Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Воронин, В. И. Скалыга, О получении алгоритмов численного интегрирования, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 13–18

DOI: <https://doi.org/10.4213/im84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 13:37:49

УДК 511

С. М. Воронин, В. И. Скалыга

О получении алгоритмов численного интегрирования

Предложен эффективный метод получения квадратурных формул, точных на тригонометрических полиномах.

Библиография: 4 наименования.

Пусть q – нечетное простое число,

$$f(\bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \mathbb{Z}^{q-1}} c_{\bar{n}} \exp\{2\pi i(\bar{n}, \bar{x})\},$$

где $\bar{n} = (n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$, $\|\operatorname{Spec} f\| < \infty$, $[a]_{a \in M}$ – наименьшее общее кратное чисел $a \in M \subset \mathbb{Z}$.

В работах [1]–[3] на основе теории дивизоров предлагались эффективные методы построения квадратурных формул с малым количеством узлов интегрирования. При подходе, изложенном в указанных работах, возникает необходимость оперировать с нормами целых алгебраических чисел, степень которых равна количеству переменных. Это обстоятельство существенно ограничивает размерность интегрируемых функций. Излагаемый ниже способ построения квадратурных формул, основанный на следующей теореме, этого недостатка лишен.

ТЕОРЕМА. *Существуют простое число p и $a \in \mathbb{Z}$ такие, что:*

- а) $p \equiv 1 \pmod{q}$, $(a, p) = 1$, $a^{(p-1)/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$;
- б) $p \asymp \ln[N(n_1 + n_2\xi + \dots + n_{q-1}\xi^{q-2})]_{\bar{n} \in \operatorname{Spec} f \setminus \{\bar{0}\}}$;
- в) для всех $\bar{n} \in \operatorname{Spec} f \setminus \{\bar{0}\}$ выполняется $(\bar{n}, \bar{b}) \not\equiv 0 \pmod{p}$, где $\bar{b} = (1, a^{(p-1)/q}, \dots, a^{(q-2)(p-1)/q})$, $\xi = \exp(2\pi i/q)$;
- г) имеет место квадратурная формула

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(\bar{x}) dx_1 \dots dx_{q-1} = \frac{1}{p} \sum_{\nu \pmod{p}} f\left(\frac{\bar{b}}{p} \cdot \nu\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = \exp(2\pi i/q)$, $K = \mathbb{Q}[\xi]$ – алгебраическое расширение степени $q - 1$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_K$ – целое замыкание кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ в поле K ; для целого дивизора $\mathfrak{a}$ поля K и $a \in \mathbb{Z}_K$ полагается

$$\delta_{\mathfrak{a}}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathfrak{a}|a, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для доказательства теоремы потребуются вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Для простого числа $p \equiv 1 \pmod{q}$ в поле $\mathbb{Q}[\xi]$ имеет место разложение

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{q-1},$$

где простые дивизоры $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_{q-1}$ попарно различны и имеют одинаковые нормы $N(\mathfrak{p}_i) = p$.

Доказательство см. в [4, с. 359].

ЛЕММА 2. Если дискриминант минимального многочлена $f(t)$ примитивного элемента $\theta \in \mathcal{D}_{\mathfrak{p}}$ является единицей в $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$, то:

- а) простой дивизор $\mathfrak{p}$ не разветвлен в D ;
- б) все простые дивизоры $\mathfrak{p}_i$ из разложения $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_k$ находятся во взаимно однозначном соответствии с неприводимыми многочленами $\tilde{\varphi}_i \in (\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p})[t]$ из разложения

$$\tilde{f}(t) = \tilde{\varphi}_1 \dots \tilde{\varphi}_k \pmod{\mathfrak{p}};$$

- в) степень инерции f_i простого дивизора $\mathfrak{p}_i$ совпадает со степенью соответствующего ему многочлена $\tilde{\varphi}_i$;
- г) дивизор $\mathfrak{p}_i$ определяется равенством

$$\mathfrak{p}_i = (\tilde{\varphi}_i(\theta), \mathfrak{p}),$$

где $(\dots, \dots)$ – наибольший общий делитель двух дивизоров.

