Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий, Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 3, 67–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8398>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 15:59:11

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий

Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых генных сетях

Рассматриваются кольцевые цепочки однонаправленно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, являющиеся математическими моделями искусственных генных сетей. Исследуются вопросы о существовании и устойчивости в этих цепочках специальных периодических решений – так называемых бегущих волн. Устанавливается, что с ростом количества звеньев цепочки число таких периодических решений неограниченно растет. Однако устойчиво среди них не более одной бегущей волны. Способ выбора устойчивого цикла указывается явным образом.

Библиография: 17 наименований.

Ключевые слова: цепочка однонаправленно связанных уравнений, искусственная генная сеть, бегущая волна, асимптотика, устойчивость.

DOI: 10.4213/im8398

§ 1. Описание математических моделей и методов исследования

1.1. Искусственные генные сети. Интерес к искусственным генетическим осцилляторам вызван тем обстоятельством, что они являются упрощенными моделями таких ключевых биологических процессов, как клеточный цикл и циркадные ритмы. Простейший генетический осциллятор, предложенный в [1] и названный репрессилатором, состоит как минимум из трех элементов. Каждый из этих элементов однонаправленно ингибирует соседний (см. рис. 1, на котором элемент A подавляет синтез элемента B , элемент B подавляет синтез элемента C , а третий элемент C , замыкая цикл, подавляет синтез элемента A).

Рис. 1

Работа выполнена при поддержке проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258 и при поддержке РФФИ (грант № 15-01-04066а).

© А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, В. А. Садовничий, 2016

Математическая модель системы, показанной на рис. 1, имеет вид

$$\dot{m}_j = -m_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad \dot{u}_j = \varepsilon(m_j - u_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где $u_0 = u_3$. Следуя [1], считаем, что каждый элемент осциллятора представляет собой набор из мРНК (матричной рибонуклеиновой кислоты) с концентрацией m_j и белка с концентрацией u_j . Предполагаем, далее, что изменение во времени концентрации m_j характеризуется процессами синтеза и деградации. Первый из этих процессов описывается функцией $\alpha/(1 + u_{j-1}^\gamma)$, где u_{j-1} – концентрация белка-репрессора для j -й мРНК, $\gamma = \text{const} > 0$ – коэффициент кооперативности, $\alpha = \text{const} > 0$ – скорость транскрипции в отсутствие репрессора. Второй процесс описывается линейным слагаемым $-m_j$.

В случае белков с концентрацией u_j предполагаем, что их динамика представлена линейными процессами синтеза (слагаемое εm_j во втором уравнении системы (1.1)) и деградации (слагаемое $-\varepsilon u_j$ в том же уравнении). Здесь $\varepsilon = \text{const} > 0$ – отношение скорости деградации белка к скорости деградации мРНК.

Как правило, исследование модели (1.1) проводится при вполне естественном с биологической точки зрения предположении о малости ε . В этой ситуации после замены времени $\varepsilon t \rightarrow t$ получается система

$$\varepsilon \dot{m}_j = -m_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad \dot{u}_j = m_j - u_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2)$$

к которой применим известный принцип сведения А. Н. Тихонова (см. [2]). По этому принципу положим $\varepsilon = 0$ в (1.2) и выразим переменные m_j через u_{j-1} . В результате приходим к трехмерной системе

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.3)$$

где $u_0 = u_3$.

Вопрос об автоколебаниях системы (1.3) изучался многими авторами (см., например, [3]–[5]). В указанных работах рассматривался случай, когда ее устойчивый цикл возникает в результате бифуркации Андронова–Хопфа, а также случай $\gamma \gg 1$.

Помимо модели (1.3) к настоящему времени предложена целая серия более общих систем, описывающих искусственные генные сети. Например, в статьях [6], [7] введено в рассмотрение четыре класса таких систем, причем не обязательно кольцевых. Если же ограничиться простейшими кольцевыми системами, то типовыми представителями упомянутых классов будут модели

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + \delta_1 u_{j-1}^{\gamma_1} + \delta_2 u_{j-2}^{\gamma_2} + \dots + \delta_s u_{j-s}^{\gamma_s}}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (1.4)$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{(1 + \delta_1 u_{j-1}^{\gamma_1})(1 + \delta_2 u_{j-2}^{\gamma_2}) \dots (1 + \delta_s u_{j-s}^{\gamma_s})}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (1.5)$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^{\gamma_1} u_{j-2}^{\gamma_2} \dots u_{j-s}^{\gamma_s}}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (1.6)$$

$$\dot{u}_j = -u_j + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k}{1 + \delta_k u_{j-k}^{\gamma_k}}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.7)$$

Во всех случаях (1.4)–(1.7) предполагается, что $m > s + 1$, $u_{-k} = u_{m-k}$ при $k = 0, 1, \dots, s - 1$, $\alpha = \text{const} > 0$, $\alpha_k, \delta_k, \gamma_k = \text{const} > 0$, $k = 1, \dots, s$.

Бегущими волнами систем (1.4)–(1.7) будем называть специальные периодические решения, допускающие представления вида

$$u_j = u(t + (j - 1)\Delta), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad \Delta = \text{const} > 0. \quad (1.8)$$

В настоящей статье вопросы существования и устойчивости указанных решений разбираются для систем (1.4), (1.5) при дополнительных предположениях

$$\gamma_k = \frac{\gamma_k^0}{\varepsilon}, \quad \gamma_k^0, \delta_k = \text{const} > 0, \quad \alpha = \text{const} > 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.9)$$

Следует добавить, что бегущие волны (1.8) являются наиболее естественными аттракторами кольцевых цепочек однонаправленно связанных уравнений. Однако в таких цепочках возможны и более сложные колебания. В качестве примера сошлемся на статью [8], в которой с помощью численного анализа показана реализуемость хаотического автоколебательного режима в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов. Необходимо также отметить целую серию работ (см., например, [9]–[11]), посвященных проблеме перехода к хаосу в однонаправленно связанных цепочках осцилляторов при подходящем увеличении числа звеньев.

1.2. Общая схема исследования. Используемые нами методы анализа бегущих волн представляют собой дальнейшее развитие методов, предложенных в статьях [12]–[14]. А поскольку эти методы достаточно универсальны, то имеет смысл изложить их в самой общей ситуации, т. е. для произвольной кольцевой системы

$$\dot{x}_j = f(x_j, x_{j-1}, \dots, x_{j-s}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.10)$$

Здесь $m > s + 1$, $x_j = x_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $x_{-k} = x_{m-k}$ при $k = 0, 1, \dots, s - 1$, а вектор-функция $f(x, y_1, \dots, y_s)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ бесконечно дифференцируема по всем своим переменным $x \in \mathbb{R}^n$, $y_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, s$.

Для поиска циклов системы (1.10) вида (1.8) рассмотрим вспомогательное уравнение с запаздываниями

$$\dot{x} = f(x, x(t - \Delta), x(t - 2\Delta), \dots, x(t - s\Delta)), \quad (1.11)$$

где $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$. Будем считать, что на некотором интервале $(\Delta_1, \Delta_2) \subset (0, +\infty)$ изменения параметра Δ уравнение (1.11) допускает нетривиальное (отличное от константы) периодическое решение $x = x_*(t, \Delta)$ периода $T_* = T_*(\Delta) > 0$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *Предположим, что при некотором натуральном p уравнение*

$$T_*(\Delta) = \frac{m\Delta}{p} \quad (1.12)$$

имеет корень $\Delta = \Delta_{(p)} \in (\Delta_1, \Delta_2)$. Тогда в системе (1.10) данному корню соответствует цикл (бегущая волна)

$$C_p: x_j = x_{(p)}(t + (j - 1)\Delta_{(p)}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.13)$$

периода $T_{(p)} = m\Delta_{(p)}/p$, где $x_{(p)}(t) = x_*(t, \Delta)|_{\Delta=\Delta_{(p)}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что поскольку все функции

$$x_j(t) = x_{(p)}(t + (j-1)\Delta_{(p)}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.14)$$

являются решениями одного и того же уравнения (1.11) при $\Delta = \Delta_{(p)}$, то выполняются равенства

$$\begin{aligned} \dot{x}_j(t) &= f(x_j(t), x_j(t - \Delta_{(p)}), x_j(t - 2\Delta_{(p)}), \dots, x_j(t - s\Delta_{(p)})), \\ j &= 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Учтем в (1.15) вытекающие из (1.12), (1.14) соотношения

$$\begin{aligned} x_j(t - k\Delta_{(p)}) &= x_{j-k}(t), \quad j = k+1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, s, \\ x_j(t - k\Delta_{(p)}) &= x_j(t + (m-k)\Delta_{(p)}) = x_{m-k+j}(t), \quad j = 1, \dots, k, \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Тем самым получаем, что функции (1.14) удовлетворяют исходной системе (1.10). Лемма доказана.

Вопрос об устойчивости цикла (1.13) сводится к вопросу о расположении мультипликаторов линейной системы

$$\dot{h}_j = \sum_{k=0}^s A_{k,p}(t + (j-1)\Delta_{(p)})h_{j-k}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.16)$$

где $h_j = h_j(t) \in \mathbb{R}^n$, $h_{-k} = h_{m-k}$, $k = 0, 1, \dots, s-1$, а матрицы $A_{k,p}(t)$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} A_{0,p}(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_{(p)}(t), x_{(p)}(t - \Delta_{(p)}), \dots, x_{(p)}(t - s\Delta_{(p)})), \\ A_{k,p}(t) &= \frac{\partial f}{\partial y_k}(x_{(p)}(t), x_{(p)}(t - \Delta_{(p)}), \dots, x_{(p)}(t - s\Delta_{(p)})), \quad k = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Наряду с (1.16) в дальнейшем будем использовать вспомогательное линейное уравнение с запаздываниями

$$\dot{h} = \sum_{k=0}^s \varkappa^k A_{k,p}(t)h(t - k\Delta_{(p)}), \quad (1.17)$$

где $h(t) \in \mathbb{C}^n$, $\varkappa$ – произвольный комплексный параметр. Точнее говоря, нас будут интересовать его мультипликаторы $\nu_l(\varkappa)$, $l = 1, 2, \dots$, занумерованные в порядке убывания модулей.

