Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Р. Икономов, Р. К. Ковачева, С. П. Суетин, Интегральное уравнение Наттолла и асимптотическая формула Бернштейна для комплексного веса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 6, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 13:32:34

УДК 517.53

Н. Р. Икономов, Р. К. Ковачева, С. П. Суетин

Интегральное уравнение Наттолла и асимптотическая формула Бернштейна для комплексного веса

Получено интегральное уравнение Наттолла при условии, что соответствующая комплекснозначная функция $\sigma(x)$ не обращается в нуль и принадлежит классу Дини–Липшица. С помощью этого уравнения для многочленов, ортогональных на единичном отрезке $\Delta = [-1, 1]$ относительно комплекснозначного веса $h(x) = \sigma(x)/\sqrt{1-x^2}$, получен комплексный аналог классических асимптотических формул Бернштейна.

Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, полиномы Паде, сильная асимптотика, формула Бернштейна, метод Наттолла.

DOI: 10.4213/im8374

§ 1. Введение

1.1. В настоящей работе интегральное уравнение Наттолла получено при более слабых ограничениях на исходную комплекснозначную весовую функцию σ , чем это было сделано в оригинальной работе Дж. Наттолла [1]. В [1] Наттолл рассмотрел класс весов, удовлетворяющих условию Гёльдера. В настоящей работе его результат обобщен на класс весов, удовлетворяющих условию Дини–Липшица (см. теорему 1, уравнение (32)). Это позволило авторам непосредственно с помощью уравнения Наттолла (32) получить полный аналог асимптотических формул Бернштейна, справедливых как вне отрезка Δ , так и на самом отрезке, но уже для *комплекснозначного* веса σ .

Таким образом, в настоящей работе получен комплексный аналог классических асимптотических формул Бернштейна при тех же условиях на вес (но теперь уже комплекснозначный), при которых получены его оригинальные результаты. А именно, весовая функция h предполагается *комплекснозначной* на единичном отрезке $\Delta = [-1, 1]$ и такой, что соответствующий (в терминологии Бернштейна) тригонометрический вес $\sigma(x) := h(x)\sqrt{1-x^2}$ отличен на Δ от нуля, $\sigma: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, и удовлетворяет на Δ условию Дини–Липшица, $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$; определение см. ниже в п. 2.2. Результат получен методом Наттолла, основанным на сингулярном интегральном уравнении, доказательство не использует аппроксимационного метода Бернштейна–Сегё (в частности, интегральное уравнение Наттолла не имеет никакого отношения к интегральному уравнению, используемому в методе Бернштейна–Сегё). Подчеркнем,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12430-офи-м-2, 15-01-07531-а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2900.2014.1).

что метод Наттолла в целом представляется весьма перспективным, поскольку к настоящему времени его удалось обобщить не только на случай полиномов, неэрмитово ортогональных на нескольких отрезках вещественной прямой и на дугах, составляющих компакт Штала (см. [2]–[4]), но и на случай полиномов Эрмита–Паде (см. [5], ср. [6]), а также на случай переменных (“variable”, т. е. зависящих от номера многочлена) весов [7], [8]. С помощью этого метода оказалось возможным также получить формулы следов в некоторых классах операторов Якоби с конечнозонным спектром [9], он оказался пригодным и для вывода формул сильной асимптотики для аппроксимаций Паде и соответствующих им ортогональных многочленов в достаточно широких классах аналитических функций [2], [3], [10], [11].

Возможности метода Наттолла представляются далеко не исчерпанными.

Напомним, что этот метод впервые возник в работе Дж. Наттолла [1] в 1990 г. для случая одного отрезка. В оригинальной работе [1] Наттолл изучал сильную асимптотику полиномов Паде в связи с задачей о сильной асимптотике для соответствующих аппроксимаций Паде.

В [1] рассматривался случай, когда заданный на единичном отрезке комплекснозначный тригонометрический вес удовлетворяет условию Гёльдера. В настоящей работе рассматривается более общий случай, а именно, мы предполагаем, что этот вес удовлетворяет условию Дини–Липшица (см. определение 2.1). Для случая *вещественного* веса именно при таком условии С. Н. Бернштейн (см. [12]) получил свои асимптотические формулы для ортогональных многочленов. Тем самым, в настоящей работе мы распространяем классические формулы Бернштейна на случай *комплекснозначного* тригонометрического веса σ , удовлетворяющего условию Дини–Липшица (ср. [13], [14]). Подчеркнем, что доказательство основано на сингулярном интегральном уравнении Наттолла и не использует стандартную аппроксимационную технику Бернштейна–Сегё (ср. [15], [16]).

В настоящей работе мы рассматриваем только случай одного отрезка. Хотя это весьма частный случай применимости метода Наттолла, мы ограничиваемся здесь только этим случаем по следующим причинам. Хорошо известно [17], [18], что понятие *общих* ортогональных многочленов возникло в 1855 г. в работе П. Л. Чебышёва [19] в связи с изучением им свойств непрерывных J -дробей¹ для некоторого класса аналитических функций. Такие многочлены естественным образом возникли как знаменатели Q_n n -х подходящих дробей $J_n = P_n/Q_n$, соответствующих непрерывной J -дроби (см. п. 2.2). В монографии Г. Сегё [17, гл. II, п. 2.2] этот факт отмечен следующим образом: “Мы называем $p_n(x)$ ортогональными многочленами Иногда их называют многочленами *Чебышёва*. Мы сохраним этот термин для важного специального случая (1.12.3)”.² В дальнейшем теория ортогональных многочленов стала развиваться как вполне самостоятельное направление анализа, практически никак не связанное с непрерывными дробями. В основу этой теории было положено

¹В некоторой литературе (см., например, [18]) такие дроби называются чебышёвскими непрерывными дробями.

²Традиция называть общие ортогональные многочлены *многочленами Чебышёва* сохранялась долгое время. Еще в 1920-х годах В. А. Стеклов [20] называл многочленами Чебышёва многочлены, ортогональные относительно обобщенных весов Якоби вида $(1+x)^\alpha(1-x)^\beta q(x)$, $\alpha, \beta > -1$.

само свойство ортогональности³

$$\int Q_n(x)x^k h(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (1)$$

Наиболее общие асимптотические формулы для таких многочленов были получены в 1930-х годах С. Н. Бернштейном и Г. Сегё (см. [17, гл. XII]) именно на основе этого свойства. Другой подход состоит в том, чтобы, не используя (1) напрямую, в основу рассуждений положить эквивалентное ортогональности свойство максимального касания подходящей дробью J_n в точке $z = \infty$ исходной функции, заданной рядом Лорана. Наиболее естественно этот подход удается сформулировать в терминах аппроксимаций Паде – так, как это сделано впервые в работе Наттолла [1] (ср. [21]).

Идейно этот метод ближе всего к одному из трех предложенных ранее Г. Шталем [21] подходов к изучению асимптотики ортогональных многочленов (а тем самым, и асимптотики диагональных аппроксимаций Паде). Основная идея – не использовать свойство ортогональности (1) в явном виде и изучать не свойства ортогональных многочленов как таковых, а свойства *функции остатка* (см. (5)), используя ее характеристическое свойство максимального касания заданного степенного ряда в бесконечности с порядком $O(z^{-n-1})$; см. (2). Продолжая (в определенном смысле, см. ниже формулы (49), (59), а также [2], [9]) функцию остатка через отрезок $[-1, 1]$ на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R}_2$: $w^2 = z^2 - 1$ рода $g = 0$, мы получаем функцию, кусочно мероморфную на этой римановой поверхности, с дивизором нулевой степени вида

$$(n+1)\infty^{(1)} - (n+1-\ell)\infty^{(2)} + \text{фиксированные полюсы}.$$

Если вес σ имеет вид $1/p_\ell$, где p_ℓ – полином фиксированной степени ℓ , не обращающийся в нуль на Δ , то мы получаем функцию, мероморфную на $\mathfrak{R}_2$. Хорошо известно [22], [23], что такая функция определяется по заданному дивизору единственным образом и представляется в явном виде через абелевы интегралы на $\mathfrak{R}_2$. Непосредственно из этой явной формулы для функции остатка вытекает явная формула⁴ для всех многочленов степени $n \geq \ell + 1$, ортогональных относительно веса $\sigma = 1/p_\ell$, и, как следствие, – их асимптотика. Для произвольной функции $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$ асимптотическая формула для ортогональных многочленов $Q_n(z; \sigma)$ степени n выводится с помощью подходящей аппроксимации веса σ функцией вида $1/p_{n-1}$, где p_{n-1} – многочлен степени $\leq n-1$, и интегрального уравнения, полученного Бернштейном и Сегё (см. [17, раздел 12.4]). В этом и состоит аппроксимационный метод Бернштейна–Сегё. Отметим, что интегральное уравнение Наттолла не имеет никакого отношения к этому интегральному уравнению Бернштейна–Сегё. Метод Наттолла позволяет обойтись без аппроксимационной техники Бернштейна–Сегё и выводить асимптотические формулы напрямую.

