Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. С. Резвякова, О нулях линейных комбинаций L -функций степени два на критической прямой: подход Сельберга, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2016, том 80, выпуск 3, 151–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/im8463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 06:28:38

УДК 511

И. С. Резвякова

О нулях линейных комбинаций L-функций степени два на критической прямой: подход Сельберга

В работе детально рассмотрен метод А. Сельберга, который позволяет доказать при некоторых естественных предположениях, что положительная доля нетривиальных нулей линейной комбинации L-функций из класса Сельберга лежит на критической прямой. В качестве примера мы приводим необходимые ингредиенты для доказательства этого результата в случае линейной комбинации L-функций степени два, соответствующих автоморфным формам.

Библиография: 29 наименований.

Ключевые слова: гипотеза Римана, нули на критической прямой, класс Сельберга, плотностные теоремы, L-функции Гекке.

DOI: 10.4213/im8463

*Памяти профессора Атле Сельберга
и профессора Анатолия Алексеевича Карацубы*

§ 1. Введение

В знаменитой работе [1] А. Сельберг доказал, что положительная доля нетривиальных нулей дзета-функции Римана лежит на критической прямой. Аналогичный результат также справедлив для L-функций Дирихле.

В [2] Сельберг определил класс L-рядов (S класс, или класс Сельберга), для которых предполагается справедливость аналога гипотезы Римана. Одной из основных характеристик элемента из класса Сельберга является его степень. Существует гипотеза, утверждающая, что степень d функции из класса S является неотрицательным целым числом. Известно [3], [4], что класс Сельберга пуст для нецелой степени $d < 2$. Класс Сельберга степени один полностью описан: он состоит из дзета-функции Римана и мнимых сдвигов L-функций Дирихле. Однако структура класса Сельберга степени два (также как и более высоких степеней) не ясна.

Первый аналог теоремы Сельберга [1] для функции степени два был доказан Д. Л. Хафнером. В [5] он установил этот результат для L-функций, соответствующих голоморфным параболическим формам четного веса для полной модулярной группы с тривиальным характером, которые также являются собственными функциями всех операторов Гекке, и позже в [6] он установил

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

его в случае L-функций, соответствующих формам Маасса (см. необходимые определения, например, в [7]). В [8] нами был расширен класс L-функций, для которых имеет место аналог теоремы Сельберга, и доказан соответствующий результат для L-функций, отвечающих собственным параболическим формам произвольного целого веса $k \geq 1$ относительно конгруэнц-подгруппы Гекке с произвольным характером.

Типичная линейная комбинация L-функций из класса Сельберга (т. е. такая, которая не имеет разложения в виде эйлерова произведения в области абсолютной сходимости соответствующего ряда) имеет много нулей вне критической прямой и, таким образом, не удовлетворяет гипотезе Римана (см. работы Х. Давенпорта и Х. Хейльбронна [9], С. М. Воронина [10], Й. Ли [11] и А. Сельберга [2]). Тем не менее, существует гипотеза, что почти все нетривиальные нули таких линейных комбинаций, которые, кроме того, удовлетворяют функциональному уравнению Риманова типа, лежат на критической прямой. Эта гипотеза была условно доказана Э. Бомбьери и Д. Хейчалом [12] для дзета-функции Эпштейна с использованием обобщенной гипотезы Римана и гипотезы о парной корреляции для L-функций Гекке.

Первый безусловный результат (и более сильный, чем тот, который может быть получен с помощью метода Харди–Литтлвуда) о числе нулей на критической прямой для линейной комбинации L-функций степени один был опубликован С. М. Ворониным [13] в 1980 г. Позже, в 1989 г., А. А. Карацуба [14], [15] сделал существенное улучшение в этой проблеме, и, окончательно, в конце 90-х гг. А. Сельберг [16], [17] доказал, что линейная комбинация (которая удовлетворяет также функциональному уравнению) L-функций степени один имеет положительную долю нетривиальных нулей на критической прямой. Атле Сельберг в своем доказательстве этого результата использовал, помимо методов из [1], дополнительную информацию о распределении значений L-функций на критической прямой. Сельбергом замечено, что его метод может работать и в случае линейной комбинации L-функций степени два. В настоящей работе мы даем детальное доказательство результата А. Сельберга в случае линейной комбинации L-функций Гекке (см. предыдущий результат в [18]). Этот метод может быть применен для общей линейной комбинации L-функций из класса Сельберга. Говоря не строго, если мы можем доказать для набора L-функций из класса Сельберга, что каждая из них содержит положительную долю нетривиальных нулей на критической прямой, то мы скорее всего можем доказать и аналог теоремы Сельберга для линейной комбинации (удовлетворяющей функциональному уравнению) этих L-функций. Это достигается с помощью “унификации” доказательств двух результатов: аналога теоремы Сельберга [1] и плотностной теоремы Сельберга для каждой L-функции. Этого достаточно, чтобы следовать одним и тем же аргументам и получить исходное утверждение для любой линейной комбинации. Таким образом, мы отвечаем на вопрос, поставленный в [19], о строгом доказательстве результата Сельберга для функции Давенпорта–Хейльбронна, но в более общем случае.

Схема доказательства придумана Сельбергом [17] и описана в § 3. Доказательство опирается на оценки (3)–(5) для каждой L-функции из линейной комбинации, также как и на результат о распределении значений (6), которые мы должны получать в каждом конкретном случае. Все остальные детали в доказательстве аналогичны для любой произвольной линейной комбинации. Оценки (3)–(5) играют ключевую роль при доказательстве аналога теоремы Сельберга [1] для L-функции. Напомним (см. [5, лемма 4] или [8, лемма 2]), что (3) и (4) следуют из одной и той же оценки среднего. Также, благодаря специальному выбору “успокаивающего множителя”, представленному в нашем доказательстве, оценка (5), так же как и плотностная теорема Сельберга (10) (которую мы будем использовать, чтобы получить результат о распределении значений (6)) являются следствиями (4) (см. § 4). Если предположить, в дополнение, что L-функции заданной линейной комбинации являются в некотором смысле независимыми (к примеру, мы можем предположить справедливость гипотезы Сельберга об ортогональности этих L-функций), мы можем доказать (6) с помощью (10) (см. § 6).

Описанный подход мы проводим во всех деталях для линейной комбинации L-функций Гекке с комплексными характерами на группе классов идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ (т.е. линейной комбинации L-функций из класса Сельберга степени два, соответствующих автоморфным параболическим формам, рассмотренных в [8]). Аналогично работе [8], мы докажем в § 5 оценки (3) и (4), однако с другим “успокаивающим множителем”, и поэтому, следуя изложению § 3, установим основной результат, сформулированный в теореме 1. Мы также можем доказать аналогичный результат для дзета-функции Эшштейна (см. [20]), соответствующей бинарной положительно определенной квадратичной форме с целыми коэффициентами (т.е. для линейной комбинации L-функций Гекке с комплексными и вещественными характерами на группе классов идеалов). Необходимые оценки средних значений для L-функций с вещественными характерами Гекке (которые соответствуют не параболическим формам) будут представлены в дополнительной работе для завершения доказательства в этом случае.

