Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, А. А. Кустарев, Теоремы вложения для квазиторических многообразий, заданных комбинаторными данными, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2015, том 79, выпуск 6, 65–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8399>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 14:26:41

УДК 515.165.2

В. М. Бухштабер, А. А. Кустарев

Теоремы вложения для квазиторических многообразий, заданных комбинаторными данными

Статья посвящена задачам об эквивариантных вложениях квазиторических многообразий в евклидовы и проективные пространства. Даны явные конструкции вложений и оценки размерности вложений в терминах комбинаторных данных, задающих такие многообразия. Показано, каким образом при дополнительных условиях на комбинаторные данные получаются известные результаты торической геометрии о проективных комплексных многообразиях.

Библиография: 28 наименований.

Ключевые слова: эквивариантное вложение, момент-угол-многообразие, характеристическая функция.

DOI: 10.4213/im8399

§ 1. Введение

Широко известны следующие результаты.

ТЕОРЕМА (Мостов [1], Пале [2]; см. также [3]). Пусть M – компактное гладкое многообразие с гладким действием компактной группы G . Тогда существует гладкое вложение многообразия M в $\mathbb{R}^N$, эквивариантное относительно некоторого линейного представления $G \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$.

ТЕОРЕМА (Кодаира [4]). Пусть M – компактное комплексное многообразие с положительным голоморфным линейным расслоением, например, на многообразии M имеется целочисленная кэлерава форма. Тогда существует комплексно-аналитическое вложение многообразия M в $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$.

ТЕОРЕМА (Громов [5], Тишлер [6]). Пусть M – компактное симплектическое многообразие с целочисленной симплектической формой ω . Тогда существует симплектическое вложение M в пространство $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ со стандартной симплектической формой Фубини–Штуди.

Центральным результатом настоящей работы являются теоремы об эквивариантных вложениях квазиторических многообразий, заданных комбинаторными данными. Мы опишем связь нашего результата с приведенными выше теоремами вложения в случаях, когда комбинаторные данные квазиторического многообразия задают на нем структуры, о которых идет речь в этих теоремах.

Ключевым объектом торической топологии (см. [4], [5], [7]–[9]) являются момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P = \mathcal{Z}_P^{m+n}$ с канонической проекцией $\rho_P: \mathcal{Z}_P \rightarrow P$,

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00414).

© В. М. БУХШТАБЕР, А. А. КУСТАРЕВ, 2015

где $P = P^n \subset \mathbb{R}^n$ – простой n -мерный многогранник с m гипергранями. Многообразию $\mathcal{Z}_P$ реализуется как гладкое подмногообразие в $\mathbb{C}^m$, эквивариантное относительно стандартного действия компактного тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$. Индуцированное отображение пространства орбит задает вложение $i_P: P \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Многообразие $\mathcal{Z}_P$ представляет собой полное пересечение $m - n$ вещественных квадратичных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^m$. Для многогранников P , допускающих так называемую *характеристическую функцию* $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$, существует торическая подгруппа $K \subset \mathbb{T}^m$ ранга $m - n$, которая свободно действует на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P$. Пространство орбит этого действия $M = M^{2n} = \mathcal{Z}_P/K$ берется в качестве квазиторического многообразия $M(P, \Lambda)$, где многогранник P реализован как подмножество в $\mathbb{R}^n$, заданное системой неравенств $A_P x + b_P \geq 0$, а Λ – целочисленная $(n \times m)$ -матрица, удовлетворяющая некоторому комбинаторному условию регулярности. Каноническая проекция $\rho_P: \mathcal{Z}_P \rightarrow P$ разлагается в композицию $\mathcal{Z}_P \rightarrow M \rightarrow P$, где проекция $\pi: M \rightarrow P$ называется отображением моментов.

Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^q$ и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{CP}^{q-1}$ как пространства с действием тора $\mathbb{T}^q$, который на первом сомножителе действует тривиально, а на втором – стандартно. Мы дадим явную конструкцию эквивариантного вложения $M(P, \Lambda)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{q_1}$ для некоторого q_1 (см. теорему 5.5). При этом вложении композиция $M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{q_1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ совпадает с отображением моментов $\pi: M \rightarrow P \subset \mathbb{R}^n$.

Следующий основной результат (см. теорему 5.6) описывает эквивариантное вложение $M(P, \Lambda)$ для некоторого q_2 в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{CP}^{q_2-1}$, которое определяется по комбинаторным данным (P, Λ) и фиксированному представлению $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$. В терминах представления $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ описан гомоморфизм колец когомологий, порожденный этим вложением. Мы приводим алгоритм явного построения вложения из теорем 5.5 и 5.6 по комбинаторным данным (P, Λ) и характеру $\tilde{k}$.

Показано, что в случае $\mathbb{CP}^n$, рассматриваемого как проективное торическое многообразие, этот алгоритм приводит к тождественному отображению.

В алгебраической геометрии широко известны неособые проективные торические многообразия [10]–[12]. Каждому такому многообразию канонически сопоставляются комбинаторные данные (P, Λ) , в которых пара (A_P, b_P) , задающая многогранник P , удовлетворяет более жестким требованиям: b_P – целочисленный вектор, а $A_P = \Lambda^T$. В работе описаны следствия теорем 5.6 и 6.1, которые при таких комбинаторных данных дают эквивариантные вложения $M(P, \Lambda) \rightarrow \mathbb{CP}^{q_2-1}$. Более того, показано, каким образом благодаря дополнительным условиям на комбинаторные данные возникают эквивариантные вложения $M(P, \Lambda)$ в $\mathbb{CP}^{q_2-1}$, которые дают известные в торической геометрии реализации торического многообразия как проективного комплексного многообразия. В работах [13] и [14] заложены основы $(2n, k)$ -многообразий. В настоящей работе мы существенно используем тот факт, что квазиторические многообразия, заданные комбинированными данными, удовлетворяют аксиомам этой теории, т. е. задают $(2n, n)$ -многообразия.

Авторы благодарны Т. Е. Панову и М. С. Вербицкому за ценные обсуждения.

§ 2. Обозначения

Введем некоторые обозначения, которые будут использоваться в настоящей работе:

$\mathbb{C}^m$ – стандартное комплексное линейное m -мерное пространство с фиксированным базисом $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_m = (0, \dots, 0, 1)$;

$\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$ – стандартное вещественное линейное пространство, натянутое на базис $e_1, \dots, e_m$;

$\mathbb{R}_{\geq 0}^m \subset \mathbb{R}^m$ – положительный октант, т.е. область точек, все координаты которых неотрицательны;

$\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ – стандартная целочисленная решетка, натянутая на базис $(e_1, \dots, e_m)$;

$\mathbb{T}^m \subset \mathbb{C}^m$ – стандартный компактный тор $\{(t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m : |t_k| = 1, k \in [1, m]\}$; эпиморфизм $\exp: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$, заданный формулой $\exp(x_1, \dots, x_m) = (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_m})$, позволяет отождествить тор $\mathbb{T}^m$ с факторгруппой $\mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$; стандартный k -мерный тор мы будем обозначать через $\mathbb{T}^k$, а общую k -мерную торическую подгруппу – через T^k ;

$T_I \subset \mathbb{T}^m$ – торическая подгруппа, соответствующая множеству индексов $I \subset [1, m]$; одноэлементное множество индексов $I = \{i\}$ определяет координатный тор $T_i \subset \mathbb{T}^m$;

$\rho: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ – стандартное отображение моментов, заданное формулой

$$\rho(z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2); \quad (1)$$

$s: \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ – отображение, заданное формулой

$$s(x_1, \dots, x_m) = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_m}) \quad (2)$$

(отметим, что $\rho \circ s = \text{id}$).

§ 3. Комбинаторные данные и момент-угол-многообразия

Рассмотрим многогранник P^n размерности n с m гипергранями, вложенный в пространство $\mathbb{R}^n$ при помощи системы из m неравенств:

$$P^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, x \rangle + b_i \geq 0\}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

Предполагается, что среди этих неравенств нет избыточных. Далее, если ясно, о каком многограннике идет речь, будем писать P вместо P^n . Через $f_i(P)$, $i = 0, \dots, n$, обозначается число i -мерных граней многогранника P ; при сделанных предположениях $f_{n-1}(P) = m$.

Систему неравенств (3) можно эквивалентным образом записать в матричном виде

$$A_P x + b_P \geq 0, \quad (4)$$

где A_P – матрица размера $m \times n$ и b_P – m -мерный вектор.

Матрица A_P и вектор b_P определяют аффинное отображение

$$i_P: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_P(x) = A_P x + b_P. \quad (5)$$

Согласно (4) мы имеем $i_P(P) = i_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

Пространство $\mathbb{R}_{\geq 0}^m$ имеет каноническую комбинаторную структуру, определяемую координатными подпространствами. Используя эту структуру, мы можем ввести в пространстве $\mathbb{C}^m$ канонические момент-угол-координаты. Сечение $s: \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ определяет отображение $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ по формуле $(t, x) \rightarrow t \cdot s(x)$. Это отображение, в свою очередь, позволяет отождествить

пространство $\mathbb{C}^m$ с факторпространством $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}_{\geq 0}^m / \sim$, где $(t_1, x_1) \sim (t_2, x_2)$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, а элемент $t_1 t_2^{-1}$ принадлежит стационарной подгруппе точки $s(x_1)$.

Поскольку матрица A_P имеет максимально возможный ранг, определена проекция $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, ядром которой является образ отображения A_P . Выбрав базис в $\mathbb{R}^{m-n}$, можно задать эту проекцию $((m-n) \times m)$ -матрицей $C_P = (c_{j,k})$, аннулирующей A_P и также имеющей максимально возможный ранг.

ТЕОРЕМА 3.1 [15]. *Множество $Z_P = \rho^{-1}(i_P(P))$, где простой многогранник P и отображения i_P и ρ заданы в виде (3), (5) и (1), является вещественно-алгебраическим $(m+n)$ -мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^m$. Многообразие Z_P обладает гладким действием тора $\mathbb{T}^m$, индуцированным стандартным действием $\mathbb{T}^m$ на $\mathbb{C}^m$, и является полным пересечением $m-n$ квадратичных гиперповерхностей, задаваемых уравнениями*

$$\sum_{k=1}^m c_{j,k}(|z_k|^2 - b_k) = 0, \quad j = 1, \dots, m-n. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Многообразие Z_P называется *момент-угол-многообразием* простого многогранника P .

В случае, когда P – стандартный n -симплекс $\Delta^n \subset \mathbb{R}^n$, образом вложения $i_P(P)$ является правильный симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$, натянутый на векторы $e_1, \dots, e_{n+1}$, и многообразие Z_P является стандартной сферой $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ с каноническим действием тора $\mathbb{T}^{n+1}$. Таким образом, конструкцию многообразия Z_P можно рассматривать как естественное обобщение нечетномерной сферы $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Через $F_j, j \in [1, m]$, обозначим гиперграни многогранника P . Каждому подмножеству индексов $I \subset [1, m]$ соответствует торическая подгруппа

$$T_I = \prod_{i \in I} T_i. \quad (7)$$

Мы будем говорить, что подмножество $I \subset [1, m]$ *допустимо*, если пересечение

$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i \quad (8)$$

непусто. Таким образом, каждая грань многогранника P имеет вид $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$, где I – некоторое допустимое подмножество.

Грани комбинаторного многогранника P образуют частично упорядоченное по включению множество $S(P)$, называемое *решеткой граней*. Определим *открытую грань* $\overset{\circ}{F}$ как множество всех точек грани $F \subset P$, не лежащих ни в какой грани многогранника P меньшей размерности. Многогранник P разбивается в непересекающееся объединение открытых граней, причем каждая точка $p \in P$ лежит в единственной открытой грани многогранника P (обозначаемой через $\overset{\circ}{F}(p)$), соответствующая замкнутая грань обозначается через $F(p)$. Таким образом, на многограннике P имеется каноническая структура комбинаторно-клеточного комплекса, в которой клетками являются открытые грани, а характеристические отображения приклейки границы клетки к остову предыдущей размерности являются вложениями.

Обозначим через $S(\mathbb{T}^m)$ множество всех торических подгрупп тора $\mathbb{T}^m$. На множестве всех граней $S(P)$ многогранника P определена функция $\chi: S(P) \rightarrow S(\mathbb{T}^m)$, ставящая в соответствие каждой грани $F = F_I$ координатный тор $T_I \subset \mathbb{T}^m$. Для данной точки $p \in P$ обозначим через $T(p)$ торическую подгруппу $\chi(F(p))$, где $F(p)$ – открытая грань, содержащая точку p .

