Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Скориков, Информационный колмогоровский поперечник и некоторые точные неравенства между поперечниками, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 173–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/im843>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 04:12:06

УДК 517.982.256

Е. М. Скориков

Информационный колмогоровский поперечник и некоторые точные неравенства между поперечниками

Вводится новый тип поперечника, считается порядок нововведенного поперечника некоторого класса функций многих переменных. Устанавливаются некоторые точные неравенства, связывающие классические поперечники.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

В работе вводится понятие информационного колмогоровского поперечника $d_m^n(M, X)$, доказываются некоторые общие неравенства, связывающие этот поперечник и некоторые классические поперечники, а также определяются порядки информационных колмогоровских поперечников $d_n^n(\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\alpha}, \tilde{L}_{\mathbf{q}})$ классов периодических функций $\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\alpha}$ с несколькими ограниченными дробными производными по Вейлю в пространстве $\tilde{L}_{\mathbf{q}}$ при всех $1 < \mathbf{p}, \mathbf{q} < \infty$.

Поскольку информационный колмогоровский поперечник тесно связан с поперечником по Колмогорову и поперечником по Гельфанду, кратко представим историю их вычисления.

Первые результаты, касающиеся поперечников $d_n(W_p^r, L_q)$, были получены А. Н. Колмогоровым в тридцатых годах XX в. Затем, в шестидесятых годах в работах С. Б. Стечкина, У. Рудина и В. М. Тихомирова были посчитаны точные значения этих поперечников при некоторых p и q . Тогда же В. М. Тихомировым [1] было установлено соотношение двойственности между поперечником по Колмогорову и поперечником по Гельфанду.

История вычисления порядков поперечников по Колмогорову классов Соболева развивалась следующим образом.

Для случая функций одной переменной асимптотики поперечников по Колмогорову были вычислены в семидесятых годах прошлого века. В работах [1]–[4] был найден порядок поперечника при $p \geq q$. При $2 \geq q > p$ порядок был получен Р. С. Исмагиловым [5]; им же было обнаружено, что эквивалентность

$$d_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r+(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})+}$$

нарушается при $p = 1$, $q = \infty$. В работе [5] и, далее, в [6] разработан метод сведения задачи об определении порядка величины $d_n(W_p^r, L_q)$ к задаче о нахождении порядковых оценок величины $d_n(B_p^k, l_q^k)$. Этот метод получил название *дискретизации задачи* о поперечниках функциональных классов. Далее

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06-01-00160).

Б. С. Кашин [7] получил оценки величин $d_n(B_p^k, l_q^k)$ и, пользуясь методом дискретизации, установил порядок убывания $d_n(W_p^r, L_q)$ при $p \leq 2 \leq q$ и $2 \leq p < q$.

“Конечномерная” задача определения порядка величин $d_n(B_p^m, l_q^m)$ при произвольных m, n была решена Е. Д. Глуским [8].

Отметим также, что порядки убывания александровских поперечников $a_n(W_p^r, L_q) \asymp n^{-r}$ были посчитаны М. И. Стесиным в 1975 г. Эти поперечники среди задач об оценках поперечников играют важную роль эталона, с которым в первую очередь сравниваются все остальные поперечники.

Вычисление поперечников классов периодических функций многих переменных началось с работы К. И. Бабенко [9], в которой был найден поперечник $d_N(\widetilde{W}_2^\alpha, \widetilde{L}_2)$. Порядок убывания $d_N(\widetilde{W}_p^\alpha, \widetilde{L}_p)$, где α – вектор с целочисленными координатами, $1 < p < \infty$, для $\widetilde{W}_p^\alpha$ и классов функций, определяемых гипозеллиптическими операторами, найден Б. С. Митягиным [10]. Порядок наилучшего приближения класса $\widetilde{W}_p^\alpha$ (p – скаляр) в метрике пространства $\widetilde{L}_p$, $1 < p < \infty$, определен Н. С. Никольской [11]. Порядок $d_N(\widetilde{W}_p^\alpha, \widetilde{L}_q)$ для $1 < q = p < \infty$ и $2 < q \leq p < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$ определен Э. М. Галеевым [12], [13]. Порядок $d_N(\widetilde{W}_p^\alpha, \widetilde{L}_q)$ при $1 < p < q < \infty$ (p – скаляр) найден В. Н. Темляковым [14]–[16].

Далее Э. М. Галеев [17] подсчитал порядок наилучшего приближения в случае векторных p, q , $1 < q \leq p < \infty$. В этой же работе был подсчитан поперечник $d_N(\widetilde{W}_p^\alpha, \widetilde{L}_q)$ конечного пересечения шаров $\widetilde{W}_p^\alpha = \cap \widetilde{W}_p^{\alpha_j}$ (α_j, p, q – векторы) в случаях $1 < q \leq p < \infty$, $1 < p \leq q \leq 2$, $2 \leq p \leq q < \infty$, $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$, где неравенства для векторов понимаются, как покоординатные.

В настоящей работе сделан первый шаг к объединению понятий поперечника и копоперечника в одно понятие двухпараметрического семейства характеристик множества. А именно, соединены колмогоровский и гельфандовский поперечники, и получившаяся характеристика была названа *информационным колмогоровским поперечником*.

Наилучший способ приближения функций с помощью колмогоровского поперечника при использовании не только гладкости функции, но и некоторой наилучшим образом выбранной заранее априорной информации о ней приводит к понятию информационного колмогоровского поперечника.

Оказалось, что при равных параметрах на соболевских классах функций данная характеристика для $q \geq 2 \geq p$ при достаточно большой гладкости ($r > 1$) заметно лучше колмогоровского и гельфандовского поперечников: порядок введенного поперечника совпал с александровским.

§ 2. Основные понятия

Пусть X – нормированное пространство, M – непустое подмножество X . Будем говорить, что множество M *центрально-симметрично*, если оно центрально-симметрично относительно нуля.

Через $\text{Int } M$ обозначено множество всех внутренних точек M .

Обозначим через B_X замкнутый единичный шар пространства X . Если $L_m \subset X$ имеет нижний индекс, то будем понимать, что L_m является подпространством размерности $m \in \mathbb{Z}_+$. Если подпространство $V^n \subset X$ имеет верхний индекс, то будем понимать, что V^n является подпространством коразмерности $n \in \mathbb{Z}_+$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть L – подпространство пространства X . Уклонением множества M от подпространства L назовем величину

$$E(M, L)_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in M} \inf_{\varphi \in L} \|f - \varphi\|_X.$$

Определим колмогоровский поперечник множества M :

$$d_m(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_m \subset X, a \in X} E(M, L_m + a)_X$$

(если M центрально-симметрично, то это определение равносильно следующему: $d_m(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_m \subset X} E(M, L_m)_X$). Считается, что колмогоровский поперечник пустого множества равен нулю. Заметим, что для $m = 0$ данное определение есть определение чебышевского радиуса множества M :

$$r_X(M) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\varphi \in X} \sup_{f \in M} \|f - \varphi\|_X.$$

Гельфандовским поперечником множества M называется

$$d^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{x \in M \cap V^n} \|x\|_X.$$

Приведем также определения и других поперечников, которые будут использованы в статье.

Обозначим через $\mathcal{L}(U, V)$ множество всех линейных ограниченных операторов из нормированного пространства U в нормированное пространство V . Линейным поперечником множества M порядка n называется величина

$$\lambda_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, A \in \mathcal{L}(X, L_n)} \inf_{a \in X} \sup_{f \in M} \|f - Af - a\|_X$$

(если множество M центрально-симметрично, то это определение равносильно следующему: $\lambda_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, A \in \mathcal{L}(X, L_n)} \sup_{f \in M} \|f - Af\|_X$).

Обозначим через $\mathcal{P}(U, V)$ множество всех линейных ограниченных проекторов из нормированного пространства U в нормированное пространство V . Проекционным поперечником множества M порядка n называется величина

$$\pi_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, P \in \mathcal{P}(X, L_n)} \inf_{a \in X} \sup_{f \in M} \|f - Pf - a\|_X$$

(для центрально-симметричного множества M это определение равносильно следующему: $\pi_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{L_n \subset X, P \in \mathcal{P}(X, L_n)} \sup_{f \in M} \|f - Pf\|_X$).

Бернштейновским поперечником порядка n центрально-симметричного множества M называется величина

$$b_n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{R \mid \exists L_{n+1} \subset X: RB_X \cap L_{n+1} \subset M\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Информационным колмогоровским поперечником назовем величину

$$d_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} d_m(M \cap (V^n + b), X),$$

где $\inf_{V^n}$ берется по всем подпространствам коразмерности n . Название поперечника отражает тот факт, что при приближении множества мы хотим учесть некоторую (в данном случае наилучшим образом выбранную) априорную информацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Центральным информационным колмогоровским поперечником* множества M в банаховом пространстве X называется величина

$$\overset{\circ}{d}_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} d_m(M \cap V^n, X).$$

Из сделанных определений следует, что

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}_m^n(M, X) &\leq d_m^n(M, X), \\ d_m^n(M, X) &= \inf_{V^{n_1}: \text{codim } V^{n_1} \leq n} \sup_{b \in X} d_m(M \cap (V^{n_1} + b), X). \end{aligned}$$

Через l_p^n обозначается пространство $\mathbb{R}^n$, снабженное нормой

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| & \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Через B_p^n обозначается единичный шар в l_p^n .

Если X – банахово пространство, $x \in X$, $x^* \in X^*$, то действие x^* на x обозначим $\langle x, x^* \rangle$, $\text{Int } B$ – множество всех внутренних точек множества $B \subset X$, $\bar{B}$ – замыкание B .

