Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Вырождения кэлеровых
КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 2, 81–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 16:34:54

УДК 512.774.4+512.774.2+512.542+512.647.4

В. В. Никулин

Вырождения кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов. II

Доказывается основная гипотеза 7.1 статьи [1]. С помощью этого результата классифицируются вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: КЗ-поверхность, кэлерова поверхность, группа автоморфизмов, вырождение, особенности, решетка Пикара, целочисленная квадратичная форма.

DOI: 10.4213/im8455

Посвящается 75-летию В. П. Платонова

§ 1. Введение

В настоящей статье доказывается основная гипотеза 7.1 статьи [1] (см. ниже теорему 2.1). Далее результаты [1], теорема 2.1 и ее доказательство применяются к классификации вырождений кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов. Под классификацией мы понимаем перечисление компонент связности соответствующих модулей (см. теоремы 5.2, 7.1, 7.2).

Используются результаты статей [1]–[7], важные идеи Хашимото из [8], результаты Миранда, Моррисона [9], [10], Джэймса [11] и другие результаты.

Предварительный вариант настоящей работы был опубликован как препринт [12].

§ 2. Типы вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов и основная классификационная теорема 2.1

Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность (см., например, [13]–[17]), т. е. X – неособая комплексная компактная поверхность с тривиальным каноническим классом K_X и иррегулярностью $q(X)$, равной 0. Тогда $H^2(X, \mathbb{Z})$ с формой пересечения является четной унимодулярной решеткой L_{K3} сигнатуры $(3, 19)$. Прimitивная подрешетка $S_X = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ является *решеткой Пикара* поверхности X , порожденной первыми классами Черна всех линейных комплексных расслоений на X .

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

Пусть G – конечная симплектическая группа автоморфизмов поверхности X . Здесь “симплектическая” означает, что для любого $g \in G$ для ненулевой голоморфной 2-формы $\omega_X \in H^{2,0}(X) = \Omega^2[X] = \mathbb{C}\omega_X$ имеем $g^*(\omega_X) = \omega_X$. Для G -инвариантной подрешетки $M \subset H^2(X, \mathbb{Z})$ обозначим через $M^G = \{x \in M \mid G(x) = x\}$ неподвижную подрешетку решетки M и через $M_G = (M^G)^\perp_M$ коинвариантную подрешетку решетки M . В силу [3] коинвариантная решетка $S_G = H^2(X, \mathbb{Z})_G = (S_X)_G$ является решеткой типа Лича: она отрицательно определена, не имеет элементов с квадратом (-2) и G действует тривиально на дискриминантной группе $A_{S_G} = (S_G)^*/S_G$ и $(S_G)^G = \{0\}$. Для общей пары (X, G) решетка $S_G = S_X$. Необщая пара (X, G) может рассматриваться как вырождение кэлеровых КЗ-поверхностей с условием $S_G \subset S_X$ на решетку Пикара (в терминологии [3]). Размерность их модулей равна $20 - \text{rk } S_G$.

Пусть $E \subset X$ – неособая неприводимая рациональная кривая (т. е. $E \cong \mathbb{P}^1$). Эквивалентно, $\alpha = \text{cl}(E) \in S_X$, $\alpha^2 = -2$, α эффективен и α численно эффективен: $\alpha \cdot D \geq 0$ для каждой неприводимой кривой D на X такой, что $\text{cl}(D) \neq \alpha$.

Рассмотрим примитивную подрешетку $S = [S_G, G(\alpha)]_{\text{pr}} \subset S_X$ поверхности S_X , порожденную коинвариантной подрешеткой S_G и всеми классами орбиты $G(E)$. Напомним, что примитивная означает, что S_X/S не имеет кручения. Так как S_G не имеет элементов с квадратом (-2) , отсюда следует, что $\text{rk } S = \text{rk } S_G + 1$ и $S = [S_G, \alpha]_{\text{pr}} \subset S_X$.

Предположим, что решетка $S = [S_G, \alpha]_{\text{pr}}$ отрицательно определена. Тогда элементы $G(\alpha)$ дают базис системы корней $\Delta(S)$ всех элементов с квадратом (-2) в S . Все кривые $G(E)$ на X могут быть стянуты в особенности Дю Валя типов связанных компонент диаграммы Дынкина кривых $G(E)$. Группа G будет действовать на соответствующей особой КЗ-поверхности $\bar{X}$ с этими особенностями Дю Валя. Для общей тройки $(X, G, G(E))$ решетка Пикара $S_X = S$ и такая тройка могут рассматриваться как вырождение коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхности (X, G) с конечной симплектической группой автоморфизмов G . Действительно, размерность модулей кэлеровых КЗ-поверхностей с условием $S \subset S_X$ на решетку Пикара равна $20 - \text{rk } S = 20 - \text{rk } S_G - 1$.

В силу глобальной теоремы Торелли для КЗ-поверхностей [14], [15] основными инвариантами такого вырождения являются абстрактная группа G , которая эквивалентна классу изоморфизма коинвариантной решетки S_G , и тип вырождения, который эквивалентен классу изоморфизма диаграммы Дынкина базиса множества $G(\alpha)$ рациональных кривых.

Мы можем рассматривать только максимальные симплектические группы автоморфизмов G с той же коинвариантной решеткой S_G , т. е. $G = \text{Clos}(G)$. По глобальной теореме Торелли для КЗ-поверхностей это эквивалентно тому, что

$$G|S_G = \{g \in O(S_G) \mid g \text{ тождественно на } A_{S_G} = (S_G)^*/S_G\}.$$

Действительно, G и $\text{Clos}(G)$ имеют одну и ту же решетку S_G , орбиты $G(E)$ и $\text{Clos}(G)(E)$ и подрешетку $S \subset S_X$.

В работе [1] все возможные типы $G = \text{Clos}(G)$ и типы вырождений (т. е. диаграммы Дынкина орбит $G(E)$) были описаны. Они описаны и в нижеприведенной таблице 1. В таблице 1 инвариант $\mathbf{n}$ дает все типы возможных $G = \text{Clos}(G)$ и возможные типы диаграмм Дынкина $G(E)$ вырождений приведены в соответствующих строках ниже.

Теорема 6.1 в [1] показывает, что для фиксированного типа вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечной симплектической группой автоморфизмов, определяемого типом $\mathbf{n}$ абстрактной конечной симплектической группы автоморфизмов кэлеровой КЗ-поверхности и типом диаграммы Дынкина вырождения, дискриминантная группа $A_S = S^*/S$ соответствующей решетки S вырождения всегда одна и та же. Естественно предположить, что имеет место более сильное утверждение: класс изоморфизма решетки S однозначно определен. Но точные вычисления и рассуждения показывают, что это верно только с некоторыми очень немногими исключениями, указанными в нижеприведенной теореме.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – кэлерова КЗ-поверхность с $S_X < 0$. Пусть $G = \text{Aut}^0 X$ – группа симплектических автоморфизмов X (она всегда конечна) и $P(X)$ – множество классов неособых рациональных кривых на X . Пусть $S_G = ((S_X)^G)_{S_X}^\perp \subset S_X$ – коинвариантная подрешетка. Предположим, что S_X порождена S_G и $P(X)$ с точностью до конечного индекса и $\text{rk } S_X = \text{rk } S_G + 1$. Тогда класс изоморфизма решетки $S = S_X$ однозначно определяется типом G как абстрактной группы (эквивалентным $\mathbf{n}$) и типом диаграммы Дынкина множества $P(X)$. Все возможные типы G (эквивалентные инварианту $\mathbf{n}$) и диаграммы Дынкина $P(X)$ приведены в таблице 1 ниже.

Однако это верно, кроме следующих и только следующих двух случаев:

- (1) когда $\mathbf{n} = 34$ (эквивалентно $G \cong \mathfrak{S}_4$) и вырождение имеет тип $6\mathbb{A}_1$;
- (2) когда $\mathbf{n} = 10$ (эквивалентно $G \cong D_8$) и вырождение имеет тип $2\mathbb{A}_1$.

В каждом из этих двух случаев имеются ровно два класса изоморфизма решеток S . Они (и их роды) приведены в таблице 1 как вырождения $(6\mathbb{A}_1)_I$, $(6\mathbb{A}_1)_{II}$ для $\mathbf{n} = 34$ и $(2\mathbb{A}_1)_I$, $(2\mathbb{A}_1)_{II}$ для $\mathbf{n} = 10$.

Этот результат был сформулирован в виде гипотезы в [1, гипотеза 7.1]. Ниже мы приводим доказательство.

§ 3. Техника дискриминантных форм согласно [4]

Используются обозначения, определения и результаты о решетках (т.е. невырожденных целочисленных симметрических билинейных формах) из [4]. Ниже мы напоминаем основные определения и результаты из [4], которые используются в настоящей статье.

Пусть S – решетка, т.е. свободный $\mathbb{Z}$ -модуль конечного ранга с невырожденной симметрической билинейной формой $x \cdot y \in \mathbb{Z}$ для $x, y \in S$. Мы обозначаем $x^2 = x \cdot x$ для $x \in S$. Решетка S четна, если x^2 четно для любого $x \in S$. Для $0 \neq \lambda \in \mathbb{Q}$ через $S(\lambda)$ обозначается решетка с симметрической билинейной формой $\lambda x \cdot y$ для $x, y \in S$, если она целочисленна.

Через $\oplus$ обозначается ортогональная сумма решеток и квадратичных форм. Через kS обозначается ортогональная сумма k копий решетки S для $k \in \mathbb{Z}$ и $k \geq 0$ (в [4] эта решетка обозначалась через S^k). Мы используем аналогичные обозначения для конечных квадратичных, симметрических билинейных форм.

Для простого p через $\mathbb{Z}_p$ обозначается кольцо целых p -адических чисел и через $\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел.

Пусть S – решетка. Тогда имеем каноническое вложение $S \subset S^* = \text{Hom}(S, \mathbb{Z})$. Оно определяет (конечную) дискриминантную группу $A_S = S^*/S$ решетки S . Продолжая симметрическую билинейную форму с решетки S

на S^* , получаем невырожденную конечную симметрическую билинейную форму b_S на A_S со значениями в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ и конечную квадратичную форму q_S на A_S со значениями в $\mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$, если S четна. Они называются *дискриминантными формами решетки S* .

Через $l(A)$ обозначается минимальное число образующих конечной абелевой группы A и через $|A|$ – ее порядок. Для простого p через $q_{S_p} = q_{S \otimes \mathbb{Z}_p}$ обозначается p -компонента формы q_S (эквивалентно, дискриминантная квадратичная форма p -адической решетки $S \otimes \mathbb{Z}_p$).

Через $K(q_{S_p})$ обозначается p -адическая решетка ранга $l(A_{S_p})$ с дискриминантной формой q_{S_p} . Она единственна с точностью до изоморфизма для $p \neq 2$ и $p = 2$, если $q_{S_2} \not\cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$, где $q_\theta^{(2)}(2)$ обозначает конечную квадратичную форму на группе порядка 2 (см. обозначения ниже). Для $p = 2$ и $q_{S_2} \cong q_\theta^{(2)}(2) \oplus q'$ имеются ровно две решетки $K(q_{S_2})$; их определители отличаются на $5 \bmod (\mathbb{Z}_2^*)^2$ (см. [4, теорема 1.9.1]).

Через $\langle A \rangle$ обозначаем решетку, определяемую матрицей A . В частности, $K_\theta^{(p)}(p^k) = \langle \theta p^k \rangle$, $\theta \in \mathbb{Z}_p^*$, и $U^{(2)}(2^k) = \left\langle \begin{smallmatrix} 0 & 2^k \\ 2^k & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$, $V^{(2)}(2^k) = \left\langle \begin{smallmatrix} 2^{k+1} & 2^k \\ 2^k & 2^{k+1} \end{smallmatrix} \right\rangle$ – стандартные p -адические решетки ранга 1 и 2. В силу разложения Жордана (см., например, [18]) любая p -адическая решетка является их ортогональной суммой. Через $q_\theta^{(p)}(p^k)$ и $b_\theta^{(p)}(p^k)$ обозначаются дискриминантные квадратичные и билинейные формы соответственно решеток $K_\theta^{(p)}(p^k)$. Через $u_+(2^k)$, $u_-(2^k)$ и $v_+(2^k)$, $v_-(2^k)$ соответственно обозначаются дискриминантные квадратичные, билинейные формы решеток $U^{(2)}(2^k)$ и $V^{(2)}(2^k)$ соответственно.

Между этими формами имеют место следующие соотношения из [4, предложение 1.8.2]:

- (a) $2K_\theta^{(p)}(p^k) \cong 2K_{\theta'}^{(p)}(p^k)$, если $p \neq 2$;
- (b) $2U^{(2)}(2^k) \cong 2V^{(2)}(2^k)$;
- (c) $K_\theta^{(2)}(2^k) \oplus K_{\theta'}^{(2)}(2^k) \cong K_{5\theta}^{(2)}(2^k) \oplus K_{5\theta'}^{(2)}(2^k)$;
- (d) $2K_\theta^{(2)}(2^k) \oplus K_{\theta'}^{(2)}(2^k) \cong \begin{cases} V^{(2)}(2^k) \oplus K_{-5\theta'}^{(2)}(2^k), & \text{если } \theta' \equiv \theta \pmod{4}; \\ U^{(2)}(2^k) \oplus K_{-\theta'}^{(2)}(2^k), & \text{если } \theta' \equiv -\theta \pmod{4}; \end{cases}$
- (e) $V^{(2)}(2^k) \oplus K_\theta^{(2)}(2^{k+1}) \cong U^{(2)}(2^k) \oplus K_{5\theta}^{(2)}(2^{k+1})$;
- (f) $K_\theta^{(2)}(2^k) \oplus V^{(2)}(2^{k+1}) \cong K_{5\theta}^{(2)}(2^k) \oplus U^{(2)}(2^{k+1})$;
- (g) $K_\theta^{(2)}(2^k) \oplus K_{\theta'}^{(2)}(2^{k+1}) \cong K_{\theta+2\theta'}^{(2)}(2^k) \oplus K_{5(\theta'-2\theta)}^{(2)}(2^{k+1})$;
- (h) $K_\theta^{(2)}(2^k) \oplus K_{\theta'}^{(2)}(2^{k+2}) \cong K_{5\theta}^{(2)}(2^k) \oplus K_{5\theta'}^{(2)}(2^{k+2})$;
- (i) $q_\theta^{(2)}(2) \cong q_{5\theta}^{(2)}(2)$;
- (j) $b_\theta^{(2)}(2) \cong b_{\theta'}^{(2)}(2)$, $u_-^{(2)}(2) \cong v_-^{(2)}(2)$, $b_\theta^{(2)}(4) \cong b_{5\theta}^{(2)}(4)$;
- (к) соотношения между конечными квадратичными и билинейными формами, которые следуют из (a)–(h), если рассмотреть дискриминантные формы.