§ 2. Определения и формулировка основного результата

Пусть $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, и $-D$ – фундаментальный дискриминант. Рассмотрим характер Гекке ψ на группе классов идеалов $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. Назовем характер Гекке *комплексным*, если он принимает хотя бы одно комплексное (не вещественное) значение, иначе – назовем его *вещественным* характером.

При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим L-функцию Гекке

$$L_{\psi}(s) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathbb{I}^*} \frac{\psi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^s},$$

где суммирование ведется по всем ненулевым идеалам $\mathfrak{a}$ кольца целых алгебраических чисел $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$, а $N\mathfrak{a}$ обозначает норму идеала $\mathfrak{a}$. Ряд для $L_{\psi}(s)$

в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ может быть записан в виде эйлерова произведения как

$$L_\psi(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\psi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s} \right)^{-1},$$

где произведение берется по всем простым идеалам. Пусть

$$r_\psi(n) = \sum_{N\mathfrak{a}=n} \psi(\mathfrak{a}).$$

Из теории идеалов мнимых квадратичных полей имеет место следующее представление в виде эйлерова произведения по простым числам p для $L_\psi(s)$:

$$L_\psi(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_\psi(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{r_\psi(p)}{p^s} + \frac{\chi_D(p)}{p^{2s}} \right)^{-1} = \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_p}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\delta_p}{p^s} \right)^{-1},$$

где $|\gamma_p|, |\delta_p| \in \{0, 1\}$. Таким образом, $r_\psi(n)$ могут быть оценены через коэффициенты ряда, определенного следующим эйлеровым произведением:

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

Следовательно,

$$|r_\psi(n)| \leq \tau(n).$$

Функция $L_\psi(s)$ мероморфно продолжается на всю комплексную плоскость с единственным полюсом (первого порядка) в точке $s = 1$ в случае главного характера, и без особенностей — для неглавного характера Гекке. Э. Гекке ([21], [22]) доказал справедливость функционального уравнения для $L_\psi(s)$: пусть

$$\Lambda_\psi(s) = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{D}} \right)^{-s} \Gamma(s) L_\psi(s),$$

тогда

$$\Lambda_\psi(s) = \Lambda_\psi(1-s).$$

Гекке также установил связь между L-функциями Гекке и модулярными формами. При $z \in \mathbb{H} = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ положим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} r_\psi(n) e^{2\pi i n z}.$$

Если ψ — комплексный характер Гекке, то $f(z)$ является голоморфной параболической формой веса 1 относительно $\Gamma_0(D)$ с характером $\chi_D(\cdot) = \left(\frac{-D}{\cdot}\right)$. Другими словами, для любой матрицы $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из группы $\Gamma_0(D)$ (которая является подгруппой $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ и состоит из всех матриц γ , удовлетворяющих условию $c \equiv 0 \pmod{D}$), справедливо соотношение

$$f(\gamma z) = \chi_D(\gamma)(cz + d)f(z),$$

где $\chi_D(\gamma) = \chi_D(d)$ (см. [22], [7]).

В [8] мы доказали, что положительная доля нетривиальных нулей $L_\psi(s)$ лежит на критической прямой. В этой работе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F(s) = \sum_{j=1}^m c_j L_j(s)$ – линейная комбинация m различных L-функций Гекке, соответствующих комплексным характеристам на группе классов идеалов, с вещественными коэффициентами c_j . Тогда положительная доля нетривиальных нулей $F(s)$ лежит на критической прямой. А именно, если обозначить через $N_0(T)$ количество нулей $F(s)$ на интервале $\{s = 1/2 + it, T \leq t \leq 2T\}$, то при любом достаточно большом значении T имеем

$$N_0(T) \gg \frac{1}{m} T \ln T.$$

§ 3. Подход Сельберга

Следующая идея улавливания нулей нечетного порядка вещественнозначной функции восходит к Х. Бору и Э. Ландау. Пусть у нас есть непрерывная вещественнозначная функция $F(t)$, и при некотором t и $H > 0$ мы можем показать, что

$$\int_t^{t+H} |F(u)| du > \left| \int_t^{t+H} F(u) du \right|. \quad (1)$$

Тогда $F(\cdot)$ меняет знак на $(t, t+H)$ и, таким образом, имеет нуль на этом интервале. Легко показать, что если мера подмножества $\{t \in (T, 2T), \text{ где выполнено (1)}\}$ имеет максимальный порядок (т. е. T), то количество нулей функции F на интервале $(T, 2T)$ не меньше, чем cTH^{-1} , где c – некоторая абсолютная положительная постоянная.

В [1] Сельберг ввел специальный “успокаивающий множитель”, чтобы доказать свой блестящий результат о числе нулей дзета-функции Римана на интервалах критической прямой. Для заданной L-функции “успокаивающий множитель” связан с $L^{-1}(s)$, и мы выберем его следующим образом (см. в [17] аналогичный выбор). Для $L_j(s) := L_{\psi_j}(s)$ определим $\alpha_j(\nu)$ соотношением

$$\sum_{\nu=1}^{+\infty} \alpha_j(\nu) \nu^{-s} = L_j(s)^{-1/2}.$$

При $X \geq 3$ определим “успокаивающий множитель” $\eta_j(s)$ следующим полиномом Дирихле:

$$\eta_j(s) = \sum_{\nu < \sqrt{X}} \frac{\alpha_j(\nu)}{\nu^s} + \sum_{\sqrt{X} \leq \nu \leq X} \frac{\alpha_j(\nu)}{\nu^s} \left(2 - 2 \frac{\ln \nu}{\ln X} \right) := \sum_{\nu \leq X} \frac{\beta_j(\nu)}{\nu^s},$$

где

$$\beta_j(\nu) = \alpha_j(\nu) \mathcal{L}(\nu) \quad \text{при } \nu \leq X, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu < \sqrt{X}, \\ 2 \frac{\ln X / \nu}{\ln X} & \text{при } \sqrt{X} \leq \nu \leq X, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Мы будем брать $H \asymp 1/\ln T$ и X как маленькую (но фиксированную) степень T (т. е. $\ln X \asymp \ln T$). Определим

$$I_j(t, H) = \int_t^{t+H} \Lambda_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \left| \eta_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right|^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\right)u\right) du$$

и предположим, что справедливы следующие оценки:

$$\int_T^{2T} |I_j(t, H)|^2 dt = O\left(T \frac{H}{\ln T}\right), \quad (3)$$

$$\int_T^{2T} \left| L_j\left(\frac{1}{2} + it\right) \eta_j^2\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt = O(T), \quad (4)$$

и, полагая

$$M_j(t, H) = \int_t^{t+H} L_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \eta_j^2\left(\frac{1}{2} + iu\right) du - H,$$

что

$$\int_T^{2T} |M_j(t, H)|^2 dt = O\left(T \frac{H}{\ln T}\right). \quad (5)$$

Мы будем обращаться к трем последним оценкам при доказательстве основного результата.

