Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ума, Эквивариантная K -теория регулярных компактификаций: дальнейшее развитие, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 2, 139–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8407>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 04:25:09

УДК 512.736+512.743

В. Ума

Эквивариантная K -теория регулярных компактификаций: дальнейшее развитие

Описано $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эквивариантное K -кольцо пространства X , где $\tilde{G}$ – факториальное накрытие связной комплексной редуктивной алгебраической группы G , а X – регулярная компактификация группы G . С помощью этого описания $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ дано описание обычного K -кольца $K(X)$ как свободного модуля (ранг которого равен мощности группы Вейля) над K -кольцом торического расслоения над G/B со слоем, равным торическому многообразию $\overline{T}^+$, ассоциированному с гладким разбиением положительной камеры Вейля. Это обобщает наши предыдущие результаты о чудесных компактификациях (см. [1]). Дано также явное представление $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ и $K(X)$ как алгебр над $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ и $K(\overline{G_{\text{ad}}})$ соответственно, где $\overline{G_{\text{ad}}}$ – чудесная компактификация присоединенной полупростой группы G_{ad} . В случае, когда X является регулярной компактификацией G_{ad} , получена геометрическая интерпретация этих представлений в терминах эквивариантного и обычного колец Гротендика некоторого канонического торического расслоения над $\overline{G_{\text{ad}}}$.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: эквивариантная K -теория, регулярная компактификация, чудесная компактификация, торическое расслоение.

DOI: 10.4213/im8407

Введение

Пусть G – связная комплексная редуктивная алгебраическая группа, $B \subset G$ – ее борелевская подгруппа, а $T \subset B$ – максимальный тор размерности l . Обозначим через C центр группы G , а через $G_{\text{ad}} := G/C$ – соответствующую полупростую присоединенную группу. Пусть W – группа Вейля пары (G, T) .

Под G -многообразием понимается комплексное алгебраическое многообразие, снабженное алгебраическим действием группы G .

Напомним определение регулярного G -многообразия, данное в работе [2, § 3].

G -многообразие X называется *регулярным*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

- (i) многообразие X является гладким и содержит плотную G -орбиту X_G^0 , дополнение к которой состоит из неприводимых гладких дивизоров (граничные дивизоры) с нормальными пересечениями;
- (ii) замыкание каждой G -орбиты в X является трансверсальным пересечением всех содержащих эту орбиту граничных дивизоров;
- (iii) для каждой точки $x \in X$ нормальное пространство $T_x X / T_x(Gx)$ содержит плотную орбиту стабилизатора G_x .

Нормальное полное многообразие X называется *эквивариантной компактификацией* группы G , если X содержит G в качестве открытого подмногообразия и действие $G \times G$ на G левыми и правыми сдвигами продолжается на X . Скажем, что X является *регулярной компактификацией* G , если X – эквивариантная компактификация G , являющаяся регулярным $G \times G$ -многообразием в смысле [2, § 3] (см. выше).

Гладкие полные торические многообразия – это не что иное, как регулярные компактификации тора. В случае присоединенной группы G_{ad} , чудесная компактификация $\overline{G_{\text{ad}}}$ де Кончини и Прочези [3] является единственной регулярной компактификацией G_{ad} с единственной замкнутой $G_{\text{ad}} \times G_{\text{ad}}$ -орбитой.

Напомним некоторые факты и обозначения из [4, п. 3.1].

Обозначим через $\overline{T}$ замыкание T в X . Для левого действия T (т. е. для действия $T \times \{1\}$), $\overline{T}$ является гладким полным торическим многообразием. Пусть $\mathcal{F}$ – веер, ассоциированный с $\overline{T}$ в $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{F}$ является гладким подразбиением веера, ассоциированного с камерами Вейля в $X_*(T) \otimes \mathbb{R}$. При этом $\mathcal{F} = W\mathcal{F}_+$, где $\mathcal{F}_+$ – разбиение положительной камеры Вейля, образованное конусами из $\mathcal{F}$, содержащимися в этой камере. Обозначим через $\overline{T}^+$ гладкое торическое многообразие, ассоциированное с веером $\mathcal{F}_+$ (см. подробности в [4, предложения A1 и A2]).

Напомним, что имеется точная последовательность

$$1 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{G} := \tilde{C} \times G^{\text{ss}} \xrightarrow{\pi} G \rightarrow 1, \quad (0.1)$$

где $\mathcal{Z}$ – конечная центральная подгруппа, $\tilde{C}$ – некоторый тор, а группа G^{ss} полупроста и односвязна. В частности, группа $\tilde{G}$ факториальна, а $\tilde{B} := \pi^{-1}(B)$ и $\tilde{T} := \pi^{-1}(T)$ являются соответственно борелевской подгруппой и максимальным тором в $\tilde{G}$ (см. [5, следствие 3.7] и [6]).

В настоящей работе рассматривается $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эквивариантное K -кольцо пространства X , снабженного естественным действием группы $\tilde{G} \times \tilde{G}$ с помощью канонической сюръекции этой группы на $G \times G$. Отметим, что переход к факториальному накрытию $\tilde{G}$ группы G сделан в основном для того, чтобы было удобнее получить из описания $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эквивариантного K -кольца описание обычного K -кольца пространства X . Действительно, ввиду результатов работы [6] кольцо $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ проще связано с обычной K -теорией, чем $K_{G \times G}(X)$.

Напомним, что в [1, § 3], взяв в качестве G односвязное накрытие G_{ad} , а в качестве T – максимальный тор в G , мы описали $G \times G$ -эквивариантное K -кольцо пространства $\overline{G_{\text{ad}}}$, точнее, снабдили $K_{G \times G}(\overline{G_{\text{ad}}})$ структурой $R(T) \otimes R(G)$ -алгебры и в явном виде нашли закон умножения (см. [1, теорема 3.8]). Затем эта структура применялась для описания обычного кольца Гротендика $K(X)$ как $K(G/B)$ -алгебры (см. [1, теорема 3.12]).

Главная цель настоящей статьи – обобщить указанные результаты о чудесной компактификации на случай любой регулярной компактификации X . Имея в виду эту цель, мы начинаем § 2 с описания $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ как свободного модуля ранга $|W|$ над каноническим подкольцом, изоморфным $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ (см. теорему 2.2). Здесь $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ означает $\tilde{T}$ -эквивариантное K -кольцо торического многообразия $\overline{T}^+$, которое затем отождествляется (как $R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебра)

с подкольцом $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, порожденным $\mathrm{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$. После этого находится канонический базис $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ как $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модуля и вычисляется закон умножения базисных элементов (см. теорему 2.2). В частности, если X – чудесная компактификация G_{ad} , то торическое многообразие $\overline{T}_{\mathrm{ad}}^+$ является аффинным пространством $\mathbb{A}^r$, так что $K_{\tilde{T}}(\overline{T}_{\mathrm{ad}}^+)$ можно отождествить с $R(\tilde{T})$ и мы снова получаем теорему 3.8 работы [1]. Заметим, что в текущих обозначениях $\tilde{G}$ означает односвязное накрытие группы G_{ad} , а $\tilde{T} \subseteq \tilde{G}$ – максимальный тор.

Заметим, что в [1, § 2] содержатся общие результаты о $G \times G$ -эквивариантных K -кольцах регулярных вложений, тесно связанные с результатами § 2 настоящей статьи. В частности, предложение 2.1 ниже обобщает предложение 2.5 работы [1] на случай $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эквивариантной K -теории (см. [1, замечание 2.7]). На самом деле в предложении 2.1 установлено включение $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебр $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \subseteq K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$, более точное, чем его аналог $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \subseteq R(\tilde{T})^{\mathcal{F}+(l)} \otimes R(\tilde{T})$ из [1, предложение 2.5]. Включение

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \subseteq K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$$

играет основную роль в доказательстве теоремы 2.2, которая обобщает лемму 3.2 и теорему 3.3 работы [1] со случая чудесной компактификации на все регулярные компактификации.

Пользуясь структурой $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, приведенной выше, как $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -алгеброй и применяя теорему 4.2 работы [6], мы в § 3 опишем обычное K -кольцо пространства X . Точнее, покажем, что подкольцо, порожденное $\mathrm{Pic}(X)$ в $K(X)$, канонически изоморфно кольцу $\mathcal{R}(\overline{T}^+) := \mathbb{Z} \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$, а затем установим (в теореме 3.1), что $K(X)$ является свободным модулем ранга $|W|$ над $\mathcal{R}(\overline{T}^+)$ и, наконец, построим явный базис $K(X)$ над $\mathcal{R}(\overline{T}^+)$ и найдем структурные константы умножения относительно этого базиса. Здесь стоит отметить, что

$$\mathcal{R}(\overline{T}^+) = \mathbb{Z} \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{G}}(\tilde{G} \times^{\tilde{T}} \overline{T}^+) = K(\tilde{G} \times^{\tilde{T}} \overline{T}^+) = K(G \times^B \overline{T}^+),$$

где B действует на $\overline{T}^+$ посредством своего фактора T . Иными словами, $\mathcal{R}(\overline{T}^+)$ – это кольцо Гротендика торического расслоения над G/B , ассоциированного с $\overline{T}^+$. В частном случае, когда X является чудесной компактификацией G_{ad} , можно отождествить $\mathcal{R}(\overline{T}_{\mathrm{ad}}^+)$ с $K(G/B)$ и мы заново получаем теорему 3.12 работы [1].

В § 4 с помощью канонического сюръективного морфизма $f: X \rightarrow \overline{G_{\mathrm{ad}}}$ сравниваются эквивариантное и обычное K -кольца любого регулярного вложения с такими же кольцами, взятыми для чудесной компактификации. Мы покажем, что $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ является тензорным произведением $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\mathrm{ad}}})$ (где $\tilde{G}$ действует на $\overline{G_{\mathrm{ad}}}$ посредством своего фактора G^{ss}) и подалгебры, порожденной $\mathrm{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, над подалгеброй в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\mathrm{ad}}})$, порожденной $\mathrm{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\mathrm{ad}}})$. Аналогичное утверждение справедливо и для обычного K -кольца. Фактически мы дадим явные представления для $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ как $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\mathrm{ad}}})$ -алгебры и $K(X)$ как $K(\overline{G_{\mathrm{ad}}})$ -алгебры (см. теоремы 4.1, 4.2).

В п. 4.2 для любого регулярного вложения X присоединенной полупростой группы G_{ad} дается геометрическая интерпретация представлений $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(X)$ как $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебры и $K(X)$ как $K(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебры, полученных в теоремах 4.1, 4.2. Точнее, в следствии 4.1 устанавливается, что $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(X)$ как $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра и $K(X)$ как $K(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра соответственно изоморфны $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -эквивариантному и обычному кольцам Гротендика некоторого торического расслоения над $\overline{G_{\text{ad}}}$.

Приложение (см. § 5) посвящено эквивариантной K -теории торических расслоений на гладкие полупроективные торические многообразия. Рассматривается левое действие связной комплексной редуктивной алгебраической группы G на тотальном пространстве и базе, причем проекция расслоения предполагается G -инвариантной. В теореме 5.1 дается представление G -эквивариантного кольца Гротендика торического расслоения как алгебры над G -эквивариантным кольцом Гротендика базы. Эта теорема играет ключевую роль в доказательстве следствия 4.1.

Отметим, что большинство результатов § 2 представляют собой небольшие модификации аналогичных результатов из [1, § 2], где впервые была разработана техника изучения эквивариантной K -теории регулярных компактификаций.

К новым результатам статьи относятся прежде всего теоремы 2.2, 3.1, в которых явное описание мультипликативной структуры эквивариантного и обычного K -колец (данное в [1, § 3], для случая чудесной компактификации) обобщается на все регулярные компактификации.