В силу [4] числа $(t_{(+)}, t_{(-)})$ положительных, отрицательных квадратов формы $S \otimes \mathbb{R}$ и дискриминантная квадратичная форма q_S определяют *род* четной решетки S , т. е. классы изоморфизма $S \otimes \mathbb{R}$ и $S \otimes \mathbb{Z}_p$ для всех простых p .

Если S – четная решетка, то сигнатура $\text{sign } S = t_{(+)} - t_{(-)}$ решетки S по модулю 8 (т.е. $t_{(+)} - t_{(-)} \bmod 8 \equiv \text{sign } q_S \bmod 8$) является инвариантом q_S . В частности, $\text{sign } S \equiv 0 \bmod 8$, если S унимодулярна и четна. Имеем (см. [4, предложение 1.11.2])

$$\text{sign } q_{\theta}^{(p)}(p^k) \equiv k^2(1-p) + 4k\eta \bmod 8, \quad \text{где } p \neq 2, \quad (-1)^{\eta} = \left(\frac{\theta}{p}\right); \quad (3.2)$$

$$\text{sign } q_{\theta}^{(2)}(2^k) \equiv \theta + 4\omega(\theta)k \bmod 8, \quad \text{где } \omega(\theta) \equiv \frac{\theta^2 - 1}{8} \bmod 2; \quad (3.3)$$

$$\text{sign } u_{+}^{(2)}(2^k) \equiv 0 \bmod 8, \quad \text{sign } v_{+}^{(2)}(2^k) \equiv 4k \bmod 8. \quad (3.4)$$

В частности,

$$\text{sign } q_{\theta}^{(2)}(4) \equiv \theta \bmod 8, \quad \text{sign } u_{+}^{(2)}(4) \equiv \text{sign } v_{+}^{(2)}(4) \equiv 0 \bmod 8. \quad (3.5)$$

Для нахождения рода решетки S рассмотрим разложение Жордана

$$S^{(p)} = S \otimes \mathbb{Z}_p = \bigoplus_{k \geq 0} S_k^{(p)}(p^k), \quad (3.6)$$

где $S_k^{(p)}$ – унимодулярные p -адические решетки. Тогда p -компонента q_{S_p} является ортогональной суммой дискриминантных квадратичных форм $S_k^{(p)}(p^k)$ для $k \geq 1$ и ненулевой $S_k^{(p)}$.

Для $p \neq 2$ в силу вышеприведенных соотношений (а)–(к)

$$S_k^{(p)} = (m_k - 1)K_1^{(p)}(1) \oplus K_{\theta_k}^{(p)}(1), \quad (3.7)$$

где $m_k = \text{rk } S_k^{(p)}$ (или m_k дает размер $S_k^{(p)}$) и $\theta_k = \det(S_k^{(p)}) \in \mathbb{Z}_p^*/(\mathbb{Z}_p^*)^2$. Таким образом, $S_k^{(p)}$ определяется инвариантами $m_k = \text{rk } S_k^{(p)}$ и символом Кронекера $(\frac{\theta_k}{p})$, где $\theta_k = \det S_k^{(p)}$. Тогда

$$q_{S_k^{(p)}(p^k)} = (m_k - 1)q_1^{(p)}(p^k) \oplus q_{\theta_k}^{(p)}(p^k).$$

Как в [18], мы кратко обозначаем такую форму символом $(p^k)^{\pm m_k}$, где $\pm = (\frac{\theta_k}{p})$.

Для $p = 2$ решетка $S_k^{(2)}$ имеет тип II, если она является ортогональной суммой решеток $U^{(2)}(1)$ и $V^{(2)}(1)$, и тип I в противном случае. С точностью до изоморфизма $S_k^{(2)}$ определяется типом, размером $\text{rk } S_k^{(2)}$, $\det = \det S_k^{(2)} \in \mathbb{Z}_2^*/(\pm)(\mathbb{Z}_2^*)^2 = \{1, 5\} \bmod (\pm)(\mathbb{Z}_2^*)^2$ и $\text{sign} \bmod 8 \equiv \text{sign } q_{S_k^{(2)}(4)} \bmod 8$ (см. (3.5) для вычисления $\text{sign} \bmod 8$). Кратко, как в [18], решетка $S_k^{(2)}(2^k)$ обозначается как $(2^k)_{\text{II}}^{(-1)^{\delta \cdot s}}$ для $S_k^{(2)}$ типа II размера, равного s , $\det = 5^{\delta} \bmod (\pm)(\mathbb{Z}_2^*)^2$, и как $(2^k)_{\text{sign} \bmod 8}^{(-1)^{\delta \cdot s}}$ для $S_k^{(2)}$ типа I размера, равного s , $\det = 5^{\delta} \bmod (\pm)(\mathbb{Z}_2^*)^2$ и с $\text{sign} \bmod 8$. В разложении Жордана (3.6) эти компоненты разделяются запятой вместо $\oplus$. Те же самые обозначения используются для соответствующих дискриминантных квадратичных форм.

В § 8 мы даем программу 8, которая использует эти инварианты для вычисления рода решетки, заданной целочисленной симметрической матрицей l .

Следующий факт из [4] будет для нас очень важен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [4, предложение 1.6.1]. *Примитивное вложение четной решетки M в унимодулярные четные решетки такое, что ортогональное дополнение к M изоморфно решетке K , определяется изоморфизмом $\gamma: A_M \cong A_K$ таким, что $q_K \circ \gamma = -q_M$. Два таких изоморфизма γ, γ' определяют изоморфные примитивные вложения, если и только если они сопряжены автоморфизмом решетки K , и они определяют изоморфные примитивные подрешетки, если и только если $\gamma \circ \bar{\phi} = \bar{\psi} \circ \gamma'$ для некоторых $\phi \in O(M), \psi \in O(K)$.*

§ 4. Доказательство теоремы 2.1

Напомним, что решетки Нимейера – это отрицательно определенные четные унимодулярные решетки ранга 24. С точностью до изоморфизма имеется 24 таких решетки $N = N_j, j = 1, 2, \dots, 24$, классифицированных Нимейером. Они характеризуются их подрешетками корней $N^{(2)}$, порожденными всеми элементами с квадратом (-2) , называемыми *корнями*. Далее, $\Delta(N)$ – множество всех корней решетки N . Приведем следующий список решеток Нимейера N_j , где j указывается в скобках:

$$\begin{aligned} N^{(2)} &= [\Delta(N)] \\ &= (1) D_{24}, (2) D_{16} \oplus E_8, (3) 3E_8, (4) A_{24}, (5) 2D_{12}, (6) A_{17} \oplus E_7, \\ &\quad (7) D_{10} \oplus 2E_7, (8) A_{15} \oplus D_9, (9) 3D_8, (10) 2A_{12}, (11) A_{11} \oplus D_7 \oplus E_6, \\ &\quad (12) 4E_6, (13) 2A_9 \oplus D_6, (14) 4D_6, (15) 3A_8, (16) 2A_7 \oplus 2D_5, (17) 4A_6, \\ &\quad (18) 4A_5 \oplus D_4, (19) 6D_4, (20) 6A_4, (21) 8A_3, (22) 12A_2, (23) 24A_1, \end{aligned}$$

что дает 23 решетки Нимейера N_j . Последней является решетка Лича (24) с $N^{(2)} = \{0\}$, которая не имеет корней. Далее $N(R)$ обозначает решетку Нимейера с системой корней R . Мы фиксируем базис $P(N)$ системы корней $\Delta(N)$ решетки N . Через $A(N) \subset O(N)$ обозначается подгруппа группы автоморфизмов $O(N)$ решетки N , переставляющих базис $P(N)$.

Рассмотрим решетку S одного из типов (задаваемым $\mathbf{n}$) группы G и одного из типов вырождений, задаваемым диаграммой Дынкина R . Все такие варианты перечислены в таблице 1.

Рассмотрим все возможные отметки $S \subset N_j$ решетками Нимейера. Это означает, что $S \subset N_j$ – примитивная подрешетка, т. е. N_j/S не имеет кручения; $P(S) \subset P(N_j)$.

В силу [4, замечание 1.14.7]

$$G = \{g \in A(N_j) \mid g|S_{N_j}^\perp \text{ тождественно}\} \subset A(N_j).$$

Отсюда следует, что можно найти все такие подрешетки S следующим образом.

Найдем все решетки Нимейера N_j , подгруппы $G \subset A(N_j)$ (с точностью до сопряженности группой $A(N_j)$), элементы $\alpha \in P(N_j)$ такие, что орбита $G(\alpha)$ имеет диаграмму Дынкина R , и примитивная подрешетка $S = [(N_j)_G, \alpha]_{\text{pr}} \subset N_j$ имеет примитивное вложение в L_{K3} . Тогда $S, G|S$ и $G(\alpha) \subset P(S)$ соответствует вырождению коразмерности 1 некоторой кэлеровой КЗ-поверхности в силу глобальной теоремы Торелли и эпиморфности отображения периодов для кэлеровых КЗ-поверхностей [14]–[17], [19].

Очевидно, класс изоморфизма S не меняется, если G заменяется сопряжением в $A(N_j)$, элемент α заменяется на $h(\alpha)$ для $h \in \text{Normalizer}(A(N_j), G)$.

Все такие тройки (N_j, G, α) (с точностью до изоморфизма) указаны в столбцах нижеприведенной таблицы 2, используя результаты [1], [6] и [7] и программу GAP [20]. В таблице 2 для всех возможных $\mathbf{n}$ и всех типов R (диаграммы Дынкина) вырождений первая строка дает j , вторая строка дает группу $G = H_{n,t} \subset A(N_j)$ (в обозначениях [1], [6] и [7]). Третья дает $\alpha \in P(N_j)$, дающие различные орбиты $G(\alpha) \subset P(N_j)$ с диаграммой Дынкина R , но эти орбиты сопряжены группой $\text{Normalizer}(A(N_j), G = H_{n,t})$. Таким образом, $S = [(N_j)_{H_{n,t}}, \alpha]_{\text{pr}} \subset N_j$ с точностью до изоморфизма. Четвертая строка дает диаграмму Дынкина системы корней $(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$ элементов с квадратом (-2) в $S_{N_j}^\perp$. Пятая строка (если она требуется) дает число элементов с квадратом (-4) в $S_{N_j}^\perp$.

В нижеприведенной таблице 1 мы вычисляем род решетки S для всех возможных троек (N_j, G, α) (эквивалентно, столбцов таблицы 2), используя инварианты и соотношения (3.1) § 3. Мы используем программы 7 и 8 из § 8. Род определяется типом $\mathbf{n}$ и R для всех вырождений, исключая два случая. Для $\mathbf{n} = 10$, $R = 2A_1$ и $\mathbf{n} = 34$, $R = 6A_1$ имеются две возможности для рода, отмечаемые как $(2A_1)_I$, $(2A_1)_{II}$ и $(6A_1)_I$, $(6A_1)_{II}$ соответственно. Здесь I и II указывают тип соответствующих 2-адических решеток. В таблице 1 также указывается род решеток S_G , который был вычислен Хашимото в [8] (полезно сравнить роды решеток S_G и S).

Рассмотрим случай $(\mathbf{n}, R)$, который отличен от $(4, A_1)$ и $(16, A_1)$. В таблице 2 один из столбцов этого случая $(\mathbf{n}, R)$ сверху отмечен знаком *. Обозначим решетку S для этого случая через $\mathbf{S}$. Ортогональное дополнение $\mathbf{S}_{N_j}^\perp$ этого случая имеет систему корней $(\mathbf{S}_{N_j}^\perp)^{(2)}$ элементов с квадратом (-2) , которая отлична от других столбцов в этом случае, или оно имеет другое число элементов с квадратом (-4) (последнее имеет место для $(10, (2A_1)_{II})$, $(34, (6A_1)_{II})$ и $(51, 8A_1)$). Так как роды решеток S для всех других столбцов и род $\mathbf{S}$ совпадают, по предложению 3.1 существует изоморфизм $\gamma: A_S \cong A_{\mathbf{S}_{N_j}^\perp}$ такой, что $q_S \circ \gamma = -q_{\mathbf{S}_{N_j}^\perp}$. По предложению 3.1 это определяет примитивное вложение $S \subset N$ в одну из решеток Нимейера N такое, что $S_N^\perp = \mathbf{S}_{N_j}^\perp$. Изменяя это вложение с помощью элемента $w \in W(N)$ группы отражений $W(N)$ решетки N , если необходимо, мы можем предположить, что $P(S) \subset P(N)$ и $S \subset N$ изоморфны одному из столбцов для случая $(\mathbf{n}, R)$. Так как $S_N^\perp \cong \mathbf{S}_{N_j}^\perp$ и столбец с таким свойством единственен, получаем, что $S \cong \mathbf{S}$. Таким образом, решетка S единственна с точностью до изоморфизма.

Для случаев $(\mathbf{n} = 4, A_1)$ и $(\mathbf{n} = 16, A_1)$ (а также и всех других случаев $(\mathbf{n}, A_1)$) имеем, что $K = S_G \oplus \langle -2 \rangle \subset S$ является надрешеткой конечного индекса по определению. Дискриминантные группы решеток S_G и их порядки известны (например, см. [8]; они приведены также в таблице 1). Дискриминантные группы решеток S и их порядки вычислены в [1] (они также имеются в таблице 1). Отсюда следует, что порядки дискриминантных групп решеток K и S одинаковы. Отсюда следует, что $S = K = S_G \oplus \langle -2 \rangle$ единственна с точностью до изоморфизма, так как решетка S_G единственна с точностью до изоморфизма в силу [8].

Это завершает доказательство теоремы 2.1.