Каноническую проекцию $\mathcal{Z}_P \rightarrow P$ обозначим через ρ_P . Подгруппа $\chi(F) \subset \mathbb{T}^m$ является стационарной подгруппой множества $\rho_P^{-1}(F) \subset \mathcal{Z}_P$, которая является стационарной подгруппой любой точки из множества $\rho_P^{-1}(\overset{\circ}{F}) \subset \mathcal{Z}_P$. Описанная комбинаторная структура на многообразии $\mathcal{Z}_P$ индуцирована каноническим вложением $\mathcal{Z}_P \hookrightarrow \mathbb{C}^m$, в частности, имеет место следующий факт.

ЛЕММА 3.3. *Отображение ρ_P имеет сечение $s_{\mathcal{Z}_P}: P \rightarrow \mathcal{Z}_P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомое сечение $s_{\mathcal{Z}_P}: P \rightarrow \mathcal{Z}_P$ индуцировано сечением $s: \mathbb{R}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$.

§ 4. Характеристические функции и квазиторические многообразия

В работе [16] М. Дэвис и Т. Янушкиевич предложили топологический аналог торического многообразия, описав соответствующий класс топологических многообразий в терминах свойств неособых проективных торических многообразий. В обзоре [17] был предложен принятый сейчас термин “квазиторические многообразия” для того, чтобы выделить новый класс многообразий, отличных от хорошо известных в то время в алгебраической геометрии торических многообразий.

Начнем с общего подхода, изложенного в [18]. Для фиксированного множества Q и группы G имеется фундаментальное соответствие между следующими объектами:

- множество X с левым действием группы G и пространством орбит $X/G = Q$, снабженное сечением $s: Q \rightarrow X$;
- отображение $Q \rightarrow S(G)$, где $S(G)$ – множество подгрупп группы G .

Для данного действия G на X такого, что $X/G = Q$, и данного сечения $s: Q \rightarrow X$ определено отображение $\chi: Q \rightarrow S(G)$, ставящее в соответствие точке $q \in Q$ стационарную подгруппу $G_{s(q)} \in S(G)$ точки $s(q)$. Обратно, по отображению $\chi: Q \rightarrow S(G)$ можно построить действие G на множестве $X = (Q \times G)/\sim$, где $(q_1, g_1) \sim (q_2, g_2)$ тогда и только тогда, когда $q_1 = q_2$ и $g_1 g_2^{-1} \in \chi(q_1)$. Мы получаем пространство X с левым действием группы G , заданным формулой $g \cdot (q, h) = (q, gh)$, сечением $s(q) = (q, e)$ и пространством орбит Q .

В работе [16] определено топологическое пространство

$$\tilde{\mathcal{Z}}_P = (P \times \mathbb{T}^m)/\sim, \quad (p_1, t_1) \sim (p_2, t_2) \iff p_1 = p_2 \text{ и } t_1 t_2^{-1} \in T(p_1). \quad (9)$$

Топологический тип пространства $\tilde{\mathcal{Z}}_P$ определяется комбинаторикой многогранника P . Как отмечено в обзоре [18], именно сечение отображения-проекции на пространство орбит позволяет установить топологическую эквивалентность различных конструкций момент-угол-многообразий и квазиторических многообразий. В случае многообразий $\mathcal{Z}_P$ существование сечения было установлено в лемме 3.3.

ЛЕММА 4.1. *Существует канонический $\mathbb{T}^m$ -эquivариантный гомеоморфизм между гладким момент-угол-многообразием $\mathcal{Z}_P$, определенным согласно теореме 3.1, и топологическим пространством $\tilde{\mathcal{Z}}_P$, определенным с помощью (9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся построенным в лемме 3.3 каноническим сечением $s_{\mathcal{Z}_P}: P \rightarrow \mathcal{Z}_P$. Рассмотрим естественное $\mathbb{T}^m$ -эquivариантное отображение $z_P: P \times \mathbb{T}^m \rightarrow \mathcal{Z}_P$, заданное формулой

$$z_P(p, t) = t \cdot s_{\mathcal{Z}_P}(p).$$

Отображение z_P порождает искомый гомеоморфизм $\tilde{\mathcal{Z}}_P \rightarrow \mathcal{Z}_P$. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Многообразие $\tilde{\mathcal{Z}}_P$ называется *комбинаторной моделью* момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$ многогранника P .

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Для данного комбинаторного типа многогранника P существует ровно одна, с точностью до $\mathbb{T}^m$ -эquivариантного гомеоморфизма, комбинаторная модель $\tilde{\mathcal{Z}}_P$ момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$. Более точно, комбинаторная эквивалентность простых многогранников P_1 и P_2 индуцирует $\mathbb{T}^m$ -эquivариантный гомеоморфизм пространств $\tilde{\mathcal{Z}}_{P_1}$ и $\tilde{\mathcal{Z}}_{P_2}$.*

С другой стороны, геометрическая реализация комбинаторного многогранника P , задаваемая парой (A_P, b_P) , определяет гладкое многообразие $\mathcal{Z}_P$, снабженное каноническим equivариантным гомеоморфизмом $\tilde{\mathcal{Z}}_P \rightarrow \mathcal{Z}_P$. Таким образом, имеет место следующее соответствие:

- геометрия многогранника $P \iff$ геометрия и дифференциальная топология момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$;
- комбинаторика многогранника $P \iff$ алгебраическая топология комбинаторной модели $\tilde{\mathcal{Z}}_P$.

Вопрос о том, существуют ли гомеоморфные, но не диффеоморфные момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_{P_1}$ и $\mathcal{Z}_{P_2}$ над комбинаторно эквивалентными многогранниками P_1 и P_2 , остается открытым. Как показано в работе [19], любые два комбинаторно эквивалентных простых многогранника диффеоморфны как многообразия с углами.

С комбинаторной моделью момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$ тесно связан комбинаторный инвариант, известный как *число Бухштабера* $s(P)$ многогранника P (см. [17], [7]). Число $s(P)$ определяется как максимальная размерность торической подгруппы в торе $\mathbb{T}^m$, действие которой на многообразии $\mathcal{Z}_P$ свободно. Максимально возможное значение числа Бухштабера простого многогранника P равно $m - n$. Поскольку многообразие $\mathcal{Z}_P$ equivариантно гомеоморфно своей комбинаторной модели $\tilde{\mathcal{Z}}_P$, число $s(P)$ является комбинаторным инвариантом многогранника P . Ряд результатов об инварианте $s(P)$ и описание его связи с классическими комбинаторными инвариантами можно найти в обзоре [20].

Как было указано выше, максимальная размерность торической подгруппы в торе $\mathbb{T}^m$, которая может свободно действовать на $\mathcal{Z}_P$, равна $m - n$. Предположим, что задана $(m - n)$ -мерная торическая подгруппа $K \subset \mathbb{T}^m$, действующая свободно на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P$. Подгруппа K может быть определена при помощи короткой точной последовательности

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathbb{T}^m \longrightarrow \mathbb{T}^n \longrightarrow 1. \quad (10)$$

Подгруппа K неканонически изоморфна стандартному тору $\mathbb{T}^{m-n}$. Зафиксировав базис в $K \simeq \mathbb{T}^{m-n}$, мы получаем целочисленную $(m \times (m - n))$ -матрицу C , задающую вложение $\mathbb{T}^{m-n}$ в $\mathbb{T}^m$. Матрица C определена с точностью до замены базиса в $\mathbb{T}^{m-n}$. Матрица D , задающая замену базиса в торе $\mathbb{T}^{m-n}$, переводит матрицу C в DC . При фиксированной подгруппе K задание эпиморфизма $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ в точной последовательности (10) эквивалентно выбору базиса в факторгруппе $\mathbb{T}^m/K$. Зафиксируем базис в факторгруппе $\mathbb{T}^m/K \simeq \mathbb{T}^n$ и обозначим через $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ эпиморфизм в точной последовательности (10). Напомним, что подмножество индексов $I \subset [1, m]$ называется допустимым, если пересечение соответствующих гиперграней непусто в многограннике P . Гомоморфизм l удовлетворяет следующему условию регулярности, введенному в работе [16], которое мы будем называть *свойством DJ*:

$$I - \text{допустимое подмножество} \implies T_I \cap \ker l = 1.$$

Гомоморфизм l называется *характеристической функцией* для многогранника P . Зафиксировав базисы в $\mathbb{T}^m$ и $\mathbb{T}^n$, получаем, что гомоморфизм $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ задается целочисленной $(n \times m)$ -матрицей Λ . По построению мы имеем $\Lambda C = 0$. Кроме того, из свойства DJ гомоморфизма l следует, что столбцы матрицы Λ удовлетворяют следующему условию регулярности, которое мы также называем свойством DJ:

- если Λ_v – матрица, образованная столбцами, соответствующими гиперграням, содержащим данную вершину v , то $\det \Lambda_v = \pm 1$.

Отождествив свободно действующую на $\mathcal{Z}_P$ подгруппу $K \subset \mathbb{T}^m$ с тором $\mathbb{T}^{m-n}$, мы получаем точную последовательность торov, оснащенных базисами:

$$1 \rightarrow \mathbb{T}^{m-n} \xrightarrow{i} \mathbb{T}^m \xrightarrow{l} \mathbb{T}^n \rightarrow 1, \quad (11)$$

в которой гомоморфизм l задается матрицей Λ , а гомоморфизм i задается матрицей C , соответствующей подгруппе $K \subset \mathbb{T}^m$.

Как показано в работе [15], эта конструкция обратима: для данного многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$ с m гипергранями любая целочисленная $(n \times m)$ -матрица Λ , обладающая свойством DJ, определяет эпиморфизм $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$, ядро K которого действует на соответствующем момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P$ свободно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4 [15]. Пространство орбит $M = \mathcal{Z}_P/K$, где $K = \ker l$, наделенное канонической гладкостью, называется *квазиторическим многообразием, заданным комбинаторными данными* (P, Λ) .

В дальнейшем под квазиторическим многообразием M , если не оговорено иное, мы будем понимать многообразие $M(P, \Lambda)$, заданное комбинаторными данными (P, Λ) .

В отличие от конструкции момент-угол-многообразия, которое канонически определяется по простому многограннику $P \subset \mathbb{R}^n$, конструкция квазиторического многообразия требует, в качестве неотъемлемой составляющей, матрицу Λ , определяющую характеристическую функцию l . Задача описания простых многогранников P , для которых существует хотя бы одна характеристическая функция, остается открытой. Известно, что в каждой размерности $n > 3$ существуют простые многогранники, для которых не существует ни одной характеристической функции l . В размерности 3 характеристическая функция для каждого простого многогранника строится с использованием правильной раскраски его гиперграней в четыре цвета, которая существует

по теореме о четырех красках. Эта специальная характеристическая функция строится по реберному графу двойственного многогранника, и алгоритм ее построения является квадратичным как функция числа вершин графа (см., например, [21]).

Многообразие M снабжено действием компактного тора $\mathbb{T}^n \simeq \mathbb{T}^m/K$. Действие $\mathbb{T}^n$ на M является *локально стандартным*: любая точка $x \in M$ обладает открытой окрестностью, эквивариантно гомеоморфной области в пространстве $\mathbb{C}^n$ со стандартным действием компактного тора $\mathbb{T}^n$. Из этого нетрудно получить, что действие тора $\mathbb{T}^n$ на M имеет только изолированные неподвижные точки, число которых равно числу вершин многогранника P .

Если обозначить через $\pi_l: \mathcal{Z}_P \rightarrow M$ проекцию на пространство орбит действия группы K , то каноническая проекция $\rho_P: \mathcal{Z}_P \rightarrow P$ разлагается в композицию вида $\rho_P = \pi \circ \pi_l$, где отображение $\pi: M \rightarrow P$ называется отображением моментов. Это название соответствует гамильтоновым действиям торов на симплектических многообразиях [22]–[24]. Отображение моментов задает взаимно однозначное соответствие между неподвижными точками действия тора $\mathbb{T}^n$ на M и вершинами многогранника P .

Пусть $v = \bigcap_{i \in I} F_i$ – некоторая вершина многогранника P . Согласно свойству DJ матрицы Λ , квадратная матрица Λ_v задает автоморфизм тора $\mathbb{T}^n$ на себя. Отсюда следует, что матрица $\Lambda_v^{-1}\Lambda$ является матрицей характеристической функции $l_v: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$, ограничение которой на координатный тор T_I задается единичной матрицей. Если предположить, что гиперграни многогранника P упорядочены так, что вершина $v = \bigcap_{i \in I} F_i$ является пересечением первых n гиперграней, то матрица $\Lambda_v^{-1}\Lambda$ характеристического гомоморфизма l_v имеет следующий вид, называемый *приведенной формой характеристической матрицы*:

$$\Lambda_v^{-1}\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \lambda_{1,n+1} & \dots & \lambda_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda_{n,n+1} & \dots & \lambda_{n,m} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

В этом случае $(m \times (m - n))$ -матрица коядра C , определяющая вложение $K \hookrightarrow T^m$ торической подгруппы $K \simeq \mathbb{T}^{m-n}$ в тор $\mathbb{T}^m$, задается в явном виде следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda_{1,n+1} & \dots & -\lambda_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda_{n,n+1} & \dots & -\lambda_{n,m} \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

В работе [16] топологическое пространство $\tilde{\mathcal{Z}}_P$ играло вспомогательную роль. Оно использовалось для построения моделей квазиторических многообразий $\tilde{M}$ с заданной характеристической функцией l для многогранника P , задаваемых в виде $\tilde{M} = (P \times \mathbb{T}^n)/\sim$, где

$$(p_1, t_1) \sim (p_2, t_2) \iff p_1 = p_2 \text{ и } t_1 t_2^{-1} \in l(T(p_1)).$$

Как отмечено в обзоре [18], для того чтобы показать, что многообразие $\tilde{M}$ гомеоморфно абстрактному квазиторическому многообразию, определенному

в [16] с помощью свойств, необходимо наличие сечения $P \rightarrow M$. В используемой в настоящей работе конструкции квазиторического многообразия в терминах момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P$ необходимое сечение $P \rightarrow M$ описывается следующим утверждением.