В основных новых результатах (теоремах 4.1, 4.2) описана структура эквивариантного и обычного K -колец любой регулярной компактификации как факторов алгебр Стенли–Райзнера над соответствующими кольцами чудесной компактификации $\overline{G_{\text{ad}}}$. Для регулярных компактификаций группы G_{ad} дана геометрическая интерпретация этих структур в терминах торических расслоений (следствие 4.1).

§ 1. Предварительные сведения

Пусть X – гладкое комплексное проективное G -многообразие. Обозначим через $K_G(X)$ и $K_T(X)$ группы Гротендика G -эквивариантных и T -эквивариантных когерентных пучков на X . Напомним, что $K_T(\text{pt}) = R(T)$ и $K_G(\text{pt}) = R(G)$, где $R(T)$ и $R(G)$ – соответственно группы Гротендика комплексных представлений T и G . Группу Гротендика эквивариантных когерентных пучков можно отождествить с кольцом Гротендика эквивариантных векторных расслоений на X . При этом структурный морфизм $X \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$ индуцирует канонические структуры $R(G)$ -модуля и $R(T)$ -модуля на $K_G(X)$ и $K_T(X)$ соответственно (см. [6, пример 2.1]).

Обозначим через W группу Вейля, а через Φ – систему корней пары (G, T) . Множество Φ^+ всех положительных корней относительно B содержит подмножество $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ простых корней, где r – полупростой ранг группы G . Для каждого $\alpha \in \Delta$ обозначим через s_α соответствующее простое отражение. Для каждого подмножества $I \subset \Delta$ обозначим через W_I подгруппу в W , порожденную всеми s_α , $\alpha \in I$. Крайними случаями являются $W_\emptyset = \{1\}$ и $W_\Delta = W$.

Положим $\Lambda := X^*(T)$. Тогда $R(T)$ (кольцо представлений тора T) изоморфно групповой алгебре $\mathbb{Z}[\Lambda]$. Обозначим через e^λ элемент группы $\mathbb{Z}[\Lambda] = R(T)$, отвечающий весу $\lambda \in \Lambda$. Тогда $(e^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является базисом $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathbb{Z}[\Lambda]$. Действие группы W на $X^*(T)$ индуцирует естественное действие W на $\mathbb{Z}[\Lambda]$ по формуле $w(e^\lambda) = e^{w(\lambda)}$ для всех $w \in W$ и $\lambda \in \Lambda$. Напомним, что $R(G)$ можно отождествить с $R(T)^W$ посредством сужения на T , где $R(T)^W$ означает подкольцо $R(T)$, инвариантное относительно действия W (см. [6, пример 1.19]).

Из (0.1) вытекает, что $\tilde{B} := \pi^{-1}(B)$ и $\tilde{T} := \pi^{-1}(T)$ – это борелевская подгруппа и максимальный тор группы $\tilde{G}$. Сужая отображение π на $\tilde{T}$, получаем точную последовательность

$$1 \rightarrow \mathcal{Z} \rightarrow \tilde{T} \rightarrow T \rightarrow 1. \quad (1.1)$$

Тогда из (0.1) вытекает также, что W и Φ можно соответственно отождествить с группой Вейля и системой корней пары $(\tilde{G}, \tilde{T})$. Далее,

$$R(\tilde{G}) = R(\tilde{C}) \otimes R(G^{\text{ss}}), \quad (1.2)$$

$$R(\tilde{T}) \simeq R(\tilde{C}) \otimes R(T^{\text{ss}}), \quad (1.3)$$

где T^{ss} – максимальный тор $\tilde{T} \cap G^{\text{ss}}$ группы G^{ss} .

Напомним, что $R(\tilde{G})$ можно отождествить с $R(\tilde{T})^W$ посредством сужения на $\tilde{T}$, причем $R(\tilde{T})$ является свободным $R(\tilde{G})$ -модулем ранга $|W|$ (см. [7, теорема 2.2]). Из полупростоты и односвязности G^{ss} вытекает, что $R(G^{\text{ss}}) \simeq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_r]$ – кольцо полиномов на фундаментальных представлениях (см. [6, пример 1.20]). Поэтому $R(\tilde{G}) = R(\tilde{C}) \otimes R(G^{\text{ss}})$ является тензорным произведением кольца полиномов и кольца лорановских полиномов, т. е. регулярным кольцом размерности $r + \dim(\tilde{C}) = \text{rank}(G)$, где r – ранг G^{ss} .

Нас интересует $\tilde{T}$ - и $\tilde{G}$ -эквивариантная K -теория многообразия X для естественных действий $\tilde{T}$ и $\tilde{G}$ на X , заданных посредством канонических сюръекций на T и G .

Рассмотрим $\mathbb{Z}$ как $R(\tilde{G})$ -модуль с помощью окаймляющего отображения $\varepsilon: R(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$, сопоставляющего каждому $\tilde{G}$ -представлению V число $\dim(V)$. Есть также естественные гомоморфизмы сужения

$$K_{\tilde{G}}(X) \rightarrow K_{\tilde{T}}(X), \quad K_{\tilde{G}}(X) \rightarrow K(X),$$

где $K(X)$ – обычное кольцо Гротендика алгебраических векторных расслоений над X . Тогда имеем следующие изоморфизмы (см. [6, предложение 4.1 и теорема 4.2]):

$$R(\tilde{T}) \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{G}}(X) \simeq K_{\tilde{T}}(X), \quad (1.4)$$

$$K_{\tilde{G}}(X) \simeq K_{\tilde{T}}(X)^W, \quad (1.5)$$

$$\mathbb{Z} \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{G}}(X) \simeq K(X). \quad (1.6)$$

Обозначим через $R(\tilde{T})^{W_I}$ подкольцо инвариантов кольца $R(\tilde{T})$ относительно действия подгруппы W_I группы W для каждого $I \subset \Delta$. В частности, $R(\tilde{T})^W = R(\tilde{G})$ и $R(\tilde{T})^{\{1\}} = R(\tilde{T})$. Далее, при каждом $I \subset \Delta$ множество $R(\tilde{T})^{W_I}$ является

свободным модулем ранга $|W/W_I|$ над $R(\tilde{G}) = R(\tilde{T})^W$ (см. [7, теорема 2.2]). На самом деле теорема 2.2 из [7] применима только к $R(T^{\text{ss}})$, но так как действие W на центральном торе $\tilde{C}$ (и, следовательно, на $R(\tilde{C})$) тривиально, то

$$R(\tilde{T})^{W_I} = R(\tilde{C}) \otimes R(T^{\text{ss}})^{W_I} \quad (1.7)$$

для каждого $I \subseteq \Delta$, откуда и вытекает аналогичное утверждение для $R(\tilde{T})$.

Обозначим через W^I множество представителей минимальной длины для смежных классов параболической подгруппы W_I при каждом $I \subseteq \Delta$. Тогда

$$W^I := \{w \in W \mid l(wv) = l(w) + l(v) \forall v \in W_I\} = \{w \in W \mid w(\Phi_I^+) \subset \Phi^+\},$$

где Φ_I – система корней, ассоциированных с W_I , а I – множество простых корней. Напомним (см. [8, с. 19]), что

$$W^I = \{w \in W \mid l(ws) > l(w) \forall s \in I\}.$$

Заметим, что из $J \subseteq I$ вытекает $W^{\Delta \setminus J} \subseteq W^{\Delta \setminus I}$. Положим

$$C^I := W^{\Delta \setminus I} \setminus \left(\bigcup_{J \subsetneq I} W^{\Delta \setminus J} \right). \quad (1.8)$$

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ – некоторое упорядочение множества Δ всех простых корней, а $\omega_1, \dots, \omega_r$ – соответствующие фундаментальные веса для системы корней пары $(G^{\text{ss}}, T^{\text{ss}})$. В силу односвязности G^{ss} эти фундаментальные веса образуют базис пространства $X^*(T^{\text{ss}})$ и, следовательно, для каждого $\lambda \in X^*(T^{\text{ss}})$, $e^\lambda \in R(T^{\text{ss}})$ является лорановским мономом от элементов e^{ω_i} : $1 \leq i \leq r$.

В [7, теорема 2.2] введен некоторый базис $\{f_v^I : v \in W^I\}$ пространства $R(T^{\text{ss}})^{W_I}$ как $R(T^{\text{ss}})^W$ -модуля. Напомним определение этого базиса. Для $v \in W^I$ положим

$$p_v := \prod_{v^{-1}\alpha_i < 0} e^{\omega_i} \in R(\tilde{T}). \quad (1.9)$$

Тогда

$$f_v^I := \sum_{x \in W_I(v) \setminus W_I} x^{-1} v^{-1} p_v, \quad (1.10)$$

где $W_I(v)$ означает стабилизатор элемента $v^{-1}p_v$ в W_I .

Обозначим также через $\{f_v^I : v \in W^I\}$ соответствующий базис пространства $R(\tilde{T})^{W_I}$ как $R(\tilde{T})^W$ -модуля, где имеется в виду, что

$$f_v^I := 1 \otimes f_v^I \in R(\tilde{C}) \otimes R(T^{\text{ss}})^{W_I}. \quad (1.11)$$

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1.1. При $v \in C^I$ будем для простоты обозначать $f_v^{\Delta \setminus I}$ через f_v . Опуская верхний индекс, мы не вносим неопределенности в обозначения, так как множества $\{C^I : I \subseteq \Delta\}$ попарно не пересекаются. В таких модифицированных обозначениях [1, лемма 1.10] означает, что множество $\{f_v : v \in W^{\Delta \setminus I} = \bigsqcup_{J \subseteq I} C^J\}$ является $R(\tilde{T})^W$ -базисом пространства $R(\tilde{T})^{W_{\Delta \setminus I}}$ при каждом $I \subseteq \Delta$. Положим также

$$R(\tilde{T})_I := \bigoplus_{v \in C^I} R(\tilde{T})^W \cdot f_v. \quad (1.12)$$

В $R(T)$ запишем

$$f_v \cdot f_{v'} = \sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} a_{v,v'}^w \cdot f_w \quad (1.13)$$

для некоторых элементов $a_{v,v'}^w \in R(G) = R(T)^W$, где $v \in C^I$, $v' \in C^{I'}$ и $w \in C^J$, $J \subseteq (I \cup I')$.

§ 2. Эквивариантная K -теория регулярных компактификаций

В этом параграфе под X понимается проективная регулярная компактификация группы G . Используются обозначения § 1 вместе со следующими.

Пусть $\mathcal{F}_+(l)$ – множество максимальных конусов в веере $\mathcal{F}_+$. Мы знаем, что $\mathcal{F}_+(l)$ параметризует замкнутые $G \times G$ -орбиты на X . По [4, предложение A1], $X^{T \times T}$ содержится в объединении X_c всех замкнутых $G \times G$ -орбит на X . При этом все такие орбиты изоморфны $G/B^- \times G/B$. Поэтому $X^{T \times T}$ параметризуется множеством $\mathcal{F}_+(l) \times W \times W$. Для $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$ обозначим через $Z_\sigma \simeq G/B^- \times G/B$ соответствующую замкнутую орбиту с базовой точкой $z_\sigma \in X^{T \times T}$. Кроме того, z_σ совпадает с $T \times \{1\}$ -неподвижной точкой на $\bar{T}^+$, соответствующей элементу $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$.

Заметим, что веер $\mathcal{F}_+$ комбинаторно полон (см. [9, определение 6.3]), так как T действует на $\bar{T}^+$ с достаточным числом пределов (см. [1, замечание 2.4]). Поэтому из [9, теорема 6.7] вытекает, что $K_{\bar{T}}(\bar{T}^+)$ – проективный $R(\tilde{T})$ -модуль ранга $|\mathcal{F}_+(l)|$. Это в свою очередь влечет по теореме 1.1 работы [10], что $K_{\bar{T}}(\bar{T}^+)$ – свободный модуль ранга $|\mathcal{F}_+(l)|$ над $R(\tilde{T})$. Поскольку $R(\tilde{T})$ – свободный модуль ранга $|W|$ над $R(\tilde{G})$, то $K_{\bar{T}}(X)$ – свободный модуль над $R(\tilde{G})$ ранга $|W| \cdot |\mathcal{F}_+(l)|$.

Обозначим через $T_\tau \subseteq T$ стабилизатор вдоль орбиты O_τ в $\bar{T}^+$ для каждого $\tau \in \mathcal{F}_+$, а через $\tilde{T}_\tau \subseteq \tilde{T}$ – прообраз T_τ при среднем отображении из последовательности (1.1). В частности, $\tilde{T}_\sigma = \tilde{T}$ – это стабилизатор в точке z_σ для $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$. Несмотря на то, что $R(\tilde{T}_\sigma) = K_{\bar{T}}(z_\sigma) = R(\tilde{T})$, мы будем сохранять для ясности индекс σ в наших обозначениях, следуя в этом работе [9, § 6].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеем цепочку инъективных морфизмов $R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебр*

$$K_{\bar{T}}(\bar{T}^+) \otimes R(\tilde{G}) \subseteq K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \subseteq K_{\bar{T}}(\bar{T}^+) \otimes R(\tilde{T}) \subseteq \prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T}). \quad (2.1)$$

При этом структура $R(\tilde{T})$ -алгебры на $K_{\bar{T}}(\bar{T}^+)$ индуцирует структуру $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебры на $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что имеется расщепляющаяся точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{diag}(\tilde{T}) \rightarrow \tilde{T} \times \tilde{T} \rightarrow \tilde{T} \rightarrow 1, \quad (2.2)$$

где второе отображение задано формулой $(t_1, t_2) \rightarrow t_1 t_2^{-1}$, а расщепление имеет вид $t \rightarrow (t, 1)$.

Напомним из теоремы 2.1 работы [1], что при сужении на $\tilde{T} \times \tilde{T}$ -неподвижные точки $(w, w') \cdot z_\sigma$ для $w, w' \in W$ множество $K_{\tilde{T} \times \tilde{T}}(X)$ состоит из всех семейств (f_σ) ($\sigma \in \mathcal{F}_+$) в $R(\tilde{T}) \times R(\tilde{T})$ таких, что

- (i) $f_{\sigma, w s_\alpha, w' s_\alpha} \equiv f_{\sigma, w, w'} \pmod{(1 - e^{-w(\alpha)} \otimes e^{-w'(\alpha)})}$, если $\alpha \in \Delta$ и конус $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$ имеет грань, ортогональную к α ,
- (ii) $f_{\sigma, w, w'} \equiv f_{\sigma', w, w'} \pmod{(1 - e^{-\chi})}$, если $\chi \in X^*(\tilde{T})$, а конусы σ и σ' из $\mathcal{F}_+(l)$ имеют общую грань, ортогональную к χ .

(В условии (ii) χ рассматривается как характер группы $T \times T$, тривиальный на $\text{diag}(T)$, и тем самым как характер группы T .)

Далее, взятие $W \times W$ -инвариантов с учетом [1, следствие 2.2] и равенства (2.2) показывает, что $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ состоит из всех семейств (f_σ) ($\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$) элементов $R(\tilde{T} \times \{1\}) \otimes R(\text{diag}(\tilde{T}))$ таких, что

- (i) $(1, s_\alpha) f_\sigma(u, v) \equiv f_\sigma(u, v) \pmod{(1 - e^{-\alpha(u)})}$, если $\alpha \in \Delta$ и конус $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$ имеет грань, ортогональную к α ,
- (ii) $f_\sigma \equiv f_{\sigma'} \pmod{(1 - e^{-\chi(u)})}$, если $\chi \in X^*(\tilde{T})$, а конусы σ и σ' из $\mathcal{F}_+(l)$ имеют общую грань, ортогональную к χ ,

где переменные u и v отвечают $R(\tilde{T} \times \{1\})$ и $R(\text{diag}(\tilde{T}))$ соответственно. Далее, напомним из [1, замечание 2.4], что имеется канонический гомоморфизм сужения

$$K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \rightarrow K_{\tilde{T}}((\overline{T}^+)^T) = \prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma). \quad (2.3)$$

Гомоморфизм (2.3) инъективен, и образ $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ можно отождествить с подмножеством $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma)$, состоящим из таких элементов (a_σ) , что $a_\sigma \equiv a_{\sigma'} \pmod{(1 - e^{-\chi})}$ всякий раз, когда $\chi \in X^*(T)$ и конусы $\sigma, \sigma' \in \mathcal{F}_+(l)$ имеют общую грань, ортогональную к χ . Гомоморфизм (2.3) совместим с канонической структурой $R(\tilde{T})$ -алгебры на $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ и структурой $R(\tilde{T})$ -алгебры на $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma)$, заданной диагональным отображением (см. также доказательство предложения 2.5 в [1]).

Таким образом, $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$ можно отождествить с $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -подалгеброй в $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$, порожденной такими элементами $(a_\sigma) \otimes b$, что $a_\sigma - a_{\sigma'} \equiv 0 \pmod{(1 - e^{-\chi})}$ всякий раз, когда σ и σ' имеют общую грань, ортогональную к $\chi \in X^*(T)$.

Поскольку $R(\tilde{G}) = R(\tilde{T})^W$, из соотношений (i) и (ii) вытекает, что $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ – подкольцо в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$. В частности, $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ – алгебра над $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ и тем самым над $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$.

Далее, согласно (ii) каждый элемент

$$f(u, v) \in \prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T}),$$

принадлежащий $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, должен на самом деле лежать в $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$. Отсюда вытекает включение $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебр $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \subseteq K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$. Предложение 2.1 доказано.

Обозначим через $PL(\mathcal{F}_+)$ множество тех кусочно постоянных функций на $\mathcal{C}^+$, которые линейны на разбиении $\mathcal{F}_+$. Точнее,

$$PL(\mathcal{F}_+) := \{h: \mathcal{C}^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall \sigma \in \mathcal{F}_+(l) \text{ и } v \in \sigma, h(v) = \langle h_\sigma, v \rangle \text{ для некоторого } h_\sigma \in X^*(T)\}.$$

Из описания линейных расслоений на сферических многообразиях (см. [11, § 2.2]) известно, что группа классов изоморфизма $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -линеаризуемых линейных расслоений на X изоморфна $PL(\mathcal{F}_+)$. Обозначим через $\mathcal{L}_h$ линейное расслоение на X , отвечающее элементу $h \in PL(\mathcal{F}_+)$. Оно $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -линеаризуемо и $\tilde{B}^- \times \tilde{B}$ действует на слое $\mathcal{L}_h|_{z_\sigma}$ посредством характера $(h_\sigma, -h_\sigma)$. Отсюда вытекает, что $L_h := \mathcal{L}_h|_{\tilde{T}^+}$ является $\tilde{T}^- \times \tilde{T}$ -линеаризуемым линейным расслоением на торическом многообразии $\tilde{T}^+$, отвечающим кусочно линейной функции $h \in PL(\mathcal{F}_+)$. В частности, $\tilde{T}^- \times \tilde{T}$ действует на слое $L_h|_{z_\sigma}$ посредством характера h_σ .

ТЕОРЕМА 2.1. *Кольцо $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, рассматриваемое как $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модуль, разлагается в прямую сумму*

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) = \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I. \quad (2.4)$$

Эта прямая сумма является свободным $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модулем ранга $|W|$ с базисом

$$\left\{ \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_v : v \in C^I \text{ и } I \subseteq \Delta \right\},$$

где C^I – как в (1.8), а $\{f_v\}$ определено выше. Компоненту $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes 1 \subseteq K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{T})^W$ указанной прямой суммы можно отождествить с подкольцом в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, порожденным $\text{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно обозначениям 1.1 имеем разложение $R(\tilde{T})^W$ -модулей

$$R(\tilde{T}) = \bigoplus_I R(\tilde{T})_I, \quad (2.5)$$

$$R(\tilde{T})^{W_{\Delta \setminus I}} = \bigoplus_{J \subseteq I} R(\tilde{T})_J. \quad (2.6)$$

Положим

$$L := \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I. \quad (2.7)$$

Для $I \subseteq \Delta$ часть $\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$ этой прямой суммы является свободным $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модулем с базисом $\{1 \otimes f_v^I : v \in C^I\}$, f_v^I как в (1.10). В частности, L – свободный $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модуль ранга $|W|$ и тем самым свободный модуль ранга $|W| \cdot |\mathcal{F}_+(l)|$ над $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$.

Заметим, что для каждого элемента из $\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$ очевидно выполнены условия (i) и (ii), задающие $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ как подалгебру в $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$. Поэтому имеем включение $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модулей $L \subseteq K$, где $K := K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$. Так как $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ является $R(\tilde{T})$ -алгеброй, то $L \subseteq K$ будет также включением $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -модулей.

Теперь из леммы 1.6 работы [1] вытекает, что K – свободный модуль ранга $|W|^2 \cdot |\mathcal{F}_+(l)|$ над $R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})$. Поскольку K по предложению 2.1 является $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгеброй, отсюда вытекает, что K – проективный модуль над $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$. (Ввиду теоремы 1.1 из [10] и того, что $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ – свободный модуль ранга $|W|$ над $R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})$, это в свою очередь влечет, что K – свободный модуль ранга $|W| \cdot |\mathcal{F}_+(l)|$ над $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$.)

Итак, $L \hookrightarrow K \rightarrow K/L \rightarrow 0$ – короткая точная последовательность $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -модулей. Поскольку K и L проективны как $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -модули, отсюда вытекает, что K/L имеет проективную размерность 1 как модуль над $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$.

Нам надо теперь установить, что $L = K$. Это делается в следующей лемме с помощью включения $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -модулей $L \subseteq K$.

ЛЕММА 2.1. *Положим*

$$t_\alpha := \prod_{\beta \neq \alpha} (1 - e^{-\beta(u)}) \in R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$$

для всех $\alpha \in \Delta$. Тогда локализация $(K/L)_{t_\alpha}$ равна 0 при каждом $\alpha \in \Delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$M_\alpha := K_T(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})^{s_\alpha} \oplus (1 - e^{-\alpha(u)}) K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes e^{\omega_\alpha(v)} R(\tilde{T})^{s_\alpha}. \quad (2.8)$$

Так как $R(\tilde{T}) = R(\tilde{T})^{s_\alpha} \oplus e^{\omega_\alpha} R(\tilde{T})^{s_\alpha}$ для всех $\alpha \in \Delta$, где ω_α – фундаментальный вес, отвечающий элементу $\alpha \in \Delta$, то имеем равенство $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})^W$ -модулей

$$K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T}) = K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})^{s_\alpha} \oplus K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes e^{\omega_\alpha(v)} R(\tilde{T})^{s_\alpha}. \quad (2.9)$$

Заметим, что после локализации в $t_\alpha = \prod_{\beta \neq \alpha} (1 - e^{-\beta(u)})$ единственными условиями, определяющими $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ в $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$, остаются (ii) и условие, отвечающее α . Вместе с (2.9) это влечет, что $K_{t_\alpha} \subseteq (M_\alpha)_{t_\alpha}$.

Пользуясь равенствами

$$R(\tilde{T})^{s_\alpha} = \bigoplus_{\alpha \notin I} R(\tilde{T})_I, \quad (2.10)$$

$$e^{\omega_\alpha} \cdot R(\tilde{T})^{s_\alpha} = \bigoplus_{\alpha \in I} R(\tilde{T})_I \quad (2.11)$$

и определением L , выводим теперь, что $L_{t_\alpha} = (M_\alpha)_{t_\alpha}$. Поскольку $L_{t_\alpha} \subseteq K_{t_\alpha} \subseteq (M_\alpha)_{t_\alpha}$, отсюда вытекает, что $(K/L)_{t_\alpha} = 0$ для всех $\alpha \in \Delta$. Лемма доказана.

Так как проективная размерность (K/L) равна 1, из формулы Ауслендера–Буксбаума следует, что $\text{Supp}(K/L)$ имеет чистую коразмерность 1 в $\text{Спец}(R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G}))$. Следовательно, $\text{Supp}(K/L)$ содержит простой идеал $\mathfrak{p}$ высоты 1 в $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$. Поскольку кольцо $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ факториально, $\mathfrak{p} = (a)$ для некоторого $a \in R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$, и по лемме 2.1 имеем, что $\mathfrak{p}$ содержит $1 - e^{-\alpha(u)}$ и $1 - e^{-\beta(u)}$ для $\alpha \neq \beta \in \Delta$.

Отсюда вытекает, что a делит $1 - e^{-\alpha(u)}$ и $1 - e^{-\beta(u)}$ при несовпадающих α и β . Но это противоречит тому, что $1 - e^{-\alpha(u)}$ и $1 - e^{-\beta(u)}$ взаимно просты в факториальном кольце $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ (см. [12, лемма 1]).

Полученное противоречие означает, что $K/L = 0$ и, следовательно, $K = L$. Тем самым доказано равенство (2.4). Перейдем к доказательству оставшихся утверждений теоремы 2.1.

Достаточно установить, что часть $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes 1$ разложения (2.4) – это подкольцо в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, порожденное множеством $\{[\mathcal{L}_h] : h \in PL(\mathcal{F}_+)\}$, т.е. подкольцо, порожденное $\text{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$.

Каноническое вложение

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \hookrightarrow \prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T}),$$

полученное сужением на z_σ , $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$, переводит элемент $[\mathcal{L}_h]$ в $(e^{h_\sigma} \otimes 1)_{\sigma \in \mathcal{F}_+(1)}$. Здесь используется отождествление

$$R(\tilde{T} \times \{1\}) \otimes R(\text{diag}(\tilde{T})) \simeq R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{T}),$$

происходящее из (2.2).

Заметим, что при сужении на z_σ , $\sigma \in \mathcal{F}_+(l)$, образ элемента $[\mathcal{L}_h] \in \text{Pic}^{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ в $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma)$ равен $(e^{h_\sigma})_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)}$. Известно также, что $\text{Pic}^{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ порождает $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ как кольцо (см. [9, § 6.2], где для $\rho \in \Delta(1)$ кусочно линейные функции $u_\rho(\sigma)$ на веере Δ , порождающие $K_T(X(\Delta))$ как кольцо, соответствуют классам T -эквивариантных линейных расслоений L_{u_ρ}). Отсюда вытекает, что образ множества $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes 1$ при сужении на $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$ совпадает с образом подкольца, порожденного элементами $[\mathcal{L}_h]$, $h \in PL(\mathcal{F}_+)$. Теорема 2.1 доказана.

ТЕОРЕМА 2.2. *Имеем следующий изоморфизм $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})^W$ -подмодулей модуля $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$:*

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) = \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I \simeq \bigoplus_{I \subseteq \Delta} K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I.$$

Точнее, этот изоморфизм переводит произвольный элемент

$$a \otimes b \in K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$$

в элемент

$$\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot a \otimes b.$$

В частности, базисный элемент

$$1 \otimes f_v \in K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$$

переходит в

$$\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_v \in K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I,$$

где $v \in C^I$ при произвольном фиксированном $I \subseteq \Delta$.

При этом в $\bigoplus_{I \subseteq \Delta} K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$ любые два базисных элемента $1 \otimes f_v$, $1 \otimes f_{v'}$ для $v \in C^I$, $v' \in C^{I'}$ ($I, I' \subseteq \Delta$) перемножаются следующим образом:

$$\begin{aligned} & (1 \otimes f_v) \cdot (1 \otimes f_{v'}) \\ &= \sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} \left(\prod_{\alpha \in I \cap I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot \prod_{\alpha \in (I \cup I') \setminus J} (1 - e^{\alpha(u)}) \right) \otimes a_{v, v'}^w \cdot (1 \otimes f_w). \end{aligned} \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)})$ не является делителем нуля в области целостности $R(\tilde{T})$ и, следовательно, в кольце $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$, являющемся свободным модулем над $R(\tilde{T})$. Поэтому каждое слагаемое $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$, $I \subseteq \Delta$, изоморфно $\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$ как $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -подмодуль в $\prod_{\sigma \in \mathcal{F}_+(l)} R(\tilde{T}_\sigma) \otimes R(\tilde{T})$. Этот изоморфизм переводит элемент

$$a \otimes b \in K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I$$

в элемент

$$\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot a \otimes b \in K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I.$$

По аддитивности он продолжается до следующего изоморфизма $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{G})$ -подмодулей модуля $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})$:

$$\bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I \simeq \bigoplus_{I \subseteq \Delta} K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I. \quad (2.13)$$

Далее, в терминах разложения в прямую сумму

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) = \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(T)_I$$

произведение базисных элементов $\prod_{\alpha \in I} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_v$ и $\prod_{\alpha \in I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_{v'}$, где $v \in C^I$ и $v' \in C^{I'}$, равно

$$\prod_{\alpha \in I \cap I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot \prod_{\alpha \in I \cup I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_v \cdot f_{v'}. \quad (2.14)$$

Заметим, что элемент (2.14) принадлежит пространству

$$\prod_{\alpha \in I \cup I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(T)^{W_{\Delta \setminus (I \cup I')}} \subseteq \bigoplus_{J \subseteq (I \cup I')} \prod_{\alpha \in J} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \otimes R(T)_J.$$

Поэтому с помощью (1.13) можно переписать (2.14) в виде

$$\sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} \left(\prod_{\alpha \in I \cap I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \prod_{\alpha \in I \cup I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes a_{v,v'}^w \right) \cdot \prod_{\alpha \in J} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes f_w. \quad (2.15)$$

Пользуясь теперь изоморфизмом (2.13), заключаем, что в $\bigoplus_{I \subseteq \Delta} K_{\tilde{T}}(\bar{T}^+) \otimes R(T)_I$ произведение базисных элементов $(1 \otimes f_v)$ и $(1 \otimes f_{v'})$, $v \in C^I$, $v' \in C^{I'}$, имеет вид (2.12). Теорема доказана.

§ 3. Обычное K -кольцо регулярной компактификации

В этом параграфе с помощью результатов § 2 описывается обычное K -кольцо многообразия X .

Для $u \in X^*(\tilde{T})$ положим $\mathcal{L}(u) := (\tilde{G} \times \mathbb{C}_u) / \tilde{B}$, где $\tilde{B}$ действует диагонально, а $\tilde{B}$ -действие на одномерном векторном пространстве $\mathbb{C}_u$ задается сюръекцией $\tilde{B} \rightarrow \tilde{T}$, после которой следует u . Тогда $\mathcal{L}(u)$ является $\tilde{G}$ -линеаризуемым линейным расслоением на $\tilde{G}/\tilde{B} = G/B$, ассоциированным с u , причем его $\tilde{G}$ -линеаризация осуществляется левым $\tilde{G}$ -действием.

Обозначим через $c_K: R(\tilde{T}) = K_{\tilde{G}}(G/B) \rightarrow K(G/B)$ характеристический гомоморфизм, переводящий e^u в $[\mathcal{L}(u)]$ для всех $u \in X^*(\tilde{T})$.

Следуя (1.3), обозначим через $\bar{\lambda}_I \in K(G/B)$ образ элемента

$$1 \otimes \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{-\alpha}) \in R(\tilde{T})$$

для каждого $I \subseteq \Delta$. Положим $\bar{f}_v := c_K(f_v)$, и пусть $c_{v,v'}^w \in \mathbb{Z}$ — это образ при отображении $c_K|_{R(\tilde{G})}$ элемента $a_{v,v'}^w \in R(\tilde{G})$, где $a_{v,v'}^w$ — как в (1.13).

Далее, если

$$K(G/B)_I := \bigoplus_{v \in C^I} \mathbb{Z}[\bar{f}_v], \quad (3.1)$$

то

$$K(G/B) = \bigoplus_{I \subseteq \Delta} K(G/B)_I. \quad (3.2)$$

Положим

$$\mathcal{R}(\bar{T}^+) := \mathbb{Z} \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{T}}(\bar{T}^+), \quad (3.3)$$

где $\mathbb{Z}$ является $R(\tilde{G})$ -модулем относительно окаймления $\varepsilon = c_K|_{R(\tilde{G})}: R(\tilde{G}) \rightarrow \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует каноническая структура $\mathcal{R}(\bar{T}^+)$ -модуля на $K(X)$, индуцированная структурой $K_{\tilde{T}}(\bar{T}^+) \otimes 1$ -модуля на $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, заданной в теореме 2.2. При этом $K(X)$ является свободным модулем ранга $|W|$ над $\mathcal{R}(\bar{T}^+)$, где $\mathcal{R}(\bar{T}^+)$ отождествляется с подкольцом в $K(X)$, порожденным $\text{Pic}(X)$. Точнее, положим*

$$\gamma_v := 1 \otimes [\bar{f}_v] \in \mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes K(G/B)_I \quad (3.4)$$

для $v \in C^I$ при каждом фиксированном $I \subseteq \Delta$. Тогда

$$K(X) \simeq \bigoplus_{v \in W} \mathcal{R}(\bar{T}^+) \cdot \gamma_v. \quad (3.5)$$

Этот изоморфизм является изоморфизмом колец, если умножение любых базисных элементов γ_v и $\gamma_{v'}$ определить формулой

$$\gamma_v \cdot \gamma_{v'} := \sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} (\bar{\lambda}_{I \cap I'} \cdot \bar{\lambda}_{(I \cup I') \setminus J}) \cdot c_{v, v'}^w \cdot \gamma_w. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1 имеем следующее разложение $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ в прямую сумму как $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -модуля:

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \simeq \bigoplus_{I \subseteq \Delta} K_{\tilde{T}}(\bar{T}^+) \otimes R(\tilde{T})_I. \quad (3.7)$$

Отсюда с помощью изоморфизма

$$K(X) \simeq K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \otimes_{R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})} \mathbb{Z} \quad (3.8)$$

(см. [6]) и (2.13) получаем, что

$$K(X) \simeq \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes K(G/B)_I. \quad (3.9)$$

Канонический гомоморфизм сужения

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \rightarrow K(X)$$

отображает подкольцо, порожденное $\text{Pic}^{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$, сюръективно на подкольцо, порожденное множеством $\text{Pic}(X)$ в $K(X)$. По теореме 2.1 отсюда вытекает, что этот гомоморфизм изоморфно отображает подкольцо, порожденное $\text{Pic}(X)$ в $K(X)$, на $\mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes 1 \subseteq \mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes K_{\tilde{T}}(G/B)$.

Обозначим через $\gamma_v \in \mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes K_{\tilde{T}}(G/B)_I$ элемент $1 \otimes \bar{f}_v$, где $v \in C^I$ для некоторого $I \subseteq \Delta$. Тогда из теоремы 2.2 и (3.9) следует, что $K(X)$ – свободный модуль ранга $|W|$ над кольцом $\mathcal{R}(\bar{T}^+)$ с базисом γ_v , $v \in W$, где $\mathcal{R}(\bar{T}^+)$ отождествляется с подкольцом в $K(X)$, порожденным $\text{Pic}(X)$.

Напомним (см. теорему 2.2), что умножение двух базисных элементов $1 \otimes f_v$ и $1 \otimes f_{v'}$ из $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \simeq \bigoplus_{I \subseteq \Delta} R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{T})_I$ определяется формулой

$$\begin{aligned} & (1 \otimes f_v) \cdot (1 \otimes f_{v'}) \\ &= \sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} \prod_{\alpha \in I \cap I'} (1 - e^{\alpha(u)}) \cdot \prod_{\alpha \in (I \cup I') \setminus J} (1 - e^{\alpha(u)}) \otimes a_{v, v'}^w \cdot (1 \otimes f_w). \end{aligned}$$

Поэтому их образы γ_v и $\gamma_{v'}$ в $\bigoplus_{I \subseteq \Delta} \mathcal{R}(\bar{T}^+) \otimes K(G/B)_I$ перемножаются следующим образом:

$$\gamma_v \cdot \gamma_{v'} := \sum_{J \subseteq (I \cup I')} \sum_{w \in C^J} (\lambda_{I \cap I'} \cdot \lambda_{(I \cup I') \setminus J}) c_{v, v'}^w \cdot \gamma_w. \quad (3.10)$$

Закключаем отсюда, что изоморфизм

$$K(X) \simeq \bigoplus_{v \in W} \mathcal{R}(\overline{T}^+) \cdot \gamma_v \quad (3.11)$$

является на самом деле изоморфизмом колец, причем умножение любых двух базисных элементов γ_v и $\gamma_{v'}$ при $v \in C^I$, $v' \in C^{I'}$ для $I, I' \subseteq \Delta$ определяется, как в (3.10). Теорема 3.1 доказана.

§ 4. Связь с эквивариантными и обычными K -кольцами чудесных компактификаций

Напомним из [4, предложение A2], что существует канонический сюръективный морфизм $f: X \rightarrow \overline{G}_{\text{ad}}$ из регулярной компактификации группы G в чудесную компактификацию группы G_{ad} , который сужается до собственного сюръективного морфизма торических многообразий $g: \overline{T}^+ \rightarrow \overline{T}_{\text{ad}}^+$. Морфизм f эквивариантен относительно действия группы $\tilde{G} \times \tilde{G}$, где $\tilde{G} \times \tilde{G}$ действует на $\overline{G}_{\text{ad}}$ посредством фактора $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$.

ЛЕММА 4.1. *Кольцо $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ допускает следующее представление как $R(\tilde{T})$ -алгебра:*

$$K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) \simeq \frac{R(\tilde{T})[X_j^{\pm 1}: \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]}{J}, \quad (4.1)$$

где J – это идеал кольца $R(\tilde{T})[X_j^{\pm 1}: \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]$, порожденный элементами X_F по всем $F \notin \mathcal{F}_+$ и $\prod_{\rho_j \in \mathcal{F}_+(1)} X_j^{\langle u, v_j \rangle} - e^u$ по всем $u \in X^*(T)$, а v_j означает примитивный вектор вдоль ребра ρ_j . Кольцо $\mathcal{R}(\overline{T}^+)$ допускает следующее представление как $K(G/B)$ -алгебра:

$$\mathcal{R}(\overline{T}^+) \simeq \frac{K(G/B)[X_j^{\pm 1}: \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]}{\mathfrak{J}}, \quad (4.2)$$

где $\mathfrak{J}$ – идеал кольца $K(G/B)[X_j^{\pm 1}: \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]$, порожденный элементами X_F по всем $F \notin \mathcal{F}_+$ и $\prod_{\rho_j \in \mathcal{F}_+(1)} X_j^{\langle u, v_j \rangle} - [\mathcal{L}(u)]$ по всем $u \in X^*(T)$. (Здесь $u \in X^*(T)$ можно рассматривать как элемент $X^*(\tilde{T})$, взяв композицию с канонической сюръекцией $\tilde{T} \rightarrow T$, входящей в (1.1)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X – проективное регулярное вложение группы G , а $\overline{T}^+$ – прообраз $\mathbb{A}^r$ при каноническом морфизме $f: X \rightarrow \overline{G}_{\text{ad}}$, то сужение $g: \overline{T}^+ \rightarrow \mathbb{A}^r$ проективного морфизма f является проективным морфизмом торических многообразий. Заметим, что

$$\begin{aligned} K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+) &= K_{\tilde{G}}(\tilde{G} \times_{\tilde{T}} \overline{T}^+) = K_{\tilde{G}}(G \times_B \overline{T}^+), \\ \mathcal{R}(\overline{T}^+) &= \mathbb{Z} \otimes_{R(\tilde{G})} K_{\tilde{G}}(\tilde{G} \times^{\tilde{T}} \overline{T}^+) = K(\tilde{G} \times^{\tilde{T}} \overline{T}^+) = K(G \times^B \overline{T}^+), \end{aligned}$$

где B действует на $\overline{T}^+$ посредством своего фактора T . Иными словами, $K_{\tilde{T}}(\overline{T}^+)$ и $\mathcal{R}(\overline{T}^+)$ – это соответственно $\tilde{G}$ -эквивариантное и обычное кольца Гротендика

торического расслоения $G \times_B \bar{T}^+$ над G/B со слоем $\bar{T}^+$. При этом $e^u \in R(\tilde{T})$ соответствует классу $[\mathcal{L}(u)]_{\tilde{G}} \in K_{\tilde{G}}(G/B)$. Представления (4.1) и (4.2) получаются отсюда применением теоремы 5.1. (Хотя в §5 рассматриваются торические расслоения, ассоциированные с главными T -расслоениями, теорема 5.1 выполняется и для торических расслоений, ассоциированных с главным B -расслоением $G \rightarrow G/B$, где B действует на полупроективном T -торическом многообразии посредством своего фактора T .) Лемма доказана.

В этом параграфе мы с помощью морфизма f свяжем $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эquivариантное (а также обычное) K -кольцо регулярной компактификации X с equivариантным (или обычным) K -кольцом чудесной компактификации $\overline{G_{\text{ad}}}$.

Из (0.1) вытекает, что G^{ss} – универсальное накрытие группы G_{ad} , а $T_{\text{ad}} := T^{\text{ss}}/(C \cap G^{\text{ss}})$ – максимальный тор группы G_{ad} . Напомним, что число

$$\text{rank}(G_{\text{ad}}) = \text{rank}(G^{\text{ss}}) = r$$

совпадает с полупростым рангом группы G .

Напомним (см. [3] и [11, § 2.2]), что классы изоморфизма линейных расслоений на $\overline{G_{\text{ad}}}$ соответствуют элементам $\lambda \in X^*(T^{\text{ss}})$. Действительно, ассоциированное с λ линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda$ на X допускает единственную $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -линеаризацию, при которой $(B^{\text{ss}})^- \times B^{\text{ss}}$ действует на слое $\mathcal{L}_\lambda|_z$ посредством характера $(\lambda, -\lambda)$, где z означает отмеченную точку единственной замкнутой орбиты группы $G/B^- \times G/B$.

Заметим, что $\tilde{G} \times \tilde{G}$ действует на $\overline{G_{\text{ad}}}$ посредством фактора $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$, так что действие $\tilde{C} \times \tilde{C}$ на $\overline{G_{\text{ad}}}$ тривиально. Поскольку $\tilde{G} = G^{\text{ss}} \times \tilde{C}$, мы видим, что каждое $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -equivариантное линейное расслоение на $\overline{G_{\text{ad}}}$ изоморфно тензорному произведению некоторого $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -equivариантного линейного расслоения на тривиальное $\tilde{C} \times \tilde{C}$ -equivариантное линейное расслоение, отвечающее некоторому характеру $u' \in X^*(\tilde{C} \times \tilde{C})$. Кроме того, поскольку $\tilde{T} = T^{\text{ss}} \times \tilde{C}$, каждый элемент $u \in X^*(\tilde{T})$ однозначно записывается в виде $\lambda + u'$, где $\lambda \in \Lambda$ и $u' \in X^*(\tilde{C})$. Для каждого $u \in X^*(\tilde{T})$ обозначим $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -equivариантное линейное расслоение $\mathcal{L}_\lambda \otimes e^{u'}$ на $\overline{G_{\text{ad}}}$ через $\mathcal{L}_u$. В частности, $\tilde{B}^- \times \tilde{B}$ действует на слое $\mathcal{L}_u|_z$ посредством характера $(u, -u)$. Имеется также следующий изоморфизм $R(\tilde{G}) \otimes R(\tilde{G})$ -алгебр (см. [13, (5.2.4)]):

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \simeq K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \otimes R(\tilde{C} \times \tilde{C}). \quad (4.3)$$

С помощью переноса векторных расслоений назад посредством f кольцо $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ приобретает структуру алгебры над кольцом $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$. Следующая теорема дает явное описание этой структуры.

ТЕОРЕМА 4.1. *Кольцо $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X)$ может быть описано как $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра:*

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) = \frac{K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})[X_j^{\pm 1} : \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]}{\mathfrak{J}}, \quad (4.4)$$

где $\mathfrak{J}$ – это идеал кольца $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})[X_j^{\pm 1} : \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]$, порожденный элементами X_F по всем $F \notin \mathcal{F}_+$ и $\prod_{\rho_j \in \mathcal{F}_+(1)} X_j^{\langle u, v_j \rangle} - [\mathcal{L}_u]_{\tilde{G} \times \tilde{G}}$ по всем $u \in X^*(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [1, теорема 3.3] и равенств (1.2), (1.3), (1.7), (1.12) и (4.3) вытекает следующее описание $\tilde{G} \times \tilde{G}$ -эквивариантного K -кольца группы $\overline{G_{\text{ad}}}$ как $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{G})$ -модуля:

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}}) = \bigoplus_{I \subseteq \Delta} \prod_{\alpha \in I} (1 - e^{-\alpha(u)}) R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{T})_I. \quad (4.5)$$

(Заметим, что в [1, § 3] буквы G и T обозначают G^{ss} и T^{ss} соответственно, а X обозначает $\overline{G_{\text{ad}}}$.) Теперь, объединяя (2.4) и (4.5), мы получаем следующий изоморфизм $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes 1$ -алгебр:

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) = K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \otimes_{R(\tilde{T}) \otimes 1} (K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+) \otimes 1), \quad (4.6)$$

где структура $R(\tilde{T}) \otimes 1$ -алгебры на $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ взята из первого слагаемого в разложении (4.5). Напомним, что каноническое вложение $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \hookrightarrow R(\tilde{T}) \times R(\tilde{T})$ получается сужением на отмеченную базовую точку z единственной замкнутой орбиты $G/B^- \times G/B$ (см. [1, лемма 3.2]). По определению, это вложение переводит $\mathcal{L}_u$ в $e^u \otimes 1$ после отождествления $R(\tilde{T}) \otimes R(\tilde{T})$ с $R(\tilde{T} \times 1) \otimes R(\text{diag}(\tilde{T}))$ согласно (2.2). Так как $e^u \otimes 1$ порождает $R(\tilde{T}) \otimes 1$, то можно также отождествить $R(\tilde{T}) \otimes 1$ с подкольцом в $K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$, порожденным $\text{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$. Теперь утверждение теоремы вытекает из того, что $K_{\tilde{T}}(\tilde{T}^+)$ представляется в виде (4.1) как $R(\tilde{T})$ -алгебра.

4.1. Связь с обычным K -кольцом чудесной компактификации. С помощью переноса векторных расслоений назад посредством f кольцо $K(X)$ приобретает структуру алгебры над кольцом $K(\overline{G_{\text{ad}}})$. Следующая теорема дает явное описание этой структуры.

ТЕОРЕМА 4.2. *Кольцо $K(X)$ допускает следующее описание как $K(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра:*

$$K(X) = \frac{K(\overline{G_{\text{ad}}})[X_j^{\pm 1} : \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]}{\mathfrak{I}}, \quad (4.7)$$

где $\mathfrak{I}$ – это идеал кольца $K(\overline{G_{\text{ad}}})[X_j^{\pm 1} : \rho_j \in \mathcal{F}_+(1)]$, порожденный элементами X_F по всем $F \notin \mathcal{F}_+$ и $\prod_{\rho_j \in \mathcal{F}_+(1)} X_j^{\langle u, v_j \rangle} - [\mathcal{L}_u]$ по всем $u \in X^*(T)$, а через $[\mathcal{L}_u]$ обозначается класс линейного расслоения $\mathcal{L}_u$ в $K(\overline{G_{\text{ad}}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку действие $\tilde{C} \times \tilde{C}$ на $\overline{G_{\text{ad}}}$ тривиально, мы видим из (1.6), что

$$K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \otimes_{R(G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}})} \mathbb{Z} = K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}}) \otimes_{R(\tilde{G} \times \tilde{G})} \mathbb{Z} = K(\overline{G_{\text{ad}}}). \quad (4.8)$$

Снова из (1.6) имеем

$$K_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(X) \otimes_{R(\tilde{G} \times \tilde{G})} \mathbb{Z} = K(X). \quad (4.9)$$

Заметим, что $[\mathcal{L}_u]_{\tilde{G} \times \tilde{G}}$ сужается до $[\mathcal{L}_u]$ при каноническом забывающем гомоморфизме из $\text{Pic}_{\tilde{G} \times \tilde{G}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ в $\text{Pic}(\overline{G_{\text{ad}}})$. Равенство (4.7) вытекает теперь из (4.4), (4.8) и (4.9). Теорема доказана.

4.2. Геометрическая интерпретация. В этом пункте под X понимается проективная регулярная компактификация присоединенной полупростой группы G_{ad} .

Напомним, что $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ – это $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -линеаризуемые линейные расслоения на $\overline{G_{\text{ad}}}$, для которых $(B^{\text{ss}})^- \times B^{\text{ss}}$ действует на $\mathcal{L}_{\alpha_i}|_z$ посредством характера $(\alpha_i, -\alpha_i)$, где $1 \leq i \leq r$, а z – отмеченная точка замкнутой $G_{\text{ad}} \times G_{\text{ad}}$ -орбиты в $\overline{G_{\text{ad}}}$. Так как центр $C \cap G^{\text{ss}}$ группы G^{ss} действует на $\overline{G_{\text{ad}}}$ тривиально и, следовательно, действует на слое посредством характера $(\alpha_i, -\alpha_i)$, то расслоение $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ на самом деле $G_{\text{ad}} \times G_{\text{ad}}$ -линеаризуемо. Оно также обладает $G_{\text{ad}} \times G_{\text{ad}}$ -инвариантным сечением s_i , множество нулей которого есть граничный дивизор D_i при $1 \leq i \leq r$.

Напомним конструкцию из [14, § 3 и § 5] и [2, § 10].

Пусть $\mathcal{V} := \bigoplus_{1 \leq i \leq r} \mathcal{L}_{\alpha_i}$. Тогда $\mathcal{V}$, как прямая сумма линейных расслоений на $\overline{G_{\text{ad}}}$, допускает естественное действие r -мерного тора $\mathbb{G}_m^r$. Положим

$$P := \mathcal{V} \setminus \bigcup_{i=1}^r \mathcal{L}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \hat{\mathcal{L}}_{\alpha_i} \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_{\alpha_r}. \quad (4.10)$$

Тогда P – это главное $T_{\text{ad}} = \mathbb{G}_m^r$ -расслоение, ассоциированное с $\mathcal{V}$ над $\overline{G_{\text{ad}}}$. Сечение $s = s_1 \oplus s_2 \oplus \cdots \oplus s_r$ расслоения $\mathcal{V}$ отображает G_{ad} в P . Поэтому с помощью s мы можем вложить группу $\overline{G_{\text{ad}}}$ в расслоение $P \times_{T_{\text{ad}}} \mathbb{A}^r$, представляющее собой не что иное, как $\mathcal{V}$. Из $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -линеаризуемости всех расслоений $\mathcal{L}_{\alpha_i}$ вытекает, что расслоение P является левым $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -пространством, а проекция $\pi: P \rightarrow \overline{G_{\text{ad}}}$ этого расслоения $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -эквивариантна относительно канонического $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -действия на $\overline{G_{\text{ad}}}$. При этом правое T_{ad} -действие совместимо с левым $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -действием на P .

Если X – регулярная компактификация группы G_{ad} , то ассоциированное торическое многообразие Z соответствует вееру $(\mathcal{F}_{\text{ad}})_+$ в $X_*(T_{\text{ad}}) \otimes \mathbb{R}$, ассоциированному с некоторым гладким разбиением положительной камеры Вейля C^+ . В частности, если $X = \overline{G_{\text{ad}}}$, то ребра веера $(\mathcal{F}_{\text{ad}})_+ = C^+$ являются фундаментальными ковесами $\omega_1^\vee, \dots, \omega_r^\vee$, двойственными к простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. В этом случае имеем $\overline{T_{\text{ad}}}^+ \simeq \mathbb{A}^r$, где T_{ad} действует на $\mathbb{A}^r$ посредством вложения $t \mapsto (t^{\alpha_1}, \dots, t^{\alpha_r})$.

Рассмотрим собственный морфизм $g: Z \rightarrow \mathbb{A}^r$ торических многообразий, отвечающий некоторому гладкому разбиению положительной камеры Вейля. Так как Z является T_{ad} -торическим многообразием, то определено ассоциированное торическое расслоение $P \times_{T_{\text{ad}}} Z$, а морфизм g индуцирует канонический морфизм $\bar{g}: P \times_{T_{\text{ad}}} Z \rightarrow P \times_{T_{\text{ad}}} \mathbb{A}^r$. Тогда многообразие $X_Z := \bar{g}^{-1}(s(\overline{G_{\text{ad}}}))$ – это расслоенное произведение диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & P \times_{T_{\text{ad}}} Z & \\ & \downarrow \bar{g} & \\ \overline{G_{\text{ad}}} & \xrightarrow{s} & P \times_{T_{\text{ad}}} \mathbb{A}^r \end{array} \quad (4.11)$$

При этом X_Z является замыканием G_{ad} в $P \times_{T_{\text{ad}}} Z$ и регулярной компактификацией группы G_{ad} , лежащей над $\overline{G_{\text{ad}}}$. Согласно [1, § 5.2], любая регулярная компактификация X группы $\overline{G_{\text{ad}}}$ имеет вид X_Z , где Z – прообраз $\mathbb{A}^r$ при f .

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Кольцо $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(X)$, рассматриваемое как $K_{G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}}(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра, и кольцо $K(X)$, рассматриваемое как $K(\overline{G_{\text{ad}}})$ -алгебра, изоморфны соответственно $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -эquivариантному и обычному кольцам Гротендика определенного выше торического расслоения $P \times_{T_{\text{ad}}} Z$ над $\overline{G_{\text{ad}}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X – проективная регулярная компактификация группы G_{ad} , то Z – полупроективное T_{ad} -торическое многообразие, как и в доказательстве леммы 4.1.

Поэтому из теоремы 5.1 вытекает, что правые части формул (4.4) и (4.7) из теорем 4.1 и 4.2 изоморфны соответственно $G^{\text{ss}} \times G^{\text{ss}}$ -эquivариантному и обычному кольцам Гротендика торического расслоения $P \times_{T_{\text{ad}}} Z$ над $\overline{G_{\text{ad}}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. С помощью техники, аналогичной [15, § 4], можно дать другое описание $K(X)_{\mathbb{Q}}$ в виде

$$K(X)_{\mathbb{Q}} \simeq \bigoplus_{v \in W} \mathcal{R}(\overline{T}^+) \cdot \gamma_v, \quad (4.12)$$

где $\gamma_v = [\mathcal{O}_{X^v}] \in K(G/B)_{\mathbb{Q}}$ для $v \in C^I$. При этом произведение элементов γ_v и $\gamma_{v'}$, где $v \in C^I$, $v' \in C^{I'}$ и $I, I' \subseteq \Delta$, задается формулой (3.10), где $c_{v,v'}^w$ – мультипликативные структурные константы обратных классов Шуберта, описанных, например, в [15, (3.82)]. Это описание более геометрично, так как в нем используются классы Шуберта. В то же время для него требуются рациональные коэффициенты ввиду того, что вместо базиса Стейнберга применяются поднятия классов Шуберта на $R(\tilde{T})$, образующие базис $R(\tilde{T})$ над $R(\tilde{G})$ только после локализации по окаймляющему идеалу $I(\tilde{G}) = \{a - \varepsilon(a) : a \in R(\tilde{G})\}$.

§ 5. Приложение

5.1. Полупроективные торические многообразия. В этом пункте мы напомним геометрическое определение и важнейшие свойства полупроективных торических многообразий. Наше краткое изложение имеет целью зафиксировать обозначения и соглашения, необходимые для формулировки и доказательства основного результата (теоремы 5.1) в следующем пункте; детали см. в [16, § 2].

5.1.1. Геометрическое определение. Для каждой схемы X существует канонический морфизм $\pi_X : X \rightarrow X_0$ в аффинную схему $X_0 := \text{Spec}(H^0(X, \mathcal{O}_X))$ регулярных функций на X . Назовем торическое многообразие X *полупроективным*, если X имеет хотя бы одну неподвижную относительно действия тора точку, а морфизм π_X проективен (см. [16, с. 501]).

Имеются эквивалентные описания полупроективных торических многообразий в терминах комбинаторики определяющих их вееров, а также на языке геометрической теории инвариантов (см. [16, теорема 2.6 и следствие 2.7]).

5.1.2. *Комбинаторное описание.* Опишем веер, ассоциированный с гладким полупроjektивным торическим многообразием (см. [16, с. 499]).

Пусть $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_d\}$ – некоторая конфигурация векторов решетки $N \simeq \mathbb{Z}^n$, а $\text{pos}(\mathcal{B})$ – выпуклый полиэдральный конус в $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, натянутый на векторы из $\mathcal{B}$. *Триангуляцией* набора $\mathcal{B}$ называется симплицальный веер Δ из N , лучи которого лежат в $\mathcal{B}$, а носитель которого равен $\text{pos}(\mathcal{B})$. Триангуляция называется *унимодулярной*, если каждый максимальный конус из Δ натянут на некоторый базис решетки N . Это условие эквивалентно гладкости торического многообразия $X(\Delta)$.

Под *T-дивизором Картье* на веере Δ понимается непрерывная функция $\Psi: \text{pos}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$, линейная на каждом конусе из Δ и принимающая целые значения на $N \cap \text{pos}(\mathcal{B})$. Такой дивизор называется *обильным*, если функция $\Psi: \text{pos}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и сужается до линейной функции на каждом максимальном конусе из Δ . На самом деле Ψ – кусочно линейная несущая функция, отвечающая некоторому обильному линейному расслоению на $X(\Delta)$.

Скажем, что *триангуляция* Δ набора $\mathcal{B}$ *регулярна*, если на Δ существует обильный *T-дивизор Картье*.

Напомним, исходя из следствия 2.7 работы [16], описывающего гладкие полупроjektивные торические многообразия, что ассоциированный с таким многообразием веер Δ является *регулярной унимодулярной триангуляцией* некоторого набора векторов $\mathcal{B}$, на который натянута вся решетка N .

5.1.3. *Описание на языке геометрической теории инвариантов.* Пусть, как и выше, Δ – регулярная унимодулярная триангуляция такого набора $\mathcal{B}$, что $X(\Delta)$ является гладким полупроjektивным торическим многообразием.

Сначала опишем конструкцию, реализующую $X(\Delta)$ как проективный фактор (в смысле геометрической теории инвариантов) комплексного аффинного пространства $\mathbb{C}^d$ по действию некоторого $(d - n)$ -мерного подтора $(\mathbb{C}^*)^{d-n}$ тора $(\mathbb{C}^*)^d$ (см. [16, теорема 2.4]).

Пусть $M := \mathcal{X}^*(T) = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ – двойственная решетка характеров тора T . Положим $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$. Имеется целочисленная $(d \times n)$ -матрица

$$\mathcal{Q} := [v_1, \dots, v_d]^t. \quad (5.1)$$

Рассмотрим отображение $M \rightarrow \mathbb{Z}^d$, индуцированное матрицей $\mathcal{Q}$. Так как веер Δ гладок и имеет хотя бы один конус максимальной размерности, то ядро этого отображения отождествляется с $\mathbb{Z}^{d-n}$ и изоморфно группе Пикара многообразия $X(\Delta)$ (см. предложение на с. 63 работы [17]). Поэтому имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathbb{Z}^d \rightarrow \text{Pic}(X) \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Применение к ней функтора $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{C}^*)$ дает точную последовательность

$$1 \rightarrow G := (\mathbb{C}^*)^{d-n} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^d \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n \rightarrow 1. \quad (5.3)$$

Таким образом, группа G вложена в $(\mathbb{C}^*)^d$ в качестве $(d - n)$ -мерного тора и, следовательно, действует на аффинном пространстве $\mathbb{C}^d$. Обозначим через $\theta :=$

$[L_\Psi]$ класс в $\text{Pic}(X)$ обильного линейного расслоения L_Ψ , соответствующего несущей функции Ψ .

Допустим, что действие G на $\mathbb{C}^d$ линейризуется на тривиальном расслоении посредством обильного характера θ группы G . Тогда геометрический фактор множества полустабильности из $\mathbb{C}^d$ по действию G совпадает с торическим многообразием $X(\Delta)$ (см. детали в [16, § 2] или [18, § 7.2 и § 14.2]).

Обратно, всякий проективный фактор (в смысле геометрической теории инвариантов) аффинного пространства $\mathbb{C}^d$ по действию подтора G тора $(\mathbb{C}^*)^d$, взятый относительно G -линеаризации тривиального расслоения над $\mathbb{C}^d$, соответствующей характеру θ группы G , представляет собой полупроективное торическое многообразие.

Действительно, применяя $\text{Hom}(\cdot, \mathbb{C}^*)$ к включению $G \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^d$ и пользуясь делимостью $\mathbb{C}^*$, получаем сюръективное отображение абелевых групп $\mathbb{Z}^d \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{d-n} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Обозначая через a_i образ в $\mathbb{Z}^{d-n}$ стандартного базисного элемента e_i решетки $\mathbb{Z}^d$ относительно этой сюръекции, имеем набор векторов $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_d\}$ в $\mathbb{Z}^{d-n}$.

Пусть $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_d]$ – кольцо полиномиальных функций на $\mathbb{C}^d$. Тогда S допускает градуировку посредством полугруппы $\mathbb{N}\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Z}^{d-n}$ по формуле $\deg(x_i) = a_i$. Естественное G -действие на S задается формулой $g \cdot x_i := a_i(g) \cdot x_i$ для $g \in G$, $1 \leq i \leq d$. Полином из S однороден тогда и только тогда, когда он является G -собственным вектором. Обозначим через S_θ множество однородных полиномов степени θ . Тогда S_θ является модулем над подалгеброй S_0 полиномов степени 0. Кольцо $S_{(\theta)} := \bigoplus_{r=0}^{\infty} S_{r\theta}$ является конечно порожденной S_0 -алгеброй. Тогда проективный фактор $\mathbb{C}^d //_{\theta} G = \text{Proj}(S_{(\theta)})$ (в смысле геометрической теории инвариантов) – проективное торическое многообразие над аффинным торическим многообразием $\mathbb{C}^d //_0 G = \text{Spec}(S_0)$ (см. [18, § 14.2], [16, определение 2.2]).

5.2. Эквивариантная K -теория полупроективных торических многообразий. В этом пункте будет показано, что теорема 1.2, (iv) работы [19] о структуре кольца Гротендика торических расслоений, ассоциированных с гладкими проективными торическими многообразиями, справедлива и для торических расслоений, слой которых – гладкое полупроективное торическое многообразие.

Рассмотрим следующую постановку вопроса, более общую, чем в [19].

Пусть $\pi: E \rightarrow B$ – алгебраическое главное T -расслоение, где B – неприводимая неособая нетерова схема над $\mathbb{C}$. Пусть G – комплексная связная редуктивная алгебраическая группа. Мы считаем E и B алгебраическими левыми G -пространствами, а π – G -инвариантным отображением, так что левое G -действие на E коммутирует с правым $T \simeq (\mathbb{C}^*)^l$ -действием.

Пусть X – гладкое полупроективное T -торическое многообразие, а Δ – ассоциированный с ним веер в N . Не теряя общности, можно считать для простоты обозначений, что $\{v_1, \dots, v_d\}$ – множество примитивных векторов вдоль множества $\Delta(1) := \{\rho_1, \dots, \rho_d\}$ всех ребер веера Δ .

Обозначим через $V(\gamma)$ орбитальное замыкание T -орбиты O_γ торического многообразия X , отвечающей конусу $\gamma \in \Delta$, а через U_σ – открытое T -стабильное аффинное подмногообразие, отвечающее конусу $\sigma \in \Delta$.

Для каждого ребра ρ_j имеется каноническое T -эquivариантное линейное расслоение L_j на X . Кроме того, на X имеются тривиальные линейные расслоения $L_u = X \times \mathbb{C}_u$, соответствующие характеристам $u \in X^*(T)$, причем проекции $L_u \xrightarrow{h_u} X$ этих расслоений T -эquivариантны относительно действия T на слое $\mathbb{C}_u$ посредством характера $\chi_u: T \rightarrow \mathbb{C}^*$ (см. [17, гл. 3]).

Рассмотрим ассоциированное торическое расслоение $E(X) := E \times_T X$, где $X := X(\Delta)$ – гладкое полупроективное T -торическое многообразие, ассоциированное с веером Δ .

Определим линейное расслоение $E(L_j) := E \times_T L_j$ на $E(X)$, ассоциированное с L_j , $1 \leq j \leq d$, и пусть $E(L_u) = E \times_T L_u$ – линейное расслоение на $E(X)$, ассоциированное с L_u и имеющее проекцию $[e, v] \mapsto [e, h_u(v)]$. Как $E(L_j)$, так и $E(L_u)$ являются линейными расслоениями на B с проекцией $[e, v] \mapsto \pi(e)$, причем оба они G -линеаризуемы и их G -линеаризация получается из левого G -действия на E .

С каждым T -стабильным подмногообразием $V(\gamma)$, отвечающим конусу γ из Δ , мы свяжем подмногообразие $E(V(\gamma)) := E \times_T V(\gamma)$ расслоения $E(X)$.

Пусть x – любая T -неподвижная точка из X . Тогда проекция $p: E(X) \rightarrow B$ имеет каноническое сечение $s: B \rightarrow E(X)$, заданное формулой $s(b) = [e, x]$, где $e \in \pi^{-1}(b)$, так что $p \circ s = \text{id}_B$. Поэтому индуцированные отображения $s^*: K_G(E(X)) \rightarrow K_G(B)$ и $p^*: K_G(B) \rightarrow K_G(E(X))$ между G -эquivариантными кольцами Гротендика удовлетворяют равенству $s^* \circ p^* = \text{id}_B^*$. В частности, отображение p^* инъективно и задает структуру $K_G(B)$ -модуля на $K_G(E(X))$.

Справедлива следующая теорема о G -эquivариантном кольце Гротендика торического расслоения $E(X)$.

ТЕОРЕМА 5.1. *G -эquivариантное K -кольцо пространства $E(X)$ допускает следующее представление как $K_G(B)$ -алгебра:*

$$K_G(E(X)) = \frac{K_G(B)[X_j^{\pm 1}]}{\langle X_F: F \notin \Delta; \prod_{\rho_j \in \Delta(1)} (1 - X_j)^{\langle u, v_j \rangle} - [E(L_u)]_G, \forall u \in M \rangle}, \quad (5.4)$$

где $X_F = \prod_{\rho_j \in F} (1 - X_j)$. (Поскольку, как отмечалось выше, $E(L_u) \rightarrow B$ является G -линеаризуемым линейным расслоением на B , определен его класс $[E(L_u)]_G \in K_G(B)$.)

Прежде чем доказывать теорему, введем еще ряд обозначений и напомним необходимые детали о структуре многообразия X и веера Δ .

T -неподвижное подмножество в X совпадает с множеством T -неподвижных точек

$$\{x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_m}\}, \quad (5.5)$$

которое соответствует множеству конусов максимальной размерности

$$\Delta(n) := \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m\}. \quad (5.6)$$

Выберем однопараметрическую подгруппу $\lambda_v \in X_*(T)$ *общего положения*, для которой вектор $v \in N$ лежит вне всех гиперплоскостей, натянутых на указанные $(n - 1)$ -мерные конусы, так что множество неподвижных точек λ_v равно множеству $\{x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_m}\}$ (см. [20, § 3.1]).

Для каждого x_{σ_i} определим положительные страты

$$Y_i = \{x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_v(t)x \text{ существует и равен } x_{\sigma_i}\}. \quad (5.7)$$

Тогда

$$Y_i = \bigcup_{\tau_i \subseteq \gamma \subseteq \sigma_i} O_\gamma. \quad (5.8)$$

Здесь объединение берется по множеству всех граней γ конуса σ , для которых образ вектора v в $N_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}\gamma$ лежит в относительной внутренности множества $\sigma_i/\mathbb{R}\gamma$ (см. [16, лемма 2.10]). Поскольку указанное множество граней замкнуто относительно пересечений, можно выбрать минимальную такую грань конуса σ_i . Обозначим ее через τ_i .

Выбирая $v \in |\Delta|$, имеем $X = \bigcup_{i=1}^m Y_i$ (разложение Бялыницкого–Бирули торического многообразия X относительно однопараметрической подгруппы λ_v). Из (5.8) вытекает, что

$$Y_i = V(\tau_i) \cap U_{\sigma_i} \simeq \mathbb{C}^{n-k_i}, \quad (5.9)$$

где $k_i = \dim(\tau_i)$, $1 \leq i \leq m$. На самом деле Y_i – это аффинное открытое подмножество торического многообразия $V(\tau_i)$, отвечающее некоторому максимальному $(n - k_i)$ -мерному конусу в $N/\mathbb{R}\tau_i$ (см. [17, гл. 3]).

Обильному T -дивизору Картье Ψ на Δ соответствует отображение моментов $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ (см. [16, с. 503]), причем образ X при μ отождествляется с выпуклым полиэдром

$$Q_\Psi := \{v \in M_{\mathbb{R}}: Qv \geq \psi\}$$

(см. [16, с. 500]), где $\psi := (\Psi(v_1), \dots, \Psi(v_d)) \in \mathbb{Z}^d$, а Q определено в (5.1).

Можно также определить отображение моментов μ_v для действия окружности на X , индуцированного однопараметрической подгруппой λ_v *общего положения* по формуле $\mu_v(x) := \langle v, \mu(x) \rangle$. С помощью μ_v можно ввести упорядочение

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m \quad (5.10)$$

на множестве конусов максимальной размерности таким образом, что

$$\mu_v(x_{\sigma_i}) \leq \mu_v(x_{\sigma_j}) \quad \text{влечет} \quad \sigma_i \leq \sigma_j. \quad (5.11)$$

При таком упорядочении выделенные грани $\tau_i \subseteq \sigma_i$ обладают следующим свойством (*):

$$\tau_i \subseteq \sigma_j \quad \text{влечет} \quad i \leq j. \quad (5.12)$$

Это эквивалентно тому, что

$$\overline{Y_i} \subseteq \bigcup_{j \geq i} Y_j \quad (5.13)$$

для всех i , $1 \leq i \leq m$. Тем самым разложение Бялыницкого–Бирули многообразия X фильтруемо в смысле § 3.2 работы [20]. Можно упорядочить клетки

$Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ так, чтобы выполнялось (5.13) или, эквивалентно, чтобы каждая клетка Y_i была замкнута в $Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_i$.

Положим

$$Z_i := \bigcup_{j \geq i} Y_j.$$

Из (5.13) видно, что Z_i – замкнутые подмногообразия, образующие цепочку

$$X = Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \dots \supseteq Z_m = \{x_{\sigma_m}\}, \quad (5.14)$$

причем $Z_i \setminus Z_{i+1} = Y_i \simeq \mathbb{C}^{n-k_i}$. Тем самым определено алгебраическое клеточное разбиение многообразия X . Иными словами, X замощено аффинными пространствами Y_i , $1 \leq i \leq m$.

Пусть $V_i := V(\tau_i)$ отвечают выделенным граням τ_i максимальных конусов σ_i , $1 \leq i \leq m$. Определим $E(V_i) := E \times_T V_i$ при $1 \leq i \leq m$, а также $E(Y_i) := E \times_T Y_i$ и $E(Z_i) := E \times_T Z_i$.

Теперь докажем основную теорему.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{R} = \mathcal{R}(K_G(B), \Delta)$ кольцо, заданное в определении 1.1 работы [19], где $r_i = 1 - [E(L_{u_i})]_G$ в $K_G(B)$ отвечает базису характеров $u_i \in X^*(T)$, $1 \leq i \leq n$, двойственному к базису $v_1, \dots, v_n$ решетки N (можно перенумеровать ребра так, чтобы примитивные векторы первых n из них порождали максимальный конус и тем самым составляли базис решетки N).

Имеем канонический гомоморфизм $K_G(B)$ -алгебр $\psi: \mathcal{R} \rightarrow K_G(E(X))$ по формуле $x_j \rightarrow 1 - [E(L_j)]$, $1 \leq j \leq d$. Из [19, лемма 2.2, (iv)] известно, что $x(\tau_i)$, $1 \leq i \leq m$, порождают $\mathcal{R}$ как $K_G(B)$ -модуль. Поэтому если установить, что $K_G(E(X))$ – свободный $K_G(B)$ -модуль ранга m с базисом $[\mathcal{O}_{E(V_i)}]$, $1 \leq i \leq m$ (составленным из образов $x(\tau_i)$, $1 \leq i \leq m$, при гомоморфизме ψ), то ψ оказывается изоморфизмом и теорема 5.1 доказана.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Классы $[\mathcal{O}_{E(V_i)}]$, $1 \leq i \leq m$, образуют базис $K_G(B)$ -модуля $K_G(E(X))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, из [9, следствие 6.10, (i)] и (4.1) вытекает, что $K(X)$ изоморфно кольцу $\mathcal{R}(\mathbb{Z}, \Delta)$, где $r_i = 1$ для $1 \leq i \leq n$, причем этот изоморфизм переводит $x(\tau_i)$ в $[\mathcal{O}_{V_i}]$ при $1 \leq i \leq m$. Из [19, лемма 2.2, (iv)] известно, что элементы $x(\tau_i)$, $1 \leq i \leq m$, порождают $\mathcal{R}(\mathbb{Z}, \Delta)$ как $\mathbb{Z}$ -модуль. Поэтому $K(X)$ порождается как $\mathbb{Z}$ -модуль классами $[\mathcal{O}_{V_i}]$, $1 \leq i \leq m$. Но из [9, следствие 6.10, (ii)] известно также, что $K(X)$ – свободная абелева группа ранга m , равного числу максимальных конусов веера Δ . (Это также вытекает из леммы о клеточном слоении – леммы 5.5.1 монографии [13], – поскольку m совпадает с числом клеток алгебраического клеточного разбиения (5.14) многообразия X .) Поэтому классы $[\mathcal{O}_{V_i}]$, $1 \leq i \leq m$, образуют базис $K(X)$ как свободного $\mathbb{Z}$ -модуля.

Зададим теперь отображение $\phi: K_G(B) \otimes K(X) \rightarrow K_G(E(X))$ по формуле

$$\sum_{1 \leq i \leq m} b_i \otimes [\mathcal{O}_{V_i}] \mapsto \sum_{1 \leq i \leq m} p^*(b_i)[\mathcal{O}_{E(V_i)}]. \quad (5.15)$$

Нам остается лишь показать, что гомоморфизм $K_G(B)$ -модулей ϕ инъективен и сюръективен. Это делается ниже.

Заметим, что существует фильтрация

$$E(Z_1) = E(X) \supseteq E(Z_2) \supseteq \cdots \supseteq E(Z_m) \simeq B, \quad (5.16)$$

где $E(Z_i) \setminus E(Z_{i+1}) = E(Y_i)$ – аффинное расслоение на B . Действительно, сужения отображения $p: E(X) \rightarrow B$ на $E(Z_i)$ и $E(Y_i)$ являются G -эквивариантными относительно левых G -действий на E и B . Тогда по лемме о клеточном слоеании (см. [13, лемма 5.5.1]) при каждом i , $1 \leq i \leq m$, имеется короткая точная последовательность

$$0 \rightarrow K_G(E(Z_{i+1})) \rightarrow K_G(E(Z_i)) \rightarrow K_G(E(Y_i)) \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Покажем, что сужение гомоморфизма ϕ задает изоморфизмы $\phi_i: K_G(B) \otimes K(Z_i) \rightarrow K_G(E(Z_i))$ при всех i , $1 \leq i \leq m$. Воспользуемся убывающей индукцией по i . При $i = m$ утверждение верно, так как в этом случае $E(Z_m) \simeq B$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} K_G(B) \otimes K(Z_{i+1}) & \longrightarrow & K_G(B) \otimes K(Z_i) & \longrightarrow & K_G(B) \otimes K(Y_i) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \phi_{i+1} & & \downarrow \phi_i & & \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & K_G(E(Z_{i+1})) & \longrightarrow & K_G(E(Z_i)) & \longrightarrow & K_G(E(Y_i)) & \end{array} \quad (5.18)$$

где нижняя строка является частью (5.17), а верхняя горизонтальная строка получена взятием тензорного произведения точной последовательности

$$0 \rightarrow K(Z_{i+1}) \rightarrow K(Z_i) \rightarrow K(Y_i) \rightarrow 0 \quad (5.19)$$

на $K_G(B)$. Точная последовательность (5.19) вытекает из леммы о клеточном слоеании в случае, когда база B является точкой. Изоморфизм Тома (см. [13, теорема 5.4.11]) влечет $p^*: K_G(B) \simeq K_G(E(Y_i))$ – изоморфизм. Поскольку $K(Y_i) \simeq \mathbb{Z}$ (см., например, [10]), отсюда вытекает, что гомоморфизм $K_G(B) \otimes K(Y_i) \rightarrow K_G(E(Y_i))$ диаграммы (5.18) является изоморфизмом. Поэтому из предположения индукции о сюръективности ϕ_{i+1} получаем диаграммным поиском, что отображение ϕ_i также сюръективно. Аналогично, если допустить инъективность ϕ_{i+1} , то, поскольку нижняя горизонтальная строка точна слева согласно (5.17), диаграммный поиск дает инъективность ϕ_i . Утверждение доказано.

Автор благодарит профессора Мишеля Бриона за внимательное чтение ранних версий рукописи и неоценимые комментарии и советы, а также анонимного рецензента за комментарии, способствовавшие улучшению изложения.

Список литературы

1. V. Uma, “Equivariant K -theory of compactifications of algebraic groups”, *Transform. Groups*, **12:2** (2007), 371–406.

2. E. Bifet, C. De Concini, C. Procesi, “Cohomology of regular embeddings”, *Adv. Math.*, **82**:1 (1990), 1–34.
3. C. De Concini, C. Procesi, “Complete symmetric varieties”, *Invariant theory* (Montecatini, 1982), Lecture Notes in Math., **996**, Springer, Berlin, 1983, 1–44.
4. M. Brion, “The behaviour at infinity of the Bruhat decomposition”, *Comment. Math. Helv.*, **73**:1 (1998), 137–174.
5. B. Iversen, “The geometry of algebraic groups”, *Advances in Math.*, **20**:1 (1976), 57–85.
6. А. С. Меркурьев, “Сравнение эквивариантной и обычной K -теорий алгебраических многообразий”, *Алгебра и анализ*, **9**:4 (1997), 175–214; англ. пер.: A. S. Merkurjev, “Comparison of the equivariant and the ordinary K -theory of algebraic varieties”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:4 (1998), 815–850.
7. R. Steinberg, “On a theorem of Pittie”, *Topology*, **14**:2 (1975), 173–177.
8. J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math., **29**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, xii+204 pp.
9. G. Vezzosi, A. Vistoli, “Higher algebraic K -theory for actions of diagonalizable groups”, *Invent. Math.*, **153**:1 (2003), 1–44.
10. J. Gubeladze, “ K -theory of affine toric varieties”, *Homology Homotopy Appl.*, **1** (1999), 135–145.
11. M. Brion, “Groupe de Picard et nombres caractéristiques des variétés sphériques”, *Duke Math. J.*, **58**:2 (1989), 397–424.
12. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней*, Мир, М., 1972, 334 с.; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV: Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V: Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI: Systèmes de racines*, Actualités Sci. Indust., **1337**, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.
13. N. Chriss, V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997, x+495 pp.
14. C. De Concini, C. Procesi, “Complete symmetric varieties. II. Intersection theory”, *Algebraic groups and related topics* (Kyoto/Nagoya, 1983), Adv. Stud. Pure Math., **6**, North Holland, Amsterdam, 1985, 481–513.
15. V. Uma, “Equivariant K -theory of flag varieties revisited and related results”, *Colloq. Math.*, **132**:2 (2013), 151–175.
16. T. Hausel, B. Strumfels, “Toric hyperkähler varieties”, *Doc. Math.*, **7** (2002), 495–534.
17. W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, The William H. Roever lectures in geometry, Ann. of Math. Stud., **131**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, xii+157 pp.
18. D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck, *Toric varieties*, Grad. Stud. Math., **124**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011, xxiv+841 pp.
19. P. Sankaran, V. Uma, “Cohomology of toric bundles”, *Comment. Math. Helv.*, **78**:3 (2003), 540–554; “Errata”, **79**:4 (2004), 840–841.
20. M. Brion, “Equivariant Chow groups for torus actions”, *Transform. Groups*, **2**:3 (1997), 225–267.

В. УМА

(V. UMA)

Department of Mathematics,

Indian Institute of Technology Madras, Chennai, India

E-mail: vuma@iitm.ac.in

Поступило в редакцию

28.04.2015

Перевод с английского А. В. Домрина