Таблица 1. Роды вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов $G = \text{Clos}(G)$

$\mathbf{n}$	$ G $	i	G	$\text{rk } S_G$	q_{S_G}	Deg	$\text{rk } S$	q_S
1	2	1	C_2	8	2_{II}^{+8}	$\mathbb{A}_1$	9	2_7^{+9}
						$2\mathbb{A}_1$	9	$2_{\text{II}}^{-6}, 4_3^{-1}$
2	3	1	C_3	12	3^{+6}	$\mathbb{A}_1$	13	$2_3^{-1}, 3^{+6}$
						$3\mathbb{A}_1$	13	$2_1^{+1}, 3^{-5}$
3	4	2	C_2^2	12	$2_{\text{II}}^{-6}, 4_{\text{II}}^{-2}$	$\mathbb{A}_1$	13	$2_3^{+7}, 4_{\text{II}}^{+2}$
						$2\mathbb{A}_1$	13	$2_{\text{II}}^{-4}, 4_7^{-3}$
						$4\mathbb{A}_1$	13	$2_{\text{II}}^{-6}, 8_3^{-1}$
4	4	1	C_4	14	$2_2^{+2}, 4_{\text{II}}^{+4}$	$\mathbb{A}_1$	15	$2_5^{-3}, 4_{\text{II}}^{+4}$
						$2\mathbb{A}_1$	15	4_1^{-5}
						$4\mathbb{A}_1$	15	$2_2^{+2}, 4_{\text{II}}^{+2}, 8_7^{+1}$
						$\mathbb{A}_2$	15	$2_1^{+1}, 4_{\text{II}}^{-4}$
6	6	1	D_6	14	$2_{\text{II}}^{-2}, 3^{+5}$	$\mathbb{A}_1$	15	$2_7^{-3}, 3^{+5}$
						$2\mathbb{A}_1$	15	$4_3^{-1}, 3^{+5}$
						$3\mathbb{A}_1$	15	$2_1^{-3}, 3^{-4}$
						$6\mathbb{A}_1$	15	$4_1^{+1}, 3^{+4}$
9	8	5	C_2^3	14	$2_{\text{II}}^{+6}, 4_2^{+2}$	$2\mathbb{A}_1$	15	$2_{\text{II}}^{-4}, 4_5^{-3}$
						$4\mathbb{A}_1$	15	$2_{\text{II}}^{+6}, 8_1^{+1}$
						$8\mathbb{A}_1$	15	$2_{\text{II}}^{+6}, 4_1^{+1}$
10	8	3	D_8	15	4_1^{+5}	$\mathbb{A}_1$	16	$2_1^{+1}, 4_7^{+5}$
						$(2\mathbb{A}_1)_\text{I}$	16	$2_6^{-2}, 4_6^{-4}$
						$(2\mathbb{A}_1)_\text{II}$	16	$2_{\text{II}}^{+2}, 4_{\text{II}}^{+4}$
						$4\mathbb{A}_1$	16	$4_7^{+3}, 8_1^{+1}$
						$8\mathbb{A}_1$	16	4_0^{+4}
						$2\mathbb{A}_2$	16	4_{II}^{+4}
12	8	4	Q_8	17	$2_7^{-3}, 8_{\text{II}}^{-2}$	$8\mathbb{A}_1$	18	$2_7^{-3}, 16_3^{-1}$
						$\mathbb{A}_2$	18	$2_6^{-2}, 8_{\text{II}}^{-2}$
16	10	1	D_{10}	16	5^{+4}	$\mathbb{A}_1$	17	$2_7^{+1}, 5^{+4}$
						$5\mathbb{A}_1$	17	$2_7^{+1}, 5^{-3}$
17	12	3	$\mathfrak{A}_4$	16	$2_{\text{II}}^{-2}, 4_{\text{II}}^{-2}, 3^{+2}$	$\mathbb{A}_1$	17	$2_7^{-3}, 4_{\text{II}}^{+2}, 3^{+2}$
						$3\mathbb{A}_1$	17	$2_1^{-3}, 4_{\text{II}}^{+2}, 3^{-1}$
						$4\mathbb{A}_1$	17	$2_{\text{II}}^{-2}, 8_3^{-1}, 3^{+2}$
						$6\mathbb{A}_1$	17	$4_1^{-3}, 3^{+1}$
						$12\mathbb{A}_1$	17	$2_{\text{II}}^{-2}, 8_1^{+1}, 3^{-1}$

Таблица 1 (продолжение)

18	12	4	D_{12}	16	$2_{II}^{+4}, 3^{+4}$	A_1	17	$2_7^{+5}, 3^{+4}$
						$2A_1$	17	$2_{II}^{+2}, 4_7^{+1}, 3^{+4}$
						$3A_1$	17	$2_5^{-5}, 3^{-3}$
						$6A_1$	17	$2_{II}^{-2}, 4_1^{+1}, 3^{+3}$
21	16	14	C_2^4	15	$2_{II}^{+6}, 8_I^{+1}$	$4A_1$	16	$2_{II}^{+4}, 4_{II}^{+2}$
						$16A_1$	16	2_{II}^{+6}
22	16	11	$C_2 \times D_8$	16	$2_{II}^{+2}, 4_0^{+4}$	$2A_1$	17	4_7^{+5}
						$4A_1$	17	$2_{II}^{+2}, 4_0^{+2}, 8_7^{+1}$
						$8A_1$	17	$2_{II}^{+2}, 4_7^{+3}$
26	16	8	SD_{16}	18	$2_7^{+1}, 4_7^{+1}, 8_{II}^{+2}$	$8A_1$	19	$2_1^{+1}, 4_1^{+1}, 16_3^{-1}$
						$2A_2$	19	$2_5^{-1}, 8_{II}^{-2}$
30	18	4	$\mathfrak{A}_{3,3}$	16	$3^{+4}, 9^{-1}$	$3A_1$	17	$2_5^{-1}, 3^{-3}, 9^{-1}$
						$9A_1$	17	$2_3^{-1}, 3^{+4}$
32	20	3	$\text{Hol}(C_5)$	18	$2_6^{-2}, 5^{+3}$	$2A_1$	19	$4_1^{+1}, 5^{+3}$
						$5A_1$	19	$2_1^{+3}, 5^{-2}$
						$10A_1$	19	$4_5^{-1}, 5^{+2}$
						$5A_2$	19	$2_5^{-1}, 5^{-2}$
33	21	1	$C_7 \rtimes C_3$	18	7^{+3}	$7A_1$	19	$2_1^{+1}, 7^{+2}$
34	24	12	$\mathfrak{S}_4$	17	$4_3^{+3}, 3^{+2}$	A_1	18	$2_5^{-1}, 4_1^{+3}, 3^{+2}$
						$2A_1$	18	$2_2^{+2}, 4_{II}^{+2}, 3^{+2}$
						$3A_1$	18	$2_7^{+1}, 4_5^{-3}, 3^{-1}$
						$4A_1$	18	$4_3^{-1}, 8_3^{-1}, 3^{+2}$
						$(6A_1)_I$	18	$2_4^{-2}, 4_0^{+2}, 3^{+1}$
						$(6A_1)_{II}$	18	$2_{II}^{+2}, 4_{II}^{-2}, 3^{+1}$
						$8A_1$	18	$4_2^{+2}, 3^{+2}$
						$12A_1$	18	$4_5^{-1}, 8_7^{+1}, 3^{-1}$
						$6A_2$	18	$4_{II}^{-2}, 3^{+1}$
39	32	27	2^4C_2	17	$2_{II}^{+2}, 4_0^{+2}, 8_7^{+1}$	$4A_1$	18	4_6^{+4}
						$8A_1$	18	$2_{II}^{+2}, 4_7^{+1}, 8_7^{+1}$
						$16A_1$	18	$2_{II}^{+2}, 4_6^{+2}$
40	32	49	$Q_8 * Q_8$	17	4_7^{+5}	$8A_1$	18	4_6^{+4}
46	36	9	3^2C_4	18	$2_6^{-2}, 3^{+2}, 9^{-1}$	$6A_1$	19	$4_7^{+1}, 3^{+1}, 9^{-1}$
						$9A_1$	19	$2_5^{-3}, 3^{+2}$
						$9A_2$	19	$2_5^{-1}, 3^{+2}$
48	36	10	$\mathfrak{S}_{3,3}$	18	$2_{II}^{-2}, 3^{+3}, 9^{-1}$	$3A_1$	19	$2_5^{+3}, 3^{-2}, 9^{-1}$

Таблица 1 (продолжение)

						$6A_1$	19	$4_1^{+1}, 3^{+2}, 9^{-1}$
						$9A_1$	19	$2_7^{-3}, 3^{+3}$
49	48	50	2^4C_3	17	$2_{II}^{-4}, 8_1^{+1}, 3^{-1}$	$4A_1$	18	$2_{II}^{-2}, 4_{II}^{+2}, 3^{-1}$
						$12A_1$	18	$2_{II}^{-2}, 4_2^{-2}$
						$16A_1$	18	$2_{II}^{-4}, 3^{-1}$
51	48	48	$C_2 \times \mathfrak{S}_4$	18	$2_{II}^{+2}, 4_2^{+2}, 3^{+2}$	$2A_1$	19	$4_1^{+3}, 3^{+2}$
						$4A_1$	19	$2_{II}^{+2}, 8_1^{+1}, 3^{+2}$
						$6A_1$	19	$4_7^{-3}, 3^{+1}$
						$8A_1$	19	$2_{II}^{-2}, 4_5^{-1}, 3^{+2}$
						$12A_1$	19	$2_{II}^{-2}, 8_7^{+1}, 3^{-1}$
55	60	5	$\mathfrak{A}_5$	18	$2_{II}^{-2}, 3^{+1}, 5^{-2}$	A_1	19	$2_7^{-3}, 3^{+1}, 5^{-2}$
						$5A_1$	19	$2_3^{+3}, 3^{+1}, 5^{+1}$
						$6A_1$	19	$4_1^{+1}, 5^{-2}$
						$10A_1$	19	$4_7^{+1}, 3^{+1}, 5^{-1}$
						$15A_1$	19	$2_5^{+3}, 5^{-1}$
56	64	138	$\Gamma_{25}a_1$	18	$4_5^{+3}, 8_1^{+1}$	$8A_1$	19	$4_4^{-2}, 8_5^{-1}$
						$16A_1$	19	4_5^{+3}
61	72	43	$\mathfrak{A}_{4,3}$	18	$4_{II}^{-2}, 3^{-3}$	$3A_1$	19	$2_5^{-1}, 4_{II}^{+2}, 3^{+2}$
						$12A_1$	19	$8_1^{+1}, 3^{+2}$
65	96	227	2^4D_6	18	$2_{II}^{-2}, 4_7^{+1}, 8_1^{+1}, 3^{-1}$	$4A_1$	19	$4_3^{-3}, 3^{-1}$
						$8A_1$	19	$2_{II}^{-2}, 8_7^{+1}, 3^{-1}$
						$12A_1$	19	4_5^{+3}
						$16A_1$	19	$2_{II}^{+2}, 4_3^{-1}, 3^{-1}$
75	192	1023	$4^2\mathfrak{A}_4$	18	$2_{II}^{-2}, 8_6^{-2}$	$16A_1$	19	$2_{II}^{-2}, 8_5^{-1}$

Таблица 2. Решетки $S_{N_j}^\perp$ для отметок решетками Нимейера N_j $\mathbf{n} = 1$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	3	3	3	3	3	3	3	3	6	6
H	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{5,3}$	$\alpha_{6,3}$	$\alpha_{7,3}$	$\alpha_{8,3}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	E_7	E_7	E_7	E_7	E_7	E_7	E_7	E_7	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,2}$	$\alpha_{6,2}$	$\alpha_{7,2}$	$\alpha_{9,1}$	$\alpha_{1,1}$				
$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$8A_1 \oplus E_7$	$D_7 \oplus A_1$		

7	7	7	7	7	7	7	8
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,1}$	$\alpha_{7,1}$	$\alpha_{8,1}$	$\alpha_{1,2}$
$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$D_7 \oplus A_1$	$9A_1 \oplus D_6$

8	8	8	8	8	8	8
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,2}$	$\alpha_{6,2}$	$\alpha_{7,2}$	$\alpha_{8,1}$
$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$7A_1 \oplus D_8$

9	9	9	9	9	9	9	9
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{5,3}$	$\alpha_{6,3}$	$\alpha_{7,3}$	$\alpha_{8,3}$
$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$	$A_1 \oplus D_6$

11	11	11	11	11	11
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{6,1}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,2}$
$5A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$	$7A_1 \oplus 2D_4$	$7A_1 \oplus 2D_4$	$7A_1 \oplus 2D_4$	$7A_1 \oplus 2D_4$	$7A_1 \oplus 2D_4$

11	11	12	12	12	12
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$
$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}, \alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$
$9A_1 \oplus D_6$	$9A_1 \oplus D_6$	$3A_1 \oplus 3D_4$	$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus E_6$	$3A_1 \oplus E_6$

12	12	12	12	13	13	13
$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$
$A_5 \oplus D_4$	$A_5 \oplus D_4$	$A_5 \oplus D_4$	$A_5 \oplus D_4$	$9A_1 \oplus D_6$	$11A_1 \oplus D_4$	$11A_1 \oplus D_4$

13	13	13	14	14	14
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{5,3}, \alpha_{6,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$
$11A_1 \oplus D_4$	$11A_1 \oplus D_4$	$11A_1 \oplus D_4$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_5$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_5$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_5$

14	15	15	15	15	16	16	16
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{8,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{7,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{7,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}$
$A_1 \oplus A_3 \oplus D_5$	A_6	A_6	A_6	A_6	$4A_1 \oplus A_5$	$4A_1 \oplus A_5$	$4A_1 \oplus A_5$

16	16	16	16	16	16	16
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,3}$
$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,3}$
$4A_1 \oplus A_5$	$3A_1 \oplus A_7$	$7A_1 \oplus 2D_4$	$11A_1 \oplus D_4$	$11A_1 \oplus D_4$	$11A_1 \oplus D_4$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_4$

16	16	16	16	16	16
$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$
$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{3,4}$
$A_1 \oplus A_3 \oplus D_4$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_4$	$A_1 \oplus A_3 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_5$	$3A_1 \oplus D_5$	$3A_1 \oplus D_5$

18	18	18	18	18	18
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{4,5}$
$3A_1 \oplus 2A_3$	$3A_1 \oplus 2A_3$	$3A_1 \oplus 2A_3$	$2A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$	$4A_1 \oplus A_5$	$4A_1 \oplus A_5$

18	18	18	19	19
$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}$	$\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}, \alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}$
$11A_1 \oplus D_4$	$15A_1$	$15A_1$	$A_1 \oplus 3A_3$	$A_1 \oplus 3A_3$

19	19	20	20
$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$
$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_4$	$A_2 \oplus A_4$	$A_2 \oplus A_4$

21	21	21	21
$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$
$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}, \alpha_{2,7}, \alpha_{2,8}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}$
$15A_1$	$5A_1 \oplus A_3$	$5A_1 \oplus A_3$	$3A_1 \oplus 2A_3$

22	23 *
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{1,11}, \alpha_{2,11}$	$\alpha_{1,4}, \alpha_{8,8}, \alpha_{12,12}, \alpha_{15,15}, \alpha_{17,17}, \alpha_{18,18}, \alpha_{21,21}$
$3A_2$	$7A_1$