Через x_+ (x_-) обозначим положительную (отрицательную) часть числа x . Через p' обозначим число, сопряженное p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

§ 3. Оценки информационных колмогоровских поперечников

Для доказательства следующей теоремы нам понадобится

ЛЕММА 1. Пусть $L_{m+n} \subset X$ и $V^n \subset X$ – два подпространства нормированного пространства X . Тогда $L_{m+n} \cap V^n$ – подпространство размерности не меньше m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соответствующих теорем линейной алгебры.

В.М. Тихомиров доказал следующую часто используемую теорему [18, с. 220].

ТЕОРЕМА 1. Для произвольного выпуклого центрально-симметричного множества M выполнено неравенство

$$b_n(M, X) \leq d_n(M, X).$$

Следующая теорема является в некотором смысле обобщением теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольного выпуклого центрально-симметричного множества M выполнено неравенство

$$b_{n+m}(M, X) \leq \overset{\circ}{d}_m^n(M, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное подпространство $V^n \subset X$. По определению бернштейновского поперечника для любого $\delta > 0$ существует подпространство $\tilde{L}_{m+n+1}$ такое, что

$$\sup\{R : RB_X \cap \tilde{L}_{m+n+1} \subset M\} > b_{n+m}(M, X) - \delta.$$

По лемме 1 подпространство $\tilde{L}_{m+n+1} \cap V^n$ имеет размерность не ниже, чем $m+1$. Поэтому

$$b_m(M \cap V^n, X) \geq b_{n+m}(M, X) - \delta.$$

По теореме 1 выполнено неравенство

$$d_m(M \cap V^n, X) \geq b_m(M \cap V^n, X).$$

Объединяя оценки, в силу произвольности δ , V^n получаем

$$\overset{\circ}{d}_m^n(M, X) \geq b_{m+n}(M, X). \quad (1)$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3 (о поперечнике шара). Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $m+n < \dim X$. Тогда

$$d_m^n(B_X, X) = \overset{\circ}{d}_m^n(B_X, X) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху непосредственно следует из определения 3. Оценка снизу получается из теоремы 2 и того, что $b_{n+m}(B, X) = 1$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $M \subset X$ – произвольное непустое множество. Тогда

$$d_m^n(M, X) \leq \lambda_{m+n}(M, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По произвольному числу $\varepsilon > 0$ построим подпространство L_{n+m} и линейный ограниченный оператор $A: X \rightarrow L_{n+m}$ такие, что

$$\sup_{f \in M} \|f - Af\| \leq \lambda_{m+n}(M, X) + \varepsilon.$$

Оператор A как линейный ограниченный оператор с конечномерным образом можно представить в виде

$$Ax = \sum_{k=1}^{m+n} \langle x, y_k \rangle \varphi_k,$$

где $y_k \in X^*$, $k = 1, \dots, m+n$, $\varphi_k \in L_{n+m}$; $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n+m}$ – линейная независимая система из L_{n+m} . Образует подпространство $V^n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{k=1, \dots, n} \ker y_k$. Тогда для произвольных векторов $b \in X$ и $f \in V^n + b$ при всех $j = 1, \dots, n$ выполнено $\langle f, y_j \rangle = \langle b, y_j \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_{m+n}(M, X) + \varepsilon &\geq \sup_{f \in M \cap (V^n + b)} \|f - Af\| \\ &= \sup_{f \in M \cap (V^n + b)} \left\| f - \sum_{k=1}^n \langle b, y_k \rangle \varphi_k - \sum_{k=n+1}^{m+n} \langle f, y_k \rangle \varphi_k \right\| \\ &\geq \inf_{a \in X} \sup_{f \in M \cap (V^n + b)} \left\| f - a - \sum_{k=n+1}^{m+n} \langle f, y_k \rangle \varphi_k \right\| \geq d_m(M \cap (V^n + b), X). \end{aligned}$$

В силу произвольности ε , b теорема доказана.

§ 4. Некоторые точные неравенства между поперечниками

Везде далее в этом параграфе множество $M \subset X$ предполагается непустым, выпуклым и центрально-симметричным. Из определения поперечников d_n , λ_n , π_n следуют неравенства

$$d_n(M, X) \leq \lambda_n(M, X) \leq \pi_n(M, X).$$

В работе [8] был поставлен вопрос: с какой наименьшей константой C справедливо неравенство $\lambda_n(M, X) \leq C d_n(M, X)$?

В случае гильбертова пространства справедлива оценка (см. [18])

$$d^n(M, H) \leq d_n(M, H).$$

Возникает вопрос: верна ли такая оценка в произвольном банаховом пространстве? В теореме 5 дается ответ на эти вопросы с точной константой на классе центрально-симметричных выпуклых множеств. Для формулировки ответа сделаем необходимые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Копроекционной константой пространства X порядка n называется величина*

$$\alpha^n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{L_n} \inf_{P_{L_n} \in \mathcal{P}(X, L_n)} \|\text{Id} - P_{L_n}\|,$$

где супремум берется по всем подпространствам коразмерности n , а инфимум – по всем линейным проекторам на это подпространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Проекционной константой пространства X порядка n называется величина*

$$\alpha_n(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{L_n} \inf_{P_{L_n} \in \mathcal{P}(X, L_n)} \|P_{L_n}\|.$$

Заметим, что

$$\alpha_n(X) - 1 \leq \alpha^n(X) \leq \alpha_n(X) + 1. \quad (2)$$

Очевидно, если $X = H$ – гильбертово пространство, то $\alpha_n(H) = \alpha^n(H) = 1$.

В работах [7], [19] вычислена асимптотика проекционных констант некоторых классических пространств, именно

$$\alpha_n(l_p^{[Cn]}) \asymp n^{|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|}, \quad C > 1, \quad \alpha_n(\tilde{L}_p(\mathbb{T}^1)) \asymp n^{|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|}.$$

Следовательно, из (2) получаем, что для $C > 1$

$$\alpha_n(l_p^{[Cn]}) \asymp \alpha^n(l_p^{[Cn]}) \asymp n^{|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|}, \quad \alpha_n(\tilde{L}_p(\mathbb{T}^1)) \asymp \alpha^n(\tilde{L}_p(\mathbb{T}^1)) \asymp n^{|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}|}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Обозначим

$$\alpha^{n,m}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, L_m, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{x \in B_X} \inf_{l_m \in L_m} \|x - P_{L_n}x - l_m\|_X.$$

ТЕОРЕМА 5. *Выполнены равенства*

$$\sup_M \frac{\lambda_n(M, X)}{d_n(M, X)} = \sup_M \frac{\pi_n(M, X)}{d_n(M, X)} = \sup_M \frac{d^n(M, X)}{d_n(M, X)} = \sup_M \frac{d_0^n(M, X)}{d_n(M, X)} = \alpha^n(X), \quad (3)$$

$$\sup_M \frac{d_m^n(M, X)}{d_{n+m}(M, X)} = \alpha^{n,m}(X) \leq \alpha^n(X), \quad (4)$$

где супремум берется по всем выпуклым центрально-симметричным множествам $M \subset X$.

Для доказательства теоремы 5 нам понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 2. Пусть $\varkappa: 2^X \rightarrow \mathbb{R}_+$ – функция центрально-симметричных множеств, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow 0 \leq \varkappa(M_1) \leq \varkappa(M_2)$;
- 2) $\varkappa(\lambda M_1) = \lambda \varkappa(M_1)$ для любого $\lambda > 0$.

Тогда выполнено равенство

$$\sup_M \frac{\varkappa(M)}{d_n(M, X)} = \sup_{L_n} \varkappa(L_n + B_X),$$

где B_X – единичный шар пространства X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и центрально-симметричное множество M . Найдем подпространство L_n такое, чтобы

$$E(M, L_n) \leq d_n(M, X)(1 + \varepsilon).$$

Тогда

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} \frac{\varkappa(M)}{d_n(M, X)} \leq \frac{\varkappa(M)}{E(M, L_n)}.$$

Из определения величины $E(M, L_n)$ следует, что выполнено

$$M \subseteq L_n + E(M, L_n)B_X \stackrel{\text{def}}{=} N, \quad E(N, L_n) = E(M, L_n).$$

С учетом этого и свойств функции $\varkappa$ получаем

$$\frac{\varkappa(M)}{E(M, L_n)} \leq \frac{\varkappa(N)}{E(N, L_n)} = \varkappa\left(\frac{N}{E(N, L_n)}\right) = \varkappa(L_n + B_X).$$

Сопоставляя все сделанные оценки, с учетом произвольности ε , M получаем

$$\sup_{L_n} \varkappa(L_n + B_X) \geq \sup_M \frac{\varkappa(M)}{d_n(M, X)}.$$

Обратная оценка легко следует, если в качестве множеств M брать множества вида $L_n + B_X$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Заметим, что все поперечники, упомянутые в условии теоремы, обладают свойствами, необходимыми для применения леммы 2.