Приведенные ниже объяснения в этом параграфе следуют близко к [17] и сохраняют большинство обозначений и фраз. Для адаптации идеи из [1] в случае линейной комбинации нам понадобится несколько результатов о распределении значений $\ln |L_j(1/2 + it)|$. Для двух различных L-функций Гекке разность

$$\frac{\ln |L_j(1/2 + it)| - \ln |L_{j'}(1/2 + it)|}{\sqrt{(n_j + n_{j'})\pi \ln \ln t}}$$

имеет нормальное распределение, где n_j принимает значение один или два в зависимости от того, является ли характер ψ_j , соответственно, комплексным или вещественным. Более точно: пусть $\varkappa_{a,b}$ обозначает характеристическую функцию интервала (a, b) , тогда

$$\int_T^{2T} \varkappa_{a,b} \left(\frac{\ln |L_j(1/2 + it)| - \ln |L_{j'}(1/2 + it)|}{\sqrt{(n_j + n_{j'})\pi \ln \ln T}} \right) dt = T \int_a^b e^{-\pi u^2} du + O(T\varphi(T)), \quad (6)$$

где $\varphi(T) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$. Скелет доказательства (6) (который одинаков для разных L-функций) представлен в § 6. Очень точная оценка для $\varphi(T)$ может быть получена с помощью (13), следуя идеям Атле Сельберга, которые были реализованы в деталях для дзета-функции Римана К. М. Тсангом в его диссертации [23]. В этом случае будем иметь

$$\varphi(T) \ll \frac{(\ln \ln \ln T)^2}{\sqrt{\ln \ln T}}.$$

Более простой метод А. Гоша [24] дает более слабую оценку, хотя для нашей задачи мы можем обойтись любым нетривиальным результатом

$$\varphi(T) = o(1).$$

Зафиксируем $0 < \delta < 1/2$ и предположим, не ограничивая общности, что справедлива формула (6) с монотонно убывающей функцией $\varphi(T)$ такой, что

$$\varphi(T) \gg (\ln \ln T)^{-1/2+\delta}.$$

Тогда подмножество интервала $(T, 2T)$, для которого справедливо неравенство

$$\left| \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \right| \leq (\ln \ln T)^\delta,$$

имеет меру $O(T\varphi(T))$. Таким образом, основную часть времени одна из $L_j(1/2 + it)$ существенно доминирует над остальными. Мы покажем далее, что это доминирование в некотором смысле устойчиво на промежутках довольно длинных по сравнению с $1/\ln T$. Предположим, что $1 \leq H \ln T \leq \varphi^{-1}(T)$. Определим

$$\Delta_j(t, H) = \frac{1}{H} \int_t^{t+H} \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + iu \right) \right| du.$$

Для $0 \leq u \leq H$ и любого натурального числа k можно показать, что (см. доказательство в §6)

$$\int_T^{2T} \left(\Delta_j(t, H) - \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| \right)^{2k} dt = O(Te^{Ak}(k^{4k} + k^k \ln^k(H \ln T))). \quad (7)$$

Интегрируя по u , мы получим

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \int_0^H \left(\Delta_j(t, H) - \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| \right)^{2k} du dt \\ = O(TH e^{Ak}(k^{4k} + k^k (\ln \ln \ln T)^k)). \end{aligned}$$

Если обозначить через $W_j(t)$ подмножество таких $u \in [0, H]$, для которых

$$\left| \Delta_j(t, H) - \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| \right| > (\ln \ln T)^{\delta/2},$$

то, выбирая k достаточно большим, чтобы выполнялось $k\delta > 7$, найдем, что мера этого подмножества может быть оценена сверху как

$$\mu(W_j(t)) \leq \frac{H}{(\ln \ln T)^3},$$

за исключением подмножества t из $(T, 2T)$ меры $O(T(\ln \ln T)^{-3})$.

Если мы исключим из интервала $(T, 2T)$ все t такие, что

$$\left| \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \right| \leq (\ln \ln T)^\delta$$

при некоторых $j \neq j'$, а также исключим все t такие, что

$$\mu(W_j(t)) > \frac{H}{(\ln \ln T)^3}$$

при каком-то j , то получим, что интервал $(T, 2T)$, за исключением подмножества меры $O(m^2 T \varphi(T))$, может быть разбит на m множеств S_j таких, что при каждом $t \in S_j$ и $j' \neq j$ мы имеем

$$\left| \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \right| > (\ln \ln T)^\delta,$$

и при $u \in H_t := (0, H) \setminus \bigcup_{k=1}^m W_k(t)$

$$\begin{aligned} & \left| \ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| - \ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| \right| \\ &= \left(\ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| - \Delta_j(t, H) \right) - \left(\ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \Delta_j(t, H) \right) \\ &\quad - \left(\ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| - \Delta_{j'}(t, H) \right) + \left(\ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \Delta_{j'}(t, H) \right) \\ &\quad + \left(\ln \left| L_j \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \ln \left| L_{j'} \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| \right) \\ &> (\ln \ln T)^\delta - 4(\ln \ln T)^{\delta/2} > \frac{1}{2}(\ln \ln T)^\delta. \end{aligned}$$

Из (4) видно, что

$$\int_t^{t+H} \left| L_j \left(\frac{1}{2} + iu \right) \eta_j^2 \left(\frac{1}{2} + iu \right) \right|^2 dt < H \ln \ln T,$$

за исключением подмножества $t \in (T, 2T)$ меры $O(T/(\ln \ln T))$. Мы также исключим эти значения t из S_j , не переобозначая последние.

Определим $\mathfrak{F}(t)$ формулой

$$\mathfrak{F}(t) = \sum_{j=1}^m c_j \Lambda_j \left(\frac{1}{2} + it \right).$$

Заметим, что это вещественнозначная функция при вещественном t , и ее вещественные нули являются нулями нашей линейной комбинации на критической прямой.

Теперь для $t \in S_j$ сравним два значения:

$$\begin{aligned} I(t, H) &= \int_{H_t} \left| \mathfrak{F}(t+u) \eta_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right|^2 \exp \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T} \right) (t+u) \right) du, \\ J(t, H) &= \int_{H_t} \left| \mathfrak{F}(t+u) \eta_j^2 \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \right| \exp \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T} \right) (t+u) \right) du. \end{aligned}$$

Если $J(t, H) > |I(t, H)|$, то $\mathfrak{F}(\cdot)$ меняет знак на $(t, t+H)$ и, следовательно, имеет там по крайней мере один нуль нечетного порядка. С помощью неравенства Коши найдем, что

$$I(t, H) = c_j \int_{u \in H_t} \Lambda_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \eta_j \left(\frac{1}{2} + i(t+u) \right) \exp \left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T} \right) (t+u) \right) du$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(m \int_{u \in H_t} \left| L_j\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) \right| \left| \eta_j\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) \right|^2 e^{-\frac{1}{2}(\ln \ln T)^\delta} du\right) \\
& = c_j \int_0^H \Lambda_j\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) \left| \eta_j\left(\frac{1}{2} + i(t+u)\right) \right|^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\right)(t+u)\right) du \\
& \quad + O\left(\sqrt{\frac{H}{(\ln \ln T)^3}} \sqrt{H \ln \ln T}\right) + O\left(m \sqrt{\frac{H \cdot H \ln \ln T}{e^{(\ln \ln T)^\delta}}}\right) \\
& = c_j I_j(t, H) + O\left(\frac{H}{\ln \ln T}\right),
\end{aligned}$$

если T достаточно велико по сравнению с m . Аналогично получим, что

$$J(t, H) = c_j J_j(t, H) + O\left(\frac{H}{\ln \ln T}\right),$$

где

$$J_j(t, H) = \int_t^{t+H} \left| \Lambda_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right| \left| \eta_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right|^2 \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{T}\right)u\right) du.$$

При $T \leq t \leq 2T$, используя формулу Стирлинга для гамма-функции, мы получим

$$J_j(t, H) \geq e^{-3} \int_t^{t+H} \left| L_j\left(\frac{1}{2} + iu\right) \right| \eta_j^2\left(\frac{1}{2} + iu\right) du \geq e^{-3} (H - |M_j(t, H)|).$$

Из (3) и (5) следует, что

$$|I_j(t, H)| \leq \frac{H}{3e^3} \quad \text{и} \quad |M_j(t, H)| \leq \frac{H}{3}$$

вне подмножества меры $O(T/(H \ln T))$. Таким образом, для $t \in S_j$, за исключением подмножества меры $O(T/(H \ln T))$, справедливо неравенство

$$\frac{|I(t, H)|}{c_j} \leq \frac{H}{3e^3} + O\left(\frac{H}{\ln \ln T}\right) < \frac{H}{2e^3} < \frac{2H}{3e^3} - O\left(\frac{H}{\ln \ln T}\right) \leq \frac{J(t, H)}{c_j},$$

или

$$|I(t, H)| < J(t, H).$$

Учитывая все j , мы получим, что $F(\cdot)$ меняет знак на $(t, t+H)$ для t из подмножества интервала $(T, 2T)$ меры

$$\sum_{j=1}^m \mu(S_j) - O\left(\frac{mT}{H \ln T}\right) = T - O\left(\frac{mT}{H \ln T}\right) - O(m^2 T \varphi(T)),$$

что обеспечивает наличие более чем $(c/m)T \ln T$ нулей ($c > 0$) функции F (если T достаточно велико), взяв $H = Am/\ln T$ с достаточно большой постоянной A .

§ 4. Доказательства оценки среднего значения для $M(t, H)$ и плотностной теоремы Сельберга

В этом параграфе для заданной L-функции мы докажем (5), опираясь на оценку (4) (см. в [17] сходный материал). В конце этого параграфа мы поясним, что такими же аргументами можно доказать плотностную теорему Сельберга для нашей L-функции. В этом и последующих параграфах мы опустим для упрощения обозначений индекс j заданной L-функции.

Используя теорему Коши о вычетах, найдем

$$\begin{aligned} |M(t, H)| &= \left| \int_t^{t+H} \left(L\left(\frac{1}{2} + iu\right) \eta^2\left(\frac{1}{2} + iu\right) - 1 \right) du \right| \\ &\leq \left| \int_{1/2}^{3/2} (L(\sigma + it) \eta^2(\sigma + it) - 1) d\sigma \right| \\ &\quad + \left| \int_{1/2}^{3/2} (L(\sigma + i(t+H)) \eta^2(\sigma + i(t+H)) - 1) d\sigma \right| \\ &\quad + \left| \int_t^{t+H} \left(L\left(\frac{3}{2} + iu\right) \eta^2\left(\frac{3}{2} + iu\right) - 1 \right) du \right|. \end{aligned}$$

Последний интеграл оценивается как $O(X^{-a/4})$, где a – произвольное положительное число, меньшее единицы, поскольку из определения (2) для $\beta(\nu)$ подынтегральное выражение является рядом Дирихле

$$\sum_{n > \sqrt{X}} n^{-3/2 - iu} \left(\sum_{m\nu_1\nu_2 = n} r(m) \beta(\nu_1) \beta(\nu_2) \right)$$

со следующей оценкой на коэффициенты:

$$\begin{aligned} |r(m)| &\leq \tau(m), \quad |\beta(\nu)| \leq |\alpha(\nu)|, \quad \sum_{\nu_1\nu_2 = d} |\alpha(\nu_1) \alpha(\nu_2)| \leq \tau(d), \\ \left| \sum_{m\nu_1\nu_2 = n} r(m) \beta(\nu_1) \beta(\nu_2) \right| &\leq \sum_{m\nu_1\nu_2 = n} \tau(m) \tau(\nu_1) \tau(\nu_2) = \tau_6(n). \end{aligned} \tag{8}$$

Также,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{1/2}^{3/2} (L(\sigma + it) \eta^2(\sigma + it) - 1) d\sigma \right|^2 \\ &\leq \int_{1/2}^{3/2} X^{(a/2)(1/2 - \sigma)} d\sigma \int_{1/2}^{3/2} X^{(a/2)(\sigma - 1/2)} |L(\sigma + it) \eta^2(\sigma + it) - 1|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Если мы определим

$$J_\sigma = \int_T^{2T} |L(\sigma + it) \eta^2(\sigma + it) - 1|^2 dt,$$

то из (4) найдем, что

$$J_{1/2} \ll T + \int_T^{2T} \left| L \eta^2 \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \ll T,$$

а из (8) — что

$$\begin{aligned} J_{3/2} &= \int_T^{2T} \left| \sum_{n > \sqrt{X}} n^{-3/2-it} \left(\sum_{m\nu_1\nu_2=n} r(m)\beta(\nu_1)\beta(\nu_2) \right) \right|^2 dt \\ &\ll T \sum_{n > \sqrt{X}} \frac{\tau_6^2(n)}{n^3} + O(1) \ll TX^{-a}. \end{aligned}$$

Теперь, применяя теорему Габриэла о выпуклости, получим

$$J_\sigma = O(TX^{-a(\sigma-1/2)}). \quad (9)$$

Таким образом, полагая, к примеру, $a = 1/2$, и предполагая, что $H \gg \ln T / \ln^2 X$, найдем

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} |M(t, H)|^2 dt &\ll TX^{-a/2} + T \left(\int_{1/2}^{3/2} X^{-(a/2)(\sigma-1/2)} d\sigma \right)^2 \\ &= O\left(\frac{T}{\ln^2 X}\right) = O\left(\frac{TH}{\ln T}\right). \end{aligned}$$

Оценка (9), полученная выше, является также достаточным инструментом для доказательства следующей плотностной теоремы Сельберга для заданной L-функции:

$$N(\sigma, T) \ll T^{1-a_1(\sigma-1/2)} \ln T, \quad (10)$$

где a_1 — некоторая положительная постоянная, а $N(\sigma, T)$ — число нулей $L(s)$ в области $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $T \leq \operatorname{Im} s \leq 2T$. Из (9) плотностная теорема может быть установлена стандартными рассуждениями (см., к примеру, [25] или [26]). Мы будем использовать плотностную теорему (10) для вывода оценок среднего значения (13), которые необходимы для доказательства предельной теоремы (6).

§ 5. Оценка сумм Сельберга при доказательстве (3) и (4) в случае комплексного характера Гекке ψ

Известно (см. [5] или [8]), что и (3), и (4) эквивалентны подходящим оценкам “диагонального” и “недиагонального” слагаемых, которые, в свою очередь, сводятся к определенной оценке сумм Сельберга (см. лемму 1 ниже) и аддитивной проблеме с коэффициентами функции $L(s) = L_\psi(s)$. Последняя проблема (в случае комплексного характера Гекке) решена, например, в [8, лемма 4], и ее доказательство не чувствительно к различному выбору коэффициентов $\beta(\nu)$. Таким образом, для установления (3) и (4) достаточно доказать утверждение, сформулированное в следующей лемме. Оно аналогично утверждению [8, лемма 3] с другими значениями $\beta(\nu)$ (ср. наше обозначение (2) и обозначение (2.2) из [8]).

ЛЕММА 1. Пусть $0 \leq \theta \leq 1/4$. Определим сумму $S(\theta)$ равенством

$$S(\theta) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1)\beta(\nu_2)\beta(\nu_3)\beta(\nu_4)}{\nu_2\nu_4} \left(\frac{q}{\nu_1\nu_3}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1\nu_4}{q}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2\nu_3}{q}, 1-\theta\right),$$

где $q = (\nu_1\nu_4, \nu_2\nu_3)$ и

$$K(m, s) = \prod_{p|m} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1} \\ \times \prod_{p^\alpha || m} \left(r(p^\alpha) + \frac{r(p^{\alpha+1})r(p)}{p^s} + \frac{r(p^{\alpha+2})r(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right).$$

Тогда имеет место оценка

$$S(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X},$$

равномерная по θ .

Сперва мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $X \geq 3$,

$$S_\theta(X, \gamma, N) = \sum_{\substack{\nu \leq X, \\ (\nu, N)=1}} \frac{\alpha(\nu)K(\nu, 1-\theta)}{\nu^{1-\gamma}} \ln \frac{X}{\nu}.$$

Для $0 \leq \theta, \gamma \leq 1/4$ справедлива оценка

$$S_\theta(X, \gamma, N) \ll X^\gamma \sqrt{\ln X} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство ведется следуя, фактически, доказательству леммы 3 из [8]. При $\operatorname{Re} s > 1$ рассмотрим производящую функцию

$$h_{\theta, N}(s) = \sum_{(n, N)=1} \frac{\alpha(n)K(n, 1-\theta)}{n^s} \\ = \prod_{p \nmid N} \left(1 + \frac{\alpha(p)K(p, 1-\theta)}{p^s} + \frac{\alpha(p^2)K(p^2, 1-\theta)}{p^{2s}} + \dots \right) \\ = \prod_p \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{-1/2} \prod_{p|N} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2} \\ \times \prod_{(p, N)=1} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2} \\ \times \left(1 + \frac{\alpha(p)K(p, 1-\theta)}{p^s} + \frac{\alpha(p^2)K(p^2, 1-\theta)}{p^{2s}} + \dots \right).$$

При $0 \leq \theta \leq 1/4$, $s = \sigma + it$ произведение

$$N_1(s, \theta) = \prod_{(p, N)=1} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2} \\ \times \left(1 + \frac{\alpha(p)K(p, 1-\theta)}{p^s} + \frac{\alpha(p^2)K(p^2, 1-\theta)}{p^{2s}} + \dots \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{(p,N)=1} \left(1 + \frac{r^2(p)}{2p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) \right) \left(1 - \frac{r^2(p)}{2p^s} + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right) + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) \right) \\
&= \prod_{(p,N)=1} \left(1 + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma}}\right) + O\left(\frac{1}{p^{\sigma+1-\theta}}\right) \right)
\end{aligned}$$

задает аналитическую функцию в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1/2$. Поэтому справедливо следующее тождество для производящей функции в области $\operatorname{Re} s \geq 1$:

$$h_{\theta,N}(s) = (D(s))^{-1/2} N_1(s, \theta) G_N(s),$$

где

$$\begin{aligned}
D(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^2(n)}{n^s}, \\
G_N(s) &= \prod_{p|N} \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s} + \frac{r^2(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

С помощью формулы суммирования Перрона найдем

$$\begin{aligned}
S_{\theta}(X, \gamma, N) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} h_{\theta,N}(s+1-\gamma) \frac{X^s}{s^2} ds \\
&= \frac{X^{\gamma}}{2\pi i} \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{X^s}{(s+\gamma)^2} \frac{N_1(s+1, \theta) G_N(s+1)}{(D(s+1))^{1/2}} ds.
\end{aligned}$$

При $\operatorname{Re} s \geq 1$ справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
N_1(s, \theta) &\ll 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}, \\
G_N(s) &\ll \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^2 := G_N.
\end{aligned}$$

Перенесем интегрирование с прямой $\operatorname{Re} s = 1$ на контур, состоящий из полуокружности

$$\{|s| = (\ln X)^{-1}, \operatorname{Re} s \geq 0\}$$

и двух лучей

$$\{s = it, |t| \geq (\ln X)^{-1}\}.$$

В области $\operatorname{Re} s \geq 1$ воспользуемся оценкой

$$|D(s)|^{-1} \ll |s-1|.$$

Соответствующий интеграл по полуокружности (обозначим его через K_1) оценивается следующим образом:

$$K_1 \ll X^{\gamma} G_N \frac{X^{(\ln X)^{-1}} (\ln^{-1} X)^{3/2}}{(\ln^{-1} X)^2} \ll X^{\gamma} (\ln X)^{1/2} G_N.$$

Вклад соответствующего интеграла по двум лучам (обозначим его через K_2) также необходимого порядка:

$$K_2 \ll X^\gamma G_N \int_{(\ln X)^{-1}}^{+\infty} \frac{t^{1/2}}{t^2} dt \ll X^\gamma (\ln X)^{1/2} G_N.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Используя формулу обращения Мёбиуса

$$f(q) = \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) f\left(\frac{d}{m}\right),$$

получим

$$\begin{aligned} & q^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4}{q}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3}{q}, 1-\theta\right) \\ &= \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right). \end{aligned}$$

Подставляя это соотношение в выражение для $S(\theta)$, найдем

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \sum_{\nu_1, \dots, \nu_4 \leq X} \frac{\beta(\nu_1) \beta(\nu_2) \beta(\nu_3) \beta(\nu_4)}{\nu_2 \nu_4 (\nu_1 \nu_3)^{1-\theta}} \sum_{d|q} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} \\ &\times K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right) K\left(\frac{\nu_2 \nu_3 m}{d}, 1-\theta\right) = \sum_{d \leq X^2} \sum_{m|d} \mu(m) \left(\frac{d}{m}\right)^{1-\theta} g^2(d, m), \end{aligned}$$

где

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\nu_1 \nu_4 \equiv 0 \pmod{d}, \\ \nu_j \leq X}} \frac{\beta(\nu_1) \beta(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K\left(\frac{\nu_1 \nu_4 m}{d}, 1-\theta\right).$$

Представляя числа ν_j в виде $\nu_j = \delta_j \nu'_j$, где $(\nu'_j, d) = 1$, а все простые делители δ_j содержатся среди делителей d (т. е. $\delta_j | d^\infty$), мы получим

$$g(d, m) = \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d}, \\ \delta_j | d^\infty}} \frac{1}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} \sum_{\substack{\delta_j \nu_j \leq X, \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\beta(\delta_1 \nu_1) \beta(\delta_4 \nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d} \nu_1 \nu_4, 1-\theta\right).$$

Из определения чисел $\beta(\nu)$ следует, что

$$\begin{aligned} g(d, m) &= \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d}, \\ \delta_j | d^\infty}} \frac{\alpha(\delta_1) \alpha(\delta_4)}{\delta_1^{1-\theta} \delta_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1-\theta\right) \\ &\times \sum_{\substack{\nu_j \leq X/\delta_j, \\ (\nu_j, d)=1}} \frac{\alpha(\nu_1) \alpha(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta} \nu_4} K(\nu_1 \nu_4, 1-\theta) \mathcal{L}(\delta_1 \nu_1) \mathcal{L}(\delta_4 \nu_4). \end{aligned}$$

Обозначим внутреннюю сумму в последнем равенстве через S . Пусть

$$(\nu_1, \nu_4) = n, \quad \nu_1 = n l_1, \quad \nu_4 = n l_4, \quad (l_1, l_4) = 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{(n,d)=1} \frac{1}{n^{2-\theta}} \sum_{\substack{l_j \leq X/\delta_j n, \\ (l_j, d)=1, \\ (l_1, l_4)=1}} \frac{\alpha(nl_1)\alpha(nl_4)}{l_1^{1-\theta}l_4} K(n^2l_1l_4, 1-\theta) \mathcal{L}(\delta_1nl_1) \mathcal{L}(\delta_4nl_4) \\
 &= \sum_{(n,d)=1} \frac{1}{n^{2-\theta}} \sum_{\substack{k_1, k_4 | n^\infty, \\ (k_1, k_4)=1}} \frac{\alpha(nk_1)\alpha(nk_4)K(n^2k_1k_4, 1-\theta)}{k_1^{1-\theta}k_4} \\
 &\quad \times \sum_{\substack{l_j \leq X/\delta_j k_j n, \\ (l_j, nd)=1, \\ (l_1, l_4)=1}} \frac{\alpha(l_1)\alpha(l_4)}{l_1^{1-\theta}l_4} K(l_1, 1-\theta)K(l_4, 1-\theta) \mathcal{L}(\delta_1nk_1l_1) \mathcal{L}(\delta_4nk_4l_4).
 \end{aligned}$$

Применим следующее тождество:

$$\sum_{(l_1, l_2)=1} f(l_1, l_2) = \sum_{l_1, l_2} f(l_1, l_2) \sum_{r|(l_1, l_2)} \mu(r) = \sum_r \mu(r) \sum_{l_1, l_2} f(rl_1, rl_2).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{(n,d)=1} \frac{1}{n^{2-\theta}} \sum_{(r, nd)=1} \frac{\mu(r)}{r^{2-\theta}} \sum_{\substack{k_1, k_4 | n^\infty, \\ (k_1, k_4)=1}} \frac{\alpha(nk_1)\alpha(nk_4)K(n^2k_1k_4, 1-\theta)}{k_1^{1-\theta}k_4} \\
 &\quad \times \sum_{\substack{l_j \delta_j k_j nr \leq X, \\ (l_j, nd)=1}} \frac{\alpha(rl_1)\alpha(rl_4)}{l_1^{1-\theta}l_4} K(rl_1, 1-\theta)K(rl_4, 1-\theta) \mathcal{L}(l_1\delta_1k_1nr) \mathcal{L}(l_4\delta_4k_4nr) \\
 &= \sum_{(n,d)=1} \frac{1}{n^{2-\theta}} \sum_{(r, nd)=1} \frac{\mu(r)}{r^{2-\theta}} \sum_{\substack{k_1, k_4 | n^\infty, \\ (k_1, k_4)=1}} \frac{\alpha(nk_1)\alpha(nk_4)K(n^2k_1k_4, 1-\theta)}{k_1^{1-\theta}k_4} \\
 &\quad \times \sum_{l_j | r^\infty} \frac{\alpha(rl_1)\alpha(rl_4)}{l_1^{1-\theta}l_4} K(rl_1, 1-\theta)K(rl_4, 1-\theta) \\
 &\quad \times \sum_{\substack{\nu_j \delta_j k_j l_j nr \leq X, \\ (\nu_j, ndr)=1}} \frac{\alpha(\nu_1)\alpha(\nu_4)}{\nu_1^{1-\theta}\nu_4} K(\nu_1, 1-\theta)K(\nu_4, 1-\theta) \mathcal{L}(\nu_1l_1\delta_1k_1nr) \mathcal{L}(\nu_4l_4\delta_4k_4nr).
 \end{aligned}$$

Положим

$$S_\theta(X, A, \gamma, N) = \sum_{\substack{\nu \leq X/A, \\ (\nu, N)=1}} \frac{\alpha(\nu)K(\nu, 1-\theta)}{\nu^{1-\gamma}} \mathcal{L}(A\nu).$$

Из определения $\mathcal{L}(\nu)$ получим

$$\begin{aligned}
 S_\theta(X, A, \gamma, N) &= \sum_{\substack{1 \leq \nu < \sqrt{X}/A, \\ (\nu, N)=1}} \frac{\alpha(\nu)K(\nu, 1-\theta)}{\nu^{1-\gamma}} \\
 &\quad + \sum_{\substack{\sqrt{X}/A \leq \nu \leq X/A, \\ (\nu, N)=1}} \frac{\alpha(\nu)K(\nu, 1-\theta)}{\nu^{1-\gamma}} 2 \frac{\ln(X/(A\nu))}{\ln X}.
 \end{aligned}$$

Используя при $\nu < \sqrt{X}/A$ тождество

$$2 \frac{\ln(X/(A\nu))}{\ln X} - 2 \frac{\ln(\sqrt{X}/(A\nu))}{\ln X} = 1,$$

найдем, что

$$S_\theta(X, A, \gamma, N) = \frac{2}{\ln X} \left(S_\theta\left(\frac{X}{A}, \gamma, N\right) - S_\theta\left(\frac{\sqrt{X}}{A}, \gamma, N\right) \right),$$

где функция $S_\theta(X, \gamma, N)$ от трех переменных определена в лемме 2.

Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} g(d, m) &\ll \frac{X^\theta}{\ln X} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^4 \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 \equiv 0 \pmod{d}, \\ \delta_j | d^\infty}} \frac{|\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|}{\delta_1 \delta_4} K\left(\frac{\delta_1 \delta_4 m}{d}, 1 - \theta\right) \\ &\leq \frac{X^\theta}{\ln X} \frac{1}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^4 \sum_{n|d^\infty} \frac{K(nm, 1 - \theta)}{n} \sum_{\substack{\delta_1 \delta_4 = nd, \\ \delta_j | d^\infty}} |\alpha(\delta_1)\alpha(\delta_4)|. \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha(n)$ является мультипликативной функцией, то

$$b(n) = \sum_{n_1 n_2 = n} |\alpha(n_1)\alpha(n_2)|$$

также мультипликативная функция. Следовательно, используя оценку

$$K(n, 1 - \theta) \ll \tau(n) \quad \text{при} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \quad (11)$$

(которая следует из определения $K(\cdot, 1 - \theta)$ и оценки $|r(n)| \leq \tau(n)$), мы найдем, что

$$\begin{aligned} g(d, m) &\ll \frac{X^\theta}{\ln X} \tau(m) \frac{1}{d} \prod_{p|d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^4 \sum_{n|d^\infty} \frac{K(n, 1 - \theta)}{n} b(nd) \ll \frac{X^\theta}{\ln X} \tau(m) \frac{1}{d} \\ &\times \prod_{p^\beta || d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^4 \left(b(p^\beta) + \frac{b(p^{\beta+1})K(p, 1 - \theta)}{p} + \frac{b(p^{\beta+2})K(p^2, 1 - \theta)}{p^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Оценим значения $b(n)$ сверху. Из определения коэффициентов $\alpha(n)$ находим

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} = L^{-1/2}(s) = \prod_p \left(1 - \frac{r(p)}{p^s} + \frac{\chi_D(p)}{p^{2s}}\right)^{1/2} = \prod_p \left(1 - \frac{\gamma_p}{p^s}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\delta_p}{p^s}\right)^{1/2},$$

где $|\gamma_p|, |\delta_p| \in \{0, 1\}$. Таким образом, второе равенство влечет оценку

$$b(p) = |r(p)|,$$

а из последнего равенства следует, что коэффициенты $b(n)$ мажорируются коэффициентами ряда, определенного следующим эйлеровым произведением:

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\tau(n)}{n^s}.$$

Поэтому

$$b(n) \leq \tau(n).$$

Определим мультипликативную функцию $B(n)$ соотношениями

$$B(p) = |r(p)|, \quad B(p^\beta) = \tau(p^\beta) \quad \text{при } \beta > 1. \quad (12)$$

Таким образом, из (11), (12) мы получим

$$\begin{aligned} S(\theta) &\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln^2 X} \sum_{d \leq X^2} \frac{1}{d^{1+\theta}} \prod_{p^\beta || d} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(B(p^\beta) + \frac{B(p^{\beta+1})K(p, 1-\theta)}{p} \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(p^{\beta+2})K(p^2, 1-\theta)}{p^2} + \dots \right)^2 \sum_{m|d} \frac{\mu^2(m)\tau^2(m)}{m^{1-\theta}} \\ &\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln^2 X} \sum_{d \leq X^2} \frac{1}{d} \prod_{p^\beta || d} \left(B(p^\beta) + \frac{B(p^{\beta+1})C}{p} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{p}\right)^8 \left(1 + \frac{\tau^2(p)}{p^{1-\theta}}\right) \\ &\ll \frac{X^{2\theta}}{\ln^2 X} \sum_{d \leq X^2} \frac{1}{d} \prod_{p^\beta || d} \left(B(p^\beta) + \frac{B(p^{\beta+1})C}{p} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \end{aligned}$$

с некоторой положительной постоянной C .

Для оценки последней суммы по d напомним следующую цепочку формальных равенств:

$$\begin{aligned} &\sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^s} \prod_{p^\beta || d} \left(B(p^\beta) + \frac{B(p^{\beta+1})C}{p} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \\ &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \left(|r(p)| + \frac{\tau(p^2)C}{p} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{p^{2s}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{p}}\right) \left(\tau(p^2) + \frac{\tau(p^3)C}{p} \right)^2 + \dots \right) = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{1}{d^s} \left(\sum_{d_1 d_2 = d} b_1(d_1) b_2(d_2) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_1(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^s}\right), \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_2(n)}{n^s} &= \prod_p \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^{s+1/2}(1 + r^2(p)/p^s)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + 1/\sqrt{p})(2|r(p)|\tau(p^2)C + \tau^2(p^2)C^2/p)}{p^{s+1}(1 + r^2(p)/p^s)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + 1/\sqrt{p})(\tau(p^2) + \tau(p^3)C/p)^2}{p^{2s}(1 + r^2(p)/p^s)} + \dots \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln^2 X} \sum_{d_1 d_2 \leq X^2} \frac{b_1(d_1) b_2(d_2)}{d_1 d_2}.$$

Оценим последнюю сумму следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{d_1 d_2 \leq X^2} \frac{b_1(d_1) b_2(d_2)}{d_1 d_2} &\leq \sum_{n \leq X^2} \frac{r^2(n)}{n} \prod_p \left(1 + \frac{r^2(p)}{p^{3/2}(1 + r^2(p)/p)} \right. \\ &\quad + \frac{(1 + 1/\sqrt{p})(2|r(p)|\tau(p^2)C + \tau^2(p^2)C^2/p)}{p^2(1 + r^2(p)/p)} \\ &\quad \left. + \frac{(1 + 1/\sqrt{p})(\tau(p^2) + \tau(p^3)C/p)^2}{p^2(1 + r^2(p)/p)} + \dots \right) \\ &\ll \sum_{n \leq X^2} \frac{r^2(n)}{n} \ll \ln X \end{aligned}$$

ввиду оценки

$$\sum_{n \leq x} |r(n)|^2 \ll x$$

(см. [27] или [28]). Таким образом,

$$S(\theta) \ll \frac{X^{2\theta}}{\ln X}$$

и лемма 1 доказана.

§ 6. Распределение значений $L_\psi(s)$ на критической прямой

Основой при доказательстве формулы (6) о распределении значений являются следующие оценки моментов:

$$\int_T^{2T} \left| \ln \left| L_\psi \left(\frac{1}{2} + it \right) \right| - \operatorname{Re} \sum_{p < z} \frac{r_\psi(p)}{p^{1/2+it}} \right|^{2k} dt = O(Tk^{4k} e^{Ak}), \quad (13)$$

где

$$\frac{\ln z}{\ln T} \asymp \frac{1}{k}.$$

Как и в случае дзета-функции Римана, для доказательства этих оценок нам понадобится специальное асимптотическое разложение для $\ln L_\psi(s)$ на критической прямой. Его можно получить в несколько шагов.

Сперва, эйлерово произведение влечет тождество

$$\ln L_\psi(s) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda_\psi(n)}{\ln n} n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Используя эту формулу и контурное интегрирование, можно получить следующее соотношение при $t \geq 2$ ($t \neq \text{Im } \rho$), $2 \leq x \leq t^2$:

$$\begin{aligned} \ln L_\psi \left(\frac{1}{2} + it \right) &= \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_{x,\psi}(n)}{\ln n} n^{-\sigma_{x,t} - it} + O \left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \times \left(1 + \ln^+ \frac{1}{\eta_t \ln x} + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \ln x \right) \left(\left| \sum_{n \leq x^3} \frac{\Lambda_{x,\psi}(n)}{\ln n} n^{-\sigma_{x,t} - it} \right| + \ln t \right) \Bigg), \end{aligned}$$

где

$$\eta_t = \min_{\rho = \beta + i\gamma} |t - \gamma|, \quad \sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2 \max_{\rho} \left(\beta - \frac{1}{2}, \frac{2}{\ln x} \right),$$

и максимум берется по всем нулям $\rho = \beta + i\gamma$ функции $L_\psi(s)$, удовлетворяющим следующим условиям:

$$|t - \gamma| \leq \frac{x^{3(\beta-1/2)}}{\ln x}, \quad \beta \geq \frac{1}{2}$$

(мы отсылаем читателя к работам [25], [23], [29] за дальнейшими деталями). Окончательно, можно доказать (13) для натурального k , используя плотностную теорему (10). Исходное утверждение (6) теперь является следствием (следующим методом [24] или [23]) формул (13) и асимптотической формулы

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq z} \frac{(r_\psi(p) - r_{\psi'}(p))^2}{p} &= \sum_{p \leq z} \frac{r_\psi^2(p)}{p} + \sum_{p \leq z} \frac{r_{\psi'}^2(p)}{p} - \sum_{p \leq z} \frac{r_{\psi \cdot \psi'}(p) + r_{\psi \cdot \overline{\psi'}}(p)}{p} \\ &= (n_\psi + n_{\psi'}) \ln \ln z + O(1), \end{aligned}$$

которая справедлива для $\psi \neq \psi', \overline{\psi'}$ (что мы вправе предположить, поскольку иначе $L_\psi(s) = L_{\psi'}(s)$).

В этом параграфе мы также поясним, как доказать оценку (7). Обозначим через $\text{Err}_\psi(t)$ разность

$$\text{Err}_\psi(t) = \ln L_\psi \left(\frac{1}{2} + it \right) - \sum_{p < z} \frac{r_\psi(p)}{p^{1/2+it}}.$$

Ее вклад в (7) настолько же мал, как и ее вклад в (13), поскольку

$$\begin{aligned} \int_T^{2T} \left| \frac{1}{H} \int_t^{t+H} \text{Err}(u) du \right|^{2k} dt &\ll \frac{1}{H^{2k}} \int_T^{2T} H^{2k-1} \int_t^{t+H} |\text{Err}(u)|^{2k} du dt \\ &\ll \int_T^{2T+1} |\text{Err}(t)|^{2k} dt \ll T k^{4k} e^{Ak}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим вклад в (7) главного члена, а именно

$$\int_T^{2T} \left| \sum_{p < z} \frac{r_\psi(p)}{p^{1/2+it}} \left(\frac{1}{H} \int_0^H \frac{du}{p^{iu}} - p^{-iu_1} \right) \right|^{2k} dt$$

с $0 \leq u_1 \leq H$, зависящий, в свою очередь, от диагональной составляющей

$$\sum_{p < z} \frac{r_{\psi}^2(p)}{p} \left| \frac{1}{H} \frac{p^{-iH} - 1}{-i \ln p} - p^{-iu_1} \right|^2.$$

Разделим последнюю сумму на две и соберем в первую сумму S_1 слагаемые при $p < e^{1/H}$, а во вторую сумму S_2 – оставшиеся слагаемые. Таким образом,

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \sum_{p < e^{1/H}} \frac{r_{\psi}^2(p)}{p} \left| \frac{-1 + (1 - iH \ln p - (H^2/2) \ln^2 p)}{-iH \ln p} \right. \\ &\quad \left. - (1 - iu_1 \ln p) + O(H^2 \ln^2 p) \right|^2 \\ &\ll \sum_{p < e^{1/H}} \frac{r_{\psi}^2(p)}{p} H^2 \ln^2 p \ll H^2 \sum_{p < e^{1/H}} \frac{\ln^2 p}{p} \ll H \sum_{p < e^{1/H}} \frac{\ln p}{p} \ll 1. \end{aligned}$$

Для S_2 имеет место оценка

$$S_2 \ll \sum_{e^{1/H} \leq p < z} \frac{r_{\psi}^2(p)}{p} \ll \sum_{e^{1/H} \leq p < z} \frac{1}{p} \ll \ln(H \ln z) \ll \ln(H \ln T).$$

И, следовательно, оценка (7) может быть доказана.

Я хочу поблагодарить многих людей, без которых эта работа, возможно, не появилась бы. Во-первых, я благодарна Мишелью Балазару и Российско-Французской лаборатории Ж.-В. Понселе в Московском центре непрерывного математического образования за организацию серии конференций “Дзета-функции”, и, особенно, Эрику Сайасу за передачу мне записей Атле Сельберга [17]. Я благодарна профессору Матти Ютиле за указание ссылок на работы с решением аддитивных задач, профессору Хасео Ки за приглашение участвовать в конференции “Дни дзета-функции в Сеуле” в 2009 г., где я встретила несколько дюжин столпов аналитической теории чисел, профессору Каи-Ман Тсангу за предоставление текста его диссертации и за серию конференций по теории чисел, организованных в Гонконге, профессору Александару Ивичу за большую поддержку и многим друзьям (особенно Лео Мурате и Максиму Королёву) за их интерес к моим исследованиям.

Список литературы

1. A. Selberg, “On the zeros of Riemann’s zeta-function”, *Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. I*, **1942**:10 (1942), 1–59.
2. A. Selberg, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series”, *Collected papers*, v. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 47–63.
3. H.-E. Richert, “Über Dirichletreihen mit Funktionalgleichung”, *Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math.*, **11** (1957), 73–124.
4. J. Kaczorowski, A. Perelli, “On the structure of the Selberg class, VII: $1 < d < 2$ ”, *Ann. of Math. (2)*, **173**:3 (2011), 1397–1441.
5. J. L. Hafner, “Zeros on the critical line of Dirichlet series attached to certain cusp forms”, *Math. Ann.*, **264**:1 (1983), 21–37.

6. J. L. Hafner, “Zeros on the critical line for Maass wave form L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **1987**:377 (1987), 127–158.
7. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms*, Grad. Stud. Math., **17**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, xii+259 pp.
8. И. С. Резвякова, “О нулях на критической прямой L -функций, соответствующих автоморфным параболическим формам”, *Матем. заметки*, **88**:3 (2010), 456–475; англ. пер.: I. S. Rezvyakova, “On the zeros on the critical line of L -functions corresponding to automorphic cusp forms”, *Math. Notes*, **88**:3 (2010), 423–439.
9. H. Davenport, H. Heilbronn, “On the zeros of certain Dirichlet series, I, II”, *J. London Math. Soc.*, **S1-11**:3 (1936), 181–185; **S1-11**:4 (1936), 307–312.
10. С. М. Воронин, “О нулях дзета-функций квадратичных форм”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сб. статей. Посвящается академику И. М. Виноградову к его восьмидесятипятилетию, Тр. МИАН СССР, **142**, 1976, 135–147; англ. пер.: S. M. Voronin, “The zeros of zeta-functions of quadratic forms”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **142** (1979), 143–155.
11. Y. Lee, “On the zeros of Epstein zeta functions”, *Forum Math.*, **26**:6 (2014), 1807–1836.
12. E. Bombieri, D. A. Hejhal, “Sur les zéros des fonctions zêta d’Epstein”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **304**:9 (1987), 213–217.
13. С. М. Воронин, “О нулях некоторых рядов Дирихле, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:1 (1980), 63–91; англ. пер.: S. M. Voronin, “On the zeros of some Dirichlet series lying on the critical line”, *Math. USSR-Izv.*, **16**:1 (1981), 55–82.
14. А. А. Карацуба, “О нулях функции Дэвенпорта–Хейльбронна, лежащих на критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:2 (1990), 303–315; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “On the zeros of the Davenport–Heilbronn function lying on the critical line”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:2 (1991), 311–324.
15. А. А. Карацуба, “Новый подход к проблеме нулей некоторых рядов Дирихле”, *Теория чисел и анализ*, Сб. статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994, 180–196; англ. пер.: A. A. Karatsuba, “A new approach to the problