *Внутренние напряжения* шарнирника $\omega = \{\omega_{ij}\}$ определяются как нетривиальные решения однородной системы линейных уравнений:

$$\sum_j \omega_{ij}(p_i - p_j) = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1)$$

Механический смысл этой системы состоит в равновесии сил в каждом свободном шарнире конструкции. Если эта система имеет лишь тривиальное решение, то говорят, что шарнирник *не допускает внутренних напряжений*. В противном случае множество внутренних напряжений $\omega = \{\omega_{ij}\}$ заданного шарнирника p вместе с тривиальным решением системы (1) представляет собой линейное пространство $W(p)$ *внутренних напряжений* шарнирника.

Нас интересует следующий вопрос: можно ли, зная положения закрепленных шарниров, восстановить по внутреннему напряжению $\omega = \{\omega_{ij}\}$ положения свободных шарниров? Если это возможно, то говорим, что шарнирник p *восстановим* [3], [9] по напряжению ω ; в противном случае – *невосстановим* по этому напряжению.

Пусть внутреннее напряжение таково, что на всех рычагах, смежных какому-либо свободному шарниру, оно нулевое, тогда этот шарнирник невосстановим по данному напряжению. В самом деле, условие равновесия сил не зависит от положения указанного свободного шарнира. Заметим также, что если шарнирник сократим и длина рычага $p_i p_j$ равна 0, то формально шарнирник допускает напряжение ω^0 , ненулевое на этом рычаге и равное нулю на всех остальных рычагах. Сократимый шарнирник с более чем одним свободным шарниром невосстановим по такому напряжению ω^0 . Действительно, если его свободный шарнир совпадает со смежным ему закрепленным, то имеется другой свободный шарнир, все смежные рычаги которого не напряжены. Если же совпадают два смежных свободных шарнира, то их положение можно выбрать произвольно, и получившийся шарнирник будет допускать напряжение ω^0 .

Поскольку ненапряженные рычаги никак не влияют на задачу восстановления шарнирника по его внутреннему напряжению, то имеет смысл рассматривать внутренние напряжения, ненулевые на каждом рычаге. Будем называть такое напряжение *полным*, а шарнирник, допускающий его, *полностью напрягаемым*.

Далее мы рассмотрим две бесконечные последовательности ШСС: D_m и M_m (рис. 2). Схема D_m состоит из цепи $v_1 v_2 \cdots v_m$, составленной из свободных шарниров и присоединенных к ней закрепленных шарниров $u_0, u_1, \dots, u_m$, причем к шарниру v_1 присоединены закрепленные шарниры u_0 и u_1 , а к шарниру v_i , $i > 1$, – шарнир u_i . Схема M_m состоит из замкнутого многоугольника $v_1 v_2 \cdots v_m$, составленного из свободных шарниров и присоединенных к нему закрепленных шарниров $u_1, \dots, u_m$, причем к шарниру v_i присоединен закрепленный шарнир u_i . В этих примерах будем считать вершины v_i отображающимися в точки p_i плоскости, а вершины u_i отображающимися в точки q_i . Кроме

Рис. 2

того, удобно обозначать напряжение рычага, смежного закреплённому шарниру q_i , как ω_i . ЗПС D_m и M_m являются изостатическими в плоскости. Для типичного шарнирника с такими схемами внутреннее напряжение невозможно. Множество шарнирников, допускающих внутреннее напряжение, является алгебраическим подмножеством пространства $\mathbb{R}^{2m}$ всех шарнирников. Именно этими шарнирниками мы и будем интересоваться.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим шарнирник со структурной схемой D_2 (рис. 2) и закреплением в трех неколлинеарных точках q_0 , q_1 , q_2 . Вообще говоря, в координатной декартовой системе координат с началом в q_0 и базисными векторами q_0q_1 и q_0q_2 положения закрепленных шарниров следующие: $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$, $q_2 = (0, 1)$. Пусть напряжения рычагов, исходящих из этих шарниров, равны соответственно: ω_0 , ω_1 , ω_2 . В этом случае система уравнений (1) относительно положений p_1 , p_2 свободных шарниров имеет вид

$$\begin{cases} \omega_{12}(p_1 - p_2) + \omega_0(p_1 - q_0) + \omega_1(p_1 - q_1) = 0, \\ \omega_{12}(p_2 - p_1) + \omega_2(p_2 - q_2) = 0. \end{cases}$$

Если в этой системе начать считать напряжения известными, а положения свободных шарниров неизвестными, то для последних получим систему уравнений

$$\begin{cases} (\omega_{12} + \omega_0 + \omega_1)p_1 - \omega_{12}p_2 = \omega_0q_0 + \omega_1q_1, \\ -\omega_{12}p_1 + (\omega_{12} + \omega_2)p_2 = \omega_2q_2. \end{cases} \quad (2)$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} \omega_{12} + \omega_0 + \omega_1 & -\omega_{12} \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + \omega_2 \end{bmatrix}$$

этой системы как раз и является матрицей напряжений $\Omega(\omega)$ для ШСС D_2 . Векторная система уравнений (2) распадается на две координатные:

$$\begin{cases} (\omega_{12} + \omega_0 + \omega_1)x_1 - \omega_{12}x_2 = \omega_1, \\ -\omega_{12}x_1 + (\omega_{12} + \omega_2)x_2 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} (\omega_{12} + \omega_0 + \omega_1)y_1 - \omega_{12}y_2 = 0, \\ -\omega_{12}y_1 + (\omega_{12} + \omega_2)y_2 = \omega_2 \end{cases}$$

с одинаковыми матрицами, но разными правыми частями. Как следует из теоремы Кронекера–Капелли, условием совместности этих систем, а значит, и системы (2) является равенство рангов матрицы $\Omega(\omega)$ и дважды расширенной матрицы

$$\Omega^*(\omega) = \begin{bmatrix} \omega_{12} + \omega_0 + \omega_1 & -\omega_{12} & \omega_1 & 0 \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + \omega_2 & 0 & \omega_2 \end{bmatrix},$$

получаемой добавлением к $\Omega(\omega)$ двух столбцов свободных членов координатных систем. Если шарнирник полностью напрягаем, то последние два столбца матрицы $\Omega^*(\omega)$ независимы. Следовательно, $\det \Omega(\omega) \neq 0$, и система (2) при условии своей совместности имеет единственное решение. Это означает восстановимость полностью напрягаемого шарнирника с таким закреплением по его напряжению $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_{12})$.

Рис. 3

Если в схеме D_2 взять закрепленные шарниры, лежащие на одной прямой, но попарно не совпадающие, то появятся несократимые полностью напрягаемые шарнирники, не восстановимые по своему внутреннему напряжению. Такой шарнирник изображен на рис. 3, его шарниры q_2 , p_2 и p_1 лежат на одной прямой. Если рычагу q_2p_2 придать ненулевое напряжение, то на остальных рычагах возникнут ненулевые напряжения, уравновешивающие его.

В работе [3] было установлено, что если закрепленные шарниры схемы M_3 (рис. 2) не лежат на одной прямой, то для нее все полностью напрягаемые⁶ несократимые шарнирники восстановимы. Однако уже для схемы D_3 имеются

⁶Наличие полного внутреннего напряжения влечет то, что свободные и закрепленные шарниры являются вершинами треугольников теоремы Дезарга.

невосстановимые полностью напрягаемые шарнирники и при неколлинеарных закрепленных шарнирах.

ПРИМЕР 2. Возьмем для схемы D_3 закрепление $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$, $q_2 = (0, 1)$, $q_3 = (1, -2)$. Перечислим рычаги этой схемы: p_1q_0 , p_1q_1 , p_2q_2 , p_3q_3 , p_1p_2 , p_2p_3 . Оказывается, что шарнирник со свободными шарнирами $p_1^0 = (1, -1)$, $p_2^0 = (-1, 2)$, $p_3^0 = (0, 0)$ не восстановим по своему напряжению $(2, 1, 1, 1, -1, 1)$ (координаты вектора отвечают порядку перечисленных ранее рычагов схемы). Здесь дважды расширенная матрица выглядит так:

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

и ее ранг равен двум так же, как и ранг матрицы напряжений Ω . Каждый из шарнирников $p_1 = p_1^0 - X$, $p_2 = p_2^0 + 2X$, $p_3 = p_3^0 + X$, где X – произвольный вектор плоскости, также допускает внутреннее напряжение $(2, 1, 1, 1, -1, 1)$.

Обобщая рассуждение примеров на шарнирник с произвольной ЗПС, получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Необходимым и достаточным условием существования шарнирника с заданной ЗПС в плоскости, невосстановимого по его внутреннему напряжению ω , является неполнота ранга матрицы $\Omega(\omega)$ и равенство его рангу дважды расширенной матрицы $\Omega^*(\omega)$.*

Аналогичное утверждение верно и для шарнирников в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, лишь с тем изменением, что вместо дважды расширенной надо брать d -кратно расширенную матрицу $\Omega^*(\omega)$.

Из следствия теоремы 1 сразу вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если напряжения на всех рычагах полностью напряженного шарнирника имеют один и тот же знак, то шарнирник восстановим по этому напряжению.*

Ранее [1], [3] оно доказывалось другими способами. Из этого утверждения для произвольной ЗПС можно вывести наличие шарнирника, восстановимого по внутреннему напряжению [3].

Пусть шарнирник $A(p)$ получен аффинным преобразованием из шарнирника p .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Шарнирники p и $A(p)$ имеют одно и то же пространство внутренних напряжений.*

Справедливость утверждения следует из того, что оба пространства являются пространствами решений равносильных однородных систем вида (1).

Поскольку невосстановимость шарнирников p и $A(p)$ по их напряжению ω равносильна выполнению одного и того же равенства $\det \Omega(\omega) = 0$, то из утверждения 3 следует одновременная восстановимость либо невосстановимость по внутреннему напряжению ω шарнирников p и $A(p)$. Из существования нетривиальных аффинных преобразований плоскости, сохраняющих точки прямой L неподвижными, вытекает следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если шарнирник допускает внутреннее напряжение ω и его закрепленные шарниры лежат на одной прямой L , а свободные шарниры не все лежат на L , то он невосстановим по напряжению ω .

Отметим, что конструкции с коллинеарными закрепленными шарнирами обладают рядом других интересных свойств [10].

§ 4. Восстановимость по пространству внутренних напряжений

Если пространство внутренних напряжений шарнирника многомерно, то задачу восстановимости шарнирника по его напряжениям можно поставить следующим образом. Пусть задана ЗШС и пусть для заданного шарнирника $p^0 = p_1^0, \dots, p_m^0$ с закреплением $p_{m+1}^0, \dots, p_{m+n}^0$ имеем $p(\omega) = (p_1(\omega), \dots, p_m(\omega))$ – множество всех решений системы линейных уравнений

$$\left(\sum_{j, (v_i, v_j) \in E} \omega_{ij} \right) p_i - \sum_{j, (v_i, v_j) \in E_1} \omega_{ij} p_j = \sum_{j, (v_i, v_j) \in E_2} \omega_{ij} p_j^0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (3)$$

при фиксированном $\omega = \{\omega_{ij}\} \in W(p^0)$. В формуле (3) E_2 – множество ребер, смежных закрепленным вершинам, $E_1 = E \setminus E_2$. Пусть W^r – пространство всех мыслимых напряжений рычагов шарнирника с нашей ЗШС. Мы говорим, что шарнирник p^0 *восстановим по своему пространству внутренних напряжений* $W(p^0) \subset W^r$, если

$$\bigcap_{\omega \in W(p^0)} p(\omega) = p^0.$$

Рис. 4

В работе [3] был поставлен вопрос: существуют ли шарнирники, восстановимые по пространству внутренних напряжений, но не восстановимые ни по одному из своих напряжений? Здесь приведен пример, дающий положительный

ответ на этот вопрос. Он был опубликован на английском языке в малодоступном у нас сборнике [11]. Необходимые символьные вычисления проводились с использованием программы Maple. На рис. 4 изображена ЗШС шарнирника, восстановимого по пространству внутренних напряжений, но не обладающего восстанавливающим напряжением. Сам этот шарнирник имеет симметрию квадрата и является полностью напрягаемым и несократимым. Его закрепленные шарниры лежат в точках $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$. Свободные шарниры лежат в вершинах трех квадратов K_a , K_b , K_c . Верхние вершины этих квадратов имеют координаты $(0, 1 + a)$, $(0, 1 + a + b)$ и $(0, 1 + a + c)$ соответственно. Шарниры внешних квадратов K_b , K_c соединены рычагами с вершинами внутреннего квадрата K_a . Ясно, что если один из рычагов какого-либо из этих квадратов имеет ненулевое напряжение, то и все рычаги этого квадрата имеют то же самое напряжение. Пусть эти напряжения равны W для K_a , W_b – для K_b , и W_c – для K_c . Эти напряжения однозначно определяют напряжения рычагов, направленных к центру симметрии. Для одного квадрата они тоже все одинаковы. Пусть w_b и w_c – напряжения рычагов, соединяющих шарниры внешних квадратов K_b и K_c с K_a . Они определяются равенствами

$$w_b b + 2W_b(1 + a + b) = 0, \quad (4)$$

$$w_c c + 2W_c(1 + a + c) = 0. \quad (5)$$

Напряжение w рычага, соединяющего шарнир внутреннего квадрата с закрепленным шарниром, определяется равенством

$$wa - w_b b - w_c c + 2W(1 + a) = 0. \quad (6)$$

Таким образом, пространство внутренних напряжений рассматриваемых шарнирников трехмерно и в качестве координат в нем можно взять величины w , w_b , w_c .

Матрица напряжений Ω имеет вид

$$\begin{bmatrix} A & -W & 0 & -W & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 \\ -W & A & -W & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 \\ 0 & -W & A & -W & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 \\ -W & 0 & -W & A & 0 & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c \\ -w_b & 0 & 0 & 0 & B & -W_b & 0 & -W_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_b & 0 & 0 & -W_b & B & -W_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & -W_b & B & -W_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_b & -W_b & 0 & -W_b & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C & -W_c & 0 & -W_c \\ 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_c & C & -W_c & 0 \\ 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_c & C & -W_c \\ 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_c & 0 & -W_c & C \end{bmatrix},$$

где $A = w + 2W + w_b + w_c$, $B = w_b + 2W_b$, $C = w_c + 2W_c$.

Ее определитель с учетом соотношений (4)–(6) равен

$$\det \Omega = -\frac{w^3 w_b^4 w_c^4 (1 + a)}{(1 + a + b)^3 (1 + a + c)^3} (wa^3 + wa^2 - wa^2 c - wa^2 b + 2w_b b^2 a + wabc + 2w_c c^2 a - wa - bwc - w + bw + wc + 2w_c c^2 - 2w_c c^2 b + 2w_b b^2 - 2w_b b^2 c).$$

Его длинный сомножитель можно переписать так:

$$w(a - 1)(c - a - 1)(b - a - 1) + w_b 2b^2(a - c + 1) + w_c 2c^2(a - b + 1).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при w , w_b , w_c к нулю, получим систему трех уравнений относительно a , b , c , обладающую решением $c = b$, $a = b - 1$. В этом случае квадраты K_b и K_c совпадают, однако, шарнирник несократим при $b \neq 1$, $b \neq 0$. Возьмем для определенности шарнирник, для которого $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$, тогда $W = -w/4 + w_b/2 + w_c/2$, $W_b = -w_b/4$, $W_c = -w_c/4$.

Для любого внутреннего напряжения этого шарнирника $\det \Omega = 0$, поэтому шарнирник не обладает восстанавливающим напряжением. С другой стороны, матрица Ω в этом случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 & \beta & -w_b/4 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 \\ \beta & 0 & \beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & 0 & -w_c \\ -w_b & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w_b & \frac{1}{4}w_b & 0 & \frac{1}{4}w_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -w_b & 0 & 0 & \frac{1}{4}w_b & \frac{1}{4}w_b & \frac{1}{4}w_b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_b & 0 & 0 & \frac{1}{4}w_b & \frac{1}{2}w_b & \frac{1}{4}w_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -w_b & \frac{1}{4}w_b & 0 & \frac{1}{4}w_b & \frac{1}{2}w_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}w_c & \frac{1}{4}w_c & 0 & \frac{1}{4}w_c \\ 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}w_c & \frac{1}{2}w_c & \frac{1}{4}w_c & 0 \\ 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}w_c & \frac{1}{2}w_c & \frac{1}{4}w_c \\ 0 & 0 & 0 & -w_c & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}w_c & 0 & \frac{1}{4}w_c & \frac{1}{2}w_c \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}w + 2w_b + 2w_c, \quad \beta = \frac{1}{4}w - \frac{1}{2}w_b - \frac{1}{2}w_c.$$

Ядро этой матрицы порождается, как нетрудно проверить, векторами

$$[0, 0, 0, 0, w_c, -w_c, w_c, -w_c, -w_b, w_b, -w_b, w_b].$$

Откуда ясно, что пересечение решений системы (3), отвечающих всем возможным внутренним напряжениям нашего шарнирника, состоит лишь из одной точки. Таким образом, шарнирник восстановим по пространству внутренних напряжений.

§ 5. Шарнирники со схемами D_m и M_m

Большой интерес для строительной механики представляют конструкции с изостатическими схемами. В этом параграфе мы рассмотрим плоские шарнирники с изостатическими схемами D_m и M_m (рис. 2). Будет доказано, что для любого $m \geq 3$ имеется закрепление схемы D_m , при котором каждый полностью напряженный шарнирник восстановим по своему напряжению. Кроме того, установим для схем D_m , $m \geq 3$, и M_m , $m \geq 4$, существование неколлинеарных закреплений, для которых имеются несократимые и невозстановимые по своему полному напряжению шарнирники.

ТЕОРЕМА 6. Для схемы D_m , $m \geq 3$, при закреплении $q_0 \neq q_1 = q_2 = \dots = q_m$ каждый несократимый шарнирник, допускающий полное напряжение, является распрявленным и восстановим по этому напряжению.

Здесь закрепленные шарниры лежат на прямой $L = q_0q_1$. Если шарнирник напряжен, то все его свободные шарниры должны лежать на L . Справедливость этого легко доказать по индукции. Действительно, шарниру p_m смежны два рычага p_mq_m и p_mp_{m-1} . Если они напряжены, то равновесие сил на p_m возможно лишь в случае коллинеарности точек q_m , p_m и p_{m-1} . В этом случае шарниру p_{m-1} смежны три рычага, из которых $p_{m-1}p_m$ и $p_{m-1}q_{m-1}$ коллинеарны. Для равновесия сил в p_{m-1} необходима коллинеарность этих двух рычагов рычагу $p_{m-1}p_{m-2}$. И так далее, пока не получим коллинеарность всех рычагов рычагу q_0q_1 .

Если $q_0 = (1, 0)$, $q_i = (0, 0)$, $i \geq 1$, то дважды расширенная матрица Ω^* имеет вид

$$\begin{bmatrix} \omega_{12} + \omega_0 + \omega_1 & -\omega_{12} & 0 & \dots & 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_{12} & \omega_{12} + \omega_{23} + \omega_2 & -\omega_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\omega_{m,m-1} & \omega_{m,m-1} + \omega_m & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку напряжение полное, то для существования невозстановимого шарнирника необходимо и достаточно выполнения равенств $\text{Rank } \Omega = \text{Rank } \Omega^* = m - 1$. Для этого необходимо выполнение условий $\det \Omega(\omega) = \det \Omega_1(\omega) = 0$, где матрица Ω_1 составлена из m столбцов матрицы Ω^* , кроме ее первого и последнего столбцов. Покажем невозможность этих равенств при напряжении, ненулевом на каждом рычаге.

Разлагая $\det \Omega_1(\omega)$ по последнему столбцу, получим равенство $\omega_0 \Delta_1^{(1)} = 0$, где минор $(m - 1)$ -порядка

$$\Delta_1^{(1)} = \begin{vmatrix} \omega_{12} + \omega_{23} + \omega_2 & -\omega_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\omega_{23} & \omega_{23} + \omega_{34} + \omega_3 & -\omega_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\omega_{m,m-1} & \omega_{m,m-1} + \omega_m \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\omega_0 \neq 0$, то с необходимостью $\Delta_1^{(1)} = 0$. С другой стороны, разлагая $\det \Omega(\omega)$ по первой строке, получим равенство $(\omega_0 + \omega_1 + \omega_{12})\Delta_1^{(1)} + \omega_{12}\Delta_2^{(1)} = 0$, где минор $(m - 1)$ -го порядка

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} -\omega_{12} & -\omega_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{23} + \omega_{34} + \omega_3 & -\omega_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\omega_{m,m-1} & \omega_{m,m-1} + \omega_m \end{vmatrix}.$$

Итак, поскольку $\omega_{12} \neq 0$, то $\Delta_2^{(1)} = 0$. Разлагая этот определитель по первому столбцу, получим равенство

$$\Delta_1^{(2)} = \begin{vmatrix} \omega_{23} + \omega_{34} + \omega_3 & -\omega_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{34} & \omega_{34} + \omega_{45} + \omega_4 & -\omega_{45} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\omega_{m,m-1} & \omega_{m,m-1} + \omega_m \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель $\Delta_1^{(1)}$ по первой строке, равенство $\Delta_1^{(1)} = 0$ можно переписать так: $\Delta_1^{(1)} = (\omega_2 + \omega_{12} + \omega_{23})\Delta_1^{(2)} + \omega_{23}\Delta_2^{(2)} = 0$, где минор $(m-2)$ -го порядка

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} -\omega_{23} & -\omega_{34} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{34} + \omega_{45} + \omega_4 & -\omega_{45} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 & -\omega_{m,m-1} & \omega_{m,m-1} + \omega_m \end{vmatrix} = 0.$$

Продолжая эти рассуждения, придем к равенствам

$$\Delta_1^{(m-2)} = \begin{vmatrix} \omega_{m-1} + \omega_{m-2,m-1} & -\omega_{m-1,m} \\ -\omega_{m-1,m} & \omega_m + \omega_{m-1,m} \end{vmatrix} = 0$$

и

$$\Delta_2^{(m-2)} = \begin{vmatrix} -\omega_{m-2,m-1} & -\omega_{m-1,m} \\ 0 & \omega_m + \omega_{m-1,m} \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $\omega_m + \omega_{m-1,m} = 0$. Но тогда предыдущее равенство влечет $\omega_{m-1,m} = 0$. Таким образом, из выполнения наших условий следует наличие в наборе напряжений рычагов хотя бы одного нулевого напряжения. Теорема доказана.

Пусть задана ЗШС и внутреннее напряжение ω . Допустим ω не является восстанавливающим напряжением, и решение $p(\omega)$ системы (3) есть линейное многообразие положительной размерности. Выпишем условия, из которых вытекает наличие в $p(\omega)$ несократимых шарнирников. Пусть, для определенности, Ω_k – базисный минор матрицы напряжений Ω имеет порядок k и находится в первых k ее столбцах. Положения p_i и p_j шарниров с $i, j > k$ не могут совпадать тождественно на $p(\omega)$, поскольку их можно взять в качестве параметрических неизвестных в линейной системе (3). Решая систему (3), получаем

$$p_i = \sum_{j=k+1}^m \frac{\Delta_{i,j}^k}{\det \Omega_k} p_j + b_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

где вектор $b_i \in \mathbb{R}^2$ зависит лишь от положений закрепленных шарниров, а $\Delta_{i,j}^k$ есть определитель, получающийся из Ω_k заменой его i -го столбца на столбец коэффициентов системы при p_j , взятый со знаком минус. Для тождественного на $p(\omega)$ совпадения положений p_i и p_s свободных шарниров с $i \leq k$, $s > k$ необходимо выполнение условий:

$$\Delta_{i,s}^k - \det \Omega_k = 0, \quad \Delta_{i,j}^k = 0 \quad \text{при} \quad k+1 \leq j \leq m, \quad j \neq s. \quad (7)$$

Для тождественного на $p(\omega)$ совпадения положений p_i и p_s шарниров с $i, s \leq k$, $i \neq s$ необходимо выполнение условий:

$$\Delta_{i,j}^k - \Delta_{s,j}^k = 0, \quad k+1 \leq j \leq m. \quad (8)$$

Для тождественного на $p(\omega)$ совпадения положения p_i свободного шарнира с положением p_s смежного ему закрепленного шарнира необходимо выполнение условий:

$$\Delta_{i,j}^k = 0, \quad k+1 \leq j \leq m. \quad (9)$$

Заметим, что величины $\Delta_{i,j}^k$ и $\det \Omega_k$ зависят лишь от напряжения ω , и не зависят от закрепления ШСС. Таким образом, мы доказали следующую лемму.

ЛЕММА 4. *Для того чтобы для заданной закрепленной ШСС в множестве $p(\omega)$ шарнирников, невосстановимых по напряжению ω , имелись несократимые шарнирники, достаточно невыполнения для напряжения ω всех возможных при перенумерациях свободных шарниров соотношений вида (7)–(9).*

ЛЕММА 5. *Если для плоской изостатической ЗШС с числом свободных шарниров $m \geq 2$ многочлен $\det \Omega = \Delta(\omega)$ неприводим, то множество напряжений, не удовлетворяющих ни одному из условий вида (7)–(9), всюду плотно в множестве нулей многочлена $\Delta(\omega)$.*

Действительно, по теореме 1 имеем $\Delta(\omega) = P_{ij}\omega_{ij} + Q_{ij}$, где ненулевые многочлены положительной при $m \geq 2$ степени P_{ij} и Q_{ij} не зависят от ω_{ij} . Многочлен P_{ij} ненулевой потому, что $\Delta(\omega)$ зависит от каждого напряжения. Многочлен Q_{ij} ненулевой в силу неприводимости $\Delta(\omega)$. Поскольку при $P_{ij} \neq 0$ имеем $\omega_{ij} = -Q_{ij}/P_{ij}$, то множество $M = \Delta^{-1}(0)$ имеет в $\mathbb{R}^r = \mathbb{R}^{2m}$ коразмерность 1. Пусть $R_{ij} \subset \mathbb{R}^r$ есть плоскость $\omega_{ij} = 0$, а $N \subset \mathbb{R}^r$ – объединение множеств нулей многочленов, стоящих в левых частях всех равенств вида (7)–(9). Степени этих многочленов и многочленов, задающих плоскости R_{ij} , меньше степени m многочлена Δ . Справедливо утверждение [12, предложение 2.5]: если многочлен $\Delta(\omega)$ от m переменных неприводим и множество $\Delta^{-1}(0)$ имеет коразмерность 1 в $\mathbb{R}^m$, а многочлен $S(\omega)$ имеет степень, меньшую $\deg \Delta$, то $\Delta^{-1}(0) \cap S^{-1}(0)$ имеет коразмерность, большую 1 в $\mathbb{R}^m$. Отсюда следует, что размерность $M \cap (N \cup \bigcup_{ij} R_{ij})$ меньше размерности M . Таким образом, множество точек, лежащих в $M \setminus (N \cup \bigcup_{ij} R_{ij})$, открыто и всюду плотно в M . Лемма доказана.

Следующий пример показывает существенность условия неприводимости даже в случае, когда речь идет о формах, линейных по каждому переменному.

ПРИМЕР 3. Кубический однородный многочлен $\Delta = (x + y)(zu + uv + zv)$ от 5 переменных линеен по каждому переменному и имеет по каждому своему переменному X вид $\Delta = PX + Q$, где P и Q – ненулевые формы, не содержащие X . Многочлены P для него следующие: $zu + uv + zv$ для x , $(x + y)(u + v)$ для z и так далее. Поверхность $\Delta = 0$ содержится в объединении поверхностей второго порядка $zu + uv + zv = 0$ и $(x + y)(u + v) = 0$.

Пользуясь леммой 5, установим существование полностью напрягаемых несократимых шарнирников с неколлинеарным закреплением для последовательностей ШСС D_m и M_m . Эти ШСС изостатичны в $\mathbb{R}^2$ и определители их матриц напряжений неприводимы по теореме 5. Пусть ω – внутреннее напряжение для ШСС D_m , $m \geq 3$, ненулевое на всех рычагах, удовлетворяющее условиям леммы 4.

ТЕОРЕМА 7. *Для ШСС D_m , $m \geq 3$, с $q_0 \neq q_1$ можно так выбрать положение одного из закрепленных шарниров q_1 или q_2 (при произвольных положениях остальных закрепленных шарниров), чтобы для полученной ЗШС имелся полностью напрягаемый несократимый и невосстановимый по своему напряжению ω шарнирник.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем прямоугольную систему координат в плоскости так, чтобы закрепление ШСС D_m , $m \geq 3$, было следующим: $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$. Пусть в выбранной координатной системе $q_i = (A_i, B_i)$ при $i > 1$. Рассмотрим дважды расширенную матрицу Ω^* для этой ЗШС

$$\begin{bmatrix} \omega_0 + \omega_1 + \omega_{12} & -\omega_{12} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \omega_b & 0 \\ -\omega_{12} & \omega_2 + \omega_{12} + \omega_{23} & -\omega_{23} & \vdots & 0 & 0 & A_2\omega_2 & B_2\omega_2 \\ 0 & -\omega_{23} & \omega_3 + \omega_{23} + \omega_{34} & \vdots & 0 & 0 & A_3\omega_3 & B_3\omega_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -\omega_{m-1,m} & \omega_m + \omega_{m-1,m} & A_m\omega_m & B_m\omega_m \end{bmatrix}.$$

Если все $\omega_{ij} \neq 0$, то ее ранг не менее $m - 1$, поскольку $m - 1$ последних ее строк линейно независимы. То же самое можно сказать и про ранг матрицы Ω .

Чтобы установить существование шарнирника, невосстановимого по напряжению ω , достаточно подобрать положения закрепленных шарниров, влекущие равенство $\text{Rank } \Omega^*(\omega) = m - 1$. При выбранном напряжении ω первая строка C_1 определителя $\det \Omega$ является линейной комбинацией остальных его строк: $C_1 = \sum_{i>1} \alpha_i C_i$. Отметим, что поскольку $-\omega_{12} \neq 0$, то среди коэффициентов α_2, α_3 имеется ненулевой, обозначим его α_k . Нам достаточно так подобрать величины A_k, B_k , чтобы и для соответствующих строк C_i^* дважды расширенной матрицы имела линейная зависимость с теми же самыми коэффициентами α_i . При этом, очевидно, будет выполнено $\text{Rank } \Omega(\omega) = \text{Rank } \Omega^*(\omega) = m - 1$. Рассмотрим два последних элемента линейной комбинации строк $\sum_{i>1} \alpha_i C_i^*$. Они равны $\alpha_k \omega_k A_k + \delta_A$ и $\alpha_k \omega_k B_k + \delta_B$, где величины δ_A и δ_B не зависят от A_k, B_k . Так как $\alpha_k \omega_k \neq 0$, то можно так выбрать координаты A_k, B_k шарнира q_k (не меняя положений остальных закрепленных шарниров), чтобы эти последние элементы стали равны ω_0 и 0 соответственно. Это влечет линейную зависимость $C_1^* = \sum_{i>1} \alpha_i C_i^*$. Поскольку наше напряжение ω удовлетворяет условиям леммы 4, то среди шарнирников, допускающих его, найдутся несократимые. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. Для любой ШСС M_m , $m \geq 4$, и любого ω , удовлетворяющего условиям леммы 4, можно подобрать положения двух закрепленных шарниров q_k, q_r , $1 < k \neq r < m$, считая заданными $q_1 \neq q_m$ и положения $m - 4$ остальных закрепленных шарниров так, чтобы для получившейся ЗШС имелся несократимый шарнирник, допускающий напряжение ω и невосстановимый по нему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем координатную систему так, чтобы закрепленные шарниры нашей ЗШС были следующие: $q_1 = (0, 0)$, $q_m = (0, 1)$ и $q_i = (A_i, B_i)$ при $1 < i < m$. Рассмотрим для нее дважды расширенную матрицу Ω^* :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 + \omega_{12} + \omega_{m1} & -\omega_{12} & 0 & \vdots & 0 & -\omega_{m1} & 0 & 0 \\ -\omega_{12} & \omega_2 + \omega_{12} + \omega_{23} & -\omega_{23} & \vdots & 0 & 0 & A_2\omega_2 & B_2\omega_2 \\ 0 & -\omega_{23} & \omega_3 + \omega_{23} + \omega_{34} & \vdots & 0 & 0 & A_3\omega_3 & B_3\omega_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\omega_{m1} & 0 & \vdots & 0 & -\omega_{m-1,m} & \omega_m + \omega_{m-1,m} & 0 & \omega_m \end{bmatrix}.$$

Для выбранного набора всех ненулевых ω_{ij} ее ранг не менее $m - 2$, поскольку $m - 2$ средних ее строк линейно независимы. То же самое можно сказать и про матрицу Ω .

СЛУЧАЙ 1. Коранг матрицы Ω равен 2. В этом случае первая и последняя ее строки представимы в виде линейных комбинаций ее средних строк: $C_1 = \sum_{1 < i < m} \alpha_i C_i$ и $C_m = \sum_{1 < i < m} \beta_i C_i$. Причем число ненулевых коэффициентов в этих комбинациях, как легко понять, не меньше двух. Поскольку строки C_1 и C_m непропорциональны, то найдутся $1 < r, k < m$, для которых

$$\begin{vmatrix} \alpha_r & \alpha_k \\ \beta_r & \beta_k \end{vmatrix} \neq 0. \quad (10)$$

Но тогда предпоследние элементы линейных комбинаций строк дважды расширенной матрицы $\sum_{1 < i < m} \alpha_i C_i^*$ и $\sum_{1 < i < m} \beta_i C_i^*$ имеют вид $\alpha_r \omega_r A_r + \alpha_k \omega_k A_k + \delta_1$ и $\beta_r \omega_r A_r + \beta_k \omega_k A_k + \delta_2$ соответственно, где δ_1 и δ_2 не зависят от A_r, B_r, A_k, B_k . В силу неравенства (10) и $\omega_r \omega_k \neq 0$ можно так выбрать A_r, A_k (не меняя положений остальных закрепленных шарниров), чтобы оба предпоследних элемента обратились в нуль. Точно так же можно выбрать B_r, B_k , чтобы последние элементы линейных комбинаций строк стали равны 0 и ω_m соответственно. Это влечет линейные зависимости $C_1^* = \sum_{1 < i < m} \alpha_i C_i^*$ и $C_m^* = \sum_{1 < i < m} \beta_i C_i^*$. Откуда делаем вывод о равенстве рангов матриц Ω и Ω^* . Поскольку наше внутреннее напряжение удовлетворяет условиям леммы 4, это влечет существование требуемого несократимого шарнирника.

СЛУЧАЙ 2. Коранг матрицы Ω равен 1. Равенство $\text{Rank } \Omega^* = \text{Rank } \Omega$ доказывается аналогично, но несколько проще.

В случае ШСС M_m , $m > 4$, закрепление можно выбрать неколлинеарным. Как показывает пример из работы [3], для схемы M_4 также имеется неколлинеарное закрепление, для которого существуют полностью напряженные несократимые и невосстановимые по своему напряжению шарнирники.

Список литературы

1. R. Connelly, "Rigidity and energy", *Invent. Math.*, **66**:1 (1982), 11–33.
2. R. Connelly, "Rigidity", Chapter 1.7, *Handbook of convex geometry*, v. A, North-Holland, Amsterdam, 1993, 223–271.
3. М. Д. Ковалев, "О восстановимости шарнирников по внутренним напряжениям", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:4 (1997), 37–66; англ. пер.: M. D. Kovalev, "On the reconstructibility of frameworks from self-stresses", *Izv. Math.*, **61**:4 (1997), 717–741.
4. W. T. Tutte, "How to draw a graph", *Proc. London Math. Soc.* (3), **13**:1 (1963), 743–767.
5. Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973, 300 с.; пер. с англ.: F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading-Menlo Park-London, 1969, ix+274 pp.
6. М. Д. Ковалев, "Геометрическая теория шарнирных устройств", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:1 (1994), 45–70; англ. пер.: M. D. Kovalev, "Geometric theory of hinged devices", *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **44**:1 (1995), 43–68.
7. L. Asimow, B. Roth, "The rigidity of graphs. II", *J. Math. Anal. Appl.*, **68**:1 (1979), 171–190.

8. H. Crapo, W. Whiteley, “Statics of frameworks and motions of panel structures, a projective geometric introduction”, *Structural Topology*, 1982, № 6, 43–82.
9. М. Д. Ковалев, “Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем”, *Вестник МГТУ. Серия Машиностроение*, 2001, № 4, 33–51.
10. М. Д. Ковалев, “О распрямленных шарнирных конструкциях”, *Матем. сб.*, **195**:6 (2004), 71–98; англ. пер.: М. D. Kovalev, “Straightened hinged frameworks”, *Sb. Math.*, **195**:6 (2004), 833–858.
11. M. D. Kovalev, “A restoring stress doesn’t always exist”, *New trends in mechanism and machine science*, Mechanisms and Machine Science, **7**, Springer-Verlag, Dordrecht, 2013, 53–61.
12. S. Akbulut, H. King, *Topology of real algebraic sets*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **25**, Springer-Verlag, New York, 1992, x+249 pp.

Михаил Дмитриевич Ковалёв

(M. D. KOVALEV)

Механико-математический факультет,

Московский государственный университет

имени М.В.Ломоносова

E-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Поступило в редакцию

31.03.2015

26.06.2015