1. Докажем равенство

$$\sup_M \frac{\pi_n(M, X)}{d_n(M, X)} = \alpha^n(X).$$

По лемме 2 левая часть равенства равна следующей величине:

$$\begin{aligned} \sup_M \frac{\pi_n(M, X)}{d_n(M, X)} &= \sup_{L_n} \pi_n(L_n + B_X, X) \\ &= \sup_{L_n} \inf_{\{L_n^1, P_{L_n^1}\}} \sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - P_{L_n^1} x - P_{L_n^1} l\|. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если $L_n^1 \neq L_n$, то $\sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - P_{L_n^1} x - P_{L_n^1} l\| = \infty$ для произвольного линейного проектора $P_{L_n^1}: X \rightarrow L_n^1$. Поэтому

$$\sup_{L_n} \inf_{\{L_n^1, P_{L_n^1}\}} \sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - Px - Pl\| = \sup_{L_n} \inf_{P_{L_n}} \sup_{x \in B_X} \|x - Px\| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^n(X).$$

2. Точно так же

$$\begin{aligned} \sup_M \frac{\lambda_n(M, X)}{d_n(M, X)} &= \sup_{L_n} \lambda_n(L_n + B_X, X) \\ &= \sup_{L_n} \inf_{\{L_n^1, A: X \rightarrow L_n^1\}} \sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - Ax - Al\|. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если $L_n^1 \neq L_n$, то $\sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - Ax - Al\| = \infty$ для произвольного линейного оператора $A: X \rightarrow L_n^1$. Поэтому

$$\sup_{L_n} \lambda_n(L_n + B_X, X) = \sup_{L_n} \inf_{A: X \rightarrow L_n} \sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - Ax - Al\|.$$

Если оператор A не является проектором, то существует вектор $l^* \in L_n$ такой, что $Al^* \neq l^*$. В этом случае

$$\sup_{\{x \in B_X, l \in L_n\}} \|x + l - Ax - Al\| \geq \sup_{\gamma > 0} \|\gamma l^* - \gamma Al^*\| = \infty.$$

Поэтому $A: X \rightarrow L_n$ — проектор и $\sup_{L_n} \lambda_n(L_n + B_X, X) = \alpha^n(X)$.

3. Докажем равенство

$$\sup_M \frac{d_0^n(M, X)}{d_n(M, X)} = \alpha^n(X).$$

Воспользуемся леммой 2 и получим

$$\sup_M \frac{d_0^n(M, X)}{d_n(M, X)} = \sup_{L_n} d_0^n(L_n + B_X, X) = \sup_{L_n} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} r_X((L_n + B_X) \cap (V^n + b)).$$

Заметим, что подпространство V^n следует выбирать таким образом, чтобы $\dim(L_n \cap V^n) = 0$. Такой паре (L_n, V^n) взаимно однозначно соответствует линейный проектор P_{L_n} на L_n вдоль V^n . Выберем биортогональную систему $(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \{y_1, \dots, y_n\})$ такую, чтобы $L_n = \text{Lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $V^n = \bigcap_{j=1}^n \ker y_j$. Рассмотрим чебышевский радиус множества $(L_n + B_X) \cap (V^n + b)$. Это множество центрально-симметрично относительно $P_{L_n} b \in L_n$, а значит,

$$\begin{aligned} r_X((L_n + B_X) \cap (V^n + b)) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{l \in L_n, x \in B_X: P_{L_n}(l+x) = P_{L_n} b} \|l + x - P_{L_n} b\| \\ &= \sup_{x \in B_X} \|x - P_{L_n} x\|. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\sup_{L_n} d_0^n(L_n + B_X, X) = \sup_{L_n} \inf_{P_{L_n}} \sup_{x \in B_X} \|x - P_{L_n} x\| = \alpha^n(X).$$

Заметим, что множество $L_n + B_X$ инвариантно относительно сдвига по L_n , поэтому в проведенных рассуждениях можно без ограничения общности заменить $P_{L_n} b$ на 0, следовательно, доказано

$$\sup_M \frac{d^n(M, X)}{d_n(M, X)} = \alpha^n(X).$$

4. Докажем последнее равенство

$$\sup_M \frac{d_m^n(M, X)}{d_{n+m}(M, X)} = \alpha^{n,m}(X).$$

Воспользуемся леммой 2 и получим

$$\sup_M \frac{d_m^n(M, X)}{d_{n+m}(M, X)} = \sup_{L_{n+m}} d_m^n(B_X + L_{n+m}, X) = A, \quad (5)$$

где

$$A = \sup_{L_{n+m}} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} \inf_{L_m, a \in X} E((B_X + L_{n+m}) \cap (V^n + b), L_m + a).$$

Отметим, что по лемме 1 выполнено $\dim(L_{n+m} \cap V^n) \geq m$, более того, $\dim(L_{n+m} \cap V^n) = m$, иначе уклонение множества $L_{n+m} \cap V^n$ от любого подпространства размерности m будет равно ∞ . Кроме того, подпространство L_m выбирается однозначно:

$$L_m = L_{n+m} \cap V^n,$$

в противном случае $E((B_X + L_{n+m}) \cap V^n, L_m) = \infty$. Пусть L_n – какое-то дополнение подпространства L_m в L_{n+m} ($L_n + L_m = L_{n+m}$). В дальнейших оценках для краткости обозначим

$$\sup_x = \sup_{x \in B_X}, \quad \sup_{l_n} = \sup_{l_n \in L_n}, \quad \sup_{l_m} = \sup_{l_m \in L_m}.$$

Оценим

$$\begin{aligned} A &= \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{V^n, L_n \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{b \in X} \inf_{a \in X} \sup_{\substack{x, l_n, l_m \\ x + l_n + l_m \in V^n + b}} \inf_{l^2 \in L_m} \|x + l_n + l_m - l^2 - a\| \\ &= \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{V^n, L_n \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{b \in X} \inf_{a \in X} \sup_{\substack{x, l_n \\ x + l_n \in V^n + b}} \inf_{l^2 \in L_m} \|x + l_n - l^2 - a\| \\ &\stackrel{(i)}{=} \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{b \in X} \inf_{a \in X} \sup_{\substack{x, l_n \\ P_{L_n}(x + l_n) = P_{L_n} b}} \inf_{l^2 \in L_m} \|x + l_n - l^2 - a\| \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{b \in X} \sup_{\substack{x, l_n \\ P_{L_n}(x + l_n) = P_{L_n} b}} \inf_{l^2 \in L_m} \|x + l_n - l^2 - P_{L_n} b\| \\ &= \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_{b \in X} \sup_{\substack{x, l_n \\ P_{L_n}(x + l_n) = P_{L_n} b}} \inf_{l^2 \in L_m} \|x + l_n - l^2 - P_{L_n} x - l_n\| \\ &= \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_x \inf_{l^2 \in L_m} \|x - P_{L_n} x - l^2\| = \alpha^{n,m}(X). \end{aligned}$$

Равенство (i) вытекает из того, что вместо $\inf_{V^n}$ можно записывать $\inf_{P_{L_n}}$ по всем линейным проекторам на подпространство $L_n \subset L_{n+m}$, при этом условие $x + l_n \in V^n + b$ заменится на $P_{L_n}(x + l_n) = P_{L_n}b$; равенство (ii) следует из того, что множество $(B_X + L_n) \cap (V^n + b)$, где теперь $V^n = \ker P_{L_n}$, центрально-симметрично относительно $P_{L_n}b$.

Осталось доказать неравенство $\alpha^{n,m}(X) \leq \alpha^n(X)$:

$$\begin{aligned} \alpha^{n,m}(X) &\stackrel{\text{def}}{=} \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_x \inf_{l^2 \in L_m} \|x - P_{L_n}x - l^2\| \\ &\leq \sup_{L_{n+m}} \inf_{\substack{L_n, P_{L_n} \\ L_n + L_m = L_{n+m}}} \sup_x \|x - P_{L_n}x\| \\ &\leq \sup_{L_n, L_m} \inf_{P_{L_n}} \sup_x \|x - P_{L_n}x\| = \alpha^n(X). \end{aligned} \quad (6)$$

Теорема доказана.

Отметим, что в пространствах $\tilde{L}_q = \tilde{L}_q(\mathbb{T}^1)$, $q \geq 2$, указанная оценка реализуется по порядку на классах Соболева:

$$\frac{d^n(\widetilde{W}_2^\alpha, \tilde{L}_q)}{d_n(\widetilde{W}_2^\alpha, \tilde{L}_q)} \asymp \alpha^n(I_q).$$

Специфика поперечника такова, что некоторые неравенства, верные для колмогоровского поперечника, не верны, вообще говоря, для информационного колмогоровского поперечника.

При оценке сверху колмогоровского поперечника функциональных классов в пространствах $\tilde{L}_p(\mathbb{T}^n)$ используется следующее очевидное неравенство:

$$d_{n+m}(B + C, X) \leq d_n(B, X) + d_m(C, X).$$

Оказывается, что в случае информационного колмогоровского поперечника подобная оценка, вообще говоря, не верна.

ПРИМЕР 1. Справедливо неравенство

$$\sup_{M_1, M_2} \frac{\overset{\circ}{d}_0^n(M_1 + M_2, X)}{d^n(M_1, X) + d_0(M_2, X)} \geq \alpha^n(X),$$

где супремум берется по всем парам центрально-симметричных выпуклых множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $M_2 = B_X$. В качестве M_1 будем брать L_n — различные n -мерные подпространства пространства X . Отметим, что выполнены равенства $d_0(B_X, X) = 1$ (теорема о поперечнике шара), $d^n(L_n, X) = 0$, и поэтому искомая величина оценится следующим образом:

$$\sup_{M_1, M_2} \frac{d_0^n(M_1 + M_2, X)}{d^n(M_1, X) + d_0(M_2, X)} \geq \sup_{L_n} d_0^n(L_n + B_X, X).$$

По теореме 5 последняя величина есть $\alpha^n(X)$.

Однако если потребовать от множеств “взаимной ортогональности”, то можно гарантировать сохранение рассматриваемого неравенства.

ТЕОРЕМА 6. Пусть L_N, V^N – подпространства пространства X такие, что $L_N + V^N = X$, $\dim X = \infty$. Если $M_1 \subseteq L_N$, $M_2 \subseteq V^N$, то для любых неотрицательных $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $n_1 < N$, выполнено

$$\overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_1+n_2}(M_1 + M_2, X) \leq \overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(M_1, X) + \overset{\circ}{d}_{m_2}^{n_2}(M_2, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и обозначим $d_1 = \overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(M_1, X) + \varepsilon$, $d_2 = \overset{\circ}{d}_{m_2}^{n_2}(M_2, X) + \varepsilon$. Выберем подпространства $L_{m_1}, L_{m_2}, V^{n_1}, V^{n_2}$ такие, что

$$M_1 \cap V^{n_1} \subseteq d_1 B_X + L_{m_1}, \quad (7)$$

$$M_2 \cap V^{n_2} \subseteq d_2 B_X + L_{m_2}. \quad (8)$$

Рассмотрим подпространства

$$\tilde{V}^{n_1} \stackrel{\text{def}}{=} V^{n_1} \cap L_N + V^N, \quad \tilde{V}^{n_2} \stackrel{\text{def}}{=} V^{n_2} \cap V^N + L_N.$$

Отметим, что $\dim(V^{n_1} \cap L_N) \geq N - n_1$ и $\text{codim}(V^{n_2} \cap V^N) \leq N + n_2$, следовательно,

$$\text{codim}(\tilde{V}^{n_1}) = \text{codim}(V^N) - \dim(V^{n_1} \cap L_N) \leq N - (N - n_1) = n_1,$$

$$\text{codim}(\tilde{V}^{n_2}) = \text{codim}(V^{n_2} \cap V^N) - \dim L_N \leq N + n_2 - N = n_2.$$

Кроме того, $M_1 \cap V^{n_1} = M_1 \cap \tilde{V}^{n_1}$, $M_2 \cap V^{n_2} = M_2 \cap \tilde{V}^{n_2}$, поэтому из (7), (8) следует

$$M_1 \cap \tilde{V}^{n_1} \subseteq d_1 B_X + L_{m_1}, \quad (9)$$

$$M_2 \cap \tilde{V}^{n_2} \subseteq d_2 B_X + L_{m_2}. \quad (10)$$

Рассмотрим элементы $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ такие, что $m_1 + m_2 \in \tilde{V}^{n_1} \cap \tilde{V}^{n_2}$. Поскольку по построению $M_2 \subseteq V^N \subseteq \tilde{V}^{n_1}$, то $m_2 \in \tilde{V}^{n_1}$, из $M_1 \subseteq L_N \subseteq \tilde{V}^{n_2}$ вытекает $m_1 \in \tilde{V}^{n_2}$. Поэтому

$$(M_1 + M_2) \cap \tilde{V}^{n_1} \cap \tilde{V}^{n_2} \subseteq M_1 \cap \tilde{V}^{n_1} + M_2 \cap \tilde{V}^{n_2} \subseteq (d_1 + d_2) B_X + L_{m_1} + L_{m_2}$$

с учетом (9), (10). Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 6 и примера 1, вообще говоря, следует разрывность информационного колмогоровского поперечника (равно как и гельфандовского поперечника) как функции множеств в метрике Хаусдорфа. Выберем пространство X , изометричное $X \oplus X = X_1 \oplus X_2$. Рассмотрим множество $RB_X \cap (B_{X_1} + L_n)$, $L_n \subset X_1$, где $R \in \mathbb{R}$ достаточно велико, чтобы

$$d^n(RB_X \cap (B_{X_1} + L_n), X) \geq \frac{1}{2} \alpha^n(X).$$

Затем “слегка повернем” подпространство L_n так, чтобы

$$\text{dist}(RB_X \cap L_n, RB_X \cap \tilde{L}_n) < \varepsilon, \quad \tilde{L}_n \cap X_1 = \{0\}.$$

Тогда

$$\text{dist}(RB_X \cap (L_n + B_{X_1}), RB_X \cap (\tilde{L}_n + B_{X_1})) < \varepsilon$$

и вместе с тем по теореме 6 выполняется $d^n(RB_X \cap (\tilde{L}_n + B_{X_1}), X) = 1$. Отметим, что если M – компакт, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{N \subset X, \text{dist}(N, M) \leq \varepsilon} d_m^n(N, X) = d_m^n(M, X).$$

§ 5. Некоторые порядковые оценки и двойственность

Этот параграф начнем с рассмотрения вопроса: совпадают ли (по порядку параметров) для выпуклых центрально-симметричных множеств центральный информационный колмогоровский поперечник и информационный колмогоровский поперечник?

Следующая теорема дает положительный ответ на этот вопрос.

ТЕОРЕМА 7. Пусть M – центрально-симметричное выпуклое множество. Тогда выполнены неравенства

$$\overset{\circ}{d}_m^n(M, X) \leq d_m^n(M, X) \leq 2\overset{\circ}{d}_m^n(M, X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу для величины $d_m^n(M, X)$ сразу следует из определения. Докажем оценку сверху. Напомним определение поперечника:

$$d_m^n(M, X) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{V^n} \sup_{b \in X} d_m(M \cap (V^n + b), X).$$

Зафиксируем подпространство V^n и рассмотрим произвольный вектор $b \in X$. Пусть $M_b = M \cap (V^n + b)$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(M_b + M_{-b}) &= \frac{1}{2}(M \cap (V^n + b) + M \cap (V^n - b)) \\ &\subseteq \frac{1}{2}(M + M) \cap (V^n + b + V^n - b) = M_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Следовательно,

$$d_m(M_b, X) \leq 2d_m(M_0, X),$$

что и доказывает теорему.

Рассмотрим соотношения двойственности для поперечника $\overset{\circ}{d}_m^n(B, C)$; для этого введем необходимые определения. Пусть X – банахово пространство, X^* – сопряженное.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть $L \subseteq X$ – подпространство. Множество

$$L^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x^* \in X^*: \forall x \in L \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

называется *аннулятором подпространства L* . Для $L^* \subseteq X^*$ *преданнулятором* называется множество

$$(L^*)_\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X: \forall x^* \in L^* \langle x, x^* \rangle = 0\}.$$

При вычислении поперечников бывают полезны соотношения двойственности между видами поперечников. Эти соотношения основываются на следующей операции над множествами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Полярой множества $M \subset X$ называется следующее множество:

$$M^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x^* \in X^*: \forall x \in M \langle x, x^* \rangle \leq 1\}.$$

Предполярой множества $M^* \subset X^*$ называется множество

$$(M^*)_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X: \forall x^* \in M^* \langle x, x^* \rangle \leq 1\}.$$

Пусть X – банахово пространство, $M \subset X$. Определим функцию Минковского множества M :

$$\mu(x \mid M) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{\lambda \geq 0: x \in \lambda M\}.$$

Пусть множество M центрально-симметрично, ограничено и выпукло, L – линейная оболочка M . Обозначим через X_M пополнение L по норме $\mu(\cdot \mid M)$.

В. М. Тихомиров [20] установил двойственность колмогоровского и гильбертовского поперечников.

ТЕОРЕМА 8 [18, с. 146]. Пусть B, C – центрально-симметричные ограниченные замкнутые выпуклые множества в банаховом пространстве X такие, что $0 \in \text{Int } B$. Тогда

$$d_n(C, X_B) = d^n(B^0, X_{C^0}^*).$$

Следующая теорема устанавливает самодвойственность центрального информационного колмогоровского поперечника.

ТЕОРЕМА 9. Пусть B, C – центрально-симметричные ограниченные замкнутые выпуклые множества в банаховом пространстве X такие, что $0 \in \text{Int } B$, $0 \in \text{Int } C^0$. Тогда

$$\overset{\circ}{d}_m^n(C, X_B) = \overset{\circ}{d}_n^m(B^0, X_{C^0}^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L – подпространство пространства X , C – выпуклое замкнутое подмножество пространства X , $0 \in C$. В работе [18, с. 146] доказаны следующие равенства:

$$(C^0)_0 = C, \quad (C + L)^0 = C^0 \cap L^\perp, \quad (C \cap L)^0 = \overline{C^0 + L^\perp}, \quad (12)$$

$$B \subseteq C \Rightarrow C^0 \subseteq B^0, \quad (\alpha B)^0 = \frac{1}{\alpha} B^0 \quad (13)$$

(аналогичные соотношения верны для преданнулятора и предполяры). Обозначим $\overset{\circ}{d}_m^n = \overset{\circ}{d}_m^n(C, X_B)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем подпространства V^n, L_m такие, что

$$C \cap V^n \subseteq (\overset{\circ}{d}_m^n + \varepsilon)(B + L_m).$$

Тогда с учетом (12), (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overset{\circ}{d}_m^n + \varepsilon} (B^0 \cap L_m^\perp) &\subseteq \overline{C^0 + (V^n)^\perp} \\ \Rightarrow B^0 \cap L_m^\perp &\subseteq (\overset{\circ}{d}_m^n + \varepsilon)(\overline{C^0 + (V^n)^\perp}) \subseteq (\overset{\circ}{d}_m^n + 2\varepsilon)(C^0 + (V^n)^\perp), \end{aligned}$$

где последнее вложение следует из условия $0 \in \text{Int } C^0$. Отсюда в силу произвольности ε получаем

$$\overset{\circ}{d}_n^m(B^0, X_{C^0}^*) \leq \overset{\circ}{d}_m^n(C, X_B).$$

Обратная оценка проводится точно так же (надо поменять местами B и C^0 , C и B^0 , X и X^* , m и n , аннулятор и преданнулятор, полярю и предполярю). В результате получим оценку

$$\overset{\circ}{d}_m^n((C^0)_0, X_{(B^0)_0}) \leq \overset{\circ}{d}_n^m(B^0, X_{C^0}^*).$$

С учетом (12) теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Выполнены двойственные соотношения*

$$\overset{\circ}{d}_m^n(B_p^k, l_q^k) = \overset{\circ}{d}_n^m(B_{q'}^k, l_{p'}^k). \quad (14)$$

Обозначим $d_w^v = d_w^v(C, X_B)$, $\overset{\circ}{d}_w^v = \overset{\circ}{d}_w^v(C, X_B)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $C \in X_B$, C центрально-симметрично и выпукло. Кроме того, выполнено $0 \in \text{Int } B$, $0 \in \text{Int } C^0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \frac{1}{2\alpha^l(X_B)} d_m^{n+k+l}, \frac{1}{2\alpha^k(X_{C^0}^*)} d_{m+k+l}^n \right\} \\ & \leq d_{m+l}^{n+k} \leq \min \{ 2\alpha^k(X_B) d_{m+k+l}^n, 2\alpha^l(X_{C^0}^*) d_{m+k+l}^n \}, \\ & \max \left\{ \frac{1}{\alpha^l(X_B)} \overset{\circ}{d}_m^{n+k+l}, \frac{1}{\alpha^k(X_{C^0}^*)} \overset{\circ}{d}_{m+k+l}^n \right\} \\ & \leq \overset{\circ}{d}_{m+l}^{n+k} \leq \min \{ \alpha^k(X_B) \overset{\circ}{d}_{m+k+l}^n, \alpha^l(X_{C^0}^*) \overset{\circ}{d}_{m+k+l}^n \}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное подпространство V^n . Тогда по теореме 5 имеем

$$\overset{\circ}{d}_m^k(C \cap V^n, X_B) \leq d_m^k(C \cap V^n, X_B) \leq \alpha^k(X) d_{m+k}(C \cap V^n, X_B).$$

Поэтому в силу произвольности выбора V^n выполнено

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}_m^{k+n}(C, X_B) &= \inf_{V^n} \overset{\circ}{d}_m^k(C \cap V^n, X_B) \\ &\leq \alpha^k(X) \inf_{V^n} d_{m+k}(C \cap V^n, X_B) = \alpha^k(X) \overset{\circ}{d}_{m+k}^n(C, X_B). \end{aligned}$$

Применяя теорему 7, получим

$$d_m^{k+n}(C, X_B) \leq 2\alpha^k(X) d_{m+k}^n(C, X_B).$$

Отсюда с учетом теоремы 9 следует правая оценка, утверждаемая в теореме. Левая оценка вытекает из уже доказанной правой оценки. Теорема доказана.

Из теоремы 10, в частности, следует, что если параметры k, l невелики (порядка константы), то не имеет значения для отыскания порядка поперечника, выписаны они сверху или внизу.

Для вычисления порядков поперечников соболевских классов нам понадобится следующее обобщение одного мультипликативного неравенства. Первым такое неравенство для колмогоровских поперечников установил А. Пич [21]. Затем А.Б. Ходулев [22] установил это неравенство для линейных и александровских поперечников.

ТЕОРЕМА 11 [21], [22]. Пусть $B, C, D \subset X$ – произвольные центрально-симметричные выпуклые множества. Тогда для произвольных неотрицательных целых чисел n, m справедливы неравенства

$$\begin{aligned} d_{n+m}(B, X_C) &\leq d_n(B, X_D) d_m(D, X_C), \\ a_{n+m}(B, X_C) &\leq a_n(B, X_D) a_m(D, X_C), \\ \lambda_{n+m}(B, X_C) &\leq \lambda_n(B, X_D) \lambda_m(D, X_C). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 12. Пусть $B, C, D \subset X$ – произвольные центрально-симметричные выпуклые множества. Тогда для любых неотрицательных целых чисел n_1, n_2, m_1, m_2 имеем

$$\overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_1+n_2}(B, X_C) \leq \overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(B, X_D) \overset{\circ}{d}_{m_2}^{(n_2-m_1)+}(D, X_C).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению поперечника $\overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(B, X_D)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется пара подпространств V^{n_1}, L_{m_1} таких, что выполнено вложение множеств

$$B \cap V^{n_1} \subseteq (\overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(B, X_D) + \varepsilon)(D + L_{m_1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_1+n_2}(B, X_C) &\leq \overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_2}(B \cap V^{n_1}, X_C) \\ &\leq (\overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(B, X_D) + \varepsilon) \overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_2}(D + L_{m_1}, X_C). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом центральной симметрии множества $D + L_{m_1}$ имеем

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_2}(D + L_{m_1}, X_C) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\{V^{n_2}, L_{m_1+m_2}\}} \sup_{(f, l^1) \in (D, L_{m_1})} \inf_{\substack{l \in L_{m_1+m_2} \\ (f+l^1) \in V^{n_2}}} \|f + l^1 - l\| \\ &\leq \inf_{\{V^{n_2}, L_{m_2}\}} \sup_{(f, l^1) \in (D, L_{m_1})} \inf_{\substack{l^2 \in L_{m_2} \\ (f+l^1) \in V^{n_2}}} \|f - l^2\|. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае $n_2 \leq m_1$ получаем

$$\inf_{\{V^{n_2}, L_{m_2}\}} \sup_{(f, l^1) \in (D, L_{m_1})} \inf_{\substack{l^2 \in L_{m_2} \\ (f+l^1) \in V^{n_2}}} \|f - l^2\| \leq \inf_{L_{m_2}} \sup_{f \in D} \inf_{l^2 \in L_{m_2}} \|f - l^2\| \stackrel{\text{def}}{=} d_{m_2}(D, X_C). \quad (17)$$

В случае $n_2 > m_1$ пусть $V^{n_2} = \ker P^{n_2}$ для некоторого линейного ограниченного проектора на какое-нибудь подпространство, дополняющее V^{n_2} , вдоль V^{n_2} . Тогда множество $\{f: f \in D, \exists l^1 \in L_{m_1}, (f + l^1) \in V^{n_2}\}$ совпадает с множеством $\{f \in D: P^{n_2} f \in P^{n_2}(L_{m_1})\}$. Обозначим $\tilde{L} = P^{n_2}(L_{m_1})$. Отметим, что $\dim \tilde{L} \leq m_1$. Пусть F – какое-нибудь дополнение $\tilde{L}$ до $\text{Im } P^{n_2}$, т. е.

$$\text{Im } P^{n_2} = \tilde{L} + F, \quad \dim F \geq n_2 - m_1. \quad (18)$$

Обозначим через P_1 проектор из $\text{Im } P^{n_2}$ на F вдоль $\tilde{L}$. Тогда

$$\{f \in D: P^{n_2} f \in P^{n_2}(L_{m_1})\} = D \cap \ker P_1 \circ P^{n_2}.$$

Отметим, что так как $\text{Im } P_1 \subseteq \text{Im } P^{n_2}$, то оператор $P_1 \circ P^{n_2}$ есть проектор на F . Следовательно, с учетом (18) $\text{codim ker } P_1 \circ P^{n_2} \geq n_2 - m_1$. Обозначим $V^1 = V^1(V^{n_2}, L_{m_1}) = \text{ker } P_1 \circ P^{n_2}$ и продолжим неравенство (16):

$$\begin{aligned} \inf_{\{V^{n_2}, L_{m_2}\}} \sup_{f \in D \cap V^1(V^{n_2}, L_{m_1})} \inf_{l^2 \in L_{m_2}} \|f - l^2\| \\ \leq \inf_{\{V^{n_2-m_1}, L_{m_2}\}} \sup_{f \in D \cap V^{n_2-m_1}} \inf_{l^2 \in L_{m_2}} \|f - l^2\|. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (15), (19), (17) и произвольности ε получим

$$\overset{\circ}{d}_{m_1+m_2}^{n_1+n_2}(B, X_C) \leq \overset{\circ}{d}_{m_1}^{n_1}(B, X_D) \overset{\circ}{d}_{m_2}^{(n_2-m_1)+}(D, X_C).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $B, C, D \subset X$ – произвольные множества. Тогда для любых неотрицательных целых чисел n, m

$$\overset{\circ}{d}_m^n(B, X_C) \leq d^n(B, X_D) d_m(D, X_C).$$

Это утверждение является следствием теоремы 12 при $m_1 = 0, n_2 = 0$.

§ 6. Некоторые порядки информационных колмогоровских поперечников конечномерных шаров

Для вычисления порядков поперечников соболевских классов нам понадобится знать порядок убывания поперечников $\overset{\circ}{d}_n^n(B_p^{Cn}, l_q^{Cn})$.

ТЕОРЕМА 13 [21], [23]. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty, n < m$. Тогда

$$d_n(B_p^m, l_q^m) = (m - n)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА 14 [8]. Пусть $2 \leq p < q \leq \infty, n < m$. Тогда

$$d_n(B_p^m, l_q^m) \asymp (\min\{1, m^{\frac{1}{q}} n^{-\frac{1}{2}}\})^{(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) / (\frac{1}{2} - \frac{1}{q})}.$$

ТЕОРЕМА 15. Для любых $1 \leq p \leq q \leq \infty$ верно асимптотическое равенство

$$d_n^n(B_p^{4n}, l_q^{4n}) \asymp n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$$

с константой, зависящей от p, q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношений двойственности (14) достаточно доказать теорему при $p \leq q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. Докажем оценку снизу. Если $p < q$, то

$$\begin{aligned} \|x\|_{l_p^{4n}} &\leq (4n)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|x\|_{l_q^{4n}}, \\ \overset{\circ}{d}_n^n(B_p^{4n}, l_q^{4n}) &\geq (4n)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \overset{\circ}{d}_n^n(B_q^{4n}, l_q^{4n}) \stackrel{\text{T3}}{=} 4^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \end{aligned}$$

(здесь и в следующих соотношениях мы будем указывать теорему, в силу которой они справедливы).