ЛЕММА 4.5. *Отображение $\pi: M \rightarrow P$ обладает каноническим непрерывным сечением $s_M: P \rightarrow M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно положить $s_M = \pi_l \circ s_{\mathcal{Z}_P}$.

Многогранник P имеет каноническую структуру гладкого многообразия с углами. Относительно этой структуры проекция π является гладким отображением.

ЛЕММА 4.6. *Существует канонический $\mathbb{T}^n$ -эквивариантный гомеоморфизм $\widetilde{M} \rightarrow M$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественное $\mathbb{T}^n$ -эквивариантное отображение $z_M: P \times \mathbb{T}^n \rightarrow M$, заданное формулой

$$z_M(p, t) = t \cdot s_M(p).$$

Отображение s_M порождает искомый гомеоморфизм $\widetilde{M} \rightarrow M$. Лемма доказана.

Таким образом, топологическое многообразие $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ является универсальным объектом для квазиторических многообразий, задаваемых комбинаторными данными (P, Λ) . Любое квазиторическое многообразие, определяемое комбинаторными данными (P, Λ) , является эквивариантно гомеоморфным факторпространству топологического многообразия $\widetilde{\mathcal{Z}}_P$ по непрерывному свободному действию тора.

Пусть $F \subset P$ – некоторая грань коразмерности k многогранника P , причем $F = F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$. Напомним, что вложение $K \hookrightarrow \mathbb{T}^m$ задается целочисленной $(m \times (m - n))$ -матрицей C .

ЛЕММА 4.7 [15]. *Матрица C_I , полученная из матрицы C вычеркиванием строк с индексами из I , задает мономорфизм группы $\mathbb{Z}^{m-n}$ на прямое слагаемое в группе $\mathbb{Z}^{m-|I|}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что соответствующее сквозное отображение $K \hookrightarrow \mathbb{T}^m \rightarrow T_{[1,m] \setminus I}$ является мономорфизмом. Ядро проекции $\mathbb{T}^m \rightarrow T_{[1,m] \setminus I}$ совпадает с тором $T_I \subset \mathbb{T}^m$, а поскольку подгруппа K является ядром характеристического гомоморфизма $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$, обладающего свойством DJ, подгруппы K и T_I пересекаются только по единичному элементу. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.8. *Квазиторическое многообразие M обладает канонической $\mathbb{T}^n$ -инвариантной римановой метрикой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие компактного тора $\mathbb{T}^m$ на пространстве $\mathbb{C}^m$ является ортогональным. Следовательно, действие тора $\mathbb{T}^m$ и действие подгруппы K на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$ также сохраняют индуцированную с пространства $\mathbb{C}^m$ риманову метрику. Эта метрика спускается на пространство орбит $M = \mathcal{Z}_P/K$ и является там $\mathbb{T}^n$ -инвариантной. Лемма доказана.

§ 5. Эquivariantные вложения квазиторических многообразий

Каждый целочисленный вектор $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$ определяет мономиальную вещественно-алгебраическую функцию $\varphi_a: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$, задаваемую формулой

$$\varphi_a(z_1, \dots, z_m) = \hat{z}_1^{a_1} \cdots \hat{z}_m^{a_m},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{z}_i^{a_i} &= 1, & \text{если } a_i &= 0, & \hat{z}_i^{a_i} &= z_i^{a_i}, & \text{если } a_i > 0, \\ \hat{z}_i^{a_i} &= \bar{z}_i^{-a_i}, & \text{если } a_i < 0. \end{aligned}$$

Пусть $t = (t_1, \dots, t_r) \in \mathbb{T}^r$, $a = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ – целочисленный вектор, A – целочисленная $(l \times r)$ -матрица и A_k – ее k -я строка. Введем обозначения $t^a = (t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}) \in \mathbb{T}^1$ и $t^A = (t^{A_1}, \dots, t^{A_l}) \in \mathbb{T}^l$.

Непосредственно из определения следует, что если $a \in \mathbb{Z}^m$ и $t \in \mathbb{T}^m$, то $\varphi_a(tz) = t^a \varphi_a(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^m$. Решетка $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$ отождествляется с решеткой характеров тора $\mathbb{T}^m$, канонически вложенной в двойственную алгебру Ли $\mathfrak{t}_m^*$. Группа K является прямым сомножителем в $\mathbb{T}^m$, поэтому эпиморфизм двойственных алгебр Ли $\mathfrak{t}_m^* \rightarrow \mathfrak{k}^*$ порождает эпиморфизм соответствующих решеток характеров. Любой характер $K \rightarrow \mathbb{T}^1$ раскладывается в композицию $K \hookrightarrow \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, т.е. задается некоторым вектором $a \in \mathbb{Z}^m$. Обратно, любой вектор $a \in \mathbb{Z}^m$ определяет характер $k_a: K \hookrightarrow \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$.

Напомним, что вложение подгруппы K , изоморфной тору $\mathbb{T}^{m-n}$, в координатный тор $\mathbb{T}^m$, задается матрицей C . Из этого следует, что любой элемент t подгруппы $K \subset \mathbb{T}^m$ представляется единственным образом в виде $t = \tau^C$ для некоторого элемента $\tau \in \mathbb{T}^{m-n}$.

ЛЕММА 5.1. *Для произвольного элемента $t \in K$ справедлива формула*

$$\varphi_a(tz) = \tau^{a^T C} \varphi_a(z),$$

где $t = \tau^C$ и $\tau \in \mathbb{T}^{m-n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\varphi_a(tz) = t^a \varphi_a(z) = (\tau^C)^a \varphi_a(z) = \tau^{a^T C} \varphi_a(z),$$

что и доказывает лемму.

ЛЕММА 5.2. *Пусть $a, a' \in \mathbb{Z}^m$. Следующие условия эквивалентны:*

- 1) векторы a и a' порождают один и тот же характер группы K ;
- 2) $C^T a = C^T a'$ в $\mathbb{Z}^{m-n}$;
- 3) $a - a' \in \text{Im}(\Lambda^T: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $a - a'$ порождает тривиальный характер подгруппы K тогда и только тогда, когда $a - a' \in \ker C^T$. Поскольку C^T – матрица коядра для Λ^T , пространства $\ker C^T$ и $\text{Im} \Lambda^T$ совпадают. Лемма доказана.

Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$, таким образом, представляется как объединение слоев вида $(C^T)^{-1}b$, $b \in \mathbb{Z}^{m-n}$, причем каждый слой соответствует характеру $K \rightarrow \mathbb{T}^1$. Тривиальному характеру подгруппы K соответствует пересечение $\ker C^T \cap \mathbb{Z}^m$, имеющее ранг n .

ЛЕММА 5.3. *Предположим, что векторы $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{Z}^m$ порождают один и тот же характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$. Пусть $\varphi: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^q$ – ограничение мономиального отображения $\prod \varphi_{a_i}$ на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$. Тогда:*

1) *если характер $\tilde{k}$ группы K тривиален, то отображение φ является постоянным на орбитах действия группы K на $\mathcal{Z}_P$ и порождает гладкое отображение $\tilde{\varphi}: M \rightarrow \mathbb{C}^q$, эквивариантное относительно некоторого представления $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^q$, где действие тора $\mathbb{T}^q$ на $\mathbb{C}^q$ является стандартным;*

2) *если отображения $\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_q}$ не обращаются одновременно в нуль ни в какой точке $\mathcal{Z}_P$, то отображение φ порождает гладкое отображение $\tilde{\varphi}_P: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$, эквивариантное относительно некоторого представления $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^q$, где действие тора $\mathbb{T}^q$ на $\mathbb{CP}^{q-1}$ является стандартным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение φ является эквивариантным относительно линейного представления $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^q$, порожденного векторами $a_1, \dots, a_q$. Как было указано выше, если $t \in K$, то $\varphi_a(tz) = \tilde{k}(t)\varphi_a(z)$. Отсюда следует, что если характер $\tilde{k}$ тривиален, то отображение $\varphi: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}^q$ постоянно на слоях гладкого действия компактной группы K и, следовательно, индуцирует гладкое отображение $\tilde{\varphi}: M \rightarrow \mathbb{C}^q$, которое, таким образом, эквивариантно относительно индуцированного представления $\mathbb{T}^m/K \simeq \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^q$.

Если же характер $\tilde{k}$ нетривиален, то при действии элемента группы K на $\mathcal{Z}_P$ все компоненты отображения φ умножаются на одно и то же комплексное число, по модулю равное единице. Поскольку образ $\varphi(\mathcal{Z}_P) \subset \mathbb{C}^q$ компактен и не содержит начало координат, к сквозному отображению $\mathcal{Z}_P \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^q \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ применимы те же аргументы, что и в предыдущем случае. Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Будем называть отображения $\tilde{\varphi}: M \rightarrow \mathbb{C}^q$ и $\tilde{\varphi}_P: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$, построенные по системе векторов $a_1, \dots, a_q$ так, как это сделано в лемме 5.3, *мономиальными отображениями* квазиторического многообразия M .

Таким образом, функции φ_a , $a \in \mathbb{Z}^m$, порождают семейство гладких эквивариантных отображений многообразия M . Как будет показано ниже, это семейство достаточно для того, чтобы построить в терминах данных (P, Λ) эквивариантные *вложения* квазиторических многообразий в проективное пространство. Эти вложения параметризуются характерами группы K , причем тривиальному характеру отвечает эквивариантное вложение квазиторического многообразия в линейное пространство, реализованное как аффинная карта проективного пространства той же размерности.

Пусть компактная группа G гладко действует на компактном многообразии M . Тогда согласно теореме Мостова–Пале [1], [2] существует гладкое вложение многообразия M в $\mathbb{R}^N$, эквивариантное относительно некоторого представления $G \rightarrow \mathrm{GL}(N, \mathbb{R})$. Доказательство этой теоремы существенно использует функциональный анализ, а именно тот факт, что матричные элементы конечномерных представлений компактной группы G образуют плотное множество в гильбертовом пространстве всех гладких функций на многообразии M с каноническим действием группы G . Отметим, что теорема Мостова–Пале не дает никаких оценок на размерность пространства вложения. Такие оценки были получены в работе [25]. Ниже мы покажем, что в случае квазиторических многообразий M , заданных комбинаторными данными (P, Λ) , можно эффективно построить множество мономиальных функций, задающих вложение $M \rightarrow \mathbb{R}^N$, эквивариантное относительно соответствующего представления

группы. Число этих функций оценивается сверху числом вершин и ребер многогранника P , как будет показано ниже.

Зафиксируем некоторый характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$. Поскольку матрица C задает изоморфизм тора $\mathbb{T}^{m-n}$ с подгруппой K , характер $\tilde{k}$ определяется некоторым вектором $\tilde{b} \in \mathbb{Z}^{m-n}$. Для данного множества индексов $I \subset [1, m]$ обозначим через C_I матрицу, полученную из матрицы C вычеркиванием строк с индексами из I . Введем необходимые понятия и обозначения.

- Пусть $r \subset P$ – некоторое ребро многогранника P . В силу локальной стандартности действия тора $\mathbb{T}^n$ на квазиторическом многообразии M , стабилизатор $\chi(\pi^{-1}(r))$ прообраза ребра r является $(n-1)$ -мерной торической подгруппой в $\mathbb{T}^n$. Обозначим через $\Phi_r: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^1$ характер, ядром которого является подгруппа $\chi(\pi^{-1}(r))$, а через μ_r характер, задаваемый композицией

$$\mu_r: \mathbb{T}^m \xrightarrow{l} \mathbb{T}^n \xrightarrow{\Phi_r} \mathbb{T}^1.$$

- Пусть $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ – некоторый характер группы K , а $v = F_I \in P$ – вершина многогранника P . В силу леммы 4.7 проекция $p_I: K \hookrightarrow \mathbb{T}^m \rightarrow T_{[1,m] \setminus I}$ является изоморфизмом. Поставим в соответствие вершине v характер k_v тора $\mathbb{T}^m$, определяемый как композиция

$$k_v: \mathbb{T}^m \rightarrow T_{[1,m] \setminus I} \xrightarrow{p_I^{-1}} K \xrightarrow{\tilde{k}} \mathbb{T}^1.$$

- Пусть $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ – некоторый характер группы K . Выберем ребро $r \subset P$ многогранника P и вершину $v \in r$. Поставим в соответствие паре (v, r) характер $k_{v,r}: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, представляющий собой сумму характеров $k_v: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$ и $\mu_r: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, где характеры k_v и μ_r определены выше.

Таким образом, множество пар вида {характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$, вершина $v \in P$ } определяет множество характеров $\{k_v \mid v \in P\} \subset \text{ch}(\mathbb{T}^m)$, а множество троек вида {характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$, ребро $r \subset P$, вершина $v \in r$ } определяет множество $\{k_{v,r} \mid v \in r \subset P\} \subset \text{ch}(\mathbb{T}^m)$; здесь $\text{ch}(\mathbb{T}^m)$ – множество характеров тора $\mathbb{T}^m$. Для каждого характера $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ введем множество $X_{\tilde{k}} = \{k_v\} \cup \{k_{v,r}\} \subset \text{ch}(\mathbb{T}^m)$. Опишем свойства множества $X_{\tilde{k}}$ и характеров k_v и $k_{v,r}$.

1) Число попарно различных характеров в $X_{\tilde{k}}$ не превышает $f_0(P)(n+1)$, поскольку мощность множества $\{k_v\}$ не превосходит $f_0(P)$, а мощность $\{k_{v,r}\}$ не больше числа $nf_0(P)$. В конкретных примерах мощность множества $X_{\tilde{k}}$ может быть меньше за счет того, что характеры k_v и $k_{v,r}$, отвечающие различным вершинам $v \in P$ и парам (v, r) , $v \in r \subset P$, могут совпадать между собой.

2) Ограничение каждого из характеров k_v и $k_{v,r}$ на подгруппу $K \subset \mathbb{T}^m$ дает характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$.

3) Все характеры $\tilde{k}_v$ тривиальны или нетривиальны одновременно с характером $\tilde{k}$.

4) Характер μ_r не зависит от $\tilde{k}$ и нетривиален для всех $r \subset P$. Ограничение μ_r на подгруппу K тривиально.

5) Каждый характер k_v , $v \in P$, определен однозначно, а характер $\Phi_r: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^1$ и, как следствие, характер $\mu_r: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$ – лишь с точностью до умножения на ± 1 . В определении характера $k_{v,r}$ тем самым есть неоднозначность. Мы устраняем ее следующим образом: если v_0, v_1 – вершины ребра $r \subset P$, то, как будет ясно из дальнейшего изложения, характеры μ_r и $k_{v_1} - k_{v_0}$ являются кратными. Мы полагаем $k_{v_0,r} = k_{v_0} + \mu_r$, где характер μ_r сонаправлен с характером

$k_{v_1} - k_{v_0}$. Если $k_{v_1} = k_{v_0}$, то знак характера $\mu_r: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$ выбирается так, чтобы первая ненулевая координата определяющего его вектора была положительна.

6) В случае тривиальности характера $\tilde{k}$ мощность множества $X_{\tilde{k}}$ не превосходит числа $f_1(P) + 1$, поскольку если v_0, v_1 – вершины ребра $r \subset P$, то характеры $k_{v_0, r}$ и $k_{v_1, r}$ совпадают с μ_r .

Векторы w_r , определяющие характеры Φ_r , $r \subset P$, образуют целочисленную $(n \times q)$ -матрицу W . Рассмотрим порожденное этими векторами представление Φ тора $\mathbb{T}^n$ в линейном пространстве $\mathbb{C}^q$. Отображение моментов $\pi: M \rightarrow P \subset \mathbb{R}^n$ является эквивариантным относительно тривиального действия тора на $\mathbb{R}^n$. Как будет показано далее, отображение моментов $\pi: M \rightarrow P$ продолжается до гладкого линейного вложения $M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^q$, эквивариантного относительно представления $\Phi: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^q$.

ТЕОРЕМА 5.5. *Отображение моментов $\pi: M \rightarrow P$ продолжается до вещественно-алгебраического эквивариантного вложения $\pi \times \tilde{\varphi}: M \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^q$, соответствующего определенному выше представлению $1 \times \Phi$ тора $\mathbb{T}^n$.*

Число q в формулировке теоремы 5.5 не превосходит числа ребер многогранника P (это следует из конструкции представления Φ).

Теорема 5.5 является следствием более общего результата о проективном вложении квазиторического многообразия M (см. теорему 5.6 ниже). Пусть $X_{\tilde{k}}$ – множество характеров тора $\mathbb{T}^m$, построенное по характеру $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ так, как указано выше. Каждый характер из множества $X_{\tilde{k}}$, определяемый вектором $a \in \mathbb{Z}^m$, задает мономиальную функцию $\varphi_a: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}$. Таким образом, множество $X_{\tilde{k}}$ определяет мономиальное отображение $\varphi_{\tilde{k}}: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^q$, где $q = |X_{\tilde{k}}|$. Тогда, как будет показано далее, соответствующее проективное отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ корректно определено.

Каждое представление $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ задает линейное комплексное расслоение $\xi_{\tilde{k}} \rightarrow M$, где $\xi_{\tilde{k}} = \mathcal{Z}_P \times_K \mathbb{C}$, а действие группы K на $\mathbb{C}$ задано характером $\tilde{k}$. Из торической топологии известно, что можно выбрать изоморфизм групп $H^2(M, \mathbb{Z})$ и $\text{ch}(K)$ и, таким образом, поставить в соответствие характеру $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ класс когомологий $c_1(\xi_{\tilde{k}}) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ – характеристический класс расслоения $\xi_{\tilde{k}}$. Заметим, что класс $c_1(\xi_{\tilde{k}})$ определяет отображение $M \rightarrow \mathbb{CP}^\infty$, индуцирующее одномерное комплексное линейное расслоение $\xi_{\tilde{k}}$ над M . Мы покажем, что это отображение может быть “распрямлено”, т.е. продолжается до эквивариантного вложения квазиторического многообразия M .

ТЕОРЕМА 5.6. *Множество характеров $X_{\tilde{k}}$, где $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ – произвольный характер, определяет мономиальное отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ (см. определение 5.4), продолжающееся до эквивариантного вложения*

$$\pi \times \tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}: M \rightarrow P \times \mathbb{CP}^{q-1}.$$

Индукцированное отображение в когомологиях

$$\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}^*: H^2(\mathbb{CP}^{q-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

совпадает с гомоморфизмом

$$H^2(\mathbb{CP}^\infty, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^2(\mathbb{CP}^{q-1}, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z}),$$

индуцированным классифицирующим отображением расслоения $\xi_{\tilde{k}}$. Если характер $\tilde{k}$ тривиален, то образ отображения $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}$ целиком лежит в некоторой аффинной карте стандартного атласа пространства $\mathbb{CP}^{q-1}$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, мы сделаем несколько замечаний, приведем алгоритм построения множества характеров, о котором идет речь в теореме, и продемонстрируем применение этого алгоритма на важных примерах.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.7. Результат теоремы сводит задачу эффективизации теоремы Мостова–Пале для квазиторического многообразия $M(P, \Lambda)$ к задаче описания множества характеров $X_{\tilde{k}} \subset \text{ch}(\mathbb{T}^m)$, где подгруппа $K \subset \mathbb{T}^m$ однозначно определяется комбинаторными данными (P, Λ) .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.8. Для пар (P, Λ) , задающих проективное торическое многообразие, среди вложений, построенных так, как указано в теореме 5.6, содержатся все проективные вложения торических многообразий, известные из алгебраической геометрии. Квазиторическое многообразие M , заданное комбинаторными данными (P, Λ) , где простой многогранник P задается системой неравенств $A_P x + b_P \geq 0$, является проективным торическим многообразием тогда и только тогда, когда $\Lambda = A_P^T$ и b_P – целочисленный вектор.

Приведем алгоритм построения множества характеров $X_{\tilde{k}} \subset \text{ch}(\mathbb{T}^m)$ по паре (P, Λ) и фиксированному характеру $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$.

1) Построим матрицу C , дающую точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{T}^{m-n} \xrightarrow{C} \mathbb{T}^m \xrightarrow{\Lambda} \mathbb{T}^n \rightarrow 1.$$

Напомним, что образом гомоморфизма, задаваемого матрицей C , является подгруппа $K \subset \mathbb{T}^m$.

2) отождествим характер $\tilde{k}: K \rightarrow \mathbb{T}^1$ с характером группы $\mathbb{T}^{m-n}$, т. е. с вектором $\tilde{b} \in \mathbb{Z}^{m-n}$.

3) Для данной вершины $v = F_I \in P$ рассмотрим $((m-n) \times (m-n))$ -матрицу C_I , полученную из $(m \times (m-n))$ -матрицы C вычеркиванием n строк, индексированных множеством I (в силу леммы 4.7 матрица C_I обратима).

4) Возьмем вектор $b_v \in \mathbb{Z}^m$, полученный из вектора $(C_I^T)^{-1} \tilde{b} \in \mathbb{Z}^{m-n}$ дополнением нулями на позициях из множества I . Получим характер $k_v: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, заданный вектором b_v .

5) Для каждого ребра $r \subset P$ и вершины $v \in r$ обозначим через v' другую вершину этого ребра. Если векторы $b_{v'}$ и b_v различны, то введем вектор $a_{v,r}$, ведущий в ближайшую к b_v целую точку на луче, начинающемся в точке b_v и проходящем через точку $b_{v'}$. Если же векторы b_v и $b_{v'}$ совпадают, то положим $a_{v,r} = b_v + u_r$, где $u_r = \alpha_r^T \Lambda$, а α_r – примитивный целочисленный n -вектор, аннулирующий все столбцы матрицы Λ с индексами, соответствующими гиперграням, содержащим ребро r . Условие положительности первой ненулевой координаты вектора u_r определяет этот вектор однозначно.

6) По каждому вектору $a_{v,r}$, $v \in r \subset P$, построим характер $k_{v,r}: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$.

7) Возьмем в качестве искомого множества $X_{\tilde{k}}$ объединение всех полученных характеров k_v , $v \in P$, и $k_{v,r}$, $v \in r \subset P$.

Отметим, что если $r \subset P$ – ребро, содержащее вершины v и v' , то вектор $u_r = \alpha_r^T \Lambda$ всегда сонаправлен с вектором $b_{v'} - b_v$, если последний отличен от нуля.

ПРИМЕР 5.9. Рассмотрим многообразие $\mathbb{CP}^n$, являющееся торическим многообразием над правильным симплексом $\Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^m$. В этом случае

$(n \times (n + 1))$ -матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

а матрица C представляет собой вектор $(1, \dots, 1)^T$ (символ T обозначает транспонирование) длины $n + 1$. Характеры группы K задаются векторами $\tilde{b} \in \mathbb{Z}^{m-n} = \mathbb{Z}$, т. е. целыми числами.

Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{k}$ – тривиальный характер. Тогда $\tilde{b} = 0$. Матрица C_I для любой вершины $v = F_I \in \Delta^n$ есть (1) . Поэтому $b_v = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ для всех вершин $v \in \Delta^n$. Если $r = F_J \subset \Delta^n$ – некоторое ребро, то вектор $\alpha_r \in \mathbb{Z}^n$ находится явно, решением системы $n - 1$ линейных уравнений. Пусть, например, $r = F_J$, где $J = \{1, \dots, n - 1\}$. Тогда примитивный вектор α_r аннулирует первые $n - 1$ столбцов матрицы Λ , которые совпадают с первыми $n - 1$ столбцами единичной $(n \times n)$ -матрицы. Таким образом, $\alpha_r = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{Z}^n$. Вектор $u_r = \alpha_r^T \Lambda \in \mathbb{Z}^{n+1}$ равен $(0, \dots, 0, 1, -1)$. Аналогичным образом находим, что вектор $u_r = \alpha_r^T \Lambda$, где $r = F_J$, $J = [1, n + 1] \setminus \{i, j\}$, равен $e_i - e_j$, $1 \leq i < j \leq n + 1$. Первая ненулевая координата каждого вектора u_r , выбранного в таком виде, положительна. Вообще в случае проективного торического многообразия каждый вектор u_r , задающий характер μ_r , $r \subset P$, совпадает с примитивным вектором, направленным вдоль ребра образа $i_P(P) \subset \mathbb{R}^m$ многогранника P . Поэтому $X_{\tilde{k}} = \{c_0\} \cup \{c_{e_i - e_j} : 1 \leq i < j \leq n + 1\}$, где через $c_x \in \text{ch}(\mathbb{T}^m)$ обозначается характер, порождаемый вектором $x \in \mathbb{Z}^m$.

Отображения $\varphi_{e_i - e_j}$ имеют вид $z_i \bar{z}_j$ для $1 \leq i < j \leq n + 1$. Непосредственно из конструкции видно, что отображения $\varphi_{e_i - e_j}$ инвариантны относительно диагонального действия окружности на пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Момент-угло-многообразием $\mathcal{Z}_{\Delta^n}$ симплекса Δ^n является сфера S^{2n+1} . Проекция ρ_{Δ^n} тогда задается формулой $(z_0, \dots, z_n) \rightarrow (z_0 \bar{z}_0, \dots, z_n \bar{z}_n)$. отождествим пространство $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ с пространством эрмитовых $((n + 1) \times (n + 1))$ -матриц. Тогда отображение

$$\rho_{\Delta^n} \times \varphi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

задается формулой

$$z \mapsto z^T \bar{z},$$

где $z = (z_0, \dots, z_n)$, $\bar{z} = (\bar{z}_0, \dots, \bar{z}_n)$. Отображение $\rho_{\Delta^n} \times \varphi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ порождает вложение квазиторического многообразия

$$\pi \times \tilde{\varphi}: \mathbb{CP}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{C}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Отметим, что число мономов этого отображения равно числу ребер многогранника Δ^n . Это число меньше, чем оценка максимальной размерности общего проективного вложения, равная $f_0(\Delta^n)(n + 1) = (n + 1)^2$.

Рассмотрим теперь простейший нетривиальный характер подгруппы K , задаваемый элементом $\tilde{b} = (1) \in \mathbb{Z}$, и построим соответствующее ему проективное вложение. Так как $C_I = (1)$ для любой вершины $v = F_I \in P$, то характер k_v , соответствующий вершине $v = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ симплекса Δ^n , определяется тем же вектором e_i , $i \in [1, n + 1]$. Следовательно, все векторы b_v , $v \in P$, попарно различны. Если $v' = e_j$ – другая вершина симплекса, то ребро $r \subset \Delta^n$,

соединяющее v и v' , не содержит других целых точек, поэтому $a_{v,r} = b_{v'}$. Таким образом, в соответствующем проективном отображении $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ имеется ровно $n+1$ мономов, являющихся координатными функциями пространства $\mathbb{C}^{n+1}$. Порожденное ими проективное отображение совпадает с тождественным отображением пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ в себя. Видно, что размерность проективного вложения оказалась меньше, чем размерность построенного выше аффинного вложения. Отметим также, что в описанном примере проективное вложение порождается отображением $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}$. Это наблюдение является общим для неособых проективных торических многообразий и составляет утверждение теоремы 6.1, которая будет доказана в следующем параграфе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.6. Пусть, как было сказано ранее, $b_v \in \mathbb{Z}^m$ – вектор, порождающий соответствующий характер $k_v \in X_{\tilde{k}}$, а $a_{v,r} \in \mathbb{Z}^m$ – вектор, порождающий характер $k_{v,r} \in X_{\tilde{k}}$. Покажем сперва, что проективное отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ корректно определено; для этого достаточно проверить, что существует набор мономиальных отображений, состоящий из $\varphi_{a_{v,r}}$ и φ_{b_v} , не обращающихся одновременно в нуль на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$.

ЛЕММА 5.10. *Отображения φ_{b_v} , $v \in P$, не обращаются одновременно в нуль на многообразии $\mathcal{Z}_P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\tilde{k} \equiv 1$, то все φ_{b_v} – единичные отображения и утверждение леммы выполнено. Предположим теперь, что характер $\tilde{k}$ нетривиален. Если отображения φ_{b_v} обращаются одновременно в нуль в некоторой точке $z \in \mathcal{Z}_P$, то рассмотрим произвольную вершину v_0 грани $F(\rho_P(z))$ – наименьшей грани, внутренность которой содержит точку $\rho_P(z)$. Если $F(\rho_P(z)) = F_I$, то по построению все координаты вектора b_{v_0} , соответствующие индексам из множества I , нулевые. Таким образом, в мономе $\varphi_{b_{v_0}}$ участвуют лишь координаты, не лежащие в множестве I и, следовательно, отличные от нуля в точке z . Лемма доказана.

Таким образом, отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}: M \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^{r-1}$ определено корректно; предположим, что отображение $\pi \times \varphi$ склеивает некоторые две точки $z, z' \in \mathcal{Z}_P$. Поскольку $\pi(z) = \pi(z')$, модули координат точек z и z' совпадают, т.е. существует элемент $t = (t_1, \dots, t_m)$ компактного тора $\mathbb{T}^m$ такой, что $z'_i = t_i z_i$, $i \in [1, m]$. Пусть $F(\rho_P(z)) = F(\rho_P(z')) = F_I$ – наименьшая грань многогранника P , внутренность которой содержит точку $\rho_P(z)$. Элемент $t \in \mathbb{T}^m$ определен с точностью до координат из множества I , которые могут быть любыми, поскольку $z'_i = z_i = 0$ при $i \in I$. Чтобы показать, что отображение $\pi \times \tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ является вложением квазиторического многообразия M , необходимо и достаточно проверить, что в указанной ситуации существует элемент $t \in K$ такой, что $z' = tz$.

Выберем произвольную вершину $v_0 \in F_I$, и пусть $r_1, \dots, r_{\dim F_I} = r_{n-|I|}$ – ребра грани F_I , содержащие точку v_0 .

ЛЕММА 5.11. *Если $\dim F_I > 1$, то стационарные подгруппы $\chi(r_1), \dots, \chi(r_{\dim F_I})$ попарно различны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из локальной стандартности действия тора $\mathbb{T}^n$ в окрестности точки $\pi^{-1}(v_0) \in M$.

Стало быть, векторы $u_{r_i} = a_{v_0,r_i} - b_{v_0}$, $i \in [1, \dim F_I]$, также попарно различны и не коллинеарны.

ЛЕММА 5.12. Пусть $v_0 = \bigcap_{j=1}^n F_j$. Тогда j -я координата вектора u_{r_i} равна ± 1 , если $v_0 = r_i \cap F_j$, и равна 0 в противном случае (если $r_i \subset F_j$).

СЛЕДСТВИЕ 5.13. Координаты векторов u_{r_i} , $i \in [1, \dim F_I]$, соответствующие индексам из множества I , равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5.12. По определению, каждый вектор u_{r_i} задает характер $\mu_{r_i}: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, причем $t \in \ker \mu_{r_i}$ тогда и только тогда, когда элемент $l(t)$ тривиально действует на двумерной сфере $\pi^{-1}(r_i)$. Если $r_i \subset F_j$, то j -я координата всех точек множества $\rho_P^{-1}(r_i) \subset \mathcal{Z}_P$ равна нулю. Поэтому $s \in \ker \mu_{r_i}$ для любого $s \in T_j$. Поскольку $l: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ – характеристическая функция, то ограничение l на тор, порожденный одномерными подгруппами T_j , $v_0 \in F_j$, является изоморфизмом. Если $v_0 = r_i \cap F_j$ и j -я координата вектора u_{r_i} отлична от ± 1 , то стабилизатор внутренней точки в сфере $\pi^{-1}(r_i)$ изоморфен тору $\mathbb{T}^n$ либо произведению $\mathbb{T}^{n-1}$ и конечной подгруппы, а это противоречит локальной стандартности действия тора $\mathbb{T}^n$ на квазиторическом многообразии M . Лемма доказана.

Если $z' = tz$ и $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}(z') = \tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}(z)$, то для всех u_{r_i} верно равенство $\varphi_{u_{r_i}}(z') = \varphi_{u_{r_i}}(z)$. Пусть $p_I(t)$ – образ элемента $t \in \mathbb{T}^m$ относительно канонической покординатной проекции на подгруппу $p_I: \mathbb{T}^m \rightarrow T_{[1, m] \setminus I}$. Тогда

$$\varphi_{u_{r_i}}(z') = \varphi_{u_{r_i}}(tz) = p_I(t)^{u_{r_i}} \varphi_{u_{r_i}}(z),$$

откуда $p_I(t)^{u_{r_i}} = 1$ для всех $i \in [1, \dim F_I]$. Покажем, что $p_I(t) \in p_I(K)$, – из этого будет следовать существование элемента $t \in K$ такого, что $z' = tz$.

Векторы $u_{r_i}^T$, $i = 1, \dots, \dim F_I$, у которых вычеркнуты координаты с индексами из множества I , образуют целочисленную матрицу Λ_I размера $\dim F_I \times (m - |I|)$.

ЛЕММА 5.14. Последовательность

$$1 \rightarrow \mathbb{T}^{m-n} \xrightarrow{C_I} T_{[1, m] \setminus I} \xrightarrow{\Lambda_I} \mathbb{T}^{\dim F_I} \rightarrow 1$$

является точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 5.13 имеет место равенство $\Lambda_I C_I = 0$, поскольку $u_{r_i}^T C = 0$ в силу леммы 5.2. Матрица C_I определяет мономорфизм тора $\mathbb{T}^{m-n}$ на прямой сомножитель в $T_{[1, m] \setminus I}$ в силу леммы 4.7. Матрица, образованная векторами u_{r_i} , содержит в себе единичную подматрицу полного ранга в силу леммы 5.12, поэтому отображение $T_{[1, m] \setminus I} \xrightarrow{\Lambda_I} \mathbb{T}^{\dim F_I}$ эпиморфно, а его ядро совпадает с $\text{Im } C_I$. Лемма доказана.

Лемма 5.14 завершает доказательство части теоремы 5.6, утверждающей, что отображение $\pi \times \tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}$ – вложение. Действительно, если $p_I(t)^{u_{r_i}} = 1$ для всех r_i , то это означает в точности, что $p_I(t) \in C_I(\mathbb{T}^{m-n}) = p_I(K)$.

Докажем теперь часть утверждения теоремы 5.6 об обратном образе в целочисленных когомологиях. Если $\mathbb{CP}^{q-2} \subset \mathbb{CP}^{q-1}$ – стандартное вложение, соответствующее обращению в нуль некоторой координаты пространства $\mathbb{CP}^{q-1}$, то соответствующее этой координате мономиальное отображение задано вектором $a \in \mathbb{Z}^m$, где a – один из векторов b_v , $v \in P$, или $a_{v,r}$, $v \in r \subset P$. Тогда прообраз $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}}^{-1}(\mathbb{CP}^{q-2}) \subset M$ является объединением (с кратностями) подмногообразий $\pi^{-1}(F_j)$, $F_j \subset P$, квазиторического многообразия M . Кратность каждой из

компонент $\pi^{-1}(F_j)$ равна в точности j -й координате вектора a . Группа двумерных когомологий квазиторического многообразия является свободной абелевой группой, порожденной классами подмногообразий $\pi^{-1}(F_j)$, $F_j \subset P$, и профакторизованной по соотношениям, задаваемым строками матрицы Λ . Если характер $\tilde{k}$ нетривиален, то, в силу леммы 5.2, вектор a не лежит в пространстве $\text{Im } \Lambda^T$ и обратный образ отличен от нуля. Если же характер $\tilde{k}$, определяемый векторами $a_{v,r}$ и b_v , тривиален, то, как уже было указано, образ отображения $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}(M)$ целиком лежит в аффинной карте и индуцированный гомоморфизм в когомологиях является нулевым.

Проверим, что отображение $\pi \times \tilde{\varphi}_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ действительно является вложением гладкого многообразия M . Так как отображение $\rho_P \times \varphi_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ постоянно на орбитах действия подгруппы K , то любой вектор, касательный к орбите, лежит в ядре дифференциала. Пусть $z \in \mathcal{Z}_P$ – некоторая точка; покажем, что ядро дифференциала отображения $\rho_P \times \varphi_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ в точке z совпадает с множеством векторов, касательных к орбите свободного действия подгруппы K , проходящей через z . Заметим, что отображение $\rho_P \times \varphi_{\mathbb{P},\tilde{k}}$ коммутирует с действием тора $\mathbb{T}^m$ на $\mathcal{Z}_P$, поэтому достаточно рассмотреть случай $z \in s(P) \subset \mathcal{Z}_P$. Пусть $F = F_I$ – грань, внутренность которой содержит точку $\rho_P(z)$, а v – произвольная вершина этой грани. Без ограничения общности можно считать, что $I = \{1, \dots, k\}$, а v – пересечение первых n гиперграней.

Рассмотрим следующую систему локальных координат в точке z на момент-угол-многообразии $\mathcal{Z}_P$:

- 1) декартовы координаты $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$;
- 2) аргументы $t_{k+1}, \dots, t_n$ комплексных координат $z_{k+1}, \dots, z_n$;
- 3) локальные координаты в образе открытой грани $s(\tilde{F}) \subset \mathcal{Z}_P$.

Выбрав произвольным образом локальные координаты в орбите свободного действия K , получим полную систему локальных координат многообразия $\mathcal{Z}_P$ в точке z .