(Здесь $\mathfrak{o} \in \mathbb{K}$ – кольцо с теорией дивизоров, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}(\mathfrak{p})^{-1}$, D – целое замыкание $\mathfrak{o}$ в K , $[K : \mathbb{K}] < \infty$ – расширение полей, $\mathcal{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}(\mathfrak{p})^{-1} \cdot D$ и $\mathfrak{p}$ – множество элементов кольца $\mathfrak{o}$, кратных $\mathfrak{p}$.)

Доказательство см. в [4, с. 227–228].

ЛЕММА 3. В дедекиндовом кольце D для элементов $\alpha \neq 0$ и β сравнение $\alpha\xi \equiv \beta \pmod{\mathfrak{a}}$ разрешимо тогда и только тогда, когда β делится на наибольший общий делитель дивизоров (α) и $\mathfrak{a}$.

Доказательство см. в [4, с. 233].

ЛЕММА 4. Абсолютная норма (т.е. норма над $\mathbb{Q}$) целого дивизора $\mathfrak{a}$ поля алгебраических чисел K равна числу классов вычетов в максимальном порядке поля K по модулю $\mathfrak{a}$.

Доказательство см. в [4, с. 242].

Пусть $\varphi(x) = x^{q-1} + x^{q-2} + \dots + 1$ – минимальный многочлен для элемента $\xi \in \mathbb{Q}[\xi]$. Тогда в силу леммы 1 и леммы 2 имеет место равенство

$$\varphi(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{q-1}) \pmod{p}, \quad (1)$$

где $x_1, \dots, x_{q-1}$ – некоторые целые числа. Из леммы 2 и малой теоремы Ферма следует, что $a^{(p-1)/q} \in \{x_j\}_{j=1}^{q-1} \pmod{p}$.

Пусть для определенности $x_1 = a^{(p-1)/q} \pmod{p}$. Положим $\alpha = \xi - x_1$, $\mathfrak{p}_1 = (\alpha, p)$, $p = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_{q-1}$.

Так как $\varphi(x)$ неприводим над полем $\mathbb{Q}$, то

$$(x - x_1, \varphi(x)) = 1. \quad (2)$$

Поэтому существуют многочлен $\Gamma(x)$ степени $q - 2$ и число $c \in \mathbb{Q}$ такие, что

$$\Gamma(x)(x - x_1) + c\varphi(x) \equiv 1. \quad (3)$$

Подставляя в равенство (3) $x = x_1$, получаем, что $c\varphi(x_1) = 1$. Следовательно, $c = [\varphi(x_1)]^{-1}$. Положим $d = \varphi(x_1)$. Тогда

$$c = d^{-1}. \quad (4)$$

Далее, из равенства (3) следует, что

$$\Gamma(x) + d^{-1}\varphi(x)/(x - x_1) = 1/(x - x_1). \quad (5)$$

Так как $\varphi(x)$ можно представить в виде

$$\varphi(x) = (x - x_1)\varphi_1(x) + R, \quad (6)$$

где $\varphi_1(x) = \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j x^{j-1}$, $\gamma_j = \sum_{l=1}^{q-1-j} x_1^{l-1}$, $R = \varphi(x_1) = d$, то из равенств (5) и (6) следует, что

$$\Gamma(x) + d^{-1}\varphi_1(x) = 0. \quad (7)$$

Подставляя в равенство (3) $x = \xi$, получаем

$$\Gamma(\xi)\alpha = 1. \quad (8)$$

Из формул (8) и (7) выводим формулу

$$\alpha^{-1} = \Gamma(\xi) = -d^{-1}\varphi_1(\xi) = -d^{-1} \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j \xi^{j-1}. \quad (9)$$

Положим $\gamma = \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j \xi^{j-1}$. В силу формулы (9) имеем

$$-d = \alpha\gamma. \quad (10)$$

Вследствие того, что $p \mid d$ (так как $d = \varphi(x_1)$) и $p \nmid \gamma$ (так как $\gamma_{q-1} = 1$) и равенства $\mathfrak{p}_1 = (\alpha, p)$ заключаем, что

$$\mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \dots \mathfrak{p}_{q-1} \mid \gamma, \quad (\mathfrak{p}_1, \gamma) = 1, \quad (11)$$

т.е. $\mathfrak{p}_1 \nmid \gamma$. Следовательно, для всех $\lambda \in \mathbb{Z}_K$ выполняется

$$\delta_{\mathfrak{p}_1}(\lambda) = \delta_p(\gamma\lambda). \quad (12)$$

Положим $\lambda = n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot \xi + \dots + n_{q-1} \cdot \xi^{q-2}$, $\gamma\lambda = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \xi + \dots + a_{q-1} \cdot \xi^{q-2}$, где $n_1, n_2, \dots, n_{q-1}, a_1, a_2, \dots, a_{q-1} \in \mathbb{Z}$. Заметим здесь, что $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$ — линейные формы с целыми коэффициентами от $n_1, n_2, \dots, n_{q-1}$. Пусть для $\lambda \in \mathbb{Z}_K$ $\bar{a}(\lambda) = (n_1, n_2, \dots, n_{q-1})$. Тогда $\bar{a}(\gamma\lambda) = (a_1, a_2, \dots, a_{q-1})$.

ЛЕММА 5. *Значения $\bar{a}(\gamma\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Z}_K$, лежат по mod p на прямой в $(\mathbb{Z}/(p))^{q-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определений и равенства (11) имеем $(p) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{b}$, $(\gamma) = \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \dots \mathfrak{p}_{q-1}$, $\mathfrak{b}_1$ — некоторый целый дивизор поля K , $(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b}_1) = 1$, $(\mathfrak{b}_1, p) = 1$. Так как $\mathbb{Z}_K$ является дедекиндовым кольцом, то в силу леммы 3 сравнение $\gamma\lambda \equiv \beta \pmod{p}$ разрешимо тогда и только тогда, когда $((\gamma), p)$ делит β . Следовательно, множество $\bar{a}(\gamma\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_K$ совпадает по mod p с множеством $I(\mathfrak{b}) = \{\beta : \beta \in \mathbb{Z}_K, \beta \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}\}$. Вследствие леммы 4 имеем

$$[\mathbb{Z}_K : I(\mathfrak{b})] = N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{b}) = p^{q-2}. \quad (13)$$

Так как $\mathbb{Z}_K \ni I(\mathfrak{b}) \supset I(p) = p\mathbb{Z}_K$, то

$$[\mathbb{Z}_K : p\mathbb{Z}_K] = [\mathbb{Z}_K : I(\mathfrak{b})] [I(\mathfrak{b}) : p\mathbb{Z}_K]. \quad (14)$$

Из равенств (13) и (14) заключаем, что

$$p^{q-1} = [\mathbb{Z}_K : p\mathbb{Z}_K] = p^{q-2} [I(\mathfrak{b}) : p\mathbb{Z}_K],$$

и, следовательно,

$$[I(\mathbf{b}) : p\mathbb{Z}_K] = p.$$

Таким образом, $\bar{a}(\gamma\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{Z}_K$ — одномерная прямая в $[\mathbb{Z}_K : p\mathbb{Z}_K]^{q-1}$. Тем самым лемма доказана.