Оценка сверху при $q > p \geq 2$ следует из того, что

$$\mathring{d}_n^n(B_p^{4n}, l_q^{4n}) \leq d_n(B_p^{4n}, l_q^{4n}),$$

и теоремы 14. Докажем оценку сверху при $q \geq 2 \geq p$. Из следствия 2 имеем

$$\begin{aligned} \mathring{d}_n^n(B_p^{4n}, l_q^{4n}) &\leq d^n(B_p^{4n}, l_2^{4n}) d_n(B_2^{4n}, l_q^{4n}) \stackrel{\text{T8}}{=} d_n(B_2^{4n}, l_{p'}^{4n}) d_n(B_2^{4n}, l_q^{4n}) \\ &\stackrel{\text{T14}}{\asymp} n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 16. Пусть $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Тогда $d_n^n(B_p^{10n}, l_q^{10n}) \asymp n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценку снизу. По теореме 12

$$\mathring{d}_{3n}^{3n}(B_p^{10n}, l_p^{10n}) \leq \mathring{d}_n^n(B_p^{10n}, l_q^{10n}) \mathring{d}_{2n}^{2n}(B_q^{10n}, l_p^{10n}).$$

Воспользовавшись теоремой 3 и неравенством $\mathring{d}_{2n}^{2n}(B_q^{10n}, l_p^{10n}) \leq \mathring{d}_n^n(B_q^{10n}, l_p^{10n})$, получим

$$\mathring{d}_n^n(B_p^{10n}, l_q^{10n}) \mathring{d}_n^n(B_q^{10n}, l_p^{10n}) \geq 1.$$

Далее, по теореме 15 выполнено $d_n^n(B_q^{10n}, l_p^{10n}) \asymp n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$, значит,

$$\mathring{d}_n^n(B_p^{10n}, l_q^{10n}) \gg n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

Оценка сверху вытекает из неравенства $d_n^n(B_p^{10n}, l_q^{10n}) \leq d_n(B_p^{10n}, l_q^{10n})$ и теоремы 13. Теорема доказана.

§ 7. Порядки информационных колмогоровских поперечников функциональных классов

При порядковых оценках информационного колмогоровского поперечника функциональных классов в пространстве $\tilde{L}_p(\mathbb{T}^n)$ будет использоваться стандартная техника дискретизации этой задачи, сформировавшаяся в работах [5]–[8] и развитая затем многими авторами. В настоящей работе будем опираться на работы [17], [24] по этой тематике.

Условимся далее равенства и неравенства для векторов понимать как по координатные. Через $\mathbf{1}$, ∞ будем обозначать n -мерные векторы, состоящие только из единиц и бесконечностей.

Пусть $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$ – n -мерный тор. Обозначим через

$$\tilde{L}_{\mathbf{p}} = \tilde{L}_{\mathbf{p}}(\mathbb{T}^n), \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad 1 \leq p_j < \infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

пространство 2π -периодических по каждому аргументу функций $x(t) = x(t_1, \dots, t_n)$, для которых конечна смешанная норма

$$\|x\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\dots \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^{p_1} dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} \frac{1}{p_n} \right\}.$$

Для функции $x \in \tilde{L}_{\mathbf{p}}$ с нулевым средним по всем аргументам:

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k,t)}, \quad \text{где } \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n = \{k \in \mathbb{Z}^n: k_1 \cdots k_n \neq 0\}$$

(сходимость ряда понимается в смысле $\tilde{L}_{\mathbf{p}}$ -сходимости), и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n$ введем формально операцию дробного дифференцирования по формуле

$$x^{(\alpha)} = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n} \prod_{j=1}^n (ik_j)^{\alpha_j} x_k e^{i(k,t)}, \quad (ik_j)^{\alpha_j} = |k_j|^{\alpha_j} \exp\left\{i \frac{\pi}{2} \alpha_j \operatorname{sign} k_j\right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Для векторов $\alpha, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq p_j < \infty$, $j = 1, \dots, n$, классом *Соболева* называется множество функций с нулевым средним по всем аргументам

$$\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \{x(\cdot): \|x^{(\alpha)}\|_{\mathbf{p}} \leq 1\}.$$

Для конечного набора $\bar{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}^1, \dots, \mathbf{p}^m\}$, $1 \leq \mathbf{p}^r < \infty$, $r = 1, \dots, m$, и $\bar{\alpha} = \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\} \subset \mathbb{R}^n$ определим класс

$$\widetilde{W}_{\bar{\mathbf{p}}}^{\bar{\alpha}} = \bigcap_{r=1}^m \widetilde{W}_{\mathbf{p}^r}^{\alpha^r}.$$

Если $\mathbf{p}^r = \mathbf{p}$ при всех $r = 1, \dots, m$, то класс $\widetilde{W}_{\bar{\mathbf{p}}}^{\bar{\alpha}}$ будем обозначать $\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\bar{\alpha}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Каждому вектору $s \in \mathbb{R}_+^n$ поставим в соответствие множество

$$\square_s = \{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n: 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, n\}.$$

Тогда для абсолютно сходящегося ряда выполнено

$$x(t) = \sum_{k \in \overset{\circ}{\mathbb{Z}}^n} x_k e^{i(k,t)} = \sum_{s \in \mathbb{N}^n} \delta_s x(t),$$

где $\delta_s x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i(k,t)}$.

ЛЕММА 3. Если $x \in \tilde{L}_{\mathbf{q}}$, то при $1 \leq \mathbf{p} \leq \mathbf{q} \leq \infty$ выполняется неравенство

$$\|x\|_{\mathbf{p}} \leq \|x\|_{\mathbf{q}}.$$

Мощность множества $S \subset \mathbb{Z}^n$ будем обозначать $|S|$ или $\operatorname{card} S$. Пусть $S \subset \mathbb{N}^n$, $\|S\| \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{card}\{k \in \square_s: s \in S\}$.

Далее нам понадобится

ТЕОРЕМА 17 [24]. Пусть $\alpha^r \in \mathbb{R}_+^n$, $r = 1, \dots, m$, $S = \{s \in \mathbb{R}_+^n: (\alpha^r, s) \leq 1, r = 1, \dots, m\}$. Тогда

$$\sum_{s \in \mu S \cap \mathbb{N}^n} \operatorname{card} \square_s \asymp 2^{\mu M} \mu^l$$

(константы не зависят от μ), где M — значение, l — размерность множества решений задачи $(s, 1) \rightarrow \sup, s \in S$.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$. Обозначим $Z_C(M) = \{k \in \mathbb{Z}^n \mid \exists m \in M: \|k - m\|_{l_\infty^n} \leq C\}$.

ТЕОРЕМА 18 [24]. Пусть $\{\alpha^r\}_{r=1}^m \subset \mathbb{R}_+^n$, $S = \{s \in \mathbb{R}_+^n: (\alpha^r, s) \leq 1, r = 1, \dots, m\}$, F – множество решений задачи $(s, 1) \rightarrow \sup$, $s \in S$, M – значение этой задачи, l – размерность F . Тогда

$$\sum_{s \in Z_1(\mu N)} 2^{(s,1)} \asymp 2^{\mu M} \mu^l, \quad |Z_1(\mu N)| \asymp \mu^l$$

(константы не зависят от μ).

ТЕОРЕМА 19 (Литтлвуд–Пэли). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$\|x^{(\alpha)}\|_p \asymp \left\| \left(\sum_{s \in \mathbb{N}^n} |2^{(\alpha,s)} \delta_s x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_p$$

(константы зависят от α, p).

ТЕОРЕМА 20 [17]. Пусть $S \subset \mathbb{N}^n$, $x = \sum_{s \in S} \delta_s x$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$|S|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) - \left(\sum_{s \in S} \|2^{(\alpha,s)} \delta_s x\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}} \ll \|x^{(\alpha)}\|_p \ll |S|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}) + \left(\sum_{s \in S} \|2^{(\alpha,s)} \delta_s x\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}}$$

(константы зависят от α, p).

ТЕОРЕМА 21 [17]. При $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}^n$ между пространством тригонометрических полиномов $x(t) = \sum_{k \in \square_s} x_k e^{i(k,t)}$ и пространством $\mathbb{R}^{2^{(s,1)}}$ устанавливается изоморфизм. При этом функции $x(\cdot)$ сопоставляется вектор $(\theta(x)^j)_{j=1, \dots, 2^{(s,1)}}$ с координатами

$$\begin{aligned} \{x_m(\tau^r)\} &\in \mathbb{R}^{2^{(s,1)}}, \quad x_m(t) = \sum_{\substack{\text{sign } k_l = \text{sign } m_l \\ l=1, \dots, n}} x_k e^{i(k,t)}, \\ m &= (\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n, \quad \tau^r = (\pi 2^{2-s_1} r_1, \dots, \pi 2^{2-s_n} r_n), \\ r_i &= 1, \dots, 2^{s_i-1}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{20}$$

причем верно порядковое равенство

$$\|x\|_p \asymp \left(2^{-(s,1)} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\theta(x)^j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

ТЕОРЕМА 22. Пусть $\mathbf{q}, \mathbf{p}^r, \alpha^r \in \mathbb{R}^n$, $1 < \mathbf{q}, \mathbf{p}^r < \infty$, $r = 1, \dots, m$, A – выпуклая оболочка $\{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$. Тогда

$$d_N^N(\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\alpha}, \tilde{L}_{\mathbf{q}}) \asymp (N \log^l N)^{\frac{1}{M}} \quad \text{при} \quad (A - \mathbf{1}) \cap \mathring{\mathbb{R}}_+^n \neq \emptyset,$$

где M – значение, а l – размерность множества решений задачи $(s, 1) \rightarrow \sup$, $(s, \alpha^r) \leq 1$, $r = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3 следует, что при $(\mathbf{p}')^r \geq \mathbf{p}^r$, $r = 1, \dots, m$, $\mathbf{q}' \geq \mathbf{q}$ выполнено

$$d_N^N(\widetilde{W}_{\mathbf{p}'}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{\mathbf{q}}) \leq d_N^N(\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{\mathbf{q}}), \quad d_N^N(\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{\mathbf{q}}) \leq d_N^N(\widetilde{W}_{\mathbf{p}}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{\mathbf{q}'}).$$

Поэтому если выполнены неравенства

$$(N \log^l N)^{\frac{1}{M}} \ll d_N^N(\widetilde{W}_{\tilde{p}'}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{q'}) \leq d_N^N(\widetilde{W}_{\tilde{p}''}^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_{q''}) \ll (N \log^l N)^{\frac{1}{M}}, \quad (21)$$

где при $r = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (\tilde{p}')_j^r &\equiv \max\{2, \max\{p_{\tilde{j}}^{\tilde{r}} : \tilde{r} = 1, \dots, m, \tilde{j} = 1, \dots, n\}\}, \\ (q')_j &\equiv \min\{2, \min\{q_{\tilde{j}} : \tilde{j} = 1, \dots, n\}\}, \\ (\tilde{p}'')_j^r &\equiv \min\{2, \min\{p_{\tilde{j}}^{\tilde{r}} : \tilde{r} = 1, \dots, m, \tilde{j} = 1, \dots, n\}\}, \\ (q'')_j &\equiv \max\{2, \max\{q_{\tilde{j}} : \tilde{j} = 1, \dots, n\}\}, \end{aligned}$$

то отсюда будет следовать утверждение теоремы.

1. Докажем нижнюю из оценок (21). Будем везде в этом пункте считать, что $q = q'$, $\tilde{p} = \tilde{p}'$. Отметим, что $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$.

Пусть $\tilde{S} = \{s \in \mathbb{R}_+^n : (\alpha^r, s) \leq 1, r = 1, \dots, m\}$, F – множество решений задачи $(s, 1) \rightarrow \sup, s \in \tilde{S}$.

Положим $S_\mu = Z_C(\mu F)$, $\Gamma = \text{Lin}\{e^{i(k,t)} : k \in \square_s, s \in S_\mu\}$, где величина μ определяется из уравнения $N = 2^{\mu M} \mu^l$, а константа $C > 0$ такова, что $\dim \Gamma \geq 10N$. В силу теоремы 18 такие μ и C существуют и $|S_\mu| \asymp \mu^l$.

По теореме Литтлвуда–Пэли

$$d_N^N(\widetilde{W}_p^{\tilde{\alpha}}, \tilde{L}_q) \geq d_N^N(\widetilde{W}_p^{\tilde{\alpha}} \cap \Gamma, \tilde{L}_q) \stackrel{\text{T19}}{\gg} d_N^N(\widetilde{W}_p^{\tilde{\alpha}} \cap \Gamma, \tilde{L}_q \cap \Gamma). \quad (22)$$

Если $x(\cdot) \in \Gamma$, то $x(\cdot) = \sum_{s \in S_\mu} \delta_s x(\cdot)$ и, значит, при $\alpha \in \{\alpha^1, \dots, \alpha^m\}$

$$\begin{aligned} \|x(\alpha)\|_p &\stackrel{\text{T20}}{\ll} |S_\mu|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \left(\sum_{s \in S_\mu} \|2^{(\alpha, s)} \delta_s x\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{T21}}{\ll} 2^{\mu - \frac{\mu M}{p}} \mu^{\frac{l}{2} - \frac{l}{p}} \left(\sum_{s \in S_\mu} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\theta(\delta_s x)^j|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$x(\cdot) \in \widetilde{W}_p^{\tilde{\alpha}} \quad \text{при} \quad \left(\sum_{s \in S_\mu} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\theta(\delta_s x)^j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll 2^{-\mu + \frac{\mu M}{p}} \mu^{\frac{l}{p} - \frac{l}{2}}. \quad (23)$$

С другой стороны, если $y(\cdot) \in \Gamma$, то

$$\begin{aligned} \|y\|_q &= \left\| \sum_{s \in S_\mu} \delta_s y \right\|_q \stackrel{\text{T20}}{\gg} |S_\mu|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_\mu} \|\delta_s y\|_q^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{\text{T21}}{\asymp} 2^{-\frac{\mu M}{q}} \mu^{\frac{l}{2} - \frac{l}{q}} \left(\sum_{s \in S_\mu} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\theta(\delta_s y)^j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Согласно теореме 21 между пространством тригонометрических полиномов Γ и конечномерным пространством $\mathbb{R}^{\|S_\mu\|}$ имеется естественный изоморфизм. Поэтому из (23), (24) и (22) следует

$$d_N^N(\widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}, \tilde{L}_q) \gg 2^{-\mu + \frac{\mu M}{p} - \frac{\mu M}{q}} \mu^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} d_N^N(B_p^{10N}, l_q^{10N}).$$

Далее по теореме 16 имеем

$$\begin{aligned} d_N^N(\widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}, \tilde{L}_q) &\gg 2^{-\mu + \frac{\mu M}{p} - \frac{\mu M}{q}} \mu^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \\ &\asymp 2^{-\mu + \frac{\mu M}{p} - \frac{\mu M}{q}} \mu^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (2^{\mu M} \mu^l)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} = 2^{-\mu} \asymp (N^{-1} \log^l N)^{\frac{1}{M}}. \end{aligned}$$

Докажем оценку сверху в (21). Напомним, что в этом случае достаточно считать, что $1 < p \leq 2 \leq q \leq \infty$.

Для $\nu, k \in \mathbb{N}$, $n \leq k \leq \nu M$, введем

$$S_{\nu k} \stackrel{\text{def}}{=} \{s \in \mathbb{N}^n : \nu - 1 \leq \max_{j=1, \dots, m} (\alpha^j, s) < \nu, (s, 1) = k\}.$$

Тогда $\|S_{\nu k}\| = 2^k |S_{\nu k}|$. Положим

$$N_{\nu k} = \begin{cases} \|S_{\nu k}\|, & \text{если } n \leq k \leq \nu M, \quad \nu \leq \mu, \\ 2^{\mu M + \mu \gamma M - 2\nu \gamma M + \gamma k} |S_{\nu k}|, & \text{если } n \leq k \leq \nu M, \quad \nu > \mu, \end{cases}$$

где величина μ удовлетворяет равенству $2^{\mu M} \mu^l = N$, а константа $1 > \gamma > 0$ условию $(\gamma + 1)M < 1$ (это можно сделать, поскольку по условию теоремы $(A - 1) \cap \mathbb{R}_+^n \neq \emptyset$ и, значит, $M < 1$). Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{\nu \geq 1} \sum_{k=n}^{\nu M} N_{\nu k} &= \sum_{\nu=1}^{\mu} \sum_{k=n}^{\nu M} \|S_{\nu k}\| + \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{\mu M + \mu \gamma M - 2\nu \gamma M + \gamma k} |S_{\nu k}| \\ &= \sum_{\substack{(\alpha^j, s) \leq \mu \\ j=1, \dots, m}} 2^{(s, 1)} + \sum_{\nu > \mu} \sum_{\substack{(\alpha^j, s) \leq \nu \\ j=1, \dots, m}} 2^{\mu M + \mu \gamma M - 2\nu \gamma M + \gamma(s, 1)}. \end{aligned}$$

Далее по теореме 17 получаем

$$\sum_{\nu \geq 1} \sum_{k=n}^{\nu M} N_{\nu k} \stackrel{\text{T17}}{\asymp} 2^{\mu M} \mu^l + \sum_{\nu > \mu} 2^{\mu M + \mu \gamma M - \nu \gamma M} \nu^l \asymp 2^{\mu M} \mu^l = N,$$

поскольку $\sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu \gamma M} \nu^l \asymp 2^{-\mu \gamma M} \mu^l$. Если $x = \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x \in \widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}$, то

$$\begin{aligned} m &\geq \sum_{j=1}^m \|x(\alpha^j)\|_p^p \stackrel{\text{T20}}{\gg} |S_{\nu k}|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})p} \sum_{j=1}^m \sum_{s \in S_{\nu k}} \|2^{(\alpha^j, s)} \delta_s x\|^p \\ &\gg 2^{p\nu} |S_{\nu k}|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})p} \sum_{s \in S_{\nu k}} \|\delta_s x\|^p \stackrel{\text{T21}}{\asymp} 2^{p\nu - k} |S_{\nu k}|^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})p} \sum_{s \in S_{\nu k}} \sum_{j=1}^{2^{(s, 1)}} |\theta(\delta_s x)^j|^p, \end{aligned}$$

и, следовательно, если $x(\cdot) = \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x(\cdot) \in \widetilde{W}_p^{\bar{\alpha}}$, то

$$\left(\sum_{s \in S_{\nu k}} \sum_{j=1}^{2^{(s, 1)}} |\theta(\delta_s x)^j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll 2^{-\nu + \frac{k}{p}} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x \right\|_q &\stackrel{\text{T20}}{\leq} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_{\nu k}} \|\delta_s x\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{\text{T21}}{\asymp} 2^{-\frac{k}{q}} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \left(\sum_{s \in S_{\nu k}} \sum_{j=1}^{2^{(s,1)}} |\theta(\delta_s x)^j|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Проводя дискретизацию (теорема 12) и используя теорему 6, получаем

$$\begin{aligned} d_N^N(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}}, \tilde{L}_q) &\stackrel{\text{T6}}{\leq} \sum_{\nu, k} d_{N_{\nu k}}^{N_{\nu k}} \left(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}} \cap \left\{ x = \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x \right\}, \tilde{L}_q \right) \\ &\stackrel{\text{T19}}{\ll} \sum_{\nu, k} d_{N_{\nu k}}^{N_{\nu k}} \left(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}} \cap \left\{ x = \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x \right\}, \tilde{L}_q \cap \left\{ x = \sum_{s \in S_{\nu k}} \delta_s x \right\} \right) \\ &\stackrel{(25), (26)}{\ll} \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + \frac{k}{p} - \frac{k}{q}} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} d_{N_{\nu k}}^{N_{\nu k}} (B_p^{\|S_{\nu k}\|}, l_q^{\|S_{\nu k}\|}) \\ &\stackrel{\text{T12}}{\ll} \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + \frac{k}{p} - \frac{k}{q}} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} d_{N_{\nu k}}^{N_{\nu k}} (B_p^{\|S_{\nu k}\|}, l_2^{\|S_{\nu k}\|}) d_{N_{\nu k}} (B_2^{\|S_{\nu k}\|}, l_q^{\|S_{\nu k}\|}). \end{aligned}$$

По теореме 14 имеем

$$\begin{aligned} d_N^N(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}}, \tilde{L}_q) &\ll \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + \frac{k}{p} - \frac{k}{q}} |S_{\nu k}|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|S_{\nu k}\|^{1 - \frac{1}{p}} N_{\nu k}^{\frac{1}{2}} \|S_{\nu k}\|^{\frac{1}{q}} N_{\nu k}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + k} |S_{\nu k}| N_{\nu k}^{-1} = \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + k} |S_{\nu k}| |S_{\nu k}|^{-1} 2^{-\mu M - \mu \gamma M + 2\nu \gamma M - \gamma k} \\ &= \sum_{\nu > \mu} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{-\nu + k - \mu M - \mu \gamma M + 2\nu \gamma M - \gamma k}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\begin{aligned} d_N^N(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}}, \tilde{L}_q) &\ll \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu - \mu M - \mu \gamma M + 2\nu \gamma M} \sum_{k=n}^{\nu M} 2^{k - \gamma k} \\ &\ll \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu - \mu M - \mu \gamma M + 2\nu \gamma M} 2^{\nu M - \gamma \nu M} = \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu - \mu M - \mu \gamma M + \nu \gamma M + \nu M} \\ &= 2^{-\mu M - \mu \gamma M} \sum_{\nu > \mu} 2^{-\nu + \nu \gamma M + \nu M} \asymp 2^{-\mu M - \mu \gamma M + \mu M + \mu \gamma M - \mu} \\ &= 2^{-\mu} \asymp (N^{-1} \log^l N)^{\frac{1}{M}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим, что аналогично находится порядок убывания величины $d_M^N(\widetilde{W}_p^{\vec{\alpha}}, \tilde{L}_q)$ при N и M одного порядка.

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову, А. С. Кочурову за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

1. В. М. Тихомиров, “Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория приближений”, *УМН*, **15:3** (1960), 81–120; англ. пер.: V. M. Tihomirov, “Diameters of sets in functional spaces and the theory of best approximations”, *Russian Math. Surveys*, **15:3** (1960), 75–111.
2. В. М. Тихомиров, С. Б. Бабаджанов, “О поперечнике одного класса в пространстве L^p ($p \geq 1$)”, *Изв. АН УзбССР. Сер. физ.-матем. наук*, **11:2** (1967), 24–30.
3. В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближения*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1969.
4. Ю. И. Маковоз, “Об одном приеме оценки снизу поперечников множеств в банаховом пространстве”, *Матем. сб.*, **87(129):1** (1972), 136–142; англ. пер.: Ju. I. Makovoz, “On a method for estimation from below of diameters of sets in Banach spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **16:1** (1972), 139–146.
5. Р. С. Исмагилов, “Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами”, *УМН*, **29:3** (1974), 161–178; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Diameters of sets in normed linear spaces and the approximation of functions by trigonometric polynomials”, *Russian Math. Surveys*, **29:3** (1974), 169–186.
6. В. Е. Майоров, “Дискретизация задачи о поперечниках”, *УМН*, **30:6** (1975), 179–180.
7. Б. С. Кашин, “Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41:2** (1977), 334–351; англ. пер.: B. S. Kašin, “Diameters of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Math. USSR-Izv.*, **11:2** (1977), 317–333.
8. Е. Д. Глушкин, “Нормы случайных матриц и поперечники конечномерных множеств”, *Матем. сб.*, **120(162):2** (1983), 180–189; англ. пер.: E. D. Gluskin, “Norms of random matrices and widths of finite-dimensional sets”, *Math. USSR-Sb.*, **48:1** (1984), 173–182.
9. К. И. Бабенко, “О приближении одного класса периодических функций многих переменных тригонометрическими полиномами”, *ДАН СССР*, **132:5** (1960), 247–250; англ. пер.: K. I. Babenko, “Approximation of periodic functions of many variables by trigonometric polynomials”, *Sov. Math. Dokl.*, **1** (1960), 513–516.
10. Б. С. Митягин, “Приближение функций в пространствах L^p и C на торе”, *Матем. сб.*, **58(100):4** (1962), 397–414.
11. Н. С. Никольская, “Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике L_p ”, *ДАН СССР*, **208:4** (1973), 1282–1285; англ. пер.: N. S. Nikol'skaya, “Approximation of differentiable functions of several variables by Fourier sums in the L_p metric”, *Sov. Math. Dokl.*, **14** (1973), 262–266.
12. Э. М. Галеев, “Приближение некоторых классов периодических функций многих переменных суммами Фурье в метрике $\tilde{L}_p$ ”, *УМН*, **32:4** (1977), 251–252.
13. Э. М. Галеев, “Приближение суммами Фурье класса функций с несколькими ограниченными производными”, *Матем. заметки*, **23:2** (1978), 197–212; англ. пер.: É. M. Galeev, “Approximation by Fourier sums of classes of functions with several bounded derivatives”, *Math. Notes*, **23:2** (1978), 109–117.
14. В. Н. Темляков, “Поперечники некоторых классов функций нескольких переменных”, *ДАН СССР*, **267:2** (1982), 314–317; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Diameters of some classes of functions of several variables”, *Soviet Math. Dokl.*, **26:3** (1982), 619–622.

15. В. Н. Темляков, “О приближении периодических функций нескольких переменных с ограниченной смешанной разностью”, *ДАН СССР*, **253**:3 (1980), 544–548; англ. пер.: V.N. Temlyakov, “On the approximation of periodic functions of several variables with bounded mixed difference”, *Sov. Math. Dokl.*, **22** (1980), 131–135.
16. В. Н. Темляков, “Приближение функций с ограниченной смешанной разностью тригонометрическими полиномами и поперечники некоторых классов функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **46**:1 (1982), 171–186; англ. пер.: V.N. Temlyakov, “Approximation of functions with a bounded mixed difference by trigonometric polynomials, and the widths of some classes of functions”, *Math. USSR-Izv.*, **20**:1 (1983), 173–187.
17. Э. М. Галеев, “Поперечники по Колмогорову классов периодических функций многих переменных $\widetilde{W}_p^\alpha$ и $\widetilde{H}_p^\alpha$ в пространстве $\widetilde{L}_q$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **49**:5 (1985), 916–934; англ. пер.: È. M. Galeev, “Kolmogorov widths in the space $\widetilde{L}_q$ of the classes $\widetilde{W}_p^\alpha$ and $\widetilde{H}_p^\alpha$ of periodic functions of several variables”, *Math. USSR-Izv.*, **27**:2 (1986), 219–237.
18. В. М. Тихомиров, *Некоторые вопросы теории приближения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1976.
19. H. König, D. R. Lewis, P.-K. Lin, “Finite dimensional projection constants”, *Studia Math.*, **75** (1983), 341–358.
20. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, “Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи”, *УМН*, **23**:6 (1968), 51–116; англ. пер.: A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov, “Duality of convex functions and extremum problems”, *Russian Math. Surveys*, **23**:6 (1968), 53–124.
21. A. Pietsch, “s-numbers of operators in Banach spaces”, *Studia Math.*, **51** (1974), 201–223.
22. А. Б. Ходулев, “Замечание об александровских поперечниках конечномерных множеств”, *Функц. анализ и его прилож.*, **23**:2 (1989), 94–95; англ. пер.: A.B. Khodulev, “A remark on the Aleksandrov diameters of finite-dimensional sets”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:2 (1989), 165–167.
23. М. И. Стесин, “Александровские поперечники множеств и классов гладких функций”, *ДАН СССР*, **220** (1975), 1278–1281; англ. пер.: M.I. Stesin, “Aleksandrov diameters of finite-dimensional sets and classes of smooth functions”, *Sov. Math. Dokl.*, **16**:1 (1975), 252–256.
24. Динь Зунг, “Приближение классов гладких функций многих переменных”, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **10** (1984), 207–226; англ. пер.: Din’ Zung, “Approximation of classes of smooth functions of several variables”, *J. Soviet Math.*, **35** (1986), 2859–2875.

Е. М. Скориков (Е. М. Skorikov)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова,
 механико-математический факультет
 E-mail: skorikov_eugene@mail.ru

Поступило в редакцию
 18.05.2004