Пусть $r_1, \dots, r_n$ – ребра, выходящие из вершины v . Из доказательства леммы 5.10 следует, что $\varphi_{b_v}(z) \neq 0$. Рассмотрим следующие локальные координаты в образе отображения $\rho_P \times \varphi_{\mathbb{P},\tilde{k}}$:

- 1) вещественные и мнимые части мономиальных функций $\varphi_{a_{v,r_i}}/\varphi_{b_v}$, $i = 1, \dots, k$;
- 2) аргументы мономиальных функций $\varphi_{a_{v,r_i}}/\varphi_{b_v}$, $i = k+1, \dots, n$;
- 3) локальные координаты в образе открытой грани, содержащей точку $\rho_P(z)$.

В силу леммы 5.12 каждая функция $\varphi_{a_{v,r_i}}/\varphi_{b_v}$, $i = 1, \dots, n$, имеет вид $\hat{z}_i^{\pm 1} F(z)$, где F – мономиальная функция, зависящая только от переменных $\hat{z}_{n+1}^{\pm 1}, \hat{z}_{n+1}^{\pm 1}, \dots, \hat{z}_m^{\pm 1}, \hat{z}_m^{\pm 1}$. Отсюда следует, что квадратная матрица частных производных в указанных нами системах локальных координат является диагональной и невырожденной. Это завершает доказательство теоремы 5.6.

§ 6. Проективные вложения квазиторических многообразий, происходящих из неособых торических

Как известно, неособое проективное торическое многообразие M может быть получено в результате симплектической редукции момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^m$, являющегося неособой поверхностью уровня гамильтониана $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}$, определяемого действием подгруппы $K \subset \mathbb{T}^m$. В силу теоремы

Дельзанта [23] многогранник P в таком случае является *рациональным*, т. е. все его вершины являются точками целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$.

В торической геометрии хорошо известно, что точки целочисленной решетки из внутренности многогранника P (включая лежащие на границе) порождают вложение многообразия M в проективное пространство, индексированное этими точками. Иными словами, утверждение теоремы 5.6 может быть существенно усилено для проективных торических многообразий, а именно, вложение порождается уже самими мономиальными отображениями, без учета отображения моментов. В настоящем параграфе мы приведем доказательство этого утверждения, не использующее алгебраическую геометрию и кольца регулярных функций. Это позволяет строить проективные вложения торических многообразий, происходящих из многогранников, исходя непосредственно из определения через симплектическую редукцию, без промежуточного перехода в категорию алгебраических многообразий.

Согласно теореме Кодaira [4], если M – компактное комплексное многообразие с положительным голоморфным линейным расслоением (в частности, если на M есть рациональная кэлерава форма), то существует комплексно-аналитическое вложение многообразия M в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$. Обобщением этого результата на симплектические многообразия является теорема Громова–Тишлера ([5], [6]), согласно которой любое симплектическое многообразие M с целочисленной симплектической формой ω может быть вложено в некоторое проективное пространство $\mathbb{CP}^n$, причем форма ω при таком вложении будет являться обратным образом стандартной формы Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^n$. Доказательство обеих теорем существенно использует анализ, в частности свойства гармонических функций и оператора Лапласа. В случае квазиторических многообразий комбинаторные данные (P, Λ) позволяют обойтись без привлечения этих методов: единственный момент, когда в доказательстве необходим анализ, – это лемма 6.4, доказательство которой не является технически сложным.

Если C_P – матрица коядра для A_P (см. (4)), то в качестве матрицы C , задающей вложение $K \hookrightarrow \mathbb{T}^m$ подгруппы K , можно выбрать матрицу C_P^T , т. е. $C^T = C_P$. При аффинном отображении $i_P: x \mapsto A_P x + b_P$ многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ переходит в пересечение соответствующей аффинной n -мерной плоскости с положительным октантом. Целочисленные точки многогранника P переходят в множество $S_P = \{y_j\}$ точек решетки $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих двум условиям:

- 1) координаты всех точек y_j неотрицательны;
- 2) $C_P y_i = C_P b_P$.

Отсюда следует, что показатели всех степеней переменных z_i мономиального отображения, порожденного любым вектором $y_j \in S_P$, положительны. Из торической геометрии известно, что совокупность отображений, задаваемых векторами $y_j \in S_P$, порождает вложение торического многообразия M в пространство $\mathbb{CP}^{|S_P|-1}$ (см., например, [26]).

Мы докажем этот результат в усиленной форме. Поскольку $C^T = C_P$, целочисленные точки $\{y_j\}$ определяют один и тот же характер $\tilde{k}_P: K \rightarrow \mathbb{T}^1$, являющийся ограничением на подгруппу K характера, порожденного вектором $b_P \in \mathbb{T}^m$. Построим множество характеров $X_{\tilde{k}_P}$ и систему векторов $\{b_v, a_{v,r}\}$ аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.6. В данном случае векторы b_v , $v \in P$, соответствуют вершинам многогранника P , т. е. $b_v = i_P(v) \in \mathbb{Z}^m$.

Для каждой вершины $v \in P$ и содержащего ее ребра $r \subset P$ вектор $a_{v,r}$ совпадает с ближайшей к $i_P(v)$ целой точкой на ребре $i_P(r)$. Отметим, что векторы вершин b_v все попарно различны, а для векторов $a_{v,r}$ это не обязательно так. Если ребро r содержит вершины v_0, v_1 и на $i_P(r)$ нет целых точек, кроме самих $i_P(v_0)$ и $i_P(v_1)$, то $a_{v_0,r} = b_{v_1}$ и $a_{v_1,r} = b_{v_0}$, как в рассмотренном ранее примере многообразия $\mathbb{CP}^n$. Если же целая точка на ребре $i_P(r)$, помимо $i_P(v_0)$ и $i_P(v_1)$, ровно одна, то она является серединой $i_P(r)$ и в этом случае $a_{v_0,r} = a_{v_1,r}$. Отметим важное отличие построенной системы векторов b_v от общей ситуации квазиторического многообразия из предыдущего параграфа: в точности n координат каждого вектора b_v , $v \in P$, обращаются в нуль и в точности $m - n$ координат строго положительны.

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа.

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что комбинаторные данные (P, Λ) квазиторического многообразия M удовлетворяют следующим условиям:*

- (i) *вектор $b_P \in \mathbb{R}^m$ является целочисленным;*
- (ii) *имеет место соотношение $A_P^T = B\Lambda D$, где B – некоторая целочисленная $(n \times n)$ -матрица, $\det B = \pm 1$, а D – диагональная $(m \times m)$ -матрица, диагональные элементы которой равны ± 1 .*

Тогда вектор $b_P \in \mathbb{Z}^m$ определяет характер $\mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^1$, ограничение которого на подгруппу $K \subset \mathbb{T}^m$ задает характер $\tilde{k}_P: K \rightarrow \mathbb{T}^1$. Проективное отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$, построенное по множеству характеров $X_{\tilde{k}_P}$ (см. теорему 5.6), является гладким вложением.

Как показано в работе [15], комбинаторные данные (P, Λ) определяют на квазиторическом многообразии M каноническую стабильно комплексную структуру. В случае, когда $\Lambda = A_P^T$ и M – проективное торическое многообразие, эта структура является продолжением стандартной комплексной структуры на M .

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что M – полное неособое торическое многообразие, задаваемое нормальным веером простого многогранника P , вершины которого лежат в целочисленной решетке. Рассмотрим мономы, задаваемые векторами $b_v = i_P(v) \in \mathbb{Z}^m$, $v \in P$, и векторами $a_{v,r}$, $v \in r \subset P$, где $a_{v,r}$ – ближайшая к $i_P(v)$ целая точка на ребре $i_P(r)$. Обозначим через X_P множество всех таких мономов, и пусть $|X_P| = q$. Тогда отображение пространства $\mathbb{C}^m$, порожденное мономами из множества X_P , индуцирует голоморфное эквивариантное вложение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}: M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ торического многообразия M в проективное пространство.*

Отметим, что, как хорошо известно из торической геометрии, полное неособое торическое многообразие является проективным тогда и только тогда, когда соответствующий ему веер является нормальным веером простого многогранника (см., например, [26]). Как было недавно показано в работе [27], существуют полные неособые торические многообразия, не являющиеся квазиторическими.

ПРИМЕР 6.3. Рассмотрим квазиторическое многообразие над стандартным симплексом $P = \Delta^n$. В этом случае $m = n + 1$, многообразие $\mathcal{Z}_P$ совпадает со сферой S^{2n+1} , а K – одномерная подгруппа в торе $\mathbb{T}^{n+1}$, которая является образом вложения тора $\mathbb{T}^1$, заданного $((n + 1) \times 1)$ -матрицей C . Условие, что подгруппа K действует на сфере S^{2n+1} свободно, равносильно тому, что

матрица C состоит лишь из элементов вида ± 1 . Пусть $C = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})^T$. Тогда матрица Λ в приведенной форме имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -c_1 c_{n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -c_n c_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в качестве B диагональную $(n \times n)$ -матрицу с элементами $c_1 c_{n+1}, \dots, c_n c_{n+1}$ на диагонали, а в качестве D – диагональную $((n+1) \times (n+1))$ -матрицу с элементами $c_1 c_{n+1}, \dots, c_n c_{n+1}, 1$ на диагонали. Тогда

$$B\Lambda D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} = A_P^T.$$

Ограничение характера тора $\mathbb{T}^m$, задаваемого вектором $b_P = (0, \dots, 0, 1)^T$, на подгруппу K , определяется числом $C^T b_P = c_{n+1} \in \mathbb{Z}$. Каждая вершина $v = F_I$ симплекса Δ^n определяет матрицу C_I , имеющую размер 1×1 и равную соответствующему элементу c_i . Следовательно, вектор b_v , определяющий соответствующую вершине v мономиальную функцию на $\mathbb{C}^{n+1}$, имеет вид $(0, \dots, c_i c_{n+1}, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^{n+1}$.

Отметим, что все векторы b_v различны между собой. Если r – ребро, содержащее вершины v_0 и v_1 , то, как было сказано ранее, точка $a_{v_0, r}$ – ближайшая к точке b_{v_0} целочисленная точка на луче, начинающемся в точке b_{v_0} и направленном в точку b_{v_1} . В нашем случае, как нетрудно видеть, всегда выполнено равенство $a_{v_0, r} = b_{v_1}$. Если $v_i \in \Delta^n$, $i \in [1, n+1]$, – вершина симплекса Δ^n , то $\varphi_{b_{v_i}} = (\hat{z}_i)^{c_i c_{n+1}}$. Эти мономиальные функции порождают вложение квазиторического многообразия $M = \mathcal{Z}_{\Delta^n}/K$ в проективное пространство той же размерности $\mathbb{CP}^n$. Непосредственно проверяется, что это отображение – гомеоморфизм, эквивариантный относительно представления $\mathbb{T}^{n+1}/K \rightarrow \mathbb{T}^n$ и стандартного действия $\mathbb{T}^n$ на $\mathbb{CP}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.1. Сделав подходящую замену базиса в n -мерном торе $\mathbb{T}^m/K$, мы можем считать, что B – единичная матрица и $A_P^T = \Lambda D$. Далее, поскольку $0 = A_P^T C_P^T = \Lambda D C_P^T$, матрица $C = D C_P^T$ является матрицей коядра для матрицы Λ .

Предположим, что теорема доказана для случая, когда D – единичная матрица и $\Lambda = A_P^T$. Тогда система векторов b_v и $a_{v, r}$, построенная по характеру, определяемому вектором $C_P(b_P) \in \mathbb{Z}^{m-n}$, определяет мономиальное вложение в проективное пространство $\mathbb{CP}^{q-1}$ многообразия $\tilde{M} = \mathcal{Z}_P/\tilde{K}$, где подгруппа $\tilde{K} \subset \mathbb{T}^m$ является образом тора $\mathbb{T}^{m-n}$ относительно вложения, индуцированного матрицей $DC = C_P^T$. Но отсюда следует, что система векторов Db_v и $Da_{v, r}$ порождает вложение в $\mathbb{CP}^{q-1}$ исходного многообразия M . Таким образом, достаточно доказать теорему 6.1 в предположении, что B и D – единичные матрицы.

В силу леммы 5.10 векторы b_v , $v \in P$, определяют корректное отображение из M в проективное пространство. Из доказательства теоремы 5.6 тогда следует, что утверждение 6.1 будет доказано, если мы установим следующий результат.

ЛЕММА 6.4. Если $z', z \in \mathcal{Z}_P$ и $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}(z') = \tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}(z)$, то $|z'_j| = |z_j|$ для всех $j \in [1, m]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z', z \in \mathcal{Z}_P$ и $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}(z') = \tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}(z)$. Покажем сначала, что существует грань $F \subset P$ такая, что $\rho_P(z'), \rho_P(z) \in \mathring{F}$. Множества I' и I индексов нулевых координат обеих точек соответствуют некоторым граням $F_{I'}$ и F_I многогранника P . Если $F_{I'} \neq F_I$, то существует вершина v , лежащая в одной грани, но не лежащая в другой; пусть для определенности $v \in F_{I'}$, $v \notin F_I$ и F_j – гипергрань, содержащая F_I и не содержащая v . Тогда в мономе φ_{b_v} степень переменной z_j строго положительна, поэтому $\varphi_{b_v}(z) = 0$. Поскольку множество индексов ненулевых координат вектора b_v строго содержится в множестве индексов $[1, m] \setminus I'$, имеем $\varphi_{b_v}(z') \neq 0$.