Стоит также обратить внимание на следующее высказывание Г. Сегё (см. [17, гл. III, п. 3.5]): “Исторически ортогональные многочлены $\{p_n(x)\}$ впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных

³Точнее, эквивалентное (1) свойство минимальности L_h^2 -нормы монического ортогонального полинома $Q_n(x) = x^n + \dots$ среди всех полиномов $q(x) = x^n + \dots \in \mathbb{R}_n[x]$.

⁴Отметим, что для римановой поверхности рода $g = 1$ раньше всех этот подход реализовал Дюма [24] (см. также [15]), но для отдельной функции очень частного вида.

многочленов (см. П. Л. Чебышёв [1]–[8], ...). Собственно, метод сингулярного интегрального уравнения Наттолла в том и состоит, чтобы напрочь забыть о свойстве ортогональности (1).

1.2. В [17, гл. II, раздел 2.6] Сегё выделил классы ортогональных многочленов, рассмотренных им и С. Н. Бернштейном, для которых могут быть указаны *явные выражения*. Эти классы соответствуют весовым функциям $h(x)$ следующего вида:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x^2} \sigma(x), \quad \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{1 \pm x}{1 \mp x}} \sigma(x), \quad (2)$$

где $\sigma = 1/p_\ell$, $p_\ell \in \mathbb{R}[x]$, – положительный на отрезке Δ многочлен фиксированной степени ℓ (явное выражение получено для всех ортогональных многочленов степени $n \geq \ell + 1$). Аналоги доказанной в настоящей работе теоремы 2 справедливы в том числе и для многочленов, ортогональных относительно всех весовых функций вида (2), где σ – *комплекснозначная* голоморфная на Δ функция, $\sigma(x) \neq 0$ при $x \in \Delta$ (для применимости метода Наттолла достаточно, чтобы в (2) функция $1/\sigma$ была голоморфной на Δ ; см. ниже замечание 4).

§ 2. Основные определения

2.1. Пусть на единичном отрезке $\Delta = [-1, 1]$ задан *вес* h , т. е. функция h принадлежит $L^1(\Delta)$ и $h > 0$ почти всюду на Δ . При этом условии однозначно (с точностью до нормировки) определены *ортогональные относительно веса h многочлены* Q_n , $n \in \mathbb{N}$, $\deg Q_n = n$:

$$\int_{\Delta} Q_n(x) x^k h(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3)$$

Полиномы P_n , $\deg P_n = n-1$, заданные формулами

$$P_n(z) := \int_{\Delta} \frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x} h(x) dx, \quad (4)$$

называются полиномами *второго рода*, а функция

$$R_n(z) := \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)}{z - x} h(x) dx \quad (5)$$

называется функцией *второго рода*. Непосредственно из (3)–(5) вытекает, что функции Q_n , P_n , R_n связаны соотношением

$$R_n(z) = Q_n(z) \hat{h}(z) - P_n(z), \quad (6)$$

где

$$\hat{h}(z) := \int_{\Delta} \frac{h(x) dx}{z - x} \quad (7)$$

– *марковская* функция (см. [10], [19], [26]–[28]). При этом в силу того, что отношение

$$\frac{Q_n(z) - Q_n(x)}{z - x}$$

есть полином по x степени $n - 1$ (тем самым, ортогональный $Q_n(x)$), из (5) получаем

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)}{z-x} h(x) dx = \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)Q_n(z)}{z-x} h(x) dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n(x)(Q_n(z) - Q_n(x) + Q_n(x))}{z-x} h(x) dx \\ &= \frac{1}{Q_n(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, для функции второго рода выполняется соотношение

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Из (9) вытекает, что рациональная функция P_n/Q_n есть диагональная аппроксимация Паде $[n/n]_{\hat{h}}$ марковской функции $\hat{h}$, т.е. для $[n/n]_{\hat{h}} = P_n/Q_n$ выполняется характеристическое (в классе $\mathcal{R}_n := \mathbb{C}_n(z)$ всех рациональных функций порядка $\leq n$) соотношение:

$$(\hat{h} - [n/n]_{\hat{h}})(z) = \frac{1}{Q_n^2(z)} \int_{\Delta} \frac{Q_n^2(x)}{z-x} h(x) dx = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (10)$$

2.2. Классические результаты С. Н. Бернштейна [12] (см. также [17, гл. XII]) об асимптотике ортогональных многочленов сформулированы и доказаны им для случая отрезка $\Delta = [-1, 1]$ и вещественного веса вида

$$h(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (11)$$

где σ – вещественная непрерывная положительная на Δ функция, которая удовлетворяет условию Дини–Липшица. Функцию σ принято называть *тригонометрическим весом*; в дальнейшем мы, как правило, будем называть ее просто *весом*, допуская при этом, что σ может быть и *комплекснозначной* функцией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 (условие Дини–Липшица). Будем говорить, что заданная на отрезке Δ функция σ удовлетворяет *условию Дини–Липшица* (и писать $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$) с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\gamma > 1$, если для всех $x, y \in \Delta$ выполняется неравенство

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C |\log |x - y||^{-\gamma}. \quad (12)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА БЕРНШТЕЙНА (см. [12], [17]). Пусть σ – положительная на Δ функция, удовлетворяющая на Δ условию Дини–Липшица. Тогда для полиномов Q_n , ортогональных на Δ с весом (11) и нормированных условием⁵ $\|Q_n^2\|_{L_h^2} = 2$, при $n \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы

⁵Такая нормировка удобна для применения метода Наттолла и связана с соотношением (32), которое является ключевым при использовании этого метода.

Бернштейна:

$$Q_n(z) = D(z; \sigma) \Phi(z)^n (1 + o(1)), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (13)$$

$$Q_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\sigma(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x; \sigma)) + o(1), \quad x \in \Delta, \quad (14)$$

в которых $o(1) = O((\log n)^{1-\gamma})$,

$$D(z; \sigma) := \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \sigma(x)}{x - z} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right\} \quad (15)$$

– функция⁶ Сегё,

$$\theta(x; \sigma) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{2\pi} \int_{\Delta} \frac{\log \sigma(x) - \log \sigma(y)}{x - y} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}$$

– фазовая функция, $\Phi(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$ – функция, обратная функции Жукковского $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, $|\zeta| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$, $\zeta = \Phi(z)$.

Соотношение (13) выполняется внутри (т. е. локально равномерно в) области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, соотношение (14) – равномерно на Δ . Случаю $\sigma \equiv 1$ в (11) соответствуют функция $D(z; \sigma) \equiv 1$ и классические полиномы Чебышёва первого рода $T_n(z) = \zeta^n + \zeta^{-n}$.