Смысл термина “мультипликатор” применительно к уравнению с запаздываниями (1.17) нуждается в некоторых пояснениях. Рассмотрим банахово пространство $E = C([-s\Delta_{(p)}, 0]; \mathbb{C}^n)$ непрерывных при $-s\Delta_{(p)} \leq t \leq 0$ вектор-функций $h^0(t) = (h_1^0(t), \dots, h_n^0(t))$ с нормой

$$\|h^0\|_E = \max_{1 \leq k \leq n} \max_{-s\Delta_{(p)} \leq t \leq 0} |h_k^0(t)|.$$

Оператором монодромии уравнения (1.17) назовем линейный ограниченный оператор $\mathcal{V}: E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $h^0(t) \in E$ по правилу:

$$\mathcal{V}h^0 = h\left(t + \frac{m\Delta_{(p)}}{p}\right), \quad -s\Delta_{(p)} \leq t \leq 0, \quad (1.18)$$

где $h(t)$ – решение уравнения (1.17) на отрезке времени $0 \leq t \leq m\Delta_{(p)}/p$ с начальной функцией $h^0(t)$, $-s\Delta_{(p)} \leq t \leq 0$. Отметим, что спектр этого оператора заведомо дискретен, так как некоторая его степень компактна (в случае $m/p \geq s$ компактен и сам $\mathcal{V}$). Мультипликаторами уравнения (1.17), по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений, будем называть собственные значения оператора (1.18).

В работе [12] для решения вопроса о связи между мультипликаторами систем (1.16) и (1.17) (в случае $s = 1$) был предложен метод подстройки по параметру $\varkappa$. Ниже мы убедимся, что этот метод применим и в случае $s > 1$, но прежде всего изложим его суть.

Выберем из счетного семейства мультипликаторов системы (1.17) любой мультипликатор $\nu(\varkappa)$ и рассмотрим соответствующее ему уравнение $(\nu(\varkappa))^p = \varkappa^m$. Как будет показано ниже, каждому корню $\varkappa = \varkappa_0 \neq 0$ этого уравнения соответствует мультипликатор системы (1.16), задающийся равенством $\nu = \nu(\varkappa_0)$. Верно и обратное утверждение: на любой мультипликатор ν цикла (1.13) можно “настроиться” за счет выбора параметра $\varkappa$. Иными словами, любой мультипликатор ν данного цикла допускает представление $\nu = \nu(\varkappa_0)$, где $\nu(\varkappa)$ – один из мультипликаторов вспомогательной системы (1.17), а $\varkappa_0$ – корень соответствующего уравнения $(\nu(\varkappa))^p = \varkappa^m$.

В статьях [13], [14] была отмечена аналогия между методом подстройки и процессом настройки радиоприемника на нужную станцию. Действительно, набор всех ненулевых корней указанных уравнений можно рассматривать как совокупность “радиочастот”, на которых работают интересующие нас станции. Сам же факт “настройки на станцию” соответствует конкретному выбору одного из этих корней и получению на выходе соответствующего мультипликатора $\nu = \nu(\varkappa_0)$ системы (1.16).

Для придания методу подстройки строгого смысла рассмотрим семейство уравнений

$$[\nu_l(\varkappa)]^p = \varkappa^m, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (1.19)$$

ЛЕММА 1.2. Для каждого мультипликатора ν системы (1.16) найдется такое натуральное l_0 , что

$$\nu = \nu_{l_0}(\varkappa_0), \quad (1.20)$$

где $\varkappa_0$ – один из корней уравнения (1.19) при $l = l_0$. И обратно, если при некотором $l = l_0$ уравнение (1.19) имеет ненулевой корень $\varkappa = \varkappa_0$, то у исходной системы (1.16) существует мультипликатор вида (1.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем любой мультипликатор $\nu = \rho_0 \exp(i\varphi_0)$, где $\rho_0 > 0$, $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$, системы (1.16) и предположим, что он является простым. В этом случае ему отвечает единственное (с точностью до множителя) решение

Ляпунова–Флоке, т. е. решение вида

$$\begin{aligned} h_j &= \exp(\mu_0 t) h_{*,j}(t), \quad h_{*,j}(t) \in \mathbb{C}^n, \quad h_{*,j} \left(t + \frac{m\Delta_{(p)}}{p} \right) \equiv h_{*,j}(t), \\ j &= 1, 2, \dots, m, \quad \mu_0 = \frac{p}{m\Delta_{(p)}} (\ln \rho_0 + i\varphi_0). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Отметим, что поскольку система (1.16) инвариантна относительно замен

$$t - \Delta_{(p)} \rightarrow t, \quad h_{j-1} \rightarrow h_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (1.22)$$

то под действием этих замен решение (1.21) (в силу его единственности) перейдет в решение

$$h_j = \lambda \exp(\mu_0(t + \Delta_{(p)})) h_{*,j}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $\lambda \neq 0$ – некоторая комплексная постоянная. Таким образом, имеет место равенство

$$\Lambda h_*(t + \Delta_{(p)}) = \lambda h_*(t), \quad (1.23)$$

где $h_*(t) =: (h_{*,1}(t), \dots, h_{*,m}(t))$, а элементами квадратной nm -мерной матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix}$$

являются нулевые и единичные матрицы размера $n \times n$.

Из установленного выше соотношения (1.23) следует, что

$$h_{*,m-j}(t) = \lambda^{j+1} h_{*,1}(t - (j+1)\Delta_{(p)}), \quad j = 0, 1, \dots, m-2, \quad \lambda^m = 1. \quad (1.24)$$

Компонента $h_{*,1}(t)$ в силу (1.16) является решением линейного неоднородного уравнения

$$\dot{h} = -\mu_0 h + A_{0,p}(t)h + \sum_{k=1}^s A_{k,p}(t)h_{*,m-k+1}(t).$$

Так как функции $h_{*,m-k+1}(t)$ можно записать через $h_{*,1}(t)$ с помощью следующих из (1.24) равенств

$$h_{*,m-k+1}(t) = \lambda^k h_{*,1}(t - k\Delta_{(p)}), \quad k = 1, \dots, s,$$

то компонента $h_{*,1}(t)$ удовлетворяет также и уравнению с запаздываниями

$$\dot{h} = -\mu_0 h + \sum_{k=0}^s \lambda^k A_{k,p}(t)h(t - k\Delta_{(p)}). \quad (1.25)$$

Прделанные построения показывают, что уравнение (1.25) заведомо имеет единичный мультипликатор. Сделаем в этом уравнении замену $\exp(\mu_0 t)h \rightarrow h$.

В результате этой замены единичный мультипликатор перейдет в мультипликатор $\exp(m\mu_0\Delta_{(p)}/p)$, а само уравнение (1.25) – в уравнение (1.17) при $\varkappa = \lambda \cdot \exp(\mu_0\Delta_{(p)})$. Таким образом, с необходимостью найдется номер l_0 , для которого

$$\nu_{l_0}(\varkappa)|_{\varkappa=\lambda \cdot \exp(\mu_0\Delta_{(p)})} = \exp \frac{m\mu_0\Delta_{(p)}}{p} = \nu.$$

Отсюда и из очевидного равенства $\nu^p = \varkappa^m$ вытекают требуемые соотношения (1.19), (1.20).

В случае, когда мультипликатор ν кратный, рассуждения аналогичны. Действительно, пусть данному мультипликатору отвечает ровно k_0 линейно независимых решений Ляпунова–Флоке. Тогда эти решения можно записать в матричной форме $\exp(\mu_0 t)H(t)$, где столбцами матрицы $H(t)$ размера $mn \times k_0$ являются линейно независимые $T_{(p)}$ -периодические вектор-функции. Далее, в силу инвариантности системы (1.16) под действием замен (1.22) вместо (1.23) будет выполняться равенство

$$\Lambda H(t + \Delta_{(p)}) = H(t)D \quad (1.26)$$

с некоторой невырожденной постоянной матрицей D размера $k_0 \times k_0$.

Свойство (1.26) позволяет свести проблему обоснования формул (1.19), (1.20) к предыдущему случаю. Для этого зафиксируем некоторое собственное значение λ матрицы D , через e обозначим отвечающий ему собственный вектор. Тогда, как нетрудно увидеть, для вектор-функции $h_*(t) = H(t)e$ справедливо соотношение (1.23). Последующие рассуждения совпадают с изложенными выше.

Итак, мы установили, что любой мультипликатор ν системы (1.16) может быть представлен в виде (1.20), где $\varkappa_0$ удовлетворяет уравнению (1.19) с номером l_0 . Убедимся теперь в справедливости обратного утверждения. Предположим, что уравнение (1.19) с номером $l = l_0$ допускает корень $\varkappa = \varkappa_0 \neq 0$. Тогда уравнение

$$\dot{h} = -\mu_0 h + \sum_{k=0}^s \varkappa_0^k \exp(-\mu_0 k \Delta_{(p)}) A_{k,p}(t) h(t - k \Delta_{(p)}) \quad (1.27)$$

при

$$\mu_0 = \frac{p}{m\Delta_{(p)}} (\ln \rho_0 + i\varphi_0), \quad \rho_0 > 0, \quad 0 \leq \varphi_0 < 2\pi, \quad (1.28)$$

где $\rho_0 \exp(i\varphi_0) = \nu_{l_0}(\varkappa_0)$, допускает нетривиальное $T_{(p)}$ -периодическое решение $h = \tilde{h}(t)$. Далее, введем в рассмотрение величину

$$\lambda = \varkappa_0 \exp(-\mu_0 \Delta_{(p)}) \quad (1.29)$$

и заметим, что в силу (1.28) и соотношения $\varkappa_0^m = [\nu_{l_0}(\varkappa_0)]^p$ указанное значение параметра λ удовлетворяет требуемому равенству $\lambda^m = 1$ (см. (1.24)). Отсюда следует, что при выбранном λ уравнения (1.27) и (1.25) совпадают.

На заключительном этапе доказательства рассмотрим функцию $h_{*,1}(t) = \tilde{h}(t)$, а остальные компоненты $h_{*,j}(t)$, $j = 2, \dots, m$, определим с помощью равенств (1.24), (1.29). Из установленной выше связи между уравнениями (1.27)

и (1.25) получаем решение Ляпунова–Флоке (1.21) исходной системы (1.16), отвечающее мультипликатору

$$\nu = \exp \frac{m\mu_0\Delta_{(p)}}{p} = \nu_{l_0}(\varkappa_0).$$

Лемма 1.2 доказана.