Следовательно, существует множество индексов I , соответствующее некоторой грани $F_I \subset P$, такое, что $z'_i = z_i = 0$ тогда и только тогда, когда $i \in I$. Пусть J – множество дополнительных к I индексов в $[1, m]$. Введем векторы β, β', w, w' с компонентами $\beta_j = |z_j|^2$, $\beta'_j = |z'_j|^2$, $w_j = \log |z_j|^2$, $w'_j = \log |z'_j|^2$, $j \in J$. Рассмотрим композицию аффинных вложений $j_F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n \xrightarrow{i_P} \mathbb{R}^m$, где первая стрелка порождает аффинное вложение многогранника $F \subset \mathbb{R}^k$ на грань $F_I \subset P$. Тогда $\beta', \beta \in j_F(F)$. Пусть $x', x \in F$ – такие точки из внутренности многогранника $F \subset \mathbb{R}^k$, что $i_P(j_F(x')) = \beta'$, $i_P(j_F(x)) = \beta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. Пусть $H: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ – гладкое отображение, определенное на выпуклой открытой области $U \subset \mathbb{R}^k$, якобиан которого в каждой точке симметричен и положительно определен. Тогда отображение H является вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in U$, $x \neq y$ и $p(t) = x + t(y - x)$ – прямолинейный путь, соединяющий точки x и y . Поскольку якобиан J_H симметричен и положительно определен, мы имеем $(J_H(w), w) > 0$ для любого вектора w в любой точке области U . Обозначим через H_v проекцию вектор-функции H на направление $v = y - x = (v_1, \dots, v_k)$. Тогда $H_v = \sum_i v_i H_i$, где $H = (H_1, \dots, H_k)$. Производная $\frac{\partial H_v}{\partial v}$ тем самым равна

$$\sum_i v_i \frac{H_i}{\partial v} = \sum_i \sum_j v_i v_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j},$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial v} = \sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Таким образом, верно равенство

$$\frac{\partial H_v}{\partial v} = (J_H(v), v).$$

Поскольку $(J_H(v), v) > 0$ всюду на прямолинейном пути $p(t)$, соединяющем точки x и y и идущем вдоль вектора v , то $H_v(y) > H_v(x)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.6. Симметричность якобиана отображения H эквивалентна замкнутости дифференциальной формы $\omega = \sum_{i=1}^n H_i dx_i$. В силу леммы Пуанкаре форма ω точна на U . Следовательно, $\omega = dF$, где $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ – соответствующая гладкая функция. Матрица J в таком случае является гессианом

функции F . Таким образом, отображения, о которых говорится в предложении 6.5, – это в точности градиенты выпуклых гладких функций на выпуклой области U .

Мы покажем далее, что компоненты мономиального отображения $\varphi_{\tilde{k}_P}$ порождают отображение $H: \mathring{F} \rightarrow \mathbb{R}^k$, определенное на открытой грани $\mathring{F} \subset \mathbb{R}^k$ и удовлетворяющее условиям предложения 6.5. Отсюда будет следовать, что точки x' и x различны.

Рассмотрим произвольную вершину $v_0 \in F_I \subset P$. Через $r_1, \dots, r_k$, $k = \dim F_I$, обозначим содержащие вершину v_0 ребра грани F_I .

Если $\varphi_{a_{v_0, r_i}}: \mathcal{Z}_P \rightarrow \mathbb{C}$ – соответствующее этой вершине мономиальное отображение, то по предположению леммы существует такое число $\mu \in \mathbb{C}^*$, общее для всех v_0 , что

$$\varphi_{a_{v_0, r_i}}(z') = \mu \varphi_{a_{v_0, r_i}}(z)$$

для всех $i \in [1, k]$. Введем отображения

$$\phi_i(z) = \log \frac{|\varphi_{a_{v_0, r_i}}(z)|^2}{|\varphi_{b_{v_0}}(z)|^2}, \quad i \in [1, k], \quad z \in \mathcal{Z}_P.$$

Тогда $\phi_i(z') = \phi_i(z)$ для всех i .

Каждая функция ϕ_i линейна как функция от векторного аргумента w . Если $\Phi = (\phi_1(w), \dots, \phi_k(w))$ – соответствующее линейное отображение из $\mathbb{R}^J$ в $\mathbb{R}^k$, то $\Phi(w') = \Phi(w)$. Здесь $\mathbb{R}^J \subset \mathbb{R}^m$ – линейное подпространство, порожденное базисными векторами с индексами из множества J . Необходимо доказать, что $\beta' = \beta$, или, что эквивалентно, $w' = w$. Поскольку отображение j_F также является вложением, то равенство $w' = w$ имеет место тогда и только тогда, когда точки x' и x совпадают.

Теперь достаточно показать, что из равенства $\Phi(w') = \Phi(w)$ следует, что $x' = x$ в $j_F^{-1}(F_I) \subset \mathbb{R}^k$. Обозначим через $p_J: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^J$ стандартную проекцию. Отображение $\Phi \circ p_J \circ j_F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ является гладкой, но не линейной функцией от переменной $x \in \mathbb{R}^k$. Исследуем матрицу линейного по w отображения $\Phi \circ p_J$. Линейная функция $\phi_i \circ p_J$ определяется m -мерным целочисленным вектором коэффициентов $u_{r_i} = a_{v_0, r_i} - b_{v_0}$. В силу леммы 5.2 верно, что $u_{r_i} \in \text{Im } A_P = \text{Im } \Lambda^T$. Поэтому строками матрицы $\Phi \circ p_J$ являются векторы u_{r_i} , каждый из которых, в свою очередь, является линейной комбинацией столбцов матрицы A_P .

Рассмотрим матрицу L_1 линейного отображения, соответствующего аффинному отображению $j_F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$. Она имеет максимальный ранг, ее столбцы являются линейными комбинациями столбцов матрицы A_P , и все ее строки с индексами из множества I равны нулю. Обозначим через L_0 матрицу отображения $\Phi \circ p_J$, рассматриваемую как линейное отображение от переменной $w = (w_j) = (\log \beta_j) = (\log |z_j|^2)$, $j \in [1, m]$. Как уже было сказано, матрица L_0 образована векторами u_{r_i} . В силу следствия 5.13 у векторов u_{r_i} , $i \in [1, k]$, все координаты с индексами из множества I равны нулю, а в силу леммы 5.12 матрица L_0 содержит единичную подматрицу и также имеет максимальный ранг. Тогда в силу свойства DJ матрицы $A_P^T = \Lambda$ каждый столбец матрицы L_1 выражается через строки матрицы L_0 , т. е. существует матрица D размера $k \times k$ такая, что $DL_0 = L_1^T$. Поскольку L_1 имеет максимальный ранг, матрица D обратима. Тогда матрица композиции отображения $\Phi \circ p_J$ (как линейной функции

от $w = (w_j) = (\log \beta_j) = (\log |z_j|^2)$, $j \in [1, m]$ с автоморфизмом пространства $\mathbb{R}^k$, заданным матрицей D , в точности совпадает с L_1^T .

Рассмотрим сквозное отображение

$$U \xrightarrow{j_F} \mathbb{R}^m \xrightarrow{D \circ \text{Фоп}_J} \mathbb{R}^k,$$

где $U = j_F^{-1}(\overset{\circ}{F}_I)$ – выпуклая область в $\mathbb{R}^k$. Если

$$j_F(x) = L_1(x) + d, \quad d = (d_j), \quad L_1 = (l_{ji}),$$

то

$$\beta_j = l_{ji}x_i + d_j, \quad \phi_k = l_{jk} \log \beta_j,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x_i} = \sum_{j \in J} \frac{\partial \phi_k}{\partial \beta_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial x_i} = \sum_{j \in J} l_{ji} l_{jk}.$$

Таким образом, якобиан сквозного отображения в каждой точке области U симметричен и положительно определен, так как матрица L_1 имеет максимальный ранг и $\beta_j > 0$ всюду на U . Доказательство леммы 6.4 завершается применением предложения 6.5.

Из невырожденности якобиана отображения $U \rightarrow \mathbb{R}^k$ следует также то, что отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}$ является гладким вложением, что завершает доказательство теоремы 6.1.

Отметим, что форма $\omega = \sum_{i=1}^n \phi_i dx_i$ в указанном случае совпадает с формой

$$i_P^* \left(\sum_{j \notin I} \log \beta_j d\beta_j \right),$$

которая, очевидно, является точной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.2. Поскольку утверждение о том, что отображение $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P} : M \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ является гладким вложением, уже доказано, достаточно показать, что $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}$ голоморфно. Проверим, что дифференциал отображения $\tilde{\varphi}_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P}$ коммутирует с оператором комплексной структуры на M и $\mathbb{CP}^{q-1}$. Оператор комплексной структуры J на $\mathbb{C}^m$ является ортогональным. Если $\tau_K(\mathcal{Z}_P)$ – подрасслоение в касательном расслоении к $\mathcal{Z}_P$, касательное к орбитам подгруппы K , то $J(\tau_K(\mathcal{Z}_P)) = \nu(\mathcal{Z}_P)$. Следовательно, ортогональное дополнение к $\tau_K(\mathcal{Z}_P)$ в $\tau(\mathcal{Z}_P)$ является J -инвариантным. Действие подгруппы K на $\mathcal{Z}_P$ коммутирует с действием оператора J на ортогональном дополнении к $\tau_K(\mathcal{Z}_P)$, что определяет оператор почти комплексной структуры J на самом многообразии M . Отображение $\varphi_{\mathbb{P}, \tilde{k}_P} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^q \setminus \{0\}$ является голоморфным, поскольку его компоненты – голоморфные мономы, а отображение проекции $\mathbb{C}^q \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^{q-1}$ голоморфно по определению. Теорема доказана.

Разберем пример проективного торического многообразия вещественной размерности 6 над многогранником Сташефа K_5 .

Матрица $\Lambda = A_P^T$ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а вектор b_P имеет вид $(0, 0, 0, 3, 3, 3, 5, -1, 2)^T$. В качестве соответствующей матрицы $C = C_P^T$ в данном случае можно выбрать матрицу, состоящую лишь из нулей и единиц:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что задание матрицы $C = C_P^T$ позволяет сразу же написать уравнения, определяющие соответствующее момент-угол-многообразие $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^9$. В случае, когда все коэффициенты матрицы C неотрицательны, многообразие $\mathcal{Z}_P$ является пересечением цилиндров в соответствующем евклидовом пространстве. В данной ситуации многообразие $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^9$ задается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 + |z_4|^2 &= 3, & |z_2|^2 + |z_5|^2 &= 3, \\ |z_3|^2 + |z_6|^2 &= 3, & |z_1|^2 + |z_3|^2 + |z_7|^2 + |z_9|^2 &= 7, \\ |z_7|^2 + |z_8|^2 + |z_9|^2 &= 6, & |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_7|^2 &= 5. \end{aligned}$$

Тем самым размерность момент-угол-многообразия $\mathcal{Z}_P \subset \mathbb{C}^9$ равна 12. На $\mathcal{Z}_P$ действует тор $\mathbb{T}^9$, в котором имеется подгруппа K размерности 6, действующая на $\mathcal{Z}_P$ свободно.