Отметим следующие хорошо известные свойства функции Сегё (15):

1) она является решением задачи о факторизации веса⁷: $D^+(x; \sigma) D^-(x; \sigma) = \sigma(x)$, $x \in (-1, 1)$;

2) она обладает свойством мультипликативности по отношению к весу:

$$D(z; \sigma_1 \cdot \sigma_2) = D(z; \sigma_1) \cdot D(z; \sigma_2); \quad (16)$$

3) для (тригонометрического) веса $\sigma(x) = (1+x)^{\alpha+1/2}(1-x)^{\beta+1/2}$, соответствующего весу Якоби $h(x) = (1+x)^{\alpha}(1-x)^{\beta}$, $x \in (-1, 1)$, $\alpha, \beta > -1$, имеем

$$\begin{aligned} D(z; \sigma) &= \left(\frac{\Phi(z)^{\alpha+\beta+1}}{(z+1)^{\alpha+1/2}(z-1)^{\beta+1/2}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{(z + (z^2 - 1)^{1/2})^{1/2}}{(z^2 - 1)^{1/4}} \left(\frac{\Phi(z)^{\alpha+\beta}}{(z+1)^{\alpha}(z-1)^{\beta}} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

2.3. В связи с изучением сходимости диагональных аппроксимаций Паде для функций марковского типа (7) (см. также (23)) естественным образом возникает задача об асимптотических свойствах многочленов, ортогональных на отрезке Δ относительно комплекснозначного тригонометрического веса $\sigma: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$; см. формулу (10). К такой задаче приводит, например, разложение в непрерывную J -дробь простейших алгебраических функций вида

$$f(z) = r_1(z) + \frac{r_2(z)}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad f \in \mathcal{H}(\infty), \quad (18)$$

⁶Классическая функция Сегё для веса σ равна $1/D(z; \sigma)$, но здесь нам удобнее использовать именно функцию $D(z; \sigma)$.

⁷Здесь и всюду в дальнейшем под $(\cdot)^+(x)$, $x \in \Delta$, понимаются предельные значения соответствующей функции $(\cdot)$, голоморфной в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta$, взятые из верхней полуплоскости, т. е. $(\cdot)^+(x) = (\cdot)(x + i \cdot 0)$; аналогичный смысл придается и $(\cdot)^-(x)$.

где r_1, r_2 – комплексные рациональные функции, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$ (см. [10], [14], [27], [28]). Отметим, что разложение в непрерывную J -дробь гиперэллиптических функций естественным образом приводит к многочленам, ортогональным на нескольких отрезках и, более общо, на компактах Шталя в комплексной плоскости (см. [16], [24], [25], [28], [29]).

Дж. Наттолом [1], [16] было показано, что результаты С.Н. Бернштейна остаются в силе и для комплекснозначного веса $\sigma: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, если $\sigma \in \mathcal{H}(\Delta)$. Точнее, формула (13) остается неизменной, но с $o(1) = o(\delta^n)$, где $\delta \in (0, 1)$, а вместо (14) имеем

$$Q_n(x) = \Psi_n^+(x) + \Psi_n^-(x) + O(\delta^n), \quad x \in \Delta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (19)$$

где $\delta \in (0, 1)$, $\Psi_n(z) := D(z; \sigma)\Phi(z)^n$, $\Psi^\pm(x) = \Psi_n(x \pm i \cdot 0)$. Для комплекснозначного веса σ непосредственно из (13) вытекает, что $\deg Q_n = n$ при $n \geq n_0$, все нули Q_n притягиваются к отрезку Δ и

$$\frac{1}{n} \mu(Q_n) \rightarrow \frac{1}{\pi} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

где $\mu(Q_n) = \sum_{\zeta: Q_n(\zeta)=0} \delta_\zeta$ – так называемая считающая (или ассоциированная) мера для полинома Q_n и сходимость “ $\rightarrow$ ” понимается как слабая сходимость в пространстве мер. Подчеркнем, что полученные Наттолом асимптотические формулы – это те же самые формулы Бернштейна, но для комплекснозначного веса $\sigma \neq 0$, голоморфного на Δ , и с заменой $O((\log n)^{1-\gamma})$ на $o(\delta^n)$ при условии, что $\sigma \in \mathcal{H}(\Delta)$. Соответствующая асимптотическая формула была получена Наттолом [1] и для случая, когда функция σ принадлежит классу Гёльдера с показателем $\mu \in (0, 1)$. В этом случае в соответствующей формуле (19) $o(1) = O(n^{-\mu})$.

Эти результаты были получены Наттолом с помощью разработанного им в [1] нового метода, основанного на выводе некоторого сингулярного интегрального уравнения для функции остатка R_n (см. ниже (32); в теории ортогональных многочленов R_n – это функция второго рода (5)). Отметим, что при подходе Наттоллы свойство ортогональности

$$\int_{\Delta} Q_n(x) x^k h(x) dx = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad (20)$$

в явном виде не используется, все рассуждения работы [1] основаны на следующем характеристическом свойстве функции остатка (см. (9)):

$$R_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (21)$$

(очевидно, что (20) и (21) эквивалентны).

Наконец, в работе [10] методом Наттоллы (т.е. на основе сингулярного интегрального уравнения, см. (32)) была полностью изучена асимптотика полиномов $Q_n = Q_n(z; f)$ – знаменателей диагональных аппроксимаций Паде – для так называемых функций *марковского типа* (ср. (18)):

$$f(z) = \hat{\mu}(z) + r(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Delta, \quad (22)$$

где

$$\hat{\mu}(z) := \int_{\Delta} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad d\mu(x) := \frac{1}{\pi} \frac{\sigma(x) dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (23)$$

$r \in \mathbb{C}(z)$ – рациональная функция, $r(x) \neq 0$ на Δ , $r(\infty) = 0$. Точнее, при условии, что $\sigma \in \mathcal{H}(\Delta)$ и функция f имеет вид (22), в [10] было доказано, что при подходящей нормировке полиномов $Q_n(z; f)$ справедливы соотношения (см. [10, теоремы 2 и 3, формулы (22₁)–(22₂)]:

$$1^\circ. \quad Q_n(z; f) = \Psi_n(z)(1 + o(1)) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ внутри } D', \quad (24)$$

$$2^\circ. \quad Q_n(x; f) = \Psi_n^+(x) + \Psi_n^-(x) + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ равномерно на } \Delta, \quad (25)$$

где $D' = D \setminus \{\text{полюсы } r\}$ и $o(1) = o(\delta^n)$, $\delta < 1$. Функция Ψ_n является (единственным с точностью до нормировки) решением некоторой краевой задачи Римана. Отметим, что (24) – это так называемая “внешняя” асимптотика Q_n , а (25) – это “внутренняя” асимптотика Q_n .

Непосредственно из п. 1° и свойств Ψ -функции, решающей краевую задачу Римана, вытекает, что $\deg Q_n(z; f) = n$ для достаточно больших n , т. е. для функции f все достаточно большие индексы n нормальны.

А. А. Гончаром [26] была доказана сходимость в сферической метрике диагональных аппроксимаций Паде для функций вида (22) при условии, что $\sigma' > 0$ почти всюду на Δ . Из этого результата вытекает, что каждый полюс f в области $D = \mathbb{C} \setminus \Delta$ притягивает ровно столько полюсов $[n/n]_f$, какова его кратность. С помощью формулы сильной асимптотики (25) для полиномов $Q_n(x; f)$ на отрезке Δ (т. е. внутренней асимптотики) в [10] было получено следующее более точное утверждение об асимптотическом поведении полюсов $[n/n]_f$ вне отрезка Δ (см. [10]).

3°. Если точка $a \in D$ – полюс функции f кратности $m \geq 3$, то соответствующие полюсы $a_j(n)$, $j = 1, \dots, m$, рациональной функции $[n/n]_f$ асимптотически при $n \rightarrow \infty$ располагаются в вершинах правильного m -угольника с центром в точке $z = a$ (точную формулировку см. в [10, теорема 3]).

Основная цель настоящей работы – получить уравнение Наттолла и доказать утверждения 1° и 2° при более слабых ограничениях на комплекснозначный вес $\sigma(x) \neq 0$, а именно при условии $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$ (вместо $\sigma \in \mathcal{H}(\Delta)$). В частности, для комплекснозначного веса $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$, $\sigma(x) \neq 0$, в работе будут доказаны классические формулы Бернштейна (13), (14). Подчеркнем, что доказательство основано на сингулярном интегральном уравнении Наттолла и не использует стандартную аппроксимационную технику Бернштейна–Сегё (ср. [15]). Отметим, что в работе [16] исследованы асимптотические свойства многочленов, ортогональных относительно комплекснозначного веса, удовлетворяющего условию Дини–Липшица, но при помощи аппроксимационной техники Бернштейна–Сегё.

Полученные здесь теоремы 1 и 2 позволят доказать аналог [10, теорема 3] (см. также выше утверждение 3°) для функций вида (22)–(23) в классе комплекснозначных функций σ , удовлетворяющих условию Дини–Липшица.

§ 3. Формулировка и доказательство основных результатов

В этом параграфе асимптотические формулы Бернштейна (13), (14) будут доказаны методом Наттолла для комплекснозначного (тригонометрического) веса σ , не обращающегося в нуль и удовлетворяющего условию Дини–Липшица (12).

Основные результаты – теоремы 1 и 2.

3.1. Всюду в этом пункте предполагается, что функция g задана на единичной окружности $\Gamma: |t| = 1$, не обращается в нуль, $g(t) \neq 0$, и удовлетворяет условию Дини–Липшица ($g \in \text{DL}(\Gamma)$) с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$:

$$|g(t) - g(t')| \leq C \left(\log \frac{1}{|t - t'|} \right)^{-\lambda}, \quad \lambda > 1, \quad t, t' \in \Gamma. \quad (26)$$

Всюду далее в этом параграфе через C и λ обозначаются постоянные из соотношения (26), через M, M' – постоянные, зависящие только от функции f (см. ниже формулировки лемм 1 и 2), через $c_1, c_2, \dots, c'_1, c'_2, \dots$ – некоторые абсолютные постоянные, точные значения которых для нас несущественны.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_r: |z| = r, \quad U_r: |z| < r, \quad r > 0, \quad \Gamma = \Gamma_1, \quad U = U_1, \\ K_R: 1 < |z| < R, \quad \overline{K_R}: 1 \leq |z| \leq R, \quad R > 1. \end{aligned}$$

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Пусть $g \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$, а f голоморфна в кольце $1 < |z| < R$ и непрерывна при $1 \leq |z| \leq R$ с некоторым $R > 1$. Положим

$$F(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t)}{t - z} dt, \quad |z| < 1. \quad (27)$$

Тогда имеем:

1) функция $F(z)$ равномерно ограничена при $|z| < 1$, для любой точки $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ существует радиальный предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} F(re^{i\theta}) =: F(e^{i\theta}); \quad (28)$$

2) справедлива оценка

$$\max_{|t|=1} |F(t)| \leq c_1 CM, \quad (29)$$

где $M = \max_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$;

3) функция F непрерывна на Γ и удовлетворяют условию Дини–Липшица с постоянными $c_2 CM$ и $\mu = \lambda - 1$.

ЛЕММА 2. Пусть $g \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$, функция f голоморфна в кольце $1 < |z| < R$, непрерывна при $1 \leq |z| \leq R$, $R > 1$, и $f \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными M' и $\mu = \lambda - 1 > 0$. Тогда для функции

$$F_n(z) := \int_{|t|=1} \frac{f(t)g(t) dt}{t^{2n}(t - z)}, \quad |z| < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (30)$$

имеем:

1) для всех $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$ существует предел

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} F_n(r\zeta) =: F_n(\zeta);$$

2) $F_n \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными $c_3 CM$ и $\mu = \lambda - 1$, где $M = \max_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$;

3) справедливо неравенство

$$\max_{|z| \leq 1} |F_n(z)| \leq c_3 C(M + M')(\log n)^{-\mu}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Доказательство лемм 1 и 2 приведено в § 4.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция F_n , $n \in \mathbb{N}$, не равна тождественно нулю, голоморфна в круге $|z| < 1$, непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$ и удовлетворяет соотношению

$$F_n(z) = \int_{|t|=1} \frac{F_n(1/t)g(t)}{t^{2n}(t-z)} dt + C_n, \quad |z| < 1, \quad (32)$$

где $g \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$, а C_n – некоторая постоянная. Тогда равномерно по $|z| \leq 1$

$$F_n(z) = C_n(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (33)$$

где $o(1) = O((\log n)^{-\mu})$, $\mu = \lambda - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из леммы 1 вытекает, что $F_n \in \text{DL}(\Gamma)$ с постоянными $c'_1 C M_n$ и $\mu = \lambda - 1$. Тогда из леммы 2 получаем, что

$$|F_n(\zeta_n) - C_n| = (C + 1)^2 M_n o(1) = M_n o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $|F_n(\zeta_n)| = M_n \neq 0$, $\zeta_n \in \Gamma$, $o(1) = O((\log n)^{-\mu})$. Отсюда уже легко вывести утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из теоремы 1 вытекает, что для $M_n = \max_{|z| \leq 1} |F_n(z)| \neq 0$ имеет место соотношение

$$M_n = |C_n|(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty, \quad (34)$$

где $o(1) = O((\log n)^{-\mu})$, $\mu = \lambda - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1, как по формулировке, так и по доказательству, в идейном плане весьма близка к следующему хорошо известному утверждению (см., например, [30, гл. II, раздел 4]). Пусть $f(\theta) \in \text{DL}(\Gamma)$. Тогда для коэффициентов Фурье c_n функции f ,

$$c_n = c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{i\theta n} d\theta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (35)$$

имеем

$$c_n = O((\log |n|)^{-\lambda}), \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Действительно, положим $\theta = \eta + i\pi/n$. Поскольку $e^{i\pi} = -1$, то

$$c_n = - \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\eta + i\pi}{n}\right) e^{i\eta n} d\eta = - \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\theta + i\pi}{n}\right) e^{i\theta n} d\theta. \quad (36)$$

Суммируя соотношения (35) и (36), получаем

$$2c_n = \int_0^{2\pi} \left(f(\theta) - f\left(\frac{\theta + i\pi}{n}\right) \right) e^{i\theta n} d\theta.$$

Отсюда сразу же вытекает соотношение $c_n = O((\log |n|)^{-\lambda})$, $|n| \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Наличие именно члена $F_n(1/t)$ (а не $F_n(t)$) в правой части уравнения (32) связано с полученным Наттоллом [1] интегральным уравнением для функции остатка R_n (ср. (59)).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Подчеркнем, что соотношение (32) является ключевым в методе Наттолла (ср. [1, формула (3.10)]). Нетрудно увидеть, что если в (32) функция g голоморфна в некотором кольце $1 < |z| < \rho$, $\rho > 1$, и непрерывна в его замыкании $1 \leq |z| \leq \rho$, то соотношение (33) справедливо с $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta = 1/\rho \in (0, 1)$. Тем самым, асимптотическое представление (33) справедливо для любого компакта $K \subset \mathbb{D}$ и показатель геометрической прогрессии *не зависит* от компакта K .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ниже мы используем следующие соотношения:

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$\int_0^\delta \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\lambda} \frac{dx}{x} = \left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1-\lambda}, \quad \int_\delta^{1/2} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-\lambda} \frac{dx}{x^2} \leq \frac{(\log 2)^{1-\lambda}}{\delta},$$

и везде предполагаем, что $\lambda > 1$, $\delta > 0$. Кроме того, при $\delta \in (0, 1/4)$, $\zeta, \zeta' \in \Gamma$ имеем: $1/2 \leq |t - \zeta'|/|t - \zeta| \leq 3/2$ для $|\zeta - \zeta'| = \delta$, $|t - \zeta| \geq \sqrt{\delta}$, $t \in \Gamma$.