$\mathfrak{n} = 1$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	3	3	3	3	3	3	3	3	6	6
H	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,1}$	$\alpha_{7,1}$	$\alpha_{8,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	E_8	E_8	E_8	E_8	E_8	E_8	E_8	E_8	$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$

6	6	6	6	6	6	7	7
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,1}$	$\alpha_{7,1}$	$\alpha_{8,1}$	$\alpha_{9,1}$	$\alpha_{1,2}$
$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$	$7A_1 \oplus E_7$	D_8	D_9

7	7	7	7	7	8	8	8	8
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,2}$	$\alpha_{6,2}$	$\alpha_{7,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$
D_9	D_9	D_9	D_9	D_9	D_9	$6A_1 \oplus D_8$	$6A_1 \oplus D_8$	$6A_1 \oplus D_8$

8	8	8	8	9	9	9	9	9	9
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,1}$	$\alpha_{7,1}$	$\alpha_{8,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,1}$
$6A_1 \oplus D_8$	$6A_1 \oplus D_8$	$6A_1 \oplus D_8$	$8A_1 \oplus D_7$	D_8	D_8	D_8	D_8	D_8	D_8

9	9	11	11	11	11
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{7,1}$	$\alpha_{8,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$
D_8	D_8	$4A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$	$4A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$	$4A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$	$4A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$

11	11	11	11	12
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{6,2}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$
$4A_1 \oplus D_4 \oplus D_6$	$6A_1 \oplus D_4 \oplus D_5$	$6A_1 \oplus A_3 \oplus D_6$	$6A_1 \oplus A_3 \oplus D_6$	$A_3 \oplus 3D_4$

12	12	12	12	12	12	12
$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$
$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}, \alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{6,3}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}, \alpha_{5,3}$	$\alpha_{4,3}$
$A_3 \oplus 3D_4$	$A_3 \oplus E_6$	$D_4 \oplus E_6$	$A_3 \oplus D_6$	$D_4 \oplus E_6$	$D_4 \oplus E_6$	$D_4 \oplus E_6$

13	13	13	13	14	14	14	14	14
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,1}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$
$8A_1 \oplus D_6$	$8A_1 \oplus D_6$	$8A_1 \oplus D_6$	$8A_1 \oplus D_6$	$D_4 \oplus D_5$	$2D_5$	$2D_5$	$2D_5$	$2D_5$

14	15	15	15	15	16	16	16
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{5,3}, \alpha_{6,3}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{8,2}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{7,2}$	$\alpha_{3,2}, \alpha_{6,2}$	$\alpha_{4,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}$
$2D_5$	A_8	A_8	A_8	A_8	$2A_1 \oplus A_7$	$2A_1 \oplus A_7$	$2A_1 \oplus A_7$

16	16	16	16	16	16	16
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$
$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$
$4A_1 \oplus A_7$	$4A_1 \oplus A_7$	$4A_1 \oplus A_7$	$4A_1 \oplus A_7$	$6A_1 \oplus 2D_4$	$6A_1 \oplus 2D_4$	$6A_1 \oplus 2D_4$

16	16	16	16	16	16	18
$H_{1,2}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,3}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{7,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{4,4}$	$\alpha_{1,2}$
$8A_1 \oplus A_3 \oplus D_4$	$D_4 \oplus D_5$	$D_4 \oplus D_5$	$D_4 \oplus D_5$	$D_4 \oplus D_5$	$A_3 \oplus D_5$	$A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$

18	18	18	18	18
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{5,3}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,5}$
$A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$	$3A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$	$3A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$	$3A_1 \oplus A_3 \oplus A_5$	$5A_1 \oplus A_5$

18	18	19	19	19
$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$
$10A_1 \oplus D_4$	$10A_1 \oplus D_4$	$4A_3$	$4A_3$	$2A_1 \oplus 3A_3$

19	19	20	20
$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}$
$2D_4$	$2D_4$	$2A_4$	$2A_4$

21	21	21	21
$H_{1,1}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$	$H_{1,2}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{1,8}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}$
$14A_1$	$2A_1 \oplus 2A_3$	$4A_1 \oplus 2A_3$	$4A_1 \oplus 2A_3$

22	23 *
$H_{1,1}$	$H_{1,1}$
$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}, \alpha_{1,9}, \alpha_{2,9}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{5,6}, \alpha_{7,10}, \alpha_{11}, \alpha_{14}$
$4A_2$	$8A_1$

$\mathbf{n} = 2$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	12	12	12	12	14	14	14	14
H	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_5	A_5	A_5	A_5	$A_1 \oplus D_4$	$A_1 \oplus D_4$	$A_1 \oplus D_4$	$A_1 \oplus D_4$

14	17	17	17	18	18	18	18
$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
$\alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,5}$
$A_1 \oplus D_4$	A_4	A_4	A_4	$A_2 \oplus A_3$	$A_2 \oplus A_3$	$A_2 \oplus A_3$	A_5

19	19	19	19
$H_{2,1}$	$H_{2,2}$	$H_{2,2}$	$H_{2,2}$
$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,4}$
$5A_2$	$A_2 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus 2A_2$	$3A_1 \oplus 2A_2$

21	21	22	23 *
$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,8}, \alpha_{2,8}, \alpha_{1,10}, \alpha_{2,10}$	$\alpha_{3,4}, \alpha_{14}, \alpha_{17}, \alpha_{21}, \alpha_{24}$
$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$2A_2$	$5A_1$

$\mathbf{n} = 2$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	12	12	12	12	14	14	14	14	14
H	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
орбита	$\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{5,2}, \alpha_{6,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	E_6	E_6	E_6	E_6	D_6	D_6	D_6	D_6	D_6

17	17	17	18	18	18	18
$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
$\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{3,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,5}$
A_6	A_6	A_6	$A_2 \oplus A_5$	$A_2 \oplus A_5$	$A_2 \oplus A_5$	$A_1 \oplus A_5$

19	19	19	19
$H_{2,1}$	$H_{2,2}$	$H_{2,2}$	$H_{2,2}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,5}$
$A_1 \oplus 5A_2$	$2A_2 \oplus D_4$	$2A_2 \oplus D_4$	$A_1 \oplus A_2 \oplus D_4$

21	21	22	23 *
$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$	$H_{2,1}$
$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{5,6}, \alpha_{12}, \alpha_{15}$
$2A_3$	$2A_3$	$3A_2$	$6A_1$

$\mathbf{n} = 3$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	12	12	16	16	16	16	18
H	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,1}$
орбита	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{3,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_4$	$7A_1$	$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_4$	$5A_1 \oplus A_3$

18	18	19	19	19	19
$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$
$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{4,5}$	$\alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}$	$\alpha_{4,5}, \alpha_{4,6}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$
$7A_1$	$7A_1$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1 \oplus D_4$	$3A_1 \oplus D_4$

21	21	21	21	21	21	21
$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,3}$	$H_{3,3}$	$H_{3,4}$
$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$
$7A_1$	$7A_1$	$7A_1$	$5A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1$

22 *	23	23
$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{6,10}, \alpha_{15}, \alpha_{17}, \alpha_{21}, \alpha_{24}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{6,21}$
A_2	$7A_1$	$3A_1$

$\mathbf{n} = 3$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	12	12	12	12	16	16	16	16	16
H	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_3 \oplus D_4$	$A_3 \oplus D_4$	$2D_4$	$2D_4$	$6A_1$	$6A_1$	$6A_1$	$8A_1$	$8A_1$

16	16	16	18	18	18 *	18	19	19
$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$
$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{4,3}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}$	$\alpha_{4,1}, \alpha_{4,3}$
$8A_1$	$2D_4$	$A_3 \oplus D_4$	$4A_1 \oplus A_3$	$4A_1 \oplus A_3$	$6A_1 \oplus A_3$	$8A_1$	$2A_3$	$2A_3$

19	19				19
$H_{3,1}$	$H_{3,3}$				$H_{3,3}$
$\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}$		
$2A_1 \oplus A_3$	$\{0\}$				$\{0\}$

21	21	21	21	21	21
$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,3}$	$H_{3,4}$	$H_{3,4}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{2,2}$
$6A_1$	$8A_1$	$4A_1 \oplus A_3$	$2A_3$	$2A_1$	$4A_1$

21	21	22	23
$H_{3,4}$	$H_{3,4}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$
$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{1,7}, \alpha_{3,7}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_{8,10}, \alpha_{11,12}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$
$4A_1$	$4A_1$	$2A_2$	$4A_1$

23
$H_{3,3}$
$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,4}, \alpha_{5,6}, \alpha_{7,8}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$
$\{0\}$

$\mathbf{n} = 3$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	12	12	16	16	16	16	18	18	19	19
H	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2D_4$	$2D_4$	$8A_1$	$2D_4$	$2D_4$	$2D_4$	$6A_1 \oplus A_3$	$6A_1 \oplus A_3$	$2A_3$	$2D_4$

19	21	21	21	21	21	22 *
$H_{3,2}$	$H_{3,1}$	$H_{3,2}$	$H_{3,2}$	$H_{3,3}$	$H_{3,4}$	$H_{3,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,7}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,7}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}$
$2D_4$	$6A_1$	$6A_1 \oplus A_3$	$6A_1 \oplus A_3$	$2A_3$	$4A_1$	$2A_2$

23	23
$H_{3,1}$	$H_{3,2}$
$\alpha_{2,3}, \alpha_{3,4}, \alpha_{7,8}$	$\alpha_{2,4}$
$8A_1$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 4$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	13	13	13	13	18	18	18	19
H	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{4,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1$	$3A_1$	$3A_1$	$A_1 \oplus A_3$

19	20	20	21	21	21	22
$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
$\alpha_{3,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$
$A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_2$	$2A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1$	$3A_1$	$2A_1 \oplus A_2$

23
$H_{4,1}$
$\alpha_1, \alpha_4, \alpha_{17}, \alpha_{18}$
$3A_1$

$\mathbf{n} = 4$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	13	13	18	19	20	21	21	23 *
H	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
орбита	$\alpha_{5,1}$	$\alpha_{5,3}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,3}$	α_8, α_{12}
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_5	D_4	D_4	$2A_1 \oplus A_3$	A_4	A_3	$2A_1 \oplus A_3$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 4$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	13	13	13	13	18	18	19	19	19	20
H	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{4,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_5	D_5	D_5	D_5	D_4	D_4	$2A_3$	$2A_3$	$2A_3$	$2A_1 \oplus A_4$

20	21	21	21	22	23 *
$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
$\alpha_{2,3}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{7,11}$
$2A_1 \oplus A_4$	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus 2A_2$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 4$, вырождение $\mathbb{A}_2$

j	20	22 *
H	$H_{4,1}$	$H_{4,1}$
орбита	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,11}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_4$	$A_1 \oplus 2A_2$

$\mathbf{n} = 6$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	12	12	12	12	12	12	18	18	18
H	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{6,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{5,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_5	A_5	A_5	A_5	$3A_1$	$3A_1$	$A_2 \oplus A_3$	$A_2 \oplus A_3$	$A_2 \oplus A_3$

18	18	18	19	19	19	19
$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$
$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,5}, \alpha_{2,6}$
A_5	$2A_1 \oplus A_2$	$3A_1$	$3A_2$	$A_1 \oplus 2A_2$	$A_1 \oplus 2A_2$	$A_2 \oplus A_3$

19	19	21	21	21	22	22 *
$H_{6,3}$	$H_{6,3}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$
$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,8}, \alpha_{2,8}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,8}, \alpha_{2,8}, \alpha_{1,10}, \alpha_{2,10}$
$3A_1$	$3A_1$	$3A_1$	$3A_1$	$A_1 \oplus A_3$	$\{0\}$	$2A_2$

23
$H_{6,1}$
$\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{24}$
$3A_1$

$\mathfrak{n} = 6$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21	22	23 *
H	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,3}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}$	α_{16}
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_2$	$4A_2$	$2A_1 \oplus 2A_2$	D_4	A_3	A_2	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 6$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	12	12	12	12	12	12	18	18	18
H	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$
орбита	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{6,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{3,2}, \alpha_{5,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{5,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	E_6	E_6	D_4	D_4	D_4	D_4	$A_2 \oplus A_5$	$A_1 \oplus A_5$	$3A_1 \oplus A_2$

18	18	18	19	19	19	19
$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$	$H_{6,2}$
$\alpha_{2,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$
$3A_1 \oplus A_2$	$3A_1 \oplus A_2$	$4A_1$	$A_1 \oplus 3A_2$	$2A_2 \oplus A_3$	$2A_2 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$

19	19	21	21	21	22
$H_{6,3}$	$H_{6,3}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$
$\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$
D_4	D_4	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	A_2

22 *	23
$H_{6,2}$	$H_{6,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	$\alpha_3, \alpha_7, \alpha_{10}, \alpha_{11}$
$3A_2$	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 6$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21	22
H	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$	$H_{6,3}$	$H_{6,1}$	$H_{6,2}$
орбита	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	E_6	E_6	$A_2 \oplus A_5$	$A_2 \oplus A_5$	$4A_2$	$2A_2 \oplus A_3$	D_4	$2A_1 \oplus A_3$	$3A_2$

23 *
$H_{6,1}$
α_2
$4A_1$

$\mathfrak{n} = 9$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	21	21	21	23
H	$H_{9,1}$	$H_{9,2}$	$H_{9,2}$	$H_{9,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{2,3}, \alpha_{2,7}$	α_5, α_6
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$6A_1$	$2A_1$	$4A_1$	$4A_1$
23		23 *		
$H_{9,3}$		$H_{9,4}$		
$\alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$		$\alpha_1, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{15}, \alpha_{16}$		
$2A_1$		$\{0\}$		

$\mathfrak{n} = 9$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	21	21	23	23 *
H	$H_{9,1}$	$H_{9,2}$	$H_{9,1}$	$H_{9,4}$
орбита	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{1,7}$	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_7$	α_2, α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$8A_1$	$4A_1$	$4A_1$	$\{0\}$

$\mathfrak{n} = 9$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	21	23	23 *
H	$H_{9,1}$	$H_{9,2}$	$H_{9,3}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	α_2, α_4	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$8A_1$	$8A_1$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	18	18	19	19	21	21	21	21
H	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$	$H_{10,2}$
орбита	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{4,5}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_1	A_1	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1$	$3A_1$	$3A_1$	$3A_1$
22 *		23		23				
$H_{10,1}$		$H_{10,1}$		$H_{10,2}$				
$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$		$\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_{24}$		α_1, α_6				
A_2		$3A_1$		A_1				

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $(2\mathbb{A}_1)_I$

j	18	19 *	21	21	21	21	23	23
H	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$	$H_{10,2}$	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$
орбита	$\alpha_{3,1}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{3,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,4}$	α_{10}, α_{15}	α_{10}, α_{16}
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	$2A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	$2A_1$	$4A_1$	$4A_1$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $(2\mathbb{A}_1)_{\Pi}$

j	18	21	23 *
H	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$	$H_{10,2}$
орбита	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,2}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$
$\mathfrak{h}\{x \in S_{N_j}^\perp \mid x^2 = -4\}$	80	80	76

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	18	18	19	19	21	21	21	21
H	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$	$H_{10,2}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,3}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{2,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$2A_3$	$2A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$4A_1$	$4A_1$

21	22	23	23 *
$H_{10,2}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,2}$
$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{3,7}$	$\alpha_{3,4}, \alpha_{5,7}$
$4A_1$	$2A_2$	$4A_1$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	19	21	23 *
H	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$	$H_{10,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,3}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 10$, вырождение $2\mathbb{A}_2$

j	22 *
H	$H_{10,1}$
орбита	$\alpha_{1,9}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$

$\mathfrak{n} = 12$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	18	18	22	23 *
H	$H_{12,1}$	$H_{12,1}$	$H_{12,1}$	$H_{12,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_1, α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	D_4	$3A_1 \oplus A_2$	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 12$, вырождение $\mathbb{A}_2$

j	22 *
H	$H_{12,1}$
орбита	$\alpha_{1,5}, \alpha_{1,8}, \alpha_{1,11}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1 \oplus A_2$

$\mathbf{n} = 16$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	19	19	20	20	22	23
H	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$
орбита	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}, \alpha_{4,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{19}, \alpha_{22}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1$	$3A_1$	A_2	A_2	A_2	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 16$, вырождение $5\mathbb{A}_1$

j	19	19	20	20	22	23 *
H	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$	$H_{16,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{4,3}, \alpha_{5,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	D_4	A_4	A_4	$2A_2$	$4A_1$

 $\mathbf{n} = 17$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	19	19	19	19	21	21	21
H	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$	$H_{17,2}$	$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$
орбита	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{1,5}, \alpha_{3,5}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_2	D_4	$3A_1 \oplus A_2$	$3A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_3$	$A_1 \oplus A_3$	A_1

21	22	23	23	23 *	23
$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$	$H_{17,3}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$	$\alpha_{5,1}, \alpha_{17}, \alpha_{21}, \alpha_{24}$	α_{15}	$\alpha_{5,1}, \alpha_{6,1}, \alpha_{10}, \alpha_{17}$	α_{10}, α_{15}
A_1	A_2	$4A_1$	$4A_1$	$3A_1$	A_1

 $\mathbf{n} = 17$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	19	19	21	23 *	23
H	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$	$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,3}$
орбита	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,2}$	α_1	$\alpha_{1,6}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus D_4$	A_3	$5A_1$	$2A_1$

 $\mathbf{n} = 17$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	19	19	19	21	21	22	23 *	23
H	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$	$H_{17,2}$	$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{3,1}, \alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{3,3}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}$	α_2	$\alpha_{2,4}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$	$2A_2$	$A_2 \oplus D_4$	A_3	A_3	$2A_2$	$5A_1$	$4A_1$

23
$H_{23,3}$
$\alpha_{2,3}, \alpha_{8,3}, \alpha_{11,3}$
$2A_1$

 $\mathbf{n} = 17$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	21	21	22	23 *
H	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,2}$
орбита	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,7}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_3$	A_3	$2A_2$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 17$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	19	21	23 *
H	$H_{17,2}$	$H_{17,1}$	$H_{17,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$	α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_2 \oplus D_4$	$2A_3$	$5A_1$

$\mathbf{n} = 18$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21
H	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,2}$	$H_{18,2}$	$H_{18,1}$
орбита	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,5}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{4,3}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1$	$3A_1$	$2A_1 \oplus A_2$	$3A_1$	A_2	A_1	A_1	$3A_1$

22 *	23
$H_{18,1}$	$H_{18,1}$
$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_6$
$\{0\}$	A_1

$\mathbf{n} = 18$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21
H	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,2}$	$H_{18,2}$	$H_{18,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{2,1}, \alpha_{2,5}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_2$	$2A_2$	$2A_1$	A_3	$2A_1$

22 *	23
$H_{18,1}$	$H_{18,1}$
$\alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$	α_{15}, α_{16}
A_2	$2A_1$

$\mathbf{n} = 18$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21
H	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,2}$	$H_{18,2}$	$H_{18,1}$
орбита	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{4,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,5}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	D_4	$3A_1 \oplus A_2$	$4A_1$	$A_1 \oplus A_2$	A_3	A_3	$4A_1$

22	23 *
$H_{18,1}$	$H_{18,1}$
$\alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}$	α_4, α_5
A_2	$2A_1$

$\mathbf{n} = 18$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	12	12	18	18	19	19	19	21
H	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,1}$	$H_{18,2}$	$H_{18,2}$	$H_{18,1}$
орбита	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,5}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,5}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	D_4	$3A_1 \oplus A_2$	$3A_1 \oplus A_2$	$2A_2$	A_3	A_3	$4A_1$

22	23 *
$H_{18,1}$	$H_{18,1}$
$\alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$	α_2, α_8
A_2	$2A_1$

$\mathbf{n} = 21$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	23 *
H	$H_{21,1}$
орбита	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_8, \alpha_{12}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 21$, вырождение $16\mathbb{A}_1$

j	23 *
H	$H_{21,2}$
орбита	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$8A_1$

$\mathbf{n} = 22$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	21	23	23 *
H	$H_{22,1}$	$H_{22,2}$	$H_{22,3}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	α_{12}, α_{16}	$\alpha_8, \alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{16}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$2A_1$	$\{0\}$

$\mathbf{n} = 22$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	21	21	23 *	23
H	$H_{22,1}$	$H_{22,1}$	$H_{22,2}$	$H_{22,3}$
орбита	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,4}$	α_6, α_8	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$	$4A_1$	$2A_1$	$\{0\}$

$\mathbf{n} = 22$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	21	23	23 *
H	$H_{22,1}$	$H_{22,1}$	$H_{22,2}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	α_2, α_4	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$	$4A_1$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 26$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	18	18	22	23 *
H	$H_{26,1}$	$H_{26,1}$	$H_{26,1}$	$H_{26,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}$	α_1, α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$A_1 \oplus A_2$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 26$, вырождение $2\mathbb{A}_2$

j	22 *
H	$H_{26,1}$
орбита	$\alpha_{1,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_2$

$\mathbf{n} = 30$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	19	19	22	23 *
H	$H_{30,1}$	$H_{30,1}$	$H_{30,2}$	$H_{30,1}$
орбита	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,2}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$	$\alpha_4, \alpha_5, \alpha_{11}, \alpha_{15}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_2$	$A_1 \oplus 2A_2$	$\{0\}$	$3A_1$

$\mathbf{n} = 30$, вырождение $9\mathbb{A}_1$

j	19	22	23 *
H	$H_{30,1}$	$H_{30,1}$	$H_{30,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_2$	$3A_2$	$3A_1$

$\mathbf{n} = 32$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	19	20 *	23
H	$H_{32,1}$	$H_{32,2}$	$H_{32,1}$
орбита	$\alpha_{3,3}$	$\alpha_{1,1}$	α_{19}
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$\{0\}$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 32$, вырождение $5\mathbb{A}_1$

j	19	19	20	20	22 *	23
H	$H_{32,1}$	$H_{32,1}$	$H_{32,2}$	$H_{32,2}$	$H_{32,1}$	$H_{32,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{4,2}$	$\alpha_{2,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}$	α_3, α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$2A_1$	$2A_1$	$A_1 \oplus A_2$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 32$, вырождение $10\mathbb{A}_1$

j	19	20	23 *
H	$H_{32,1}$	$H_{32,1}$	$H_{32,1}$
орбита	$\alpha_{3,1}$	$\alpha_{1,2}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_4	$2A_1$

$\mathbf{n} = 32$, вырождение $5\mathbb{A}_2$

j	20	22 *
H	$H_{32,1}$	$H_{32,1}$
орбита	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,6}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_4	$A_1 \oplus A_2$

$\mathbf{n} = 33$, вырождение $7\mathbb{A}_1$

j	21	21	23 *
H	$H_{33,1}$	$H_{33,1}$	$H_{33,1}$
орбита	$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,\alpha_3}, \alpha_{11}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_3	A_3	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 34$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	19	19	19	19	21 *	21	21	21
H	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,1}$	$H_{34,1}$	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$
орбита	$\alpha_{2,3}, \alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{2,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_2	A_3	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_3$	$3A_1$	$3A_1$	A_1

21	21	22		23		23	23	23
$H_{34,3}$	$H_{34,3}$	$H_{34,1}$		$H_{34,1}$		$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$
$\alpha_{1,2}, \alpha_{3,2}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,10}, \alpha_{2,10}$		$\alpha_{5,6}, \alpha_{17}, \alpha_{21}$		α_6	α_{21}, α_{24}	$\alpha_{5,21}$
A_1	A_1	A_2		$3A_1$		$2A_1$	$2A_1$	A_1

 $\mathbf{n} = 34$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	19	21	21	23 *	23
H	$H_{34,2}$	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$
орбита	$\alpha_{3,4}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}$	α_4	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1 \oplus A_2$	A_3	$\{0\}$	$3A_1$	$2A_1$

 $\mathbf{n} = 34$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	19	19	21	21	23 *	23
H	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$	$H_{34,2}$	$H_{34,4}$
орбита	$\alpha_{1,3}, \alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,2}$	$\alpha_{2,1}$	α_2	$\alpha_{2,3}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_2$	$A_1 \oplus A_3$	$2A_1$	A_3	$3A_1$	$2A_1$

 $\mathbf{n} = 34$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	19	19	19	21	21	21	22	23 *	23
H	$H_{34,1}$	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$
орбита	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{4,1}$	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_1	$\alpha_{1,10}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$	$2A_2$	$A_2 \oplus A_3$	$2A_1$	$2A_1$	A_3	$2A_2$	$3A_1$	$2A_1$

23
$H_{34,4}$
$\alpha_{1,5}$
$2A_1$

 $\mathbf{n} = 34$, вырождение $(6\mathbb{A}_1)_I$

j	21	21	23 *	23
H	$H_{34,1}$	$H_{34,3}$	$H_{34,1}$	$H_{34,3}$
орбита	$\alpha_{2,3}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,8}$	α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1 \oplus A_3$	A_3	$4A_1$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 34$, вырождение $(6\mathbb{A}_1)_\Pi$

j	21	23 *
H	$H_{34,2}$	$H_{34,3}$
орбита	$\alpha_{1,2}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$2A_1$
$\mathbb{H}\{x \in S_{N_j}^\perp \mid x^2 = -4\}$	50	48

$\mathfrak{n} = 34$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	19	21	23 *	23
H	$H_{34,1}$	$H_{34,3}$	$H_{34,1}$	$H_{34,4}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,4}$	α_2	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$	A_3	$4A_1$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 34$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	19	21	23 *
H	$H_{34,2}$	$H_{34,1}$	$H_{34,2}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,3}$	α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_2 \oplus A_3$	$2A_1 \oplus A_3$	$3A_1$

$\mathfrak{n} = 34$, вырождение $6\mathbb{A}_2$

j	22 *
H	$H_{34,1}$
орбита	$\alpha_{1,2}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$

$\mathfrak{n} = 39$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	23 *
H	$H_{39,2}$
орбита	$\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$

$\mathfrak{n} = 39$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	23	23 *
H	$H_{39,2}$	$H_{39,3}$
орбита	α_5	α_3, α_5
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 39$, вырождение $16\mathbb{A}_1$

j	23 *
H	$H_{39,1}$
орбита	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$

$\mathbf{n} = 40$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{40,1}$
орбита	α_1, α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$

 $\mathbf{n} = 46$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{46,1}$
орбита	α_1, α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 46$, вырождение $9\mathbb{A}_1$

j	22	$23 *$
H	$H_{46,1}$	$H_{46,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1 \oplus A_2$	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 46$, вырождение $9\mathbb{A}_2$

j	$22 *$
H	$H_{46,2}$
орбита	$\alpha_{1,1}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus 2A_2$

 $\mathbf{n} = 48$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	19	19	$22 *$	23
H	$H_{48,1}$	$H_{48,1}$	$H_{48,2}$	$H_{48,1}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	$\alpha_{2,4}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,7}, \alpha_{2,7}$	α_5, α_7
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_1	A_2	$\{0\}$	A_1

 $\mathbf{n} = 48$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	19	22	$23 *$
H	$H_{48,1}$	$H_{48,2}$	$H_{48,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_2	$\{0\}$	A_1

 $\mathbf{n} = 48$, вырождение $9\mathbb{A}_1$

j	19	22	$23 *$
H	$H_{48,1}$	$H_{48,1}$	$H_{48,1}$
орбита	$\alpha_{1,4}$	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_2	A_2	A_1

$\mathfrak{n} = 49$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	$23 *$	23
H	$H_{49,1}$	$H_{49,3}$
орбита	α_2, α_4	$\alpha_2, \alpha_4, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$	A_1

$\mathfrak{n} = 49$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{49,1}$
орбита	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$

$\mathfrak{n} = 49$, вырождение $16\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{49,2}$
орбита	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$5A_1$

$\mathfrak{n} = 51$, вырождение $2\mathbb{A}_1$

j	21	21	$23 *$	23	23
H	$H_{51,1}$	$H_{51,2}$	$H_{51,2}$	$H_{51,3}$	$H_{51,4}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}$	$\alpha_{1,1}$	α_2, α_{10}	α_2	α_3, α_6
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$\{0\}$	A_1	$2A_1$	$\{0\}$

$\mathfrak{n} = 51$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	21	$23 *$	23
H	$H_{51,2}$	$H_{51,2}$	$H_{51,4}$
орбита	$\alpha_{2,4}$	α_1	α_1, α_5
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	A_1	$\{0\}$

$\mathfrak{n} = 51$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	21	23	$23 *$
H	$H_{51,2}$	$H_{51,3}$	$H_{51,4}$
орбита	$\alpha_{1,2}$	α_4	α_2, α_7
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$2A_1$	$\{0\}$

$\mathfrak{n} = 51$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	21	23	$23 *$
H	$H_{51,2}$	$H_{51,1}$	$H_{51,3}$
орбита	$\alpha_{1,4}$	α_1, α_4	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	$2A_1$	$2A_1$
$\natural\{x \in S_{N_j}^\perp \mid x^2 = -4\}$	22	22	16