Многогранник Сташефа может быть получен из куба I^3 путем последовательного срезания граней коразмерности два. Многогранники, которые могут быть получены из n -мерного куба таким образом, называются *2-усеченными кубами*. Теория 2-усеченных кубов была развита в работе [28]; класс 2-усеченных кубов очень важен тем, что дает очень большой запас явно строящихся квазиторических многообразий и комбинаторных данных (P, Λ) . Как можно явно проверить, при срезании грани коразмерности два матрица $\Lambda = A_P^T$ расширяется на один столбец, являющийся суммой двух других столбцов матрицы Λ . Эти столбцы, в свою очередь, соответствуют гиперграням, примыкающим к срезанной грани. Поэтому семейства 2-усеченных кубов порождают эффективно вычислимый и очень обширный класс квазиторических многообразий, являющийся обильным источником необходимых в исследованиях примеров. Если занумеровать грани многогранника Сташефа соответственно строкам матрицы C , то двухэлементные множества, соответствующие ребрам многогранника K_5 , – это $(1, 2), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 3), (2, 6), (2, 8), (2, 9), (3, 4), (3, 5), (3, 8), (3, 9), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 9), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 9)$. Для каждой пары нужно исключить из C соответствующие номера строк и найти целочисленную матрицу коядра – в данном случае это вектор длины семь. Выпишем все соответствующие векторам u_r , $r \subset K_5$, отображения $\varphi_{ij}: \mathbb{C}^9 \rightarrow \mathbb{C}$, обозначая через φ_{ij} отображение, соответствующее исключенным строкам i и j матрицы C :

$$\begin{aligned} \varphi_{12} &= z_3 \bar{z}_6 \bar{z}_7 z_8, & \varphi_{15} &= \bar{z}_3 z_6 z_7 \bar{z}_8, & \varphi_{16} &= \bar{z}_2 z_5 z_7 \bar{z}_9, \\ \varphi_{17} &= \bar{z}_2 z_3 z_5 \bar{z}_6 z_8 \bar{z}_9, & \varphi_{18} &= z_2 \bar{z}_5 \bar{z}_7 z_9, & \varphi_{23} &= z_1 \bar{z}_4 z_8 \bar{z}_9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{26} &= z_1 \bar{z}_4 z_8 \bar{z}_9, & \varphi_{28} &= \bar{z}_1 z_3 z_4 \bar{z}_6 \bar{z}_7 z_9, & \varphi_{29} &= \bar{z}_3 z_6 z_7 \bar{z}_8, \\
\varphi_{34} &= \bar{z}_2 z_5 z_7 \bar{z}_9, & \varphi_{35} &= \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_8 z_9, & \varphi_{38} &= z_2 \bar{z}_5 \bar{z}_7 z_9, \\
\varphi_{39} &= z_1 z_2 \bar{z}_4 \bar{z}_5 \bar{z}_7 z_8, & \varphi_{45} &= z_3 \bar{z}_6 \bar{z}_7 z_8, & \varphi_{46} &= z_2 \bar{z}_5 \bar{z}_7 z_9, \\
\varphi_{47} &= \bar{z}_2 z_3 z_5 \bar{z}_6 z_8 \bar{z}_9, & \varphi_{57} &= \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_8 z_9, & \varphi_{58} &= \bar{z}_1 z_3 z_4 \bar{z}_6 \bar{z}_7 z_9, \\
\varphi_{67} &= \bar{z}_1 z_4 \bar{z}_8 z_9, & \varphi_{69} &= z_1 z_2 \bar{z}_4 \bar{z}_5 \bar{z}_7 z_8.
\end{aligned}$$

Приведенный пример показывает, что и в нетривиальных случаях, когда простой многогранник P не является произведением других многогранников, число q попарно различных векторов u_r и попарно различных мономов φ_{u_r} может быть существенно меньше числа ребер $f_1(P)$. В случае многогранника Штапфа $q = 6$, но $f_1(P) = 21$. Таким образом, указанные мономы порождают эквивариантное вложение Мостова–Пале проективного торического многообразия, соответствующего многограннику Штапфа $P = K_5$, в евклидово пространство $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{C}^6$.

Построим теперь проективное вложение многогранника Штапфа, воспользовавшись теоремой 6.1. Согласно алгоритму, приведенному в этой теореме, нужно рассмотреть множество целых точек в решетке $\mathbb{Z}^m$, образованное вершинами многогранника $i_P(P) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ и ближайшими к ним целыми точками на ребрах многогранника. Искомое проективное вложение порождается мономами, соответствующими целым точкам из построенного множества.

Многогранник Штапфа в рассматриваемой нами реализации имеет 14 вершин – это точки $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 3, 0)$, $(0, 3, 1)$, $(2, 0, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(3, 1, 3)$, $(2, 0, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(0, 2, 3)$, $(0, 3, 2)$, $(3, 3, 2)$, $(0, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$. Необходимо дополнительно выбрать следующие целые точки на ребрах многогранника P : $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 3, 0)$, $(3, 2, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(3, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 1, 2)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(0, 1, 3)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 2, 3)$ – всего 18 точек.

Таким образом, следующие мономы порождают проективное вложение торического многообразия, соответствующего нормальному вееру трехмерного многогранника Штапфа:

$$\begin{aligned}
\varphi_{b_1} &= z_1 z_4^2 z_5^3 z_6^3 z_7^5 z_9, & \varphi_{b_2} &= z_3 z_4^3 z_5^3 z_6^2 z_7^4 z_9^2, & \varphi_{b_3} &= z_1 z_2^3 z_4^2 z_6^3 z_7^2 z_9^4, \\
\varphi_{b_4} &= z_2^3 z_3 z_4^3 z_6^2 z_7^2 z_9^5, & \varphi_{b_5} &= z_1^2 z_4 z_5^3 z_6^3 z_7^5 z_8, & \varphi_{b_6} &= z_1^3 z_2 z_5^2 z_6^3 z_7^4 z_8^2, \\
\varphi_{b_7} &= z_1^3 z_2 z_3^3 z_5^2 z_7^2 z_9^5, & \varphi_{b_8} &= z_1^2 z_3^3 z_4 z_5^3 z_7^2 z_8^4, & \varphi_{b_9} &= z_1^3 z_2^2 z_3^3 z_5 z_8^5 z_9, \\
\varphi_{b_{10}} &= z_2^2 z_3^3 z_4^3 z_5 z_8^2 z_9^4, & \varphi_{b_{11}} &= z_2^3 z_3^2 z_4^3 z_6 z_8^5 z_9, & \varphi_{b_{12}} &= z_1^3 z_2^3 z_3^2 z_6 z_8^4 z_9^2, \\
\varphi_{b_{13}} &= z_3^3 z_4^3 z_5^3 z_7^2 z_8^2 z_9^2, & \varphi_{b_{14}} &= z_1^3 z_2^3 z_6^3 z_7^2 z_8^2 z_9^2, \\
\varphi_{a_1} &= z_1 z_2 z_4^2 z_5^2 z_6^3 z_7^4 z_9^2, & \varphi_{a_2} &= z_1 z_2^2 z_4^2 z_5 z_6^3 z_7^3 z_9^3, & \varphi_{a_3} &= z_1^2 z_2^3 z_4 z_6^3 z_7^2 z_8^3 z_9, \\
\varphi_{a_4} &= z_1^3 z_2^2 z_5 z_6^3 z_7^3 z_8^2 z_9, & \varphi_{a_5} &= z_2 z_3 z_4^3 z_5^2 z_6^2 z_7^3 z_9^3, & \varphi_{a_6} &= z_2^2 z_3 z_4^3 z_5 z_6^2 z_7^2 z_9^4, \\
\varphi_{a_7} &= z_1^3 z_2^3 z_3^1 z_6^2 z_7^3 z_8^2 z_9^2, & \varphi_{a_8} &= z_1^3 z_2 z_3 z_5^2 z_6^2 z_7^3 z_8^3, & \varphi_{a_9} &= z_1^2 z_3 z_4 z_5^3 z_6^2 z_7^4 z_8^2, \\
\varphi_{a_{10}} &= z_1 z_2^3 z_3^2 z_4^2 z_6^2 z_8^3 z_9, & \varphi_{a_{11}} &= z_1^2 z_2^3 z_3^2 z_4 z_6^2 z_8^3 z_9^3, & \varphi_{a_{12}} &= z_1^3 z_2 z_3^3 z_5^2 z_6^2 z_7^4 z_8, \\
\varphi_{a_{13}} &= z_1^2 z_3^3 z_4 z_5^3 z_6^2 z_7^3 z_8^3, & \varphi_{a_{14}} &= z_2^3 z_4^3 z_5^3 z_6^3 z_7^3 z_8^2 z_9, & \varphi_{a_{15}} &= z_1 z_3^3 z_4^2 z_5^3 z_7^2 z_8^3 z_9, \\
\varphi_{a_{16}} &= z_2 z_3^3 z_4^3 z_5^2 z_7^2 z_8^2 z_9^3, & \varphi_{a_{17}} &= z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^2 z_5 z_8^3 z_9^3, & \varphi_{a_{18}} &= z_1^2 z_2^2 z_3^3 z_4 z_5 z_8^4 z_9^2.
\end{aligned}$$

Видно, что, поскольку размерность соответствующего проективного вложения значительно превосходит размерность аффинного вложения проективного торического многообразия, соответствующего многограннику Сташефа K_5 , этот случай существенно отличается от случая проективного торического многообразия $\mathbb{CP}^n$, разобранного ранее.

Список литературы

1. G. D. Mostow, “Equivariant embeddings in Euclidean space”, *Ann. of Math.* (2), **65**:3 (1957), 432–446.
2. R. S. Palais, “Imbedding of compact, differentiable transformation groups in orthogonal representations”, *J. Math. Mech.*, **6** (1957), 673–678.
3. Г. Бредон, *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980, 440 с.; пер. с англ.: G. E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Pure and Applied Mathematics, **46**, Academic Press, New York–London, 1972, xiii+459 pp.
4. K. Kodaira, “On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)”, *Ann. of Math.* (2), **60**:1 (1954), 28–48.
5. M. L. Gromov, “A topological technique for the construction of solutions of differential equations and inequalities”, *Actes du Congrès International des Mathématiciens*, v. 2 (Nice, 1970), Gauthier-Villars, Paris, 1971, 221–225.
6. D. Tischler, “Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds”, *J. Differential Geometry*, **12**:2 (1977), 229–235.
7. V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+144 pp.
8. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004, 272 с.
9. V. Buchstaber, T. Panov, *Toric topology*, Math. Surveys Monogr., **204**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015, xiv+518 pp.; arXiv:1210.2368.
10. В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2(200) (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.
11. G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **168**, Springer-Verlag, New York, 1996, xiv+372 pp.
12. T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **15**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, viii+212 pp.
13. V. M. Buchstaber, S. Terzic, “ $(2n, k)$ -manifolds and applications”, Report №. 27/2014, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, 2014, 11–14.
14. V. M. Buchstaber, S. Terzić, *Towards the theory of $(2n, k)$ -manifolds*, 2014, arXiv:1410.2.2482.
15. V. M. Buchstaber, T. E. Panov, N. Ray, “Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds”, *Moscow Math. J.*, **7**:2 (2007), 219–242.
16. M. W. Davis, T. Januszkiewicz, “Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions”, *Duke Math. J.*, **62**:2 (1991), 417–451.
17. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, “Действия торов, комбинаторная топология и гомологическая алгебра”, *УМН*, **55**:5(335) (2000), 3–106; англ. пер.: V. M. Bukhshtaber, T. E. Panov, “Torus actions, combinatorial topology, and homological algebra”, *Russian Math. Surveys*, **55**:5 (2000), 825–921.

18. V. M. Buchstaber, N. Ray, “An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron”, *Toric topology*, Contemp. Math., **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 1–27; MIMS EPrint: 2008.31, <http://eprints.ma.man.ac.uk/1055>.
19. M. W. Davis, “When are two Coxeter orbifolds diffeomorphic?”, *Michigan Math. J.*, **63:2** (2014), 401–421.
20. Н. Ю. Ероховец, “Теория инварианта Бухштабера симплицальных комплексов и выпуклых многогранников”, *Алгебраическая топология, выпуклые многогранники и смежные вопросы*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН Виктора Матвеевича Бухштабера, Тр. МИАН, **286**, МАИК, М., 2014, 144–206; англ. пер.: N. Yu. Erokhovets, “Buchstaber invariant theory of simplicial complexes and convex polytopes”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **286** (2014), 128–187.
21. N. Robertson, D. Sanders, P. Seymour, R. Thomas, “The four colour theorem”, *J. Combin. Theory Ser. B*, **70:1** (1997), 2–44.
22. M. F. Atiyah, “Convexity and commuting Hamiltonians”, *Bull. London Math. Soc.*, **14:1** (1982), 1–15.
23. Th. Delzant, “Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment”, *Bull. Soc. Math. France*, **116:3** (1988), 315–339.
24. V. Guillemin, V. Ginzburg, Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, Math. Surveys Monogr., **98**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, viii+350 pp.
25. A. Wasserman, “Equivariant differential topology”, *Topology*, **8:2** (1969), 127–150.
26. W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, The W. H. Roever lectures in geometry, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, xii+157 pp.
27. Yu. Suyama, “Examples of toric manifolds which are not quasitoric manifolds”, *Algebr. Geom. Topol.* (to appear); [arXiv: abs/1312.5973](https://arxiv.org/abs/1312.5973).
28. V. M. Buchstaber, V. D. Volodin, “Combinatorial 2-truncated cubes and applications”, *Associahedra, Tamari lattices and related structures*, Progr. Math., **299**, Birkhäuser/Springer, Basel, 2012, 161–186.

ВИКТОР МАТВЕЕВИЧ БУХШТАБЕР
 (VICTOR M. BUCHSTABER)
 Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук, г. Москва
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 28.11.2015

АНДРЕЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ КУСТАРЕВ
 (ANDREI A. KUSTAREV)
 Факультет компьютерных наук,
 Национальный исследовательский университет
 “Высшая школа экономики”, г. Москва
E-mail: kustarev@gmail.com