3.2. Пусть $w = w(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$, где мы выбрали такую ветвь многозначной функции $(\cdot)^{1/2}$ при $z \in D := \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, что

$$w(z) = (z^2 - 1)^{1/2} \sim z, \quad z \rightarrow \infty. \quad (37)$$

Из (37) вытекает, что $w(z) > 0$ при $z > 0$ и $w^+(x) = i\sqrt{1 - x^2}$ при $x \in (-1, 1)$, где под $w^+(x)$, $x \in (-1, 1)$, понимаются предельные значения функции $w(z)$, $z \in D$, из верхней полуплоскости:

$$w^+(x) := w(x + i \cdot 0) := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} w(x + i\varepsilon), \quad x \in (-1, 1), \quad (38)$$

и $\sqrt{1 - x^2} > 0$, $x \in (-1, 1)$ (под $\sqrt{a^2} = a$, $a > 0$, мы понимаем положительное арифметическое значение квадратного корня).

Пусть функция f задана представлением

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(x)}{w^+(x)} \frac{dx}{x - z}, \quad z \notin \Delta := [-1, 1], \quad (39)$$

где комплекснозначный (тригонометрический) вес $\sigma(x)$ не обращается в нуль и удовлетворяет условию Дини–Липшица, $\sigma \in \text{DL}(\Delta)$, с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$, т.е. $\sigma: \Delta \rightarrow \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Пусть $\mathfrak{R}_2$ – риманова поверхность нулевого рода, заданная уравнением $w^2 = z^2 - 1$. Будем считать, что $\mathfrak{R}_2$ реализована как двулистное накрытие римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ с точками ветвления $z = \pm 1$ второго порядка. Риманова поверхность $\mathfrak{R}_2$ может быть параметризована (униформизирована) следующим образом:

$$z = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad w = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t \right), \quad t \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (40)$$

Первый лист $\mathfrak{R}_2^{(1)}$ поверхности $\mathfrak{R}_2$ задается соотношением (40) для $|t| < 1$, при этом $z^{(1)} = \infty^{(1)}$ при $t = 0$. Второй лист $\mathfrak{R}_2^{(2)}$ задается соотношением (40) для $|t| > 1$ и соответственно $z^{(2)} = \infty^{(2)}$ при $t = \infty$.

Введем функцию $F(t) := wf(z)$ при $|t| < 1$. Функция $F(t)$, $|t| < 1$, имеет предельные граничные значения $F^+(\tau)$ на единичной окружности $\Gamma := \{\tau : |\tau| = 1\}$, полученные при стремлении t к $\tau \in \Gamma$ изнутри единичного круга $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$. Тем самым, определена функция

$$\Sigma(\tau) := F^+(\tau) + F^+\left(\frac{1}{\tau}\right) = F(\tau) + F\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad |\tau| = 1. \quad (41)$$

Применив формулу Сохоцкого–Племеля к функции f , заданной представлением (39), получим

$$f^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma(x)}{w^+(x)} + \frac{i}{2} H_f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (42)$$

где

$$H_f(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma(x')}{w^+(x')} \frac{dx'}{x - x'}, \quad x \in \Delta,$$

– преобразование Гильберта для функции σ/w^+ . Из (42) предельным переходом при $\mathbb{D} \ni t \rightarrow t_0 \in \Gamma$ изнутри единичного круга $\mathbb{D} := \{t \in \mathbb{C} : |t| < 1\}$ вытекает соотношение

$$\begin{aligned} F(t) = wf(z) &\rightarrow F^\pm(t_0) := w^\pm(x_0) \left\{ \pm \frac{1}{2} \frac{\sigma(x_0)}{w^+(x_0)} + \frac{i}{2} H_f(x_0) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sigma(x_0) \pm \frac{i w^+(x_0)}{2} H_f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (43)$$

Из (43) для функции $\Sigma(t)$, $t \in \Gamma$, определенной соотношением (41), получаем равенство

$$\Sigma(t) := F^+(t) + F^+\left(\frac{1}{t}\right) = \sigma\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) = \sigma(x) = \sigma(\cos \theta), \quad t = e^{i\theta} \in \Gamma. \quad (44)$$

Из равенства (44) вытекает, что функция Σ удовлетворяет условию Дини–Липшица на окружности Γ , $\Sigma \in \text{DL}(\Gamma)$, с теми же самыми постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$, что и исходная функция σ .

3.3. Для произвольного фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и $j = 1, 2$ введем для функции f полиномы Паде степени $\leq n$ следующим образом. Полиномы Паде $P_{n,j} = P_{n,j}(z; f) \in \mathbb{C}_n[z]$, $P_{n,2} \not\equiv 0$, для функции f определяются из соотношения

$$R_n(z) := (P_{n,1} + P_{n,2}f)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Функция R_n называется *функцией остатка*; пара полиномов $P_{n,1}$ и $P_{n,2}$, $P_{n,j} \in \mathbb{C}_n[z]$, определяется не единственным образом. Однако рациональная функция $[n/n]_f := -P_{n,1}/P_{n,2}$ определена однозначно (и называется *диагональной* или *n-диагональной аппроксимацией Паде функции f*).

Введем две новые функции

$$\begin{aligned} \Pi_2(t) &:= \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{\log \Sigma(u) du}{u - t} \right\}, \quad |t| > 1, \\ \Pi_1(t) &:= -f(z) \Pi_2(t), \quad |t| > 1. \end{aligned} \quad (46)$$

Одним из основных результатов настоящей работы является следующая теорема (комплексный вариант классической теоремы Бернштейна, ср. [13]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть вес $\sigma(x)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица на отрезке Δ с некоторыми постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$. Тогда полиномы Паде $P_{n,j}(z; f)$, $j = 1, 2$, функции f , заданной представлением (39), определены однозначно (с точностью до нормировки) для всех достаточно больших n . При подходящей нормировке и произвольном $\delta > 0$ для полиномов $P_{n,j}$, $j = 1, 2$, справедливы следующие формулы равномерной асимптотики:

$$P_{n,j}(z) = t^n \Pi_j(t)(1 + o(1)), \quad |t| > 1 + \delta, \quad n \rightarrow \infty, \quad (47)$$

$$P_{n,j}(z) = t^n \Pi_j(t) + t^{-n} \Pi_j(t^{-1}) + o(1), \quad |t| = 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (48)$$

где $o(1) = O((\log n)^{1-\lambda})$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду в дальнейшем мы по возможности придерживаемся обозначений работы Наттолла [1].

Положим

$$\begin{aligned} \Pi_{n,j}(t) &:= P_{n,j}(z)t^{-n} && \text{при } |t| > 1, \quad j = 1, 2, \\ r_n(t) &:= wt^{-n}R_n(z) && \text{при } |t| < 1. \end{aligned} \quad (49)$$

Рассмотрим соотношение (45) при $|t| = 1$. Умножая его на wt^{-n} и принимая во внимание равенство $w(1/t) = -w(t)$ (см. (40)), при $|t| = 1$ получим

$$\begin{aligned} r_n(t) &= w\Pi_{n,1}(t) + F(t)\Pi_{n,2}(t), \\ r_n\left(\frac{1}{t}\right) &= -w\Pi_{n,1}\left(\frac{1}{t}\right) + F\left(\frac{1}{t}\right)\Pi_{n,2}\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned} \quad (50)$$

Поскольку $\Pi_{n,j}(1/t) = t^{2n}\Pi_{n,j}(t)$, умножение второго из уравнений (50) на t^{-2n} приводит к следующим соотношениям: при $|t| = 1$

$$\begin{aligned} w\Pi_{n,1}(t) + F(t)\Pi_{n,2}(t) &= r_n(t), \\ -w\Pi_{n,1}(t) + F\left(\frac{1}{t}\right)\Pi_{n,2}(t) &= t^{-2n}r_n\left(\frac{1}{t}\right). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (41) и (51) вытекает, что при $|t| = 1$

$$\Sigma(t)\Pi_{n,2}(t) = r_n(t) + t^{-2n}r_n(t). \quad (52)$$

Рассмотрим соотношение (52) как уравнение на две неизвестные функции $\Pi_{n,2}$ и r_n с известной функцией $\Sigma(t) = \sigma((t + 1/t)/2) \neq 0$. Поскольку в (52) явная зависимость от n имеется только в члене $t^{-2n}r_n(t)$, рассмотрим новое уравнение на две неизвестные функции $\Pi_2(t) \neq 0$, $|t| > 1$, и $r(t) \neq 0$, $|t| < 1$, не зависящие от n и такие, что $r \in \mathcal{H}(|t| < 1)$, $\Pi_2 \in \mathcal{H}(|t| > 1)$:

$$\Sigma(t)\Pi_2(t) = r(t), \quad |t| = 1. \quad (53)$$

Поскольку $\Sigma(t) \neq 0$ при $|t| = 1$, мы можем прологарифмировать обе части (53) и получить эквивалентное (53) соотношение⁸

$$\log r(t) - \log \Pi_2(t) = \log \Sigma(t), \quad |t| = 1, \quad \Sigma(t) \neq 0, \quad (54)$$

⁸Соотношения (53) и (54) эквивалентны в силу представления (44).

Рассмотрим (54) как граничную задачу при $|t| = 1$ для пары функций $\log \Pi_2(t)$, $|t| > 1$, и $\log r(t)$, $|t| < 1$. Решение этой граничной задачи дается в явном виде с помощью преобразования Коши функции $\log \Sigma(t)$, заданной на единичной окружности Γ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } |t| < 1 \\ \text{при } |t| > 1 \end{array} \right\} \frac{r(t)}{\Pi_2(t)} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{\log \Sigma(u) du}{u - t} \right\}. \quad (55)$$

С помощью явного представления (55) приведем уравнение (53) к следующему виду:

$$\frac{\Pi_{n,2}(t)}{\Pi_2(t)} = \frac{r_n(t)}{r(t)} + \frac{t^{-2n} r_n(1/t)}{r(t)}, \quad |t| = 1. \quad (56)$$

Перепишем (56) в виде

$$\frac{r_n(t)}{r(t)} - \frac{\Pi_{n,2}(t)}{\Pi_2(t)} = -\frac{t^{-2n} r_n(1/t)}{r(t)}, \quad |t| = 1. \quad (57)$$

Из (57) получаем

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } |t| < 1 \\ \text{при } |t| > 1 \end{array} \right\} \frac{r_n(t)/r(t)}{\Pi_{n,2}(t)/\Pi_2(t)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{u^{-2n} r_n(1/u)}{r(u)} \frac{du}{u - t} + C_n, \quad (58)$$

где C_n – некоторая постоянная. Теперь уже из (58) получаем для преобразованной функции остатка $r_n(t) := wt^{-n} R_n(z)$, $|t| < 1$, следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} \frac{r_n(t)}{r(t)} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{u^{-2n} r_n(1/u)}{r(u)} \frac{du}{u - t} + C_n \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=1} \frac{u^{-2n}}{u - t} \frac{r(1/u)}{r(u)} \frac{r_n(1/u)}{r(1/u)} du + C_n, \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (59)$$

Нетрудно увидеть, что функция $r(1/u)/r(u)$, $|u| = 1$, удовлетворяет условию Дини–Липшица на окружности Γ с постоянными $C' > 0$ и $\lambda > 1$, поскольку функция $r(u)$ при $|u| = 1$ удовлетворяет условию Дини–Липшица на Γ с постоянными $C > 0$ и $\lambda > 1$.

Теперь в (59) положим $F_n(t) := r_n(t)/r(t)$ и применим к этой функции F_n теорему 1. Получим утверждение теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из (40) вытекает, что $t = z + w = z + (z^2 - 1)^{1/2} = \Phi(z)$ есть функция, обратная к функции Жуковского. Легко увидеть, что функция $\Pi_2(t)$ совпадает с функцией $D(z; \sigma)$, где $1/D(z; \sigma) = \Delta(z; \sigma)$ – классическая функция Сегё, соответствующая весу σ . Таким образом, непосредственно из (47) вытекает, что для случая $\sigma: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ при подходящей нормировке полинома Паде $P_{n,2}$ справедливы формулы сильной асимптотики вне отрезка Δ и на Δ соответственно:

$$P_{n,2}(z) = \Phi(z)^n D(z; \sigma) (1 + o(1)), \quad |\Phi(z)| > 1, \quad n \rightarrow \infty, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} P_{n,2}(x) &= \Phi^+(x)^n D^+(x; \sigma) + \Phi^-(x)^n D^-(x; \sigma) + o(1) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\sigma(x)}} \cos(n \arccos x + \theta(x)) + o(1), \quad x \in \Delta, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (61)$$

где $o(1) = O((\log n)^{1-\lambda})$ при $n \rightarrow \infty$ и

$$\theta(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} \int_{\Delta} \frac{\sigma(x) - \sigma(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Асимптотические формулы (60), (61) представляют собой классические асимптотические формулы Бернштейна (ср. (13), (14)).

§ 4. Доказательство лемм 1 и 2

В этом параграфе мы докажем вспомогательные утверждения – леммы 1 и 2 (ср. [1, леммы 5.1 и 5.2]).

4.1. Доказательство леммы 1. Пусть $\zeta = e^{i\theta} \in \Gamma$, $z = r\zeta$, $r < 1$. Для функции $F(z)$ имеем

$$F(r\zeta) = \int_{|t|=1} f(t) \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - r\zeta} dt + g(\zeta) \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - r\zeta} dt =: F_1(r\zeta) + F_2(r\zeta). \quad (62)$$

Для функции F_2 имеем

$$F_2(r\zeta) := g(\zeta) \int_{|t|=1} \frac{f(t)}{t - r\zeta} dt = g(\zeta) \int_{|t|=R} \frac{f(t)}{t - r\zeta} dt.$$

Тем самым, для F_2 все утверждения леммы 1 справедливы.

Рассмотрим теперь функцию

$$F_1(r\zeta) := \int_{|t|=1} f(t) \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - r\zeta} dt.$$

Положим

$$G_r(t; \zeta) := \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - r\zeta}.$$

Поскольку для некоторого $r_0 \in (0, 1)$ при $r \in (r_0, 1)$ имеет место равномерная по $t, \zeta \in \Gamma$ оценка $1/|t - r\zeta| \leq c'_1/|t - \zeta|$, то

$$|G_r(t; \zeta)| \leq \frac{c'_2 C}{|t - \zeta|} |\log |t - \zeta||^{-\lambda}$$

равномерно по $t, \zeta \in \Gamma$ при всех $r \in (r_0, 1)$. Кроме того,

$$G_r(t; \zeta) \rightarrow G(t; \zeta) := \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \quad \text{при } r \rightarrow 1 - 0, \quad t \neq \zeta.$$

Следовательно, $|F_1(z)| \leq c'_2 C M$, $|z| \leq 1$, $M = \max_{\zeta \in \overline{K_R}} |f(\zeta)|$. Так как $G(t; \zeta) \in L_1(\Gamma)$ по $t \in \Gamma$ при фиксированном $\zeta \in \Gamma$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$F_1(z) = F_1(r\zeta) = \int_{|t|=1} f(t) \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - r\zeta} dt \rightarrow \int_{|t|=1} f(t) \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} dt =: F_1(\zeta) \quad (63)$$

при $r \rightarrow 1 - 0$. Утверждения 1) и 2) доказаны.

Докажем утверждение 3). Пусть $\zeta \in \Gamma$ фиксировано, $\zeta' = \zeta e^{i\theta'}$, $|\zeta' - \zeta| = \delta$, $\delta \in (0, 1/4)$ достаточно мало. Положим $\gamma = \{t \in \Gamma: |t - \zeta| \leq \sqrt{\delta}\}$. Тогда имеем (см. (63))

$$F_1(\zeta') - F_1(\zeta) = \int_{|t|=1} \{G(t; \zeta') - G(t; \zeta)\} f(t) dt = \int_{\gamma} \{\cdot\} f(t) dt + \int_{\Gamma \setminus \gamma} \{\cdot\} f(t) dt.$$

Пусть

$$I_1 := \int_{\gamma} \{\cdot\} f(t) dt, \quad I_2 := \int_{\Gamma \setminus \gamma} \{\cdot\} f(t) dt.$$

Оценим сначала первый интеграл I_1 . Пусть $\zeta = e^{i\theta_0}$, $t = e^{i\theta_1}$, $\theta = \theta_1 - \theta_0$ и

$$I_1(\zeta) = \int_{\gamma} \frac{g(t) - g(\zeta')}{t - \zeta'} f(t) dt - \int_{\gamma} \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} f(t) dt.$$

Тогда $\zeta - t = \zeta(1 - e^{i\theta})$, следовательно, $|\zeta - t| = 2 \sin |\theta/2|$ и

$$|I_1(\zeta)| \leq c'_4 CM \int_0^{c'_5 \sqrt{\delta}} |\log \theta|^{-\lambda} \frac{d\theta}{\theta} = c'_6 CM |\log \sqrt{\delta}|^{-\lambda+1} \leq c'_7 CM |\log \delta|^{-\mu}, \quad (64)$$

где $M = \max_{1 \leq |z| \leq R} |f(z)|$. Используя тождество $g(t) - g(\zeta) = g(t) - g(\zeta') + g(\zeta') - g(\zeta)$, для второго интеграла I_2 получаем $I_2 = I'_2 + I''_2$, где

$$I'_2 = \int_{\gamma'} \frac{g(\zeta) - g(\zeta')}{t - \zeta} f(t) dt = (g(\zeta) - g(\zeta')) \int_{\gamma'} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt,$$

$$I''_2 = \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta')\} \left\{ \frac{1}{t - \zeta'} - \frac{1}{t - \zeta} \right\} f(t) dt = (\zeta' - \zeta) \int_{\gamma'} \frac{g(t) - g(\zeta')}{(t - \zeta')(t - \zeta)} f(t) dt,$$

где $\gamma' = \Gamma \setminus \gamma$. Нетрудно увидеть, что

$$|I'_2| \leq c'_8 CM |\log \delta|^{-\mu}.$$

При $\delta \in (0, 1/4)$ имеем $1/2 \leq |t - \zeta'|/|t - \zeta| \leq 3/2$ для $|\zeta - \zeta'| = \delta$, $|t - \zeta| \geq \sqrt{\delta}$. Следовательно,

$$|I''_2| \leq c'_9 CM |\zeta - \zeta'| \int_{\gamma'} \frac{|g(t) - g(\zeta')|}{|t - \zeta'|^2} |dt|$$

$$\leq c'_{10} CM |\zeta - \zeta'| \left\{ \int_{\sqrt{\delta}}^{1/2} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\lambda} \frac{dx}{x^2} + c'_{11} \right\} \leq c'_{12} CM \frac{|\zeta - \zeta'|}{\sqrt{\delta}} \leq c'_{13} CM \sqrt{\delta}.$$

Тем самым, $|I_2| \leq c'_{14} CM |\log \delta|^{-\mu}$. Отсюда и из (64) вытекает утверждение 3) леммы 1. Лемма доказана.

4.2. Доказательство леммы 2. Для $\zeta \in \Gamma$ и $r \in (1, R)$ имеем

$$F_n(\zeta) = \int_{\Gamma} \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(t) dt}{t^{2n}} + g(\zeta) \int_{|t|=r} \frac{f(t) dt}{(t - \zeta)t^{2n}} =: F_{n,1}(\zeta) + F_{n,2}(\zeta). \quad (65)$$

Для функции $F_{n,2}(\zeta) := g(\zeta) \int_{|t|=r} \frac{f(t) dt}{(t - \zeta)t^{2n}}$ все утверждения леммы 2 справедливы.

Рассмотрим функцию

$$F_{n,1}(\zeta) := \int_{\Gamma} \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(t) dt}{t^{2n}}. \quad (66)$$

Пусть $\beta = \beta_n = e^{i\pi/(2n)} = 1 + \delta$, $\delta = \delta_n = i\pi/(2n) + O(1/n^2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Деля в (66) замену переменной $t \mapsto \beta t = t + \delta t$ и принимая во внимание равенство $\beta^{2n} = -1$, получим

$$F_{n,1}(\zeta) = -\beta \int_{\Gamma} \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}}. \quad (67)$$

Используя тождество $f(t) = f(\beta t) - (f(\beta t) - f(t))$, из (66) и (67) получаем

$$\begin{aligned} F_{n,1}(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} - \beta \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(\beta t) - f(t)}{t^{2n}} dt =: J_1 + J_2. \end{aligned} \quad (68)$$

Для второго интеграла

$$J_2 := -\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} \frac{f(\beta t) - f(t)}{t^{2n}} dt \quad (69)$$

справедлива оценка

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq C \int_{\Gamma} \frac{|\log |t - \zeta||^{-\lambda}}{|t - \zeta|} |f(t + \delta t) - f(t)| |dt| \\ &\leq CM' \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \int_{\Gamma} |\log |t - \zeta||^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t - \zeta|} \\ &\leq c'_{17} CM' \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \leq c'_{18} CM' (\log n)^{-\mu}. \end{aligned} \quad (70)$$

Оценим теперь первый интеграл

$$J_1 := \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ \frac{g(t) - g(\zeta)}{t - \zeta} - \beta \frac{g(\beta t) - g(\zeta)}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}}.$$

Пусть $\gamma = \{t \in \Gamma : |t - \zeta| \leq \sqrt{|\delta|}\}$, $\gamma' = \Gamma \setminus \gamma$. Тогда

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \left\{ \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus \gamma} \left\{ \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} \right\} \right\} =: J'_1 + J''_1. \quad (71)$$

Для J'_1 имеем

$$\begin{aligned} |J'_1| &\leq c'_{21} CM \left\{ \int_{\gamma} \left(\log \frac{1}{|t - \zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t - \zeta|} + \int_{\gamma} \left(\log \frac{1}{|\beta t - \zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|\beta t - \zeta|} \right\} \\ &\leq c'_{22} CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\mu} \leq c'_{23} CM (\log n)^{-\mu}. \end{aligned} \quad (72)$$

Для оценки J''_1 воспользуемся тождеством $g(\beta t) - g(\zeta) = g(\beta t) - g(t) + g(t) - g(\zeta)$:

$$\begin{aligned} J''_1 &= -\beta \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \frac{g(\beta t) - g(t)}{\beta t - \zeta} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} + \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \left\{ \frac{1}{t - \zeta} - \frac{\beta}{\beta t - \zeta} \right\} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (73)$$

Для I_1 имеем:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{c'_{24}CM}{2} \int_{\gamma'} \left(\log \frac{1}{|\beta t - t|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|\beta t - \zeta|} \leq c'_{25}CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\lambda} \int_{\gamma'} \frac{|dt|}{|t - \zeta/\beta|} \\ &\leq c'_{26}CM \left(\log \frac{1}{|\delta|} \right)^{-\lambda} \log \frac{1}{|\delta|} = c'_{27}CM \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{-\mu} \leq c'_{28}CM (\log n)^{-\mu}. \end{aligned} \quad (74)$$

Для I_2 , учитывая равенство $\beta = 1 + \delta$, получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \frac{\beta\zeta - \zeta}{(t - \zeta)(\beta t - \zeta)} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}} \\ &= \frac{\delta\zeta}{2} \int_{\gamma'} \{g(t) - g(\zeta)\} \frac{1}{(t - \zeta)(\beta t - \zeta)} \frac{f(\beta t) dt}{t^{2n}}, \end{aligned} \quad (75)$$

откуда при $\gamma'' = \{t \in \gamma' : \sqrt{|\delta|} \leq |\zeta - t| \leq 1/2\}$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq c'_{29}M|\delta|C \int_{\gamma''} \left(\log \frac{1}{|t - \zeta|} \right)^{-\lambda} \frac{|dt|}{|t - \zeta|^2} \leq c'_{30}CM|\delta| \int_{\sqrt{|\delta|}}^{1/2} \left(\log \frac{1}{x} \right)^{-\lambda} \frac{dx}{x^2} \\ &\leq c'_{31}CM|\delta| \frac{1}{\sqrt{|\delta|}} \leq c'_{32}CM\sqrt{|\delta|} \leq c'_{33}CM \frac{1}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (76)$$

Тем самым, $|J_1| \leq c'_{34}CM(\log n)^{-\mu}$. Отсюда и из (70) следует утверждение леммы 2.

Список литературы

1. J. Nuttall, “Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation”, *Constr. Approx.*, **6:2** (1990), 157–166.
2. С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191:9** (2000), 81–114; англ. пер.: S. P. Suetin, “Uniform convergence of Padé diagonal approximants for hyperelliptic functions”, *Sb. Math.*, **191:9** (2000), 1339–1373.
3. A. I. Aptekarev, M. L. Yattselev, *Padé approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials*, 2011, 45 pp., arXiv: 1109.0332.
4. M. L. Yattselev, “Nuttall’s theorem with analytic weights on algebraic S -contours”, *J. Approx. Theory*, **190** (2015), 73–90.
5. J. Nuttall, G. M. Trojan, “Asymptotics of Hermite–Padé polynomials for a set of functions with different branch points”, *Constr. Approx.*, **3:1** (1987), 13–29.
6. A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, “Asymptotics of Hermite–Padé rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)”, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, **2008:4** (2008), rpm007, 128 с.
7. A. I. Aptekarev, W. Van Assche, “Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Padé approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight”, *J. Approx. Theory*, **129:2** (2004), 129–166.
8. А. В. Комлов, С. П. Суетин, “Асимптотическая формула для полиномов, ортонормированных относительно переменного веса. II”, *Матем. сб.*, **205:9** (2014), 121–144; англ. пер.: A. V. Komlov, S. P. Suetin, “An asymptotic formula for polynomials orthonormal with respect to a varying weight. II”, *Sb. Math.*, **205:9** (2014), 1334–1356.

9. С. П. Суетин, “Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений”, *Совр. пробл. матем.*, **6**, МИАН, М., 2006, 3–74; англ. пер.: S. P. Suetin, “Comparative asymptotics of solutions and trace formulas for a class of difference equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**: suppl. 2 (2011), S96–S137.
10. А. А. Гончар, С. П. Суетин, “Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа”, *Совр. пробл. матем.*, **5**, МИАН, М., 2004, 3–67; англ. пер.: A. A. Gonchar, S. P. Suetin, “On Padé approximants of Markov-type meromorphic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**: suppl. 2 (2011), S58–S95.
11. А. И. Аптекарев, В. И. Буслаев, А. Мартинес-Финкельштейн, С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены”, *УМН*, **66**:6(402) (2011), 37–122; англ. пер.: A. I. Aptekarev, V. I. Buslaev, A. Martínez-Finkelshtein, S. P. Suetin, “Padé approximants, continued fractions, and orthogonal polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **66**:6 (2011), 1049–1131.
12. С. Н. Бернштейн, *О многочленах, ортогональных в конечном интервале*, ОНТИ, Харьков, 1937, 128 с.
13. С. П. Суетин, “О сильной асимптотике многочленов, ортогональных относительно комплексного веса”, *Матем. сб.*, **200**:1 (2009), 81–96; англ. пер.: S. P. Suetin, “Strong asymptotics of polynomials orthogonal with respect to a complex weight”, *Sb. Math.*, **200**:1 (2009), 77–93.
14. А. Р. Magnus, “Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants”, *J. Comput. Appl. Math.*, **19**:1 (1987), 23–38.
15. Н. И. Ахиезер, “Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах”, *Докл. АН СССР*, **134**:1 (1960), 9–12; англ. пер.: N. I. Akhiezer, “Orthogonal polynomials on several intervals”, *Soviet Math. Dokl.*, **1** (1960), 989–992.
16. J. Nuttall, R. S. Singh, “Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs”, *J. Approximation Theory*, **21**:1 (1977), 1–42.
17. Г. Cere, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962, 500 с.; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **XXIII**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975, xiii+432 pp.
18. Н. И. Ахиезер, “Чебышевское направление в теории функций”, *Математика XIX века*, Вып. 3, ред. А. Н. Колмогоров, А. П. Юшкевич, Наука, М., 1987, 9–79.
19. П. Л. Чебышев, “О непрерывных дробях”, *Ученые зап. Имп. Акад. Наук*, **III** (1855), 636–664; *Полное собрание сочинений*, т. II, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 103–126; фр. пер.: P. Tchébycheff, “Sur les fractions continues”, *J. Math. Pures Appl.* (2), **3** (1858), 289–323.
20. W. Stekloff (V. Steklov), “Sur le développement des fonctions continues en séries de polynômes de Tchébychef”, *Извѣстія Россійской Академіи Наукъ. VI серия*, **15** (1921), 249–266.
21. H. Stahl, “Three different approaches to a proof of convergence for Padé approximants”, *Rational approximation and applications in mathematics and physics* (Łańcut, 1985), *Lecture Notes in Math.*, **1237**, Springer, Berlin, 1987, 79–124.
22. Дж. Спрингер, *Введение в теорию римановых поверхностей*, ИЛ, М., 1960, 343 с.; пер. с англ.: G. Springer, *Introduction to Riemann surfaces*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1957, viii+307 pp.
23. Е. М. Чирка, “Римановы поверхности”, *Лекц. курсы НОЦ*, **1**, МИАН, М., 2006, 3–105.
24. S. Dumas, *Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues*, Thèse, Zürich, 1908, 59 pp.
25. А. И. Аптекарев, “Точные константы рациональных аппроксимаций аналитических функций”, *Матем. сб.*, **193**:1 (2002), 3–72; англ. пер.: A. I. Aptekarev, “Sharp

- constants for rational approximations of analytic functions”, *Sb. Math.*, **193**:1 (2002), 1–72.
26. А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; англ. пер.: A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
 27. Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988, 256 с.; англ. пер.: Е. М. Nikishin, V. N. Sorokin, *Rational approximations and orthogonality*, Transl. Math. Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, viii+221 pp.
 28. А. А. Гончар, “Рациональные аппроксимации аналитических функций”, *Совр. пробл. матем.*, **1**, МИАН, М., 2003, 83–106; англ. пер.: A. A. Gonchar, “Rational approximation of analytic functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **272**: suppl. 2 (2011), S44–S57.
 29. J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42**:4 (1984), 299–386.
 30. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. I, II, Мир, М., 1965, 615 с., 537 с.; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, v. I, II, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1959, xii+383 pp., vii+354 pp.

НИКОЛАЙ РУМЕНОВ ИКОНОМОВ
(NIKOLAJ R. IKONOMOV)
Institute of Mathematics and Informatics,
Sofia, Bulgarian Academy of Sciences
E-mail: nikonov@math.bas.bg

Поступило в редакцию
01.04.2015

РАЛИЦА КРУМОВА КОВАЧЕВА
(RALITZA K. KOVACHEVA)
Institute of Mathematics and Informatics,
Sofia, Bulgarian Academy of Sciences
E-mail: rkovach@math.bas.bg

СЕРГЕЙ ПАВЛОВИЧ СУЕТИН
(SERGEY P. SUETIN)
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: suetin@mi.ras.ru