$\mathbf{n} = 51$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	21	23 *
H	$H_{51,1}$	$H_{51,2}$
орбита	$\alpha_{1,3}$	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$	A_1

 $\mathbf{n} = 55$, вырождение $\mathbb{A}_1$

j	19	19
H	$H_{55,1}$	$H_{55,1}$
орбита	$\alpha_{1,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{4,4}$	$\alpha_{2,4}$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1$	$3A_1$

22	22 *	23	23	23	23
$H_{55,1}$	$H_{55,2}$	$H_{55,1}$	$H_{55,1}$	$H_{55,2}$	$H_{55,2}$
$\alpha_{1,10}, \alpha_{2,10}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}, \alpha_{1,8}, \alpha_{2,8}$	α_1, α_{10}	α_{24}	$\alpha_1, \alpha_{21}, \alpha_{24}$	α_5
$\{0\}$	A_2	$2A_1$	$2A_1$	$3A_1$	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 55$, вырождение $5\mathbb{A}_1$

j	19	22	23	23 *
H	$H_{55,1}$	$H_{55,1}$	$H_{55,1}$	$H_{55,2}$
орбита	$\alpha_{2,1}$	$\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}$	α_2	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	A_2	$3A_1$	$4A_1$

 $\mathbf{n} = 55$, вырождение $6\mathbb{A}_1$

j	22	23 *
H	$H_{55,1}$	$H_{55,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_4
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	A_2	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 55$, вырождение $10\mathbb{A}_1$

j	22	23 *
H	$H_{55,2}$	$H_{55,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}, \alpha_{2,1}$	α_3
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$	$3A_1$

 $\mathbf{n} = 55$, вырождение $15\mathbb{A}_1$

j	19	23 *
H	$H_{55,1}$	$H_{55,2}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	D_4	$4A_1$

$\mathbf{n} = 56$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{56,1}$
орбита	α_1, α_6
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 56$, вырождение $16\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{56,2}$
орбита	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 61$, вырождение $3\mathbb{A}_1$

j	19	$23 *$
H	$H_{61,1}$	$H_{61,1}$
орбита	$\alpha_{1,5}, \alpha_{1,6}$	α_7, α_{16}
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$A_1 \oplus A_2$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 61$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	19	$23 *$
H	$H_{61,1}$	$H_{61,1}$
орбита	$\alpha_{1,1}$	α_2
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_2$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 65$, вырождение $4\mathbb{A}_1$

j	$23 *$	23
H	$H_{65,3}$	$H_{65,4}$
орбита	α_3, α_{10}	$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_7$
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$	A_1

$\mathbf{n} = 65$, вырождение $8\mathbb{A}_1$

j	$23 *$	23
H	$H_{65,2}$	$H_{65,4}$
орбита	α_1	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$	A_1

$\mathbf{n} = 65$, вырождение $12\mathbb{A}_1$

j	$23 *$
H	$H_{65,3}$
орбита	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$2A_1$

$\mathbf{n} = 65$, вырождение $16A_1$

j	$23 *$
H	$H_{65,1}$
орбита	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$3A_1$

$\mathbf{n} = 75$, вырождение $16A_1$

j	$23 *$
H	$H_{75,1}$
орбита	α_1
$(S_{N_j}^\perp)^{(2)}$	$4A_1$

§ 5. Трансцендентные решетки $T = S_{L_{K3}}^\perp$

Для фиксированного типа $\mathbf{n}$ конечной симплектической группы автоморфизмов G и фиксированного типа вырождения P коразмерности 1 (диаграммы Дынкина), общая кэлерова КЗ-поверхность X имеет решетку Пикара $S_X \cong S$, описанную в теореме 2.1. Ее трансцендентная решетка T_X является ортогональным дополнением $T_X = (S_X)_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp$, где $H^2(X, \mathbb{Z})$ – четная унимодулярная решетка сигнатуры $(3, 19)$. Она единственна с точностью до изоморфизма, и мы обозначим ее класс изоморфизма как L_{K3} .

Таким образом,

$$T_X \cong T = (S)_{L_{K3}}^\perp,$$

где $S \subset L_{K3}$ – некоторое примитивное вложение. В силу эпиморфности отображения периодов для КЗ-поверхностей, все такие примитивные вложения соответствуют КЗ-поверхностям. По предложению 3.1 трансцендентная решетка T может быть любой четной решеткой с инвариантами $(3, 19 - \text{rk } S, q_T \cong -q_S)$, которые эквивалентны роду решетки T .

Мы используем следующую теорему из [4], которая следует из результатов М. Кнезера.

ТЕОРЕМА 5.1 [4, теорема 1.13.2]. *Четная решетка K с инвариантами $(t_{(+)}, t_{(-)}, q)$ единственна, если одновременно выполняются условия:*

- 1) $t_{(+)} \geq 1, t_{(-)} \geq 1, t_{(+)} + t_{(-)} \geq 3$;
- 2) для каждого простого $p \neq 2$

$$\text{либо } \text{rk } K \geq l(A_{q_p}) + 2,$$

$$\text{либо } q_p \cong q_{\theta_1}^{(p)}(p^k) \oplus q_{\theta_2}^{(p)}(p^k) \oplus q'_p;$$

- 3) для $p = 2$

$$\text{либо } \text{rk } K \geq l(A_{q_2}) + 2$$

$$\text{либо } q_2 \cong u_+^{(2)}(2^k) \oplus q'_2,$$

$$\text{либо } q_2 \cong v_+^{(2)}(2^k) \oplus q'_2,$$

$$\text{либо } q_2 \cong q_{\theta_1}^{(2)}(2^k) \oplus q_{\theta_2}^{(2)}(2^{k+1}) \oplus q'_2.$$

Из этой теоремы получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для фиксированного типа $\mathbf{n}$ конечной симплектической группы автоморфизмов G и фиксированного типа вырождения P коразмерности 1 (диаграммы Дынкина) общая кэлерова КЗ-поверхность X имеет единственную с точностью до изоморфизма трансцендентную решетку $T_X \cong T = (S)^\perp_{L_{K3}}$, если $\text{rk } S \leq 18$ (в силу теоремы 5.1).*

Если $\text{rk } S = 19$ (эквивалентно $\text{rk } T = 3$ и тогда T положительно определена), то класс изоморфизма трансцендентной решетки T дан в нижеприведенной таблице 3. Трансцендентная решетка T единственна во всех случаях, кроме случая $(\mathbf{n} = 55, 10A_1)$, когда имеются два возможных класса изоморфизма.

Таким образом, для $(\mathbf{n} = 55, 10A_1)$ (эквивалентно $G \cong \mathfrak{A}_5$ и вырождение имеет тип $10A_1$) есть два неэквивалентных вырождения коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей, которые имеют различные трансцендентные решетки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Роды решеток S и, следовательно, роды T представлены в таблице 1.

Если $\text{rk } T \geq 4$, они удовлетворяют теореме 5.1.

Если $\text{rk } T = 3$, мы вычисляем T (см. таблицу 3), используя известные таблицы положительно определенных решеток ранга 2 и 3 для малых определителей (достаточно рассмотреть решетки определителей ≤ 50 ; см. [18, гл. 15, разделы 3, 10]).

Таблица 3. Трансцендентные решетки ранга 3 вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов $G = \text{Clos}(G)$

$\mathbf{n}$	$ G $	i	G	Deg	q_T	T
26	16	8	SD_{16}	$8A_1$	$2_{-1}^{+1}, 4_{-1}^{+1}, 16_{-3}^{-1}$	$\langle 2 \rangle \oplus \langle 4 \rangle \oplus \langle 16 \rangle$
				$2A_2$	$2_{-5}^{-1}, 8_{\text{II}}^{-2}$	$\left\langle \begin{array}{ccc} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{array} \right\rangle$
32	20	3	$\text{Hol}(C_5)$	$2A_1$	$4_{-1}^{+1}, 5^{+3}$	$A_3(-5)$
				$5A_1$	$2_{-1}^{+3}, 5^{-2}$	$\left\langle \begin{array}{ccc} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{array} \right\rangle$
				$10A_1$	$4_3^{-1}, 5^{+2}$	$\left\langle \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{array} \right\rangle$
				$5A_2$	$2_3^{-1}, 5^{-2}$	$\left\langle \begin{array}{ccc} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{array} \right\rangle$

Таблица 3 (продолжение)

33	21	1	$C_7 \rtimes C_3$	$7\mathbb{A}_1$	$2_{-1}^{+1}, 7^{+2}$	$\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
46	36	9	3^2C_4	$6\mathbb{A}_1$	$4_1^{+1}, 3^{-1}, 9^{+1}$	$\langle 36 \rangle \oplus A_2(-1)$
				$9\mathbb{A}_1$	$2_{-5}^{-3}, 3^{+2}$	$\langle 2 \rangle \oplus \langle 6 \rangle \oplus \langle 6 \rangle$
				$9\mathbb{A}_2$	$2_{-5}^{-1}, 3^{+2}$	$\langle 6 \rangle \oplus A_2(-1)$
48	36	10	$\mathfrak{S}_{3,3}$	$3\mathbb{A}_1$	$2_3^{+3}, 3^{-2}, 9^{+1}$	$\langle 6 \rangle \oplus A_2(-6)$
				$6\mathbb{A}_1$	$4_{-1}^{+1}, 3^{+2}, 9^{+1}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 12 \end{pmatrix}$
				$9\mathbb{A}_1$	$2_1^{-3}, 3^{-3}$	$3\langle 6 \rangle$
51	48	48	$C_2 \times \mathfrak{S}_4$	$2\mathbb{A}_1$	$4_{-1}^{+3}, 3^{+2}$	$\langle 4 \rangle \oplus \langle 12 \rangle \oplus \langle 12 \rangle$
				$4\mathbb{A}_1$	$2_{\text{II}}^{+2}, 8_{-1}^{+1}, 3^{+2}$	$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
				$6\mathbb{A}_1$	$4_1^{-3}, 3^{-1}$	$\langle 4 \rangle \oplus A_2(-4)$
				$8\mathbb{A}_1$	$2_{\text{II}}^{-2}, 4_3^{-1}, 3^{+2}$	$\langle 12 \rangle \oplus A_2(-2)$
				$12\mathbb{A}_1$	$2_{\text{II}}^{-2}, 8_1^{+1}, 3^1$	$\langle 8 \rangle \oplus A_2(-2)$
55	60	5	$\mathfrak{A}_5$	$\mathbb{A}_1$	$2_1^{-3}, 3^{-1}, 5^{-2}$	$\langle 2 \rangle \oplus A_2(-10)$
				$5\mathbb{A}_1$	$2_5^{+3}, 3^{-1}, 5^{+1}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$
				$6\mathbb{A}_1$	$4_{-1}^{+1}, 5^{-2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
				$10\mathbb{A}_1$	$4_1^{+1}, 3^{-1}, 5^{-1}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
				$15\mathbb{A}_1$	$2_3^{+3}, 5^{-1}$	$\langle 2 \rangle \oplus \langle 2 \rangle \oplus \langle 10 \rangle$
56	64	138	Γ_{25a_1}	$8\mathbb{A}_1$	$4_4^{-2}, 8_3^{-1}$	$\langle 4 \rangle \oplus \langle 4 \rangle \oplus \langle 8 \rangle$
				$16\mathbb{A}_1$	4_3^{+3}	$3\langle 4 \rangle$
61	72	43	$\mathfrak{A}_{4,3}$	$3\mathbb{A}_1$	$2_3^{-1}, 4_{\text{II}}^{+2}, 3^{+2}$	$\langle 6 \rangle \oplus A_2(-4)$
				$12\mathbb{A}_1$	$8_{-1}^{+1}, 3^{+2}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
65	96	227	2^4D_6	$4\mathbb{A}_1$	$4_{-3}^{-3}, 3^{+1}$	$\langle 4 \rangle \oplus \langle 4 \rangle \oplus \langle 12 \rangle$
				$8\mathbb{A}_1$	$2_{\text{II}}^{-2}, 8_1^{+1}, 3^{+1}$	$\langle 8 \rangle \oplus A_2(-2)$

Таблица 3 (продолжение)

				$12A_1$	4_3^{+3}	$3\langle 4 \rangle$
				$16A_1$	$2_{II}^{+2}, 4_5^{-1}, 3^{+1}$	$\langle 4 \rangle \oplus A_2(-2)$
75	192	1023	$4^2\mathfrak{A}_4$	$16A_1$	$2_{II}^{-2}, 8_3^{-1}$	$A_3(-2)$

§ 6. Компоненты связности модулей кэлеровых КЗ-поверхностей с отрицательно определенной решеткой Пикара M и трансцендентной решеткой K

В этом параграфе мы применяем результаты из [3], [5] про описание компонент связности модулей кэлеровых КЗ-поверхностей с условием на решетку Пикара. Используя эти методы и результаты, опишем компоненты связности модулей кэлеровых КЗ-поверхностей X таких, что решетка Пикара S_X содержит фиксированную отрицательно определенную примитивную подрешетку M и ортогональное дополнение $M_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp = K$, где решетка K также фиксирована. Общая такая КЗ-поверхность X имеет решетку Пикара $S_X = M$ и трансцендентную решетку $T_X = K$.

Решетки M и K – ортогональные дополнения друг к другу в четной уни-модулярной решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$. Это определяет канонический изоморфизм $\varphi: q_S \cong -q_K$, который эквивалентен естественному расширению конечного индекса $M \oplus K \subset H^2(X, \mathbb{Z})$:

$$H^2(X, \mathbb{Z}) = \{m^* \oplus k^* \mid m^* \in M^*, k^* \in K^*, \varphi(m^* + M) = k^* + K\}.$$

Периоды

$$H^{2,0}(X) + H^{1,1}(X) + H^{0,2}(X)$$

поверхности X эквивалентны положительно определенному 2-мерному ориентированному подпространству

$$\Pi_2(X) = (H^{2,0}(X) + H^{0,2}(X)) \cap K \otimes \mathbb{R} \subset K \otimes \mathbb{R}$$

(его ориентация эквивалентна естественной ориентации 1-мерного комплексного пространства $H^{2,0}(X)$). Кэлеров класс $c(X)$ поверхности X определяет половину $V^+(X)$ конуса

$$V(X) = \{x \in H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \mid x^2 > 0\},$$

содержащую $c(X)$. Вместе они определяют непрерывно изменяющиеся ориентации во всех 3-мерных положительно определенных подпространствах $\Pi_3 \subset H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ и $\Pi_3 \subset K \otimes \mathbb{R}$ такие, что ориентированный базис $\Pi_2(X)$ вместе с $c(X)$ определяют ориентированный базис в $\Pi_2(X) + \mathbb{R}c(X)$. Мы обозначаем эту ориентацию как $o(X) \in \{+, -\}$ и соответствующее $K \otimes \mathbb{R}$ с выбором такой ориентации как $(K \otimes \mathbb{R})_{o(X)}$. Кроме того, эффективные элементы $\delta \in M$ с $\delta^2 = -2$ определяют фундаментальное разложение $P(X)$: $\Delta(M) = \Delta^+(M) \cup -\Delta^+(M)$ множества $\Delta(M)$ корней решетки M с квадратом (-2) , где элементы $\Delta^+(M)$ эффективны.

Можно рассматривать 4-элементный набор

$$(P(X), \varphi(X), o(X), \Pi_2(X))$$

как периоды отмеченной КЗ-поверхности X с $M \subset S_X$ и $M_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp = K$.

Пусть $W^{(2)}(M)$ – группа, порожденная отражениями в элементах $\Delta(M)$. Она действует тождественно на дискриминантную группу и дискриминантную форму q_M . Заменяя $M \subset S_X$ на $w: M \rightarrow M \subset S_X$, где $w \in W^{(2)}(M)$, мы можем предполагать, что $P(X) = P$, где разложение $P: \Delta(M) = \Delta^+(M) \cup -\Delta^+(M)$ фиксировано. Это не меняет $\varphi(X)$, $o(X)$, $\Pi_2(X)$. Пусть $w_0 \in W^{(2)}(M)$ меняет разложение

$$P = \Delta^+(M) \cup -\Delta^+(M) \quad \text{на} \quad -P = -\Delta^+(M) \cup \Delta^+(M).$$

Тогда, заменяя

$$\begin{aligned} M \subset S_X & \quad \text{на} \quad -w_0: M \rightarrow M \subset S_X, \\ K \subset M_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp & \quad \text{на} \quad -\text{id}_K: K \rightarrow K \subset M_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp, \end{aligned}$$

если нужно, мы можем предполагать, что $o(X) = +$ фиксировано. Здесь мы используем то, что 3 нечетно. Тогда периоды отмеченной таким образом КЗ-поверхности задаются парой

$$(\varphi(X), \Pi_2(X) \subset (K \otimes \mathbb{R})_+).$$

Отсюда следует, что для фиксированного изоморфизма $\varphi(X) = \varphi: q_M \cong -q_K$ пространства периодов и модулей таких КЗ-поверхностей связаны в силу глобальной теоремы Торелли [14], [15] и эпиморфности отображения периодов [19], [17], [16] для КЗ-поверхностей.

При изменении отметок на $g: M \rightarrow M \subset S_X$, $f^{-1}: K \rightarrow K \subset M_{H^2(X, \mathbb{Z})}^\perp$, где $g \in O(M)$ с $g(P) = P$ и $f \in O(K)$, периоды меняются на эквивалентные периоды

$$(\bar{f}\varphi\bar{g}, (f \otimes \mathbb{R})(\Pi_2(X)) \subset (K \otimes \mathbb{R})_{f(+)}).$$

и модули.

Таким образом, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.1. *Число компонент связности модулей кэлеровых КЗ-поверхностей X с решеткой Пикара M , где $M < 0$, и трансцендентной решеткой, изоморфной K (далее мы будем называть их как слабые компоненты связности), равно числу двойных классов смежности $\overline{O(K)} \backslash O(q) / \overline{O(M)}$, где $\overline{O(M)}$ и $\overline{O(K)}$ являются образами $O(M)$ и $O(K)$ в $O(q)$, где $q = q_M = -q_K$.*

Здесь мы рассматриваем примитивные вложения $f_1: M \subset S_X$ и $f_2: M \subset S_X$ как эквивалентные, если они отличаются на автоморфизм решетки M .

Отметим, что двойные классы смежности $\overline{O(K)} \backslash O(q) / \overline{O(M)}$ теоремы 6.1 эквивалентны классам изоморфизма примитивных вложений решетки M в L_{K3} с $M_{L_{K3}}^\perp \cong K$, где два таких примитивных вложения $f_1: M \subset L_{K3}$, $f_2: M \subset L_{K3}$ являются эквивалентными, если $f_2(M) = h(f_1(M))$ для $h \in O(L_{K3})$ (см. предложение 3.1). Такие классы эквивалентности сохраняются при непрерывных деформациях КЗ-поверхностей, так как являются дискретными данными деформаций.

Аналогично получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.2. Число компонент связности модулей кэлеровых КЗ-поверхностей X с решеткой Пикара M , где $M < 0$, фиксированным разбиением $P(X) = P = \Delta^+(M) \cup -\Delta^+(M)$ и трансцендентной решеткой, изоморфной K (далее мы называем их как сильные компоненты связности), равно числу левых классов смежности $\overline{O^+(K)} \backslash O(q_K)$ (эквивалентно индексу $[O(q_K) : \overline{O^+(K)}]$), где $O^+(K) \subset O(K)$ состоит из автоморфизмов, сохраняющих ориентации $(K \otimes \mathbb{R})_+$ и $(K \otimes \mathbb{R})_-$.

Здесь мы рассматриваем примитивные вложения $f_1: M \subset S_X$ и $f_2: M \subset S_X$ как эквивалентные, если они равны.

Отметим, что левые классы смежности $\overline{O^+(K)} \backslash O(q_K)$ теоремы 6.2 эквивалентны всем классам изоморфизма примитивных вложений решетки M в L_{K3} с $M_{L_{K3}}^\perp \cong K$ и выбором ориентации $(M_{L_{K3}}^\perp \otimes \mathbb{R})_\alpha$, $\alpha = \pm$, где два таких данных $f_1: M \subset L_{K3}$, α_1 и $f_2: M \subset L_{K3}$, α_2 эквивалентны, если $f_2 = hf_1$ и $h(\alpha_1) = \alpha_2$ для некоторого $h \in O(L_{K3})$.

В работах Миранда и Моррисона [9], [10] и Джеймса [11] для неопределенных решеток K теоремы 6.2 (эквивалентно, если $\text{rk } K \geq 4$) сумма

$$e_{--}(K) = \sum_{K' \in g(K)} [O(q_{K'}) : \overline{O^+(K')}] \quad (6.1)$$

вычисляется в терминах инвариантов рода $g(K)$ решетки K (как частный случай общих результатов, которые обобщают теорему 1.14.2 из [4]). В [9], [10] группа $O^+(K)$ обозначается как $O_{--}(K)$ (см. теорему в [10, с. 31]).

§ 7. Компоненты связности модулей вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов

Используя результаты § 6, получаем:

ТЕОРЕМА 7.1. Для фиксированного типа $\mathbf{n}$ конечной симплектической группы автоморфизмов G и фиксированного типа вырождения P коразмерности 1 (диаграммы Дынкина) общая кэлерова КЗ-поверхность X имеет единственную (с немногими исключениями) с точностью до изоморфизма решетку Пикара $S_X \cong S$, описанную в теореме 2.1, и трансцендентную решетку $T_X \cong T = (S)_{L_{K3}}^\perp$ для некоторого примитивного вложения $S \subset L_{K3}$, описанную в теореме 5.2.

Число M_w слабых компонент связности модулей общих кэлеровых КЗ-поверхностей X с такими S и T равно числу двойных классов смежности

$$M_w = \sharp(\overline{O(T)} \backslash O(q) / \overline{O(S)}), \quad (7.1)$$

где $q_S = q = -q_T$ в обозначениях теоремы 6.1.

ТЕОРЕМА 7.2. Для фиксированного типа $\mathbf{n}$ конечной симплектической группы автоморфизмов G и фиксированного типа вырождения P коразмерности 1 (диаграммы Дынкина) общая кэлерова КЗ-поверхность X имеет единственную (с некоторыми исключениями) с точностью до изоморфизма решетку Пикара $S_X \cong S$, описанную в теореме 2.1, и трансцендентную решетку $T_X \cong T = (S)_{L_{K3}}^\perp$ для некоторого примитивного вложения $S \subset L_{K3}$, описанную в теореме 5.2.

(1) Предположим, что $\mathrm{rk} S \leq 18$ (эквивалентно $\mathrm{rk} T \geq 4$ и тогда T неопределенна). Тогда T единственна с точностью до изоморфизма и число M_s сильных компонент связности модулей общих кэлеровых КЗ-поверхностей X для таких S равно:

$$M_s = [O(q_T) : \overline{O^+(T)}].$$

Для всех этих случаев $M_s = 1$, и тогда $M_w = 1$, исключая случаи

$$(\mathbf{n}, P) = (12, \mathbb{A}_2), (16, \mathbb{A}_1), (18, 2\mathbb{A}_1), (22, 2\mathbb{A}_1), (34, 2\mathbb{A}_1), (39, 4\mathbb{A}_1), (40, 8\mathbb{A}_1), \quad (7.2)$$

когда $M_s = 2$. Кроме того, для всех случаев (7.2) имеем $[O(q_T) : \overline{O(T)}] = 1$ и тогда $M_w = 1$ (по теореме 7.1), исключая $(\mathbf{n}, P) = (16, \mathbb{A}_1)$, когда $[O(q_T) : \overline{O(T)}] = 2$.

(2) Предположим, что $\mathrm{rk} S = 19$ (эквивалентно $\mathrm{rk} T = 3$ и тогда T положительно определена) и $(\mathbf{n}, P) \neq (55, 10\mathbb{A}_1)$. Тогда T единственна с точностью до изоморфизма и

$$M_s = [O(q_T) : \overline{O^+(T)}] = |O(q_T)|/|O^+(T)/W^+(T)|,$$

где $+$ означает “собственные” (с определителем = 1) автоморфизмы решетки T и $W(T) \subset O(T)$ порождена отражениями во всех корнях с квадратом 2 решетки T . Если $(\mathbf{n}, P) = (55, 10\mathbb{A}_1)$, то

$$M_s = |O(q_{T_1})|/|O^+(T_1)/W^+(T_1)| + |O(q_{T_2})|/|O^+(T_2)/W^+(T_2)|,$$

где T_1 и T_2 – две неизоморфные трансцендентные решетки этого случая.

Точные вычисления этих инвариантов даны в нижеприведенной таблице 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае (1), когда T неопределенна и $\mathrm{rk} T \geq 4$, результаты следуют из теоремы в [10, с. 31]. Например, рассмотрим случай $(\mathbf{n}, P) = (18, 2\mathbb{A}_1)$. Из таблицы 1

$$\mathrm{rk} S = 17, \quad q_S \cong 2_{\mathrm{II}}^{+2}, 4_7^{+1}, 3^{+4}.$$

Тогда

$$\mathrm{rk} T = 22 - 17 = 5, \quad q_T = -q_S \cong 2_{\mathrm{II}}^{+2}, 4_1^{+1}, 3^{+4}.$$

В обозначениях теоремы из [10, с. 31] для $p = 2$ имеем

$$s(0) = \mathrm{rk} T - l(q_{T_2}) = 2 > 0,$$

для $p = 3$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{rk} T - l(q_{T_3}) &= 5 - 4 = 1, & 3 \bmod 4 &= 3, & \det(T) &= 2^4 \cdot 3^4, \\ \det(K(q_{T_3})) &\equiv 3^4 \bmod (\mathbb{Z}_3^*)^2, & \Delta &= \det(T)/\det(K(q_{T_3})) \equiv 2^4 \bmod (\mathbb{Z}_3^*)^2, \\ & \left(\frac{2\Delta}{3} \right) &= -1. \end{aligned}$$

Согласно теореме из [10, с. 31] тогда

$$\begin{aligned} e_2 = 1, \quad f_2 = 4, \quad e_3 = 2, \quad f_3 = 2, \\ \text{тип} = (-, -), \quad e_{++}(T) = e_2 \cdot e_3 = 1 \cdot 2 = 2, \\ \text{группа } \tilde{\Sigma}(T) = \{(+, +), (-, -)\}, \quad e_{--}(T) = [O(q_T) : \overline{O^+(T)}] = e_{++}(T) = 2 \\ (\text{группа } O^+(T) \text{ обозначается как } O_{--}(T) \text{ в [9], [10]}), \end{aligned}$$

$$e(T) = [O(q_T) : \overline{O(T)}] = (1/2)e_{++}(T) = 1.$$

В этом случае

$$M_s = 2, \quad M_w = 1.$$

Рассмотрим случай (2), когда T положительно определена и $\text{rk } T = 3$. В силу [4, замечание 1.14.6] ядро естественного гомоморфизма $\pi: O(T) \rightarrow O(q_T)$ равно $W(T)$, так как $\text{rk } T = 3 < 8$. Отсюда следует, что ядро естественного гомоморфизма $\pi: O^+(T) \rightarrow O(q_T)$ равно $W^+(T)$. Тогда порядок

$$|\overline{O^+(T)}| = |\pi(O^+(T))| = |O^+(T)/W^+(T)|.$$

Отсюда следует утверждение.

Мы надеемся представить вычисления отсутствующих чисел M_w слабых компонент связности модулей в дальнейших вариантах настоящей статьи и дальнейших публикациях.

Таблица 4. Группы автоморфизмов трансцендентных решеток ранга 3 вырождений коразмерности 1 кэлеровых КЗ-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов $G = \text{Clos}(G)$ и сильные компоненты связности модулей

n	$ G $	i	G	Deg	$ O(q_T) $	$ O(T) $	$ W(T) $	M_s
26	16	8	SD_{16}	$8\mathbb{A}_1$	16	8	2	4
				$2\mathbb{A}_2$	96	48	1	4
32	20	3	$\text{Hol}(C_5)$	$2\mathbb{A}_1$	480	48	1	20
				$5\mathbb{A}_1$	24	8	1	6
				$10\mathbb{A}_1$	16	16	1	2
				$5\mathbb{A}_2$	12	12	1	2
33	21	1	$C_7 \rtimes C_3$	$7\mathbb{A}_1$	16	8	2	4
46	36	9	3^2C_4	$6\mathbb{A}_1$	24	24	6	6
				$9\mathbb{A}_1$	16	8	2	4
				$9\mathbb{A}_2$	8	24	6	2
48	36	10	$\mathfrak{S}_{3,3}$	$3\mathbb{A}_1$	432	24	1	36
				$6\mathbb{A}_1$	288	16	1	36
				$9\mathbb{A}_1$	288	48	1	12

Таблица 4 (продолжение)

51	48	48	$C_2 \times \mathfrak{S}_4$	$2A_1$	256	16	1	32
				$4A_1$	64	16	1	8
				$6A_1$	192	24	1	16
				$8A_1$	96	24	1	8
				$12A_1$	96	24	1	8
55	60	5	$\mathfrak{A}_5$	A_1	144	24	2	12
				$5A_1$	24	8	1	6
				$6A_1$	24	8	2	6
				$10A_1$	8	16, 8	4, 1	2, 2
				$15A_1$	12	16	4	3
56	64	138	$\Gamma_{25}a_1$	$8A_1$	64	16	1	8
				$16A_1$	96	48	1	4
61	72	43	$\mathfrak{A}_{4,3}$	$3A_1$	96	24	1	8
				$12A_1$	16	8	2	4
65	96	227	2^4D_6	$4A_1$	64	16	1	8
				$8A_1$	96	24	1	8
				$12A_1$	96	48	1	4
				$16A_1$	24	24	1	2
75	192	1023	$4^2\mathfrak{A}_4$	$16A_1$	48	48	1	2

§ 8. Дополнение: программы

В настоящем параграфе мы приводим программы 7 и 8 для GP/PARI Calculator, Version 2.7.0, которые использовались в вычислениях раньше. Они также включают программы 1–6 из [1], [6], [7].

Program 7: niemeier\genwithorbit.txt

```

\\for a Niemeier lattice N_i given by root matrix r
\\and cord matrix cord, R=r^-1
\\and subgroup H\subset A(N_i)
\\and its orbits ORB matrix, each line gives
\\orbit of length > 1
\\it calculates all additional
\\1-elements orbits to matrix ORBF and prints it
\\(1-elements orbits the last)
\\it calculates coinvariant sublattice N_H
\\together with morb-orbit given by its first
\\element morb of the orbit as SUBLpr below
\\by its rational generators,

```

```

\\and checks if
\\it has primitive embedding to L_K3
\\Then it prints invariants of its discriminant group DSUBLpr below
\\and the intersection matrix rSUBLpr of SUBLpr
sORB=matsize(ORB);m1=0;
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]==0,m1=m1+1)));
ORBF=matrix(sORB[1]+(24-m1),sORB[2]);
for(k=1,sORB[1],ORBF[k,]=ORB[k,]);
l=sORB[1];
for(t=1,24,mu=0;for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2],\
if(ORB[k1,k2]!=t,mu=1)));if(mu==1,l=l+1;ORBF[l,1]=t));\
print("ORBF= ORBF");\
SUBL0=matrix(24,24);alpha=0;\
for(k1=1,sORB[1],for(k2=1,sORB[2]-1,\
if(ORB[k1,k2+1]>0,alpha=alpha+1);\
SUBL0[,alpha]=R[,ORB[k1,k2]]-R[,ORB[k1,k2+1]]));\
SUBL0[morb,24]=1;\
sORBF=matsize(ORBF);\
SUBL=SUBL0;\
a=matrix(24,24+matsize(cord)[1]);\
for(i=1,24,a[i,i]=1);for(i=1,matsize(cord)[1],a[,24+i]=cord[i,~]);\
L=a;N=SUBL;\
ggg=gcd(N);N1=N/ggg;\
M=L;\
gg=gcd(M);M1=M/gg;\
ww=matsnf(M1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnn=nnn-1));\
VV=matrix(nn,nnn);\
nnnn=0;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnnn=nnnn+1;VV[,nnnn]=vv[,i]));\
M2=M1*VV;MM=M2*gg;\
kill(gg);kill(M1);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);kill(mm);\
kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);kill(M2);\
L1=MM;kill(VV);\
N2=L1^(-1)*N1;\
ww=matsnf(N2,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
N3=N2*vv;mm=matsize(dd)[1];nn=matsize(dd)[2];\
nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnn=nnn-1));\
N4=matrix(mm,nnn);\
nnnn=0;\
for(i=1,nn,if(dd[i]==0,nnnn=nnnn+1);\
ddd=gcd(dd[i]);N4[,nnnn]=N3[,i]/ddd);\
Npr=L1*N4;\
kill(ggg);kill(N1);kill(M);kill(L1);kill(MM);\
kill(N2);kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);\
kill(N3);kill(mm);kill(nn);kill(nnn);kill(nnnn);\
kill(ddd);kill(N4);\
SUBLpr1=Npr;\

```

```

R=r;B=SUBLpr1;\
l=B~*R*B;\
ww=matsnf(1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];\
nn=matsize(l)[1];nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnn=nnn-1));\
b=matrix(nnn,nnn,X,Y,vv[X,Y+nn-nnn]);\
ll=b~*l*b;\
d=vector(nnn,X,dd[X+nn-nnn,X+nn-nnn]);\
kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);\
kill(nn);kill(nnn);\
BB=B*b;G=BB~*R*BB;D=d;\
SUBLpr=BB;DSUBLpr=D;rSUBLpr=G;

```

Program 8: niemeier\genus6.txt

```

\\for a non-degenerate lattice
\\L given by a symmetric integer matrix l
\\in some generators
\\calculates the elementary difisors (Smyth) basis of L
\\as a matrix b and
\\calculates the matrix ll=b~*l*b
\\of L in the bases b
\\calculates invariants d of L\subset L^ast
\\for primes, p, calculates lll=L\otimes \bz_p
\\in Smith form
\\thus, calculates genus of L
ww=matsnf(1,1);uu=ww[1];vv=ww[2];dd=ww[3];
nn=matsize(l)[1];nnn=nn;for(i=1,nn,if(dd[i,i]==0,nnn=nnn-1));
b=matrix(nnn,nnn,X,Y,vv[X,Y+nn-nnn]);
ll=b~*l*b;
d=vector(nnn,X,dd[X+nn-nnn,X+nn-nnn]);
kill(ww);kill(uu);kill(vv);kill(dd);
kill(nn);kill(nnn);
n=matsize(d)[2];
delta=vector(n,X,d[n+1-X]);
bb=matrix(n,n,X,Y,b[X,n+1-Y]);
ll=bb~*l*bb;
F=factor(delta[n]);
f1=matsize(F)[1];
for(KK1=1,f1,p=F[KK1,1];t=F[KK1,2];\
u=vector(n);\
for(k2=1,n,u[k2]=gcd(delta[k2],p^t));\
v=vector(n);j1=1;\
v[j1]=1;for(k2=2,n,if(u[k2]>u[k2-1],j1=j1+1;v[j1]=k2,));\
vv=vector(j1,X,v[X]);\
nvv=matsize(vv)[2];\
for(k4=1,nvv,if(k4<nvv,ss=vv[k4+1]-vv[k4];\
cc=matrix(ss,ss,X,Y,ll[vv[k4]+X-1,vv[k4]+Y-1]/u[vv[k4]]);\
ccdet=matdet(cc);dcc=Mod(ccdet,p);kron=kronecker(ccdet,p);\
if(p>2,print(u[v[k4]],"size= ss,"det= dcc,"kro= kron),),\

```

```

ss=n-v[k4]+1;cc=matrix(ss,ss,X,Y,lll[vv[k4]+X-1,vv[k4]+Y-1]/u[vv[k4]]);\
ccdet=matdet(cc);dcc=Mod(ccdet,p);kron=kronerker(ccdet,p);\
if(p>2,print(u[v[k4]],"size= ss,"det= dcc,"kro= kron),));\
if(p!=2,,lll=lll;for(k1=1,nvv,\
if(k1<nvv,ss1=vv[k1+1]-vv[k1],ss1=n-vv[k1]+1);\
cc1=matrix(ss1,ss1,X,Y,lll[vv[k1]+X-1,vv[k1]+Y-1]);\
ty=0;for(k=1,ss1,if(Mod(cc1[k,k]/u[vv[k1]],2)==Mod(0,2),ty=1));\
dcc1=Mod(matdet(cc1/u[vv[k1]]),8);\
a=cc1/u[vv[k1]];\
na=matsize(a)[1];\
alpha==1;\
while(alpha,\
t=0;beta=0;mu=1;\
for(k=1,na,if(Mod(a[k,k],2)==Mod(1,2)&&mu=1,t=k,mu=0));\
for(k=1,t,for(k1=k+1,na,if(a[k,k1]==0,beta=1));)\
for(k=t+1,na,if(Mod(a[k,k],2)==Mod(0,2),beta=1));\
if(beta==1,alpha=0);\
t1=0;gam1=1;for(k=1,na,if(Mod(a[k,k],2)==Mod(1,2)&&gam1==1,\
for(k1=k+1,na,if(a[k,k1]==0&&gam1==1,gam1=0)),gam1=0);\
if(gam1==1,t1=t1+1));\
t2=t1;gam2=1;\
for(k=t1+1,na,if(Mod(a[k,k],2)==Mod(1,2)&&gam2==1,t2=k,gam2=0));\
if(t2==t1,\
if(t2==t1+1,trans=matrix(na,na);for(k=1,na,trans[k,k]=1);\
trans[t2,t1+1]=1;trans[t1+1,t1+1]=0;trans[t1+1,t2]=1;trans[t2,t2]=0;\
a=trans~*a*trans);\
trans=matrix(na,na);for(k=1,na,trans[k,k]=1);\
for(m=t1+2,na,trans[t1+1,m]=-a[t1+1,m]/a[t1+1,t1+1]);\
a=trans~*a*trans);\
sign8=Mod(0,8);\
for(k=1,t,sign8=sign8+Mod(a[k,k],8));\
print(u[vv[k1]],"size= ss1,"type= ty,"det= dcc1,"sign8= sign8);\
kill(alpha);kill(sign8);kill(t);kill(t1);kill(t2);kill(a);kill(trans);\
kill(beta);kill(mu);kill(gam1);kill(gam2);kill(na);\
ccc1=cc1^-1;\
for(k2=k1+1,nvv,if(k2<nvv,ss2=vv[k2+1]-vv[k2],ss2=n-vv[k2]+1);\
cc21=matrix(ss1,ss2,X,Y,lll[vv[k1]+X-1,vv[k2]+Y-1]);\
cc21n=ccc1*cc21;ttt=matrix(n,n);for(aa1=1,n,ttt[aa1,aa1]=1);\
for(aa1=1,ss1,for(aa2=1,ss2,ttt[vv[k1]+aa1-1,vv[k2]+aa2-1]=-cc21n[aa1,aa2]));\
lll=ttt~*lll*ttt));\

```

Список литературы

1. В. В. Никулин, “Вырождения кэлеровых K3-поверхностей с конечными симплектическими группами автоморфизмов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:4 (2015), 103–158; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Degenerations of Kählerian K3 surfaces with finite symplectic automorphism groups”, *Izv. Math.*, **79**:4 (2015), 740–794.

2. В. В. Никулин, “О куммеровых поверхностях”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:2 (1975), 278–293; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On Kummer surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:2 (1975), 261–275.
3. В. В. Никулин, “Конечные группы автоморфизмов келеровых поверхностей типа K_3 ”, Тр. ММО, **38**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 75–137; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Finite automorphism groups of Kähler K_3 surfaces”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, 71–135.
4. В. В. Никулин, “Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 111–177; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Integral symmetric bilinear forms and some of their applications”, *Math. USSR-Izv.*, **14**:1 (1980), 103–167.
5. В. В. Никулин, “Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:1 (1983), 109–188; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Involutions of integral quadratic forms and their applications to real algebraic geometry”, *Math. USSR-Izv.*, **22**:1 (1984), 99–172.
6. V. V. Nikulin, *Kählerian K_3 surfaces and Niemeier lattices*, arXiv:1109.2879.
7. В. В. Никулин, “Кэлеровы K_3 -поверхности и решетки Нимейера. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:5 (2013), 109–154; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Kählerian K_3 surfaces and Niemeier lattices. I”, *Izv. Math.*, **77**:5 (2013), 954–997.
8. K. Hashimoto, “Finite symplectic actions on the K_3 lattice”, *Nagoya Math. J.*, **206** (2012), 99–153; arXiv:1012.2682.
9. R. Miranda, D. R. Morrison, “The number of embeddings of integral quadratic forms. I”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **61**:10 (1985), 317–320.
10. R. Miranda, D. R. Morrison, “The number of embeddings of integral quadratic forms. II”, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **62**:1 (1986), 29–32.
11. D. G. James, “The number of embeddings of quadratic $\mathbb{Z}$ -lattices”, *J. Number Theory*, **58**:1 (1996), 1–8.
12. V. V. Nikulin, *Degenerations of Kählerian K_3 surfaces with finite symplectic automorphism groups. II*, arXiv:1504.00326.
13. И. Р. Шафаревич, Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрин, А. Н. Тюрин, *Алгебраические поверхности*, Тр. МИАН СССР, **75**, Наука, М., 1965, 216 с.; англ. пер.: I. R. Shafarevich, B. G. Averbukh, J. R. Vainberg, A. B. Zhizhchenko, Yu. I. Manin, B. G. Moishezon, G. N. Tyurina, A. N. Tyurin, *Algebraic surfaces*, Proc. Steklov Inst. Math., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967, 281 pp.
14. И. И. Пятецкий-Шапиро, И. Р. Шафаревич, “Теорема Торелли для алгебраических поверхностей типа K_3 ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **35**:3 (1971), 530–572; англ. пер.: I. I. Pjateckij-Šapiro, I. R. Šafarevič, “A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K_3 ”, *Math. USSR-Izv.*, **5**:3 (1971), 547–588.
15. D. Burns, M. Rapoport, “On the Torelli problem for kählerian K_3 surfaces”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **8**:2 (1975), 235–273.
16. Yum-Tong Siu, “A simple proof of the surjectivity of the period map of K_3 surfaces”, *Manuscripta Math.*, **35**:3 (1981), 311–321.
17. A. N. Todorov, “Applications of the Kähler–Einstein–Calabi–Yau metric to moduli of K_3 surfaces”, *Invent. Math.*, **61**:3 (1980), 251–265.
18. Дж. Конвей, Н. Слоэн, *Упаковки шаров, решетки и группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1990, 792 с.; пер. с англ.: J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, Grundlehren Math. Wiss., **290**, Springer-Verlag, New York, 1988, xxviii+663 pp.

19. Вик. С. Куликов, “Вырождения $K3$ поверхностей и поверхностей Энриквеса”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:5 (1977), 1008–1042; англ. пер.: Vik. S. Kulikov, “Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces”, *Math. USSR-Izv.*, **11**:5 (1977), 957–989.
20. *GAP – Groups, Algorithms, Programming – a system for computational discrete algebra*, Version 4.6.5, 2013.

Вячеслав Валентинович Никулин

(VIACHESLAV V. NIKULIN)

Математический институт им. В.А. Стеклова

Российской академии наук, г. Москва

E-mail: nikulini@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

10.10.2015