Установленные леммы дают некую общую методику исследования периодических решений типа бегущих волн в кольцевых системах (1.10). Действительно, вопрос о существовании циклов вида (1.13) сводится к нахождению цикла $x_*(t, \Delta)$ вспомогательного уравнения с запаздываниями (1.11) и к поиску корней уравнений (1.12). Вопрос об устойчивости бегущих волн решается отдельно и в силу леммы 1.2 состоит в анализе расположения корней уравнений (1.19). Хотя количество уравнений в системе (1.19), вообще говоря, счетно, совокупность всех их ненулевых корней заведомо конечна (в противном случае конечномерная система (1.16) имела бы счетное число различных мультипликаторов, что невозможно).

Проблемы анализа вспомогательных уравнений (1.11), (1.17), лежащие в основе описанной выше методики, в общем случае нелокальны. Но в некоторых ситуациях, когда есть возможность применить какие-либо асимптотические методы, с данными проблемами удастся справиться. Такая ситуация реализуется в системах (1.4), (1.5) при условиях (1.9).

§ 2. Исследование вспомогательных уравнений

2.1. Анализ вспомогательного нелинейного уравнения. Рассмотрим систему (1.4) и выполним в ней замены

$$u_j = \exp x_j, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.1)$$

С учетом соотношений (1.9) она примет вид

$$\dot{x}_j = -1 + \frac{\alpha \exp(-x_j)}{\Omega(x_{j-1}, \dots, x_{j-s}, \varepsilon)}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.2)$$

где $x_{-k} = x_{m-k}$, $k = 0, 1, \dots, s-1$, а функция Ω определена равенством

$$\Omega(y_1, \dots, y_s, \varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^s \delta_k \exp \frac{\gamma_k^0 y_k}{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Далее, перейдем от (2.2) к соответствующему вспомогательному уравнению с запаздываниями

$$\dot{x} = -1 + \frac{\alpha \exp(-x)}{\Omega(x(t-\Delta), \dots, (t-s\Delta), \varepsilon)}. \quad (2.4)$$

Наша задача – показать, что при любом фиксированном значении параметра $\Delta > 0$ и при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ у этого уравнения существует нетривиальное периодическое решение.

Исследование уравнения (2.4) упрощается, так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ оно допускает предельный объект. Действительно, используя очевидное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\Omega(y_1, \dots, y_s, \varepsilon)} = R(y), \quad (2.5)$$

где $y_k = \text{const} \neq 0$, $k = 1, \dots, s$,

$$y = \max\{y_1, y_2, \dots, y_s\}, \quad R(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y > 0, \\ 1 & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

замечаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение (2.4) переходит в релейное уравнение с запаздываниями

$$\dot{x} = -1 + \alpha \exp(-x)R(y), \quad y = \max\{x(t - \Delta), x(t - 2\Delta), \dots, x(t - s\Delta)\}. \quad (2.7)$$

Как и в [15]–[17], понятие решения уравнения (2.7) определим конструктивно. Зафиксируем некоторое

$$\sigma_0: 0 < \sigma_0 < \ln\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), \quad (2.8)$$

где $\beta = \alpha - 1 > 0$ (см. (1.9)), положим

$$\theta(t) = \ln[1 + \beta(1 - \exp(-t))], \quad t \in \left(-\ln\left(1 + \frac{1}{\beta}\right), +\infty\right), \quad (2.9)$$

и рассмотрим множество функций

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\in C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \quad \varphi(t) < 0 \quad \forall t \in [-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0], \\ \varphi(-\sigma_0) &= \theta(-\sigma_0). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подчеркнем, что семейство (2.10) определено корректно, так как в силу (2.8) точка $t = -\sigma_0$ принадлежит области определения функции (2.9) и $\theta(-\sigma_0) < 0$.

Обозначим через $x_\varphi(t)$, $t \geq -\sigma_0$, решение уравнения (2.7) с произвольной начальной функцией (2.10) и будем строить его методом шагов, рассматривая последовательно отрезки времени длины Δ .

Рассмотрим отрезок $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$ и заметим, что при указанных t выполняются неравенства $\varphi(t - k\Delta) < 0$, $k = 1, \dots, s$. Поэтому на данном промежутке времени согласно (2.6), (2.7) функция $x_\varphi(t)$ является решением задачи Коши $\dot{x} = -1 + \alpha \exp(-x)$, $x|_{t=-\sigma_0} = \theta(-\sigma_0)$ и, следовательно,

$$x_\varphi(t) = \theta(t). \quad (2.11)$$

Двигаясь вперед с шагом Δ , можно “протянуть” формулу (2.11) по t до тех пор, пока

$$x_\varphi(t - k\Delta) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (2.12)$$

Тем самым, она справедлива на полуинтервале $-\sigma_0 \leq t < \Delta$.

При $t = \Delta$ первый раз нарушается одно из условий (2.12) и происходит переключение. А именно, при $\Delta \leq t \leq 2\Delta$ решение $x_\varphi(t)$ определяется из задачи Коши $\dot{x} = -1$, $x|_{t=\Delta} = \theta(\Delta)$, т. е. равенством

$$x_\varphi(t) = \theta(\Delta) + \Delta - t. \quad (2.13)$$

Формула (2.13) выполняется пока

$$y_\varphi(t) = \max\{x_\varphi(t - \Delta), x_\varphi(t - 2\Delta), \dots, x_\varphi(t - s\Delta)\} > 0. \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.11), (2.13) следует, что условие (2.14) имеет место на промежутке $\Delta < t < s\Delta + t_0$, где

$$t_0 = \theta(\Delta) + \Delta > \Delta. \quad (2.15)$$

В самом деле, если а priori предположить, что неравенство (2.14) верно, то в силу (2.11), (2.13) области положительности функций $x_\varphi(t - k\Delta)$, $k = 1, \dots, s$, представляют собой интервалы $(k\Delta, k\Delta + t_0)$. Поскольку объединение этих интервалов совпадает с интервалом $(s\Delta, s\Delta + t_0)$, то требование (2.14) на этом промежутке действительно выполняется.

При прохождении t через значение $t = s\Delta + t_0$ функция (2.14) меняет знак и происходит очередное переключение. В этом случае в силу (2.7), (2.13), (2.15) имеет место задача Коши $\dot{x} = -1 + \alpha \exp(-x)$, $x|_{t=s\Delta+t_0} = -s\Delta$, решение которой определяется равенствами

$$x_\varphi(t) = \theta(t - T_0), \quad (2.16)$$

$$T_0 = (s + 1)\Delta + \ln[1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))] + \ln\left[1 + \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-s\Delta))\right].$$

Отдельно остановимся на границе применимости формул (2.16). Сначала уточним выбор параметра σ_0 в (2.10). Будем считать, что в дополнение к (2.8) справедливо требование

$$\sigma_0 < \ln\left[1 + \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-s\Delta))\right], \quad (2.17)$$

означающее, что $\sigma_0 < T_0 - s\Delta - t_0$. Напомним, что соотношения (2.16) получены при априорном условии $y_\varphi(t) < 0$. Последнее, согласно равенствам (2.13)–(2.16) и условию (2.17), заведомо имеет место на промежутке времени $s\Delta + t_0 < t \leq T_0 - \sigma_0$.

Завершая описание построения решения $x_\varphi(t)$, отметим, что в силу условия (2.17) на постоянную σ_0 функция $x_\varphi(t + T_0)$, $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, принадлежит исходному начальному множеству (2.10). Это означает, что при $t \geq T_0 - \sigma_0$ весь процесс повторяется. Более того, из (2.11), (2.13), (2.16) следует, что каждое решение $x_\varphi(t)$ с начальным условием (2.10) при всех $t \geq -\sigma_0$ совпадает с одной и той же T_0 -периодической функцией (см. рис. 2)

$$x_0(t) = \begin{cases} \theta(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \Delta, \\ t_0 - t & \text{при } \Delta \leq t \leq s\Delta + t_0, \\ \theta(t - T_0) & \text{при } s\Delta + t_0 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t + T_0) \equiv x_0(t). \quad (2.18)$$

Рис. 2

Перейдем к вопросу о связи между периодическими решениями уравнений (2.4) и (2.7). Из общих результатов [15] о C^1 -близости траекторий релейной и релаксационной систем и из аналогичных результатов, содержащихся в [12]–[14], [16], [17], вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия (2.8), (2.17) на параметр σ_0 и условия (1.9) на остальные параметры. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ уравнение (2.4) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл $x = x_*(t, \varepsilon)$, $x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv \theta(-\sigma_0)$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (2.19)$$

Доказательство сформулированной леммы и аналогичные утверждения подробно обоснованы в [12]–[17]. Ограничимся минимальными результатами асимптотического поведения цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Помимо общих свойств (2.19) нам потребуются следующие факты:

1) на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$ уравнение $x_*(t, \varepsilon) = 0$ имеет ровно два простых корня $\tau_j = \tau_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2$, допускающих асимптотику

$$\tau_1 = O(\varepsilon), \quad \tau_2 = t_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (2.20)$$

2) справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| &= O(\varepsilon), & \max_{t \in \Sigma} |\dot{x}_*(t, \varepsilon) - \dot{x}_0(t)| &= O(\varepsilon), \\ T_*(\varepsilon) &= T_0 + O(\varepsilon), & \varepsilon &\rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где множество Σ представляет собой отрезок $[-\sigma_0, T_0 - \sigma_0/2]$ с выброшенными интервалами

$$(\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}), \quad (s\Delta + \tau_2(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, s\Delta + \tau_2(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}), \quad j = 1, 2.$$

2.2. Анализ вспомогательного линейного уравнения. В этом пункте исследуем вопрос об асимптотическом поведении мультипликаторов аналогичного (1.17) линейного уравнения

$$\dot{h} = A_{0,*}(t, \varepsilon)h + \sum_{k=1}^s \varkappa^k A_{k,*}(t, \varepsilon)h(t - k\Delta), \quad (2.22)$$

коэффициенты которого задаются формулами

$$A_{0,*}(t, \varepsilon) = -\frac{\alpha \exp(-x_*(t, \varepsilon))}{\Omega_*(t, \varepsilon)}, \quad (2.23)$$

$$A_{k,*}(t, \varepsilon) = -\frac{\alpha \exp(-x_*(t, \varepsilon))}{\Omega_*(t, \varepsilon)} \frac{\delta_k \gamma_k^0}{\varepsilon} \exp \frac{\gamma_k^0 x_*(t - k\Delta, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad k = 1, \dots, s, \quad (2.24)$$

$$\Omega_*(t, \varepsilon) = 1 + \sum_{l=1}^s \delta_l \exp \frac{\gamma_l^0 x_*(t - l\Delta, \varepsilon)}{\varepsilon},$$

где $\varkappa$ – произвольный комплексный параметр.

Остановимся на некоторых необходимых для дальнейшего анализа свойствах коэффициентов (2.23), (2.24). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.2. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0} |A_{0,*}(t, \varepsilon)| \leq M_1, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0} |A_{1,*}(t, \varepsilon)| \leq M_2 \exp \frac{-q_1}{\varepsilon}, \quad (2.25)$$

$$\max_{t \in \Sigma_1} |A_{1,*}(t, \varepsilon)| \leq M_3 \exp \frac{-q_2}{\sqrt{\varepsilon}};$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0} |A_{k,*}(t, \varepsilon)| \leq M_{k+2} \exp \frac{-q_{k+1}}{\varepsilon}, \quad k = 2, \dots, s-1; \quad (2.26)$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq s\Delta - \sigma_0} |A_{s,*}(t, \varepsilon)| \leq M_{s+2} \exp \frac{-q_{s+1}}{\varepsilon}, \quad (2.27)$$

$$\max_{t \in \Sigma_2} |A_{s,*}(t, \varepsilon)| \leq M_{s+3} \exp \frac{-q_{s+2}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

где

$$\Sigma_1 = [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus (\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, \Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}), \quad (2.28)$$

$$\Sigma_2 = [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0] \setminus (s\Delta + \tau_2(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}, s\Delta + \tau_2(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}),$$

а постоянные $M_k > 0$, $k = 1, \dots, s+3$, $q_k > 0$, $k = 1, \dots, s+2$, не зависят от ε . Кроме этого, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место асимптотические представления

$$\int_{\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{\Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} A_{1,*}(t, \varepsilon) dt = -\frac{1 + 1/\beta}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))} + O(\varepsilon), \quad (2.29)$$

$$\int_{\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{\Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} |A_{1,*}(t, \varepsilon)| dt = \frac{1 + 1/\beta}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))} + O(\varepsilon),$$

$$\int_{s\Delta + \tau_2(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{s\Delta + \tau_2(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} A_{s,*}(t, \varepsilon) dt = -(\beta + 1) \exp(s\Delta) + O(\varepsilon), \quad (2.30)$$

$$\int_{s\Delta + \tau_2(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{s\Delta + \tau_2(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} |A_{s,*}(t, \varepsilon)| dt = (\beta + 1) \exp(s\Delta) + O(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим прежде всего, что первая оценка из (2.25) – очевидное следствие формулы (2.23) и общих асимптотических свойств (2.19) периодического решения $x_*(t, \varepsilon)$. Далее, в силу (2.19), (2.24) при тех $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, для которых $x_0(t - k\Delta) \neq 0$ (т.е. вне некоторых фиксированных окрестностей точек $t = k\Delta$ и $t = k\Delta + t_0$), коэффициент $A_{k,*}(t, \varepsilon)$ допускает оценку вида

$$|A_{k,*}(t, \varepsilon)| \leq M \exp \frac{-q}{\varepsilon}, \quad M, q = \text{const} > 0. \quad (2.31)$$

Более того, в окрестности точки $t = k\Delta$ эта оценка сохраняется в случае, когда $x_0(k\Delta - l_0\Delta) > 0$ при некотором $l_0 \neq k$, $1 \leq l_0 \leq s$. В окрестности значения $t = k\Delta + t_0$ оценка (2.31) остается в силе при условии существования номера $l_0 \neq k$, $1 \leq l_0 \leq s$, для которого $x_0(k\Delta + t_0 - l_0\Delta) > 0$.

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу, что при $k = 1$, $s \geq 2$ оценка (2.31) сохраняется в окрестности точки $t = \Delta + t_0$, так как $x_0(\Delta + t_0 - l\Delta) > 0$ при $l = 2$. Далее, в случае $2 \leq k \leq s - 1$ упомянутая оценка имеет место на всем отрезке $[-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, поскольку $x_0(k\Delta - l\Delta) > 0$ при $l = k - 1$ и $x_0(k\Delta + t_0 - l\Delta) > 0$ при $l = k + 1$. И наконец, при $k = s$, $s \geq 2$ она имеет место в окрестности $t = s\Delta$, так как $x_0(s\Delta - l\Delta) > 0$ при $l = s - 1$. Отсюда автоматически следует справедливость второго неравенства из (2.25), оценок (2.26) и первого неравенства из (2.27).

Для получения оценок из (2.25), (2.27) на множествах (2.28) напомним, что в случаях $k = 1$ и $k = s$ неравенства (2.31) могут нарушаться только в окрестностях точек $t = \Delta$ и $t = s\Delta + t_0$ соответственно. Тем самым, достаточно рассмотреть лишь проблемные множества $\Sigma_1 \cap [\Delta - \sigma_1, \Delta + \sigma_1]$ и $\Sigma_2 \cap [s\Delta + t_0 - \sigma_1, s\Delta + t_0 + \sigma_1]$, где σ_1 – любое фиксированное число из интервала $(0, \min(t_0, T_0 - t_0))$. Далее, обратимся к более тонким асимптотическим свойствам (2.20), (2.21) функции $x_*(t, \varepsilon)$ и учтем их в формулах (2.24). В результате убедимся, что

$$|A_{1,*}(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp \frac{-\gamma_1^0 |x_0(t - \Delta)|}{\varepsilon}, \quad t \in \Sigma_1 \cap [\Delta - \sigma_1, \Delta + \sigma_1];$$

$$|A_{s,*}(t, \varepsilon)| \leq \frac{M}{\varepsilon} \exp \frac{-\gamma_s^0 |x_0(t - s\Delta)|}{\varepsilon}, \quad t \in \Sigma_2 \cap [s\Delta + t_0 - \sigma_1, s\Delta + t_0 + \sigma_1],$$

где $M = \text{const} > 0$. А так как $x_0(0) = 0$, $\dot{x}_0(0) > 0$, $x_0(t_0) = 0$, $\dot{x}_0(t_0) = -1$ (см. (2.18)), то отсюда требуемые неравенства из (2.25), (2.27) вытекают очевидным образом.

Обратимся теперь к асимптотическим представлениям (2.29), (2.30) и докажем, например, соотношения (2.29) (случай (2.30) разбирается аналогично). Для этого перейдем на отрезке $\Delta + \tau_1 - \sqrt{\varepsilon} \leq t \leq \Delta + \tau_1 + \sqrt{\varepsilon}$ к новой переменной τ по формуле $\tau = (t - \tau_1 - \Delta)/\varepsilon$. В результате, $x_*(t - \Delta, \varepsilon)/\varepsilon$ записывается в виде функции $x_*(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)/\varepsilon$, для которой с учетом равенства $x_*(\tau_1, \varepsilon) = 0$ получаем представление

$$\frac{x_*(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} = \dot{x}_*(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)\tau, \quad (2.32)$$

где значение $\bar{\tau}$ таково, что $|\bar{\tau}| \leq |\tau|$. Учитывая в (2.32) асимптотические формулы (2.20), (2.21) и очевидную оценку $|\bar{\tau}| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$, приходим к выводу, что

$$\frac{x_*(\tau_1 + \varepsilon\tau, \varepsilon)}{\varepsilon} = \beta(1 + (|\tau| + 1)O(\varepsilon))\tau, \quad (2.33)$$

где остаток равномерен по τ .

На заключительном этапе подставим в равенство (2.24) при $k = 1$ соотношение (2.33) вместе с формулами

$$\exp \frac{\gamma_l^0 x_*(t - l\Delta, \varepsilon)}{\varepsilon} = O\left(\exp \frac{-q}{\varepsilon}\right), \quad q = \text{const} > 0, \quad l = 2, \dots, s,$$

имеющими место при рассматриваемых t . В результате убедимся, что

$$\left| \varepsilon A_{1,*}(\tau_1 + \Delta + \varepsilon\tau, \varepsilon) + \frac{\alpha\delta_1\gamma_1^0 \exp(-\theta(\Delta)) \exp(\gamma_1^0\beta\tau)}{(1 + \delta_1 \exp(\gamma_1^0\beta\tau))^2} \right| \leq M\varepsilon(|\tau| + 1)^2 \exp(-\gamma_1^0\beta|\tau|), \quad -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \tau \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (2.34)$$

Применим оценку (2.34) непосредственно к вычислению интегралов из (2.29). В итоге получаем требуемые асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \int_{\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{\Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} A_{1,*}(t, \varepsilon) dt &= - \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\alpha\delta_1\gamma_1^0 \exp(-\theta(\Delta)) \exp(\gamma_1^0\beta\tau)}{(1 + \delta_1 \exp(\gamma_1^0\beta\tau))^2} d\tau + O(\varepsilon) \\ &= - \frac{\alpha \exp(-\theta(\Delta))}{\beta} + O(\varepsilon) = - \frac{1 + 1/\beta}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))} + O(\varepsilon), \\ \int_{\Delta + \tau_1(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon}}^{\Delta + \tau_1(\varepsilon) + \sqrt{\varepsilon}} |A_{1,*}(t, \varepsilon)| dt &= \int_{-1/\sqrt{\varepsilon}}^{1/\sqrt{\varepsilon}} \frac{\alpha\delta_1\gamma_1^0 \exp(-\theta(\Delta)) \exp(\gamma_1^0\beta\tau)}{(1 + \delta_1 \exp(\gamma_1^0\beta\tau))^2} d\tau + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1 + 1/\beta}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Лемма 2.2 доказана.

Еще одно вспомогательное утверждение касается асимптотического поведения решения $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$ уравнения (2.22) с произвольной независимой от $\varkappa$ начальной функцией $h_0(t)$ из пространства (над полем комплексных чисел)

$$C_0 = \{h_0(t) \in C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] : h_0(-\sigma_0) = 0\}. \quad (2.35)$$

Норму в пространстве (2.35) зададим равенством

$$\|h_0\| = \max_{-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |h_0(t)|.$$

ЛЕММА 2.3. *Для каждого $r > 0$ можно указать такие положительные постоянные $M = M(r)$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r)$, $q = q(r)$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $h_0(t) \in C_0$, $\varkappa \in B(r)$, $B(r) := \{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa| \leq r\}$, имеет место оценка*

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0} \left(|\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)| + \left| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \varkappa}(t, \varkappa, \varepsilon) \right| \right) \leq M \exp \frac{-q}{\varepsilon} \|h_0\|. \quad (2.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала отрезок $-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0$, на котором для решения $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$ справедлива явная формула

$$\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t A_{0,*}(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) \left[\sum_{k=1}^s \varkappa^k A_{k,*}(\tau, \varepsilon) h_0(\tau - k\Delta) \right] d\tau, \quad (2.37)$$

$$-\sigma_0 \leq t \leq \Delta - \sigma_0.$$

Из этой формулы следует аналитичность $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$ по переменной $\varkappa \in B(r)$. Далее, в силу (2.25) – (2.27) на указанном промежутке времени коэффициент $A_{0,*}(t, \varepsilon)$ ограничен, а все коэффициенты $A_{k,*}(t, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, s$, экспоненциально малы (допускают оценки вида (2.31)). Учитывая эти обстоятельства, приходим к выводу, что

$$\max_t \left(|\tilde{h}| + \left| \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \varkappa} \right| \right) \leq M \exp \frac{-q}{\varepsilon} \|h_0\|, \quad (2.38)$$

где максимум берется по $t \in [-\sigma_0, \Delta - \sigma_0]$, а $M, q > 0$ – некоторые универсальные постоянные.

Для распространения оценки (2.38) на отрезок $[\Delta - \sigma_0, s\Delta - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. Разобьем его на отрезки времени $[l\Delta - \sigma_0, (l+1)\Delta - \sigma_0]$, $l = 1, \dots, s-1$, и предположим, что требуемое неравенство установлено при $t \in [-\sigma_0, l\Delta - \sigma_0]$. Тогда на l -м отрезке $[l\Delta - \sigma_0, (l+1)\Delta - \sigma_0]$ для $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$ имеет место аналогичная (2.37) явная формула

$$\begin{aligned} \tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon) &= \tilde{h}(l\Delta - \sigma_0, \varkappa, \varepsilon) \exp\left(\int_{l\Delta - \sigma_0}^t A_{0,*}(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) \\ &+ \int_{l\Delta - \sigma_0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t A_{0,*}(\sigma, \varepsilon) d\sigma\right) \left[\sum_{k=1}^l \varkappa^k A_{k,*}(\tau, \varepsilon) \tilde{h}(\tau - k\Delta, \varkappa, \varepsilon) \right. \\ &\left. + \sum_{k=l+1}^s \varkappa^k A_{k,*}(\tau, \varepsilon) h_0(\tau - k\Delta) \right] d\tau, \quad t \in [l\Delta - \sigma_0, (l+1)\Delta - \sigma_0]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

При анализе правой части (2.39) следует учесть, что в силу сделанного предположения функции $\tilde{h}(t - k\Delta, \varkappa, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, l$, и их производные по $\varkappa$ на отрезке $t \in [-\sigma_0, l\Delta - \sigma_0]$ экспоненциально малы (см. (2.38)). Далее, из всей совокупности свойств (2.25)–(2.30) вытекает интегральная ограниченность коэффициентов уравнения (2.22), т. е. свойство

$$\int_{-\sigma_0}^{T_*(\varepsilon) - \sigma_0} \left(\sum_{k=0}^s |A_{k,*}(t, \varepsilon)| \right) dt \leq M, \quad M = \text{const} > 0. \quad (2.40)$$

Для группы коэффициентов $A_{k,*}(t, \varepsilon)$, $k = l+1, \dots, s$, при $t \in [l\Delta - \sigma_0, (l+1)\Delta - \sigma_0]$ выполняются оценки вида (2.31). Объединяя все перечисленные факты, убеждаемся в справедливости требуемого неравенства (2.38) на очередном шаге.

При $t \in [s\Delta - \sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ рассмотрим уравнение (2.22) с полностью обновленным начальным условием $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq s\Delta - \sigma_0$, удовлетворяющим требуемой оценке (2.38). Для получения этой оценки на оставшемся

отрезке изменения t воспользуемся методом шагов. Для этого разобьем указанный промежуток на отрезки времени вида $[s\Delta - \sigma_0 + k\Delta, s\Delta - \sigma_0 + (k+1)\Delta]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[s\Delta - \sigma_0 + (k_0+1)\Delta, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$, где $k_0 = \lfloor T_*(\varepsilon)/\Delta - s - 1 \rfloor$, $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть. Далее, выписывая аналогичное (2.39) равенство на k -м отрезке, сначала убедимся в аналитичности $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon)$. Затем, опираясь на свойство интегральной ограниченности (2.40), распространим нужную оценку (2.38) на шаг вперед. Лемма 2.3 доказана.

Перейдем теперь непосредственно к интересующему нас вопросу об асимптотическом вычислении мультипликаторов уравнения (2.22). С этой целью рассмотрим оператор монодромии $U(\varkappa, \varepsilon)$ указанного уравнения, действующий в пространстве $C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]$ (над полем комплексных чисел) по правилу

$$U(\varkappa, \varepsilon) h_0 = h(t + T_*(\varepsilon), \varkappa, \varepsilon), \quad -s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (2.41)$$

где $h(t, \varkappa, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$, – решение уравнения (2.22) с начальной функцией $h_0(t)$, $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Далее, обозначим через $\nu_l(\varkappa, \varepsilon)$, $l \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора (2.41), занумерованные в порядке убывания модулей. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. *Для любого $r > 0$ найдутся такие постоянные $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r) > 0$, $M = M(r) > 0$, $q = q(r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\varkappa \in B(r)$ выполняется неравенство*

$$\sup_{l \geq 2} |\nu_l(\varkappa, \varepsilon)| \leq M \exp \frac{-q}{\varepsilon}. \quad (2.42)$$

Мультипликатор $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерное по $\varkappa \in B(r)$ асимптотическое представление

$$\nu_1(\varkappa, \varepsilon) = [(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1][(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2] + O(\varepsilon), \quad (2.43)$$

где

$$\omega_1 = \frac{\beta \exp(-\Delta)}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))}, \quad \omega_2 = \frac{\exp(-s\Delta)}{\beta + 1 - \exp(-s\Delta)}. \quad (2.44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное положительное r и будем считать, что параметр $\varkappa$ из (2.22) принадлежит множеству $B(r)$. Далее, рассмотрим конечномерный оператор

$$V(\varkappa, \varepsilon) h_0 = h_0(-\sigma_0) h_*(t + T_*(\varepsilon), \varkappa, \varepsilon), \quad -s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \quad (2.45)$$

где $h_*(t, \varkappa, \varepsilon)$ – решение уравнения (2.22) на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ с начальной функцией $h_* \equiv 1$, $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (2.41) и (2.45). Для этого рассмотрим функцию

$$\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon) = h(t, \varkappa, \varepsilon) - h_0(-\sigma_0) h_*(t, \varkappa, \varepsilon) \quad (2.46)$$

и заметим, что при $t \in [-\sigma_0, T_*(\varepsilon) - \sigma_0]$ она также является решением уравнения (2.22). Поскольку при $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ очевидным образом имеем $\tilde{h}(t, \varkappa, \varepsilon) = h_0(t) - h_0(-\sigma_0) \in C_0$, где C_0 – пространство (2.35), то мы можем

применить к (2.46) оценку (2.36). Из этой оценки следует, что для оператора $W(\varkappa, \varepsilon) = U(\varkappa, \varepsilon) - V(\varkappa, \varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|W(\varkappa, \varepsilon)\|_{C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]} + \left\| \frac{\partial}{\partial \varkappa} W(\varkappa, \varepsilon) \right\|_{C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]} \leq M \exp \frac{-q}{\varepsilon}, \quad (2.47)$$

где универсальные константы $M, q > 0$ зависят лишь от выбора r .

На следующем этапе доказательства изучим спектральные свойства оператора (2.45). Можно заметить, что спектр этого оператора состоит из двух точек – собственного значения $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, где $\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = h_*(T_*(\varepsilon) - \sigma_0, \varkappa, \varepsilon)$, и собственного значения $\nu = 0$ бесконечной кратности. Для собственного значения $\nu_*(\varkappa, \varepsilon)$, как будет показано ниже, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место равномерные по $\varkappa \in B(r)$ асимптотические равенства

$$\nu_*(\varkappa, \varepsilon) = [(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1][(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2] + O(\varepsilon), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \nu_*}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) = (\omega_1 + 1)[(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2] + (\omega_2 + 1)s\varkappa^{s-1}[(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1] + O(\varepsilon),$$

где ω_1, ω_2 – постоянные из (2.44).

Для обоснования соотношений (2.48) необходимо знать асимптотическое поведение решения $h_*(t, \varkappa, \varepsilon)$. Поэтому дополним уравнение (2.22) начальным условием $h \equiv 1$, $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, и проинтегрируем его на отрезке времени $-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0$ методом шагов, учитывая, что коэффициенты $A_{1,*}(t, \varepsilon)$, $A_{s,*}(t, \varepsilon)$ меняются δ -образно (см. (2.25)–(2.30), (2.34)), коэффициенты $A_{k,*}(t, \varepsilon)$, $k = 2, \dots, s-1$, экспоненциально малы (см. (2.26)), а для коэффициента $A_{0,*}(t, \varepsilon)$ справедливо вытекающее из (2.21), (2.23) равномерное по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ асимптотическое представление

$$A_{0,*}(t, \varepsilon) = A_0(t) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где

$$A_0(t) = \begin{cases} -\alpha \exp(-x_0(t)) & \text{при } t \in [-\sigma_0, \Delta) \cup \left(s\Delta + t_0, T_0 - \frac{\sigma_0}{2}\right], \\ 0 & \text{при } t \in (\Delta, s\Delta + t_0). \end{cases}$$

В результате получаем, что, во-первых,

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \sigma_0} \left(|h_*(t, \varkappa, \varepsilon)| + \left| \frac{\partial h_*}{\partial \varkappa}(t, \varkappa, \varepsilon) \right| \right) \leq M, \quad M = \text{const} > 0; \quad (2.49)$$

во-вторых, равномерно по $t \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\varkappa \in B(r)$

$$h_*(t, \varkappa, \varepsilon) = h(t, \varkappa) + O(\varepsilon), \quad \frac{\partial h_*}{\partial \varkappa}(t, \varkappa, \varepsilon) = \frac{\partial h}{\partial \varkappa}(t, \varkappa) + O(\varepsilon), \quad (2.50)$$

где Σ_1, Σ_2 – множества (2.28), а $h(t, \varkappa)$, $t \geq -\sigma_0$, – решение импульсной задачи Коши

$$\dot{h} = A_0(t)h, \quad h|_{t=-\sigma_0} = 1, \quad (2.51)$$

$$h(\Delta + 0) - h(\Delta - 0) = -\varkappa \frac{1 + 1/\beta}{1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))} h(0), \quad (2.52)$$

$$h(s\Delta + t_0 + 0) - h(s\Delta + t_0 - 0) = -\varkappa^s(\beta + 1) \exp(s\Delta) h(t_0).$$

Свойства (2.48) очевидным образом следуют из (2.50) и равенства $h(T_0 - \sigma_0, \varkappa) = [(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1][(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2]$, проверяемого интегрированием системы (2.51), (2.52) (соответствующие вполне понятные выкладки опустим).

Обратимся теперь к исходному оператору U и заметим, что в силу равенств $U = V + W$, $(\nu I - U)^{-1} = (I - (\nu I - V)^{-1}W)^{-1}(\nu I - V)^{-1}$ любое значение $\nu \in \mathbb{C}$, для которого

$$\|(\nu I - V)^{-1}W\|_{C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]} < 1, \quad (2.53)$$

принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Напомним, далее, что оператор W допускает оценку (2.47). В случае же оператора $(\nu I - V)^{-1}$, опираясь на соотношения

$$\begin{aligned} (\nu I - V)^{-1}h_0 &= \frac{h_0(t)}{\nu} + c_* h_*(t + T_*(\varepsilon), \varkappa, \varepsilon), \quad -s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \\ c_* &= \frac{h_0(-\sigma_0)}{\nu(\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon))} \end{aligned}$$

и оценку (2.49), получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|(\nu I - V)^{-1}\|_{C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0] \rightarrow C[-s\Delta - \sigma_0, -\sigma_0]} &\leq \frac{M(1 + |\nu|)}{|\nu||\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon)|} \\ \forall \nu \in \mathbb{C}, \quad \nu &\neq 0, \nu_*(\varkappa, \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $M = \text{const} > 0$.

На завершающем этапе обоснования леммы 2.4 объединим оценки (2.47), (2.54) с асимптотическими представлениями (2.48). В результате убедимся, что любая точка $\nu \in \mathbb{C}$ из множества

$$\mathbb{C} \setminus \{O_1 \cup O_2\}, \quad (2.55)$$

где

$$O_1 = \left\{ \nu: |\nu| < \exp \frac{-q_1}{\varepsilon} \right\}, \quad O_2 = \left\{ \nu: |\nu - \nu_*(\varkappa, \varepsilon)| < \exp \frac{-q_2}{\varepsilon} \right\}, \quad (2.56)$$

а постоянные $q_j > 0$, $j = 1, 2$, подходящим образом малы, удовлетворяет условию (2.53) и, следовательно, является регулярной для оператора $U(\varkappa, \varepsilon)$. Спектр этого оператора заведомо принадлежит дополнению к множеству (2.55), т. е. шарам (2.56). Отсюда и из (2.48) требуемые соотношения (2.42), (2.43) вытекают очевидным образом. Лемма 2.4 доказана.

Сделаем одно полезное наблюдение. Обозначим через $\varkappa_k$, $k = 0, 1, \dots, s$, корни уравнения

$$[(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1][(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2] = 0 \quad (2.57)$$

и предположим, что параметр $\varkappa$ пробегает множество

$$B_\delta(r) = B(r) \setminus \bigcup_{k=0}^s \{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa - \varkappa_k| < \delta\}, \quad (2.58)$$

где $\delta > 0$. Тогда мультипликатор $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ уравнения (2.22) является простым, аналитическим по $\varkappa$ и помимо (2.43) допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_1}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) &= (\omega_1 + 1)[(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2] + (\omega_2 + 1)s\varkappa^{s-1}[(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1] + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.59)$$

равномерное по $\varkappa \in B_\delta(r)$.

Действительно, при $\varkappa \in B_\delta(r)$ левая часть равенства (2.57) отлична от нуля, а значит (см. (2.48)), собственное значение $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$ оператора (2.45) оказывается простым. Далее, при возмущении оператора V аналитической по $\varkappa$ добавкой W порядка $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$, собственное значение $\nu = \nu_*(\varkappa, \varepsilon)$ перейдет в простое и аналитически зависящее от $\varkappa$ собственное значение $\nu = \nu_1(\varkappa, \varepsilon)$, причем

$$\begin{aligned} \nu_1(\varkappa, \varepsilon) &= \nu_*(\varkappa, \varepsilon) + O\left(\exp \frac{-q}{\varepsilon}\right), \\ \frac{\partial \nu_1}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) &= \frac{\partial \nu_*}{\partial \varkappa}(\varkappa, \varepsilon) + O\left(\exp \frac{-q}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.48) следует требуемое асимптотическое равенство (2.59).

Завершая изложение подготовительных построений, остановимся еще на одном утверждении. Учитывая равенство (2.43) и дальнейший анализ уравнений вида (1.19), будем использовать следующую лемму.

ЛЕММА 2.5. *При каждом натуральном p , удовлетворяющем требованию*

$$p < \frac{m}{s+1}, \quad (2.60)$$

и при любых значениях параметров

$$\omega_1, \omega_2: \quad \omega_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad \omega_1 + s\omega_2 < \frac{m}{p} - s - 1 \quad (2.61)$$

уравнение

$$P(\varkappa) := [(\omega_1 + 1)\varkappa - \omega_1]^p [(\omega_2 + 1)\varkappa^s - \omega_2]^p - \varkappa^m = 0 \quad (2.62)$$

имеет простой единичный корень, а все остальные его корни распадаются на два семейства $\Gamma_1 \subset \{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa| < 1\}$ и $\Gamma_2 \subset \{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa| > 1\}$. При этом множество Γ_1 содержит $p(s+1)$ элементов, а Γ_2 состоит из $m - p(s+1) - 1$ корней и в случае $m = p(s+1) + 1$ оказывается пустым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное натуральное p и вещественные числа ω_1, ω_2 , удовлетворяющие требованиям (2.60), (2.61). Далее, рассмотрим полином

$$P_\mu(\varkappa) = [(\mu\omega_1 + 1)\varkappa - \mu\omega_1]^p [(\mu\omega_2 + 1)\varkappa^s - \mu\omega_2]^p - \varkappa^m, \quad (2.63)$$

где $\mu \in (0, 1]$. Из явного вида этого полинома следует, что $P_\mu(1) \equiv 0$. Кроме того, в силу (2.60), (2.61) имеем

$$\left. \frac{d}{d\varkappa} P_\mu(\varkappa) \right|_{\varkappa=1} = p(\mu\omega_1 + 1) + ps(\mu\omega_2 + 1) - m \leq p(\omega_1 + 1) + ps(\omega_2 + 1) - m < 0.$$

Исследование остальных корней полинома (2.63) начнем со случая $\mu \ll 1$.

Заметим, что при $\mu \ll 1$ полином $P_\mu(\varkappa)$ допускает ровно $p(s+1)$ корней, стремящихся к нулю при $\mu \rightarrow 0$. Остальные его корни (обозначим их через $\varkappa_l(\mu)$, $l = 1, \dots, m - p(s+1) - 1$), отличные от единичного, при $\mu = 0$ обращаются в $\exp(2\pi il/(m - p(s+1)))$, $l = 1, \dots, m - p(s+1) - 1$. Кроме того, несложная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\mu} |\varkappa_l(\mu)|^2 \right|_{\mu=0} &= \frac{2p}{m - p(s+1)} \left(1 - \cos \frac{2\pi l}{m - p(s+1)} \right) \omega_1 \\ &\quad + \frac{2p}{m - p(s+1)} \left(1 - \cos \frac{2\pi ls}{m - p(s+1)} \right) \omega_2 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $0 < \mu \ll 1$ для корней полинома (2.63) утверждение леммы верно.

Предположим теперь, что при некотором $\mu_0 \in (0, 1]$ уравнение $P_{\mu_0}(\varkappa) = 0$ допускает корень $\varkappa_0 = \exp(i\psi_0)$, $\psi_0 \geq 0$. Тогда с необходимостью

$$\begin{aligned} 1 = |\varkappa_0|^{2m} &= |(\mu_0\omega_1 + 1)\varkappa_0 - \mu_0\omega_1|^{2p} |(\mu_0\omega_2 + 1)\varkappa_0^s - \mu_0\omega_2|^{2p} \\ &= [1 + 2\mu_0\omega_1(\mu_0\omega_1 + 1)(1 - \cos \psi_0)]^p [1 + 2\mu_0\omega_2(\mu_0\omega_2 + 1)(1 - \cos(s\psi_0))]^p. \end{aligned}$$

Отсюда очевидным образом имеем $\cos \psi_0 = 1$ и $\varkappa_0 = 1$.

Обозначим через m_j , $j = 1, 2$, количества корней уравнения $P_\mu(\varkappa) = 0$, лежащих соответственно в множествах $\{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa| < 1\}$ и $\{\varkappa \in \mathbb{C}: |\varkappa| > 1\}$. Из проведенного анализа следует, что величины m_j не меняются при изменении μ . Тем самым, при $\mu = 1$ они остаются такими же, как и в случае $0 < \mu \ll 1$, т. е. $m_1 = p(s+1)$, $m_2 = m - p(s+1) - 1$. Лемма 2.5 доказана.

§ 3. Итоговые результаты

3.1. Теоремы о существовании и устойчивости бегущих волн.

В этом пункте применим разработанные в § 2 вспомогательные конструкции непосредственно к исходной системе (2.2). Напомним, что проблема существования ее бегущих волн (1.13) сводится к поиску периодических решений вспомогательного уравнения (2.4), имеющих периоды $m\Delta/p$, $p \in \mathbb{N}$. Поэтому в дальнейшем периодическое решение уравнения (2.4), задаваемого леммой 2.1, и его

период будем обозначать через $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ и $T_*(\varepsilon, \Delta)$ соответственно, явно подчеркивая зависимость этих функций от Δ . Аналогичным образом, через $T_0(\Delta)$ обозначим период функции (2.18).

Изучим сначала вопрос о существовании периодического решения с периодом $T = m\Delta/p$ релейного уравнения (2.7). Для этого рассмотрим уравнение

$$T_0(\Delta) = \frac{m\Delta}{p} \quad (3.1)$$

поиска фазового сдвига $\Delta > 0$, считая, что натуральные m и p связаны условиями

$$\frac{m}{s+1+\beta+s/\beta} < p < \frac{m}{s+1}. \quad (3.2)$$

Используя вторую формулу из (2.16), перепишем (3.1) в эквивалентном виде

$$\Phi(\Delta) := \exp\left[\left(\frac{m}{p} - s - 1\right)\Delta\right] - [1 + \beta(1 - \exp(-\Delta))] \left[1 + \frac{1}{\beta}(1 - \exp(-s\Delta))\right] = 0. \quad (3.3)$$

При выполнении неравенств (3.2) уравнение (3.3) имеет на полуоси $\Delta > 0$ единственное решение $\Delta = \hat{\Delta}_{(p)}$, причем

$$\Phi'(\Delta)|_{\Delta=\hat{\Delta}_{(p)}} > 0. \quad (3.4)$$

Действительно, из явного вида функции $\Phi(\Delta)$ следует, что по переменной $\Delta \in \mathbb{R}$ она является решением некоторого линейного однородного дифференциального уравнения пятого порядка с постоянными коэффициентами и с вещественными корнями характеристического уравнения. Поэтому $\Phi(\Delta)$ допускает на всей оси $\Delta \in \mathbb{R}$ не более четырех нулей. Так как в силу (3.2) справедливы свойства

$$\begin{aligned} \Phi(0) &= 0, & \Phi'(0) &= \frac{m}{p} - s - 1 - \beta - \frac{s}{\beta} < 0, \\ \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \Phi(\Delta) &= +\infty, & \lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \Phi(\Delta) &= -\infty, \end{aligned}$$

то количество нулей нечетно и на каждой из полуосей $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$ лежит хотя бы по одному из них. Следовательно, функция $\Phi(\Delta)$ имеет ровно три нуля, причем интересующий нас корень $\Delta = \hat{\Delta}_{(p)} > 0$ уравнения (3.3) определяется единственным образом и автоматически удовлетворяет требуемому неравенству (3.4).

Итак, мы убедились, что при $\Delta = \hat{\Delta}_{(p)}$ периодическое решение (2.18) уравнения (2.7) имеет нужный период $m\hat{\Delta}_{(p)}/p$. Рассмотрим периодическое решение $x_*(t, \varepsilon, \Delta)$ уравнения (2.4) и соответствующее ему уравнение

$$T_*(\varepsilon, \Delta) = \frac{m\Delta}{p}. \quad (3.5)$$

Напомним, что в силу (2.21) период $T_*(\varepsilon, \Delta)$ допускает асимптотическое представление $T_*(\varepsilon, \Delta) = T_0(\Delta) + O(\varepsilon)$, равномерное по Δ из любого компакта $K \subset (0, +\infty)$. Отсюда и из простоты корня $\Delta = \hat{\Delta}_{(p)}$ уравнения (3.1)

очевидным образом следует, что уравнение (3.5) имеет хотя бы один корень $\Delta = \widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)$ такой, что

$$\widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon) = \widehat{\Delta}_{(p)} + O(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть натуральные m, p удовлетворяют условиям (3.2). Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (2.2), (2.3) допускает цикл (бегущую волну)*

$$C_p: \quad x_j = \widehat{x}_{(p)}(t + (j-1)\widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon), \varepsilon), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.7)$$

где $\widehat{x}_{(p)}(t, \varepsilon) = x_*(t, \varepsilon, \Delta)|_{\Delta=\widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)}$, а $\widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)$ – корень (3.6) уравнения (3.5).

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости цикла (3.7). Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. *В условиях предыдущей теоремы цикл (3.7) с фиксированным номером p экспоненциально орбитально устойчив при $m = p(s+1) + 1$ и неустойчив в противном случае.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что все мультипликаторы ν цикла (3.7) задаются равенствами вида (1.19), (1.20), где $\nu_l(\kappa) = \nu_l(\kappa, \varepsilon)$, $l \geq 1$, – мультипликаторы вспомогательного линейного уравнения (2.22) при $\Delta = \widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)$. Поэтому для оператора монодромии $\mathcal{V}(\varepsilon)$ системы в вариациях вида (1.16), отвечающей циклу (3.7), имеет место оценка

$$\|\mathcal{V}(\varepsilon)\|_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m} \leq M, \quad M = \text{const} > 0, \quad (3.8)$$

справедливость которой вытекает из свойств (2.25)–(2.30) коэффициентов (2.23), (2.24). Таким образом, для уравнений

$$[\nu_l(\kappa, \varepsilon)]^p = \kappa^m, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (3.9)$$

по очевидному неравенству $|\nu| \leq \|\mathcal{V}(\varepsilon)\|$ и соотношению вида (1.20) мы можем ограничиться значениями $\kappa \in \mathbb{C}$: $|\kappa| \leq r$, где $r = (M+1)^{p/m}$, M – константа из (3.8).

Итак, при условии $\kappa \in B(r)$ подставим в уравнение (2.22) $\Delta = \widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)$ и воспользуемся леммой 2.4. Как будет ясно из дальнейшего анализа, полный набор мультипликаторов цикла (3.7) строится по корням уравнения (3.9) при $l = 1$. Тем самым, рассматривать другие значения l нет необходимости.

Опираясь на асимптотическое представление (2.43), приходим к выводу, что в случае $l = 1$ интересующее нас уравнение записывается в виде

$$[(\widehat{\omega}_1 + 1)\kappa - \widehat{\omega}_1]^p [(\widehat{\omega}_2 + 1)\kappa^s - \widehat{\omega}_2]^p = \kappa^m + O(\varepsilon), \quad (3.10)$$

где $\widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2$ – постоянные (2.44) при $\Delta = \widehat{\Delta}_{(p)}$. Заметим, что в силу (3.2), (3.4) величины $m, p, \widehat{\omega}_1, \widehat{\omega}_2$ удовлетворяют требованиям (2.60), (2.61). Отсюда и из леммы 2.5 заключаем, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (3.10) имеет простой корень $\kappa = 1$, а остальные его корни, обозначим их через $\widehat{\kappa}_j$, $j = 1, \dots, m-1$, не лежат на единичной окружности.

В случае $\varepsilon > 0$ будем рассматривать уравнение (3.10) при $\varkappa \in B_\delta(r)$, где $B_\delta(r)$ множество (2.58), в котором $\varkappa_k$, $k = 0, 1, \dots, s$, – корни уравнения (2.57) при $\omega_1 = \widehat{\omega}_1$, $\omega_2 = \widehat{\omega}_2$. Параметр $\delta > 0$ выберем настолько малым, чтобы выполнялись включения $\varkappa = \widehat{\varkappa}_j \in B_\delta(r)$, $j = 1, \dots, m-1$, $\varkappa = 1 \in B_\delta(r)$. Обращаем внимание, что при $\varkappa = \varkappa_k$, $k = 0, 1, \dots, s$, левая часть соотношения (3.10) становится равной нулю, а правая заведомо отлична от нуля. Тем самым, при подходящем уменьшении δ уравнение (3.10) не имеет корней в каждом из шаров $\{\varkappa \in \mathbb{C} : |\varkappa - \varkappa_k| \leq \delta\}$, а значит, эти шары мы можем исключить из рассмотрения и ограничиться множеством $B_\delta(r)$. Преимущество последнего в том, что на нем мультипликатор $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ является простым, аналитическим по $\varkappa$ и помимо (2.43) удовлетворяет асимптотическому равенству (2.59).

Нетрудно заметить, что при $\varepsilon > 0$ уравнение (3.10) по-прежнему допускает решение $\varkappa = 1$, поскольку при $\varkappa = 1$, $\Delta = \widehat{\Delta}_{(p)}(\varepsilon)$ уравнение (2.22) заведомо имеет единичный мультипликатор. В этом случае оно представляет собой линеаризацию уравнения (2.4) на цикле $x = \widehat{x}_{(p)}(t, \varepsilon)$. В силу отмеченного выше свойства аналитичности функции $\nu_1(\varkappa, \varepsilon)$ уравнение (3.10) при $\omega_1 = \widehat{\omega}_1$, $\omega_2 = \widehat{\omega}_2$ отличается от (2.62) аналитической добавкой порядка ε (в C^1 -метрике по $\varkappa$). Тем самым, как и при $\varepsilon = 0$, количество его корней в множестве $B_\delta(r)$ равно m , причем корень $\varkappa = 1$ является простым. Остальные $m-1$ корней этого уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к корням $\widehat{\varkappa}_j$, $j = 1, \dots, m-1$, уравнения (2.62).

Подведем итог. Из сделанного анализа следует, что, за исключением простого единичного мультипликатора, все мультипликаторы $\nu_j(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, m-1$, цикла (3.7) стремятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к пределам $\widehat{\varkappa}_j^{m/k}$, $j = 1, \dots, m-1$. Следовательно (см. лемму 2.5), в случае $m = p(s+1) + 1$ все они по модулю меньше единицы, а при $m \neq p(s+1) + 1$ среди них имеется хотя бы один, модуль которого больше единицы. Теорема 3.2 доказана.

3.2. Заключение. Обратим внимание, что при $m \rightarrow +\infty$ количество номеров p , удовлетворяющих неравенствам (3.2), неограниченно растет, а значит, неограниченно возрастает и количество сосуществующих циклов (3.7). Однако в случае $m \neq p_0(s+1) + 1 \forall p_0 \in \mathbb{N}$ все они неустойчивы. Устойчивым же среди них оказывается лишь один цикл с номером $p = p_0$ при $m = p_0(s+1) + 1$. Этот цикл заведомо существует, так как для пары номеров $m = p_0(s+1) + 1$, $p = p_0$ требования (3.2) выполняются автоматически.

Итак, построенная нами теория не дает ответа на вопрос об аттракторах системы (2.2) при $m \neq p_0(s+1) + 1 \forall p_0 \in \mathbb{N}$. В связи с этим для прояснения ситуации обратимся к результатам численного эксперимента, проведенного для системы

$$\dot{x}_j = -1 + \frac{\alpha \exp(-x_j)}{1 + \exp(\gamma_1 x_{j-1}) + \exp(\gamma_2 x_{j-2}) + \exp(\gamma_3 x_{j-3})}, \quad (3.11)$$

$$j = 1, 2, \dots, m,$$

где $x_0 = x_m$, $x_{-1} = x_{m-1}$, $x_{-2} = x_{m-2}$, при значениях параметров $\alpha = 5.5$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 100$ и при $5 \leq m \leq 9$.

При $m = 5$, согласно нашей теории, устойчив цикл (3.7) системы (3.11) с номером $p = 1$. По всей видимости, он является единственным ее аттрактором

Рис. 3

Рис. 4

(других обнаружить не удалось). Проекция этого цикла на подпространство (x_1, x_2, x_3) показана на рис. 3, а график зависимости от t его компоненты x_1 изображен на рис. 4.

При $m = 6$ устойчивыми оказываются циклы, отличные от бегущих волн. Их несколько, но все они переходят друг в друга при циклических перестановках координат x_j , $j = 1, \dots, 6$. Проекция на подпространство (x_1, x_2, x_3) одного из этих циклов представлена на рис. 5.

Рис. 5

Самая интересная ситуация реализуется при $m = 7$. В этом случае система (3.11) допускает устойчивый цикл, являющийся бегущей волной, но отличный от циклов (3.7). Отметим, что выше нами были построены только самые про-

стые бегущие волны системы (2.2). Этим волнам в релейном уравнении (2.7) отвечает цикл $x_0(t)$, для которого неравенство $x_0(t) < 0$ выполняется на отрезке времени $-s\Delta - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ длины $s\Delta$. Однако уравнение (2.7) допускает и циклы с несколькими переменаами знака на любом отрезке длины $s\Delta$. Данные циклы порождают более сложно устроенные бегущие волны системы (2.2). Одна из таких бегущих волн была обнаружена численно в системе (3.11) при $m = 7$. Ее проекция на подпространство (x_1, x_2, x_3) показана на рис. 6, а график компоненты x_1 приведен на рис. 7.

Рис. 6

Рис. 7

В оставшихся двух случаях $m = 8$ и $m = 9$ ситуация такова: при $m = 8$ аттракторами системы (3.11) оказываются состояния равновесия, переходящие друг в друга при циклических перестановках координат, а при $m = 9$ устойчив цикл (3.7) с номером $p = 2$. Следует также отметить, что при дальнейшем увеличении m новые моменты не возникают, так как реализуются по очереди все уже описанные выше типы аттракторов. Например, при $m = 10$ устойчивы циклы, отличные от бегущих волн, при $m = 11$ аттрактором является более сложная бегущая волна, подобная показанной на рис. 6, 7, и т.д.

Отдельного изучения заслуживает система

$$\dot{x}_j = -1 + \frac{\alpha \exp(-x_j)}{1 + \exp(\gamma x_{j-1})}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad x_0 = x_m, \quad (3.12)$$

получающаяся в результате замен (2.1) из многомерного репрессилиатора

$$\dot{u}_j = -u_j + \frac{\alpha}{1 + u_{j-1}^\gamma}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad u_0 = u_m. \quad (3.13)$$

Обратим внимание, что частным случаем системы (3.13) является упоминавшаяся выше система (1.3).

Из наших теоретических построений следует, что при условиях $\alpha > 1$, $\gamma \gg 1$ и при $m = 2p_0 + 1$ система (3.12) допускает устойчивую бегущую волну (3.7) с номером $p = p_0$. В случае же $m = 2p_0$, как показывает численный анализ, ее аттракторами являются состояния равновесия.

В заключение отметим, что все результаты, полученные нами для системы (1.4), без изменений переносятся и на систему (1.5). Действительно, при условиях (1.9) после замен (2.1) она переходит в систему вида (2.2), в которой функция $\Omega(y_1, \dots, y_s, \varepsilon)$ задается аналогичным (2.3) равенством

$$\Omega(y_1, \dots, y_s, \varepsilon) = \prod_{k=1}^s \left(1 + \delta_k \exp \frac{\gamma_k^0 y_k}{\varepsilon} \right). \quad (3.14)$$

Далее, нетрудно заметить, что для (3.14) остаются в силе соотношения (2.5), (2.6), а значит, мы имеем дело с прежним релейным уравнением (2.7).

В случае системы (1.6) ситуация несколько сложнее. Здесь при условиях (1.9), (2.1) получается система (2.2) с функцией

$$\Omega(y_1, \dots, y_s, \varepsilon) = 1 + \exp \left(\sum_{k=1}^s \frac{\gamma_k^0 y_k}{\varepsilon} \right),$$

а соответствующее релейное уравнение с запаздываниями имеет вид

$$\dot{x} = -1 + \alpha \exp(-x) R(y), \quad y = \sum_{k=1}^s \gamma_k^0 x(t - k\Delta), \quad (3.15)$$

где $R(y)$ – функция из (2.6).

Обратимся далее к системе (1.7) и заметим, что с учетом соотношений (1.9), (2.1) она переходит в систему

$$\dot{x}_j = -1 + \sum_{k=1}^s \frac{\alpha_k \exp(-x_j)}{1 + \delta_k \exp(\gamma_k^0 x_{j-k}/\varepsilon)}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где $x_{-k} = x_{m-k}$, $k = 0, 1, \dots, s-1$. Релейное уравнение с запаздываниями в данном случае записывается в виде

$$\dot{x} = -1 + \sum_{k=1}^s \alpha_k \exp(-x) R(y_k) \Big|_{y_k = x(t-k\Delta)}. \quad (3.16)$$

Вопрос о бегущих волнах систем (1.6), (1.7) связан в первую очередь с нахождением периодических решений релейных уравнений (3.15), (3.16). Исследование этих уравнений представляет собой отдельную и пока не решенную проблему. Другая открытая проблема состоит в поиске периодических решений уравнения (2.7) с несколькими переменными знака на любом отрезке времени длины $s\Delta$. Напомним, что существование таких решений подтверждено численным анализом.

Список литературы

1. M. B. Elowitz, S. Leibler, “A synthetic oscillatory network of transcriptional regulators”, *Nature*, **403**:6767 (2000), 335–338.
2. А. Н. Тихонов, “Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных”, *Матем. сб.*, **31(73)**:3 (1952), 575–586.
3. Е. П. Волокитин, “О предельных циклах в простейшей модели гипотетической генной сети”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **7**:3 (2004), 57–65.
4. O. Buse, A. Kuznetsov, R. A. Pérez, “Existence of limit cycles in the repressilator equations”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **19**:12 (2009), 4097–4106.
5. O. Buse, R. Pérez, A. Kuznetsov, “Dynamical properties of the repressilator model”, *Phys. Rev. E* (3), **81**:6 (2010), 066206, 7 pp.
6. В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, “Задачи теории функционирования генных сетей”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **6**:2 (2003), 64–80.
7. Г. В. Демиденко, Н. А. Колчанов, В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, “Математическое моделирование регулярных контуров генных сетей”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **44**:12 (2004), 2276–2295; англ. пер.: G. V. Demidenko, N. A. Kolchanov, V. A. Likhoshvai, Yu. G. Matushkin, S. I. Fadeev, “Mathematical modeling of regular contours of gene networks”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44**:12 (2004), 2166–2183.
8. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “О явлениях хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **46**:10 (2006), 1809–1821; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Chaos phenomena in a circle of three unidirectionally connected oscillators”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46**:10 (2006), 1724–1736.
9. T. Kapitaniak, L. O. Chua, “Hyperchaotic attractors of unidirectionally-coupled Chua’s circuits”, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **4**:2 (1994), 477–482.
10. I. P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, V. Pérez-Villar, E. Sánchez, M. A. Matías, “Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells”, *Phys. D*, **128**:2-4 (1999), 224–235.
11. P. Perlikowski, S. Yanchuk, M. Wolfrum, A. Stefanski, P. Mosiolek, T. Kapitaniak, “Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems”, *Chaos*, **20**:1 (2010), 013111, 10 pp.
12. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 53–96; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Relaxation self-oscillations in Hopfield networks with delay”, *Izv. Math.*, **77**:2 (2013), 271–312.
13. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Периодические решения типа бегущих волн в кольцевых цепочках однонаправленно связанных уравнений”, *ТМФ*, **175**:1 (2013), 62–83; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “Periodic traveling-wave-type solutions in circular chains of unidirectionally coupled equations”, *Theoret. and Math. Phys.*, **175**:1 (2013), 499–517.
14. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Явление буферности в кольцевых цепочках однонаправленно связанных генераторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **78**:4 (2014), 73–108; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, “The buffer phenomenon in ring-like chains of unidirectionally connected generators”, *Izv. Math.*, **78**:4 (2014), 708–743.
15. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, “Реле с запаздыванием и его C^1 -аппроксимация”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 126–153; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko,

- N. Kh. Rozov, "Relay with delay and its C^1 -approximation", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 119–146.
16. А. Ю. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, "Об одной модификации уравнения Хатчинсона", *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **50**:12 (2010), 2099–2112; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, "A modification of Hutchinson's equation", *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:12 (2010), 1990–2002.
17. С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, "Релаксационные автоколебания в нейронных системах. I", *Дифференц. уравнения*, **47**:7 (2011), 919–932; англ. пер.: S. D. Glyzin, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, "Relaxation self-oscillations in neuron systems. I", *Differ. Equ.*, **47**:7 (2011), 927–941.

АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ КОЛЕСОВ

(ANDREI YU. KOLESOV)

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Поступило в редакцию

23.04.2015

НИКОЛАЙ ХРИСТОВИЧ РОЗОВ

(NIKOLAI KH. ROZOV)

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

E-mail: fpo.mgu@mail.ru

ВИКТОР АНТОНОВИЧ САДОВНИЧИЙ

(VICTOR A. SADOVNICHII)

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

E-mail: rector@rector.msu.su