В силу определений имеем $\bar{a}(\gamma \cdot 1) = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{q-1}) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Так как параметрическое уравнение прямой в $[\mathbb{Z} : p\mathbb{Z}]^{q-1}$, проходящей через точки $(0, \dots, 0)$ и $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{q-1})$ имеет вид $t\bar{a}(\gamma) = (\gamma_1 t, \gamma_2 t, \dots, \gamma_{q-1} t) \in [\mathbb{Z} : p\mathbb{Z}]^{q-1} \pmod{p}$, то имеет место равенство

$$\delta_p(\gamma\lambda) = \delta_p(a_j), \quad (15)$$

где j — один из индексов, для которого $\gamma_j \not\equiv 0 \pmod{p}$. В качестве j можно взять $q-1$, ибо $\gamma_{q-1} = 1$.

Так как a_{q-1} является $(q-1)$ -й координатой элемента $\gamma\lambda$ в базисе $1, \xi, \dots, \xi^{q-2}$, то справедлива формула

$$a_{q-1} = (\bar{n}, \bar{b}), \quad (16)$$

где вектор $\bar{b}$ является последней строкой матрицы G линейного преобразования $\lambda \rightarrow \gamma\lambda$ в базисе $1, \xi, \dots, \xi^{q-2}$. Найдем вектор $\bar{b}$. Координатами $(i+1)$ -го столбца матрицы G будут координаты вектора $\gamma\xi^i$ ($0 \leq i \leq q-2$). В силу определения γ и ξ имеет место равенство

$$\gamma\xi^i = \sum_{j=1}^{q-1} \gamma_j \xi^{j+i-1} = \sum_{j=1}^{q-1-i} \gamma_j \xi^{j+i-1} - \gamma_{q-i} \sum_{j=1}^{q-1} \xi^{j-1} + \sum_{j=q-i+1}^{q-1} \gamma_j \xi^{j+i-q-1}. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $(q-1)$ -я координата вектора $\gamma\xi^i$ равна $\gamma_{q-1-i} - \gamma_{q-i}$. Отсюда и из определения γ_j вытекает

$$\bar{b} = (1, x_1, x_1^2, \dots, x_1^{q-2}).$$

Имеет место равенство

$$\delta_p(a_{q-1}) = \frac{1}{p} \sum_{\nu \bmod p} \exp \left\{ 2\pi i (\bar{n}, \bar{b}) \frac{\nu}{p} \right\}. \quad (18)$$

Из формулы (18) и (12) следуют равенства

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) dx_1 \dots dx_{q-1} = c_{\bar{0}} \\ &= \sum_{\bar{n} \in \text{Spec } f} c_{\bar{n}} \delta_{\mathbf{p}_1}(n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot \xi + \dots + n_{q-1} \cdot \xi^{q-2}) \\ &= \sum_{\bar{n} \in \text{Spec } f} c_{\bar{n}} \delta_p((\bar{n}, \bar{b})) = \sum_{\bar{n} \in \text{Spec } f} c_{\bar{n}} \frac{1}{p} \sum_{\nu \bmod p} \exp \left\{ 2\pi i (\bar{n}, \bar{b}) \frac{\nu}{p} \right\} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{\nu \bmod p} \left(\sum_{\bar{n} \in \text{Spec } f} c_{\bar{n}} \exp \left\{ 2\pi i (\bar{n}, \bar{b}) \frac{\nu}{p} \right\} \right) = \frac{1}{p} \sum_{\nu \bmod p} f \left(\frac{\bar{b}\nu}{p} \right). \end{aligned}$$

Следуя рассуждениям работ [1]–[3], из равенства (12) и равенства

$$c_{\bar{0}} = \sum_{\bar{n} \in \text{Spec } f} c_{\bar{n}} \delta_{\mathfrak{p}_1} (n_1 \cdot 1 + n_2 \cdot \xi + \cdots + n_{q-1} \cdot \xi^{q-2})$$

получим утверждение б) теоремы. Тем самым теорема доказана.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 96-01-00767.

Список литературы

1. Воронин С.М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34–41.
2. Темиргалиев Н. Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 4. С. 490–505.
3. Воронин С.М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 5. С. 189–194.
4. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. М.: Наука, 1985.

Поступило в редакцию
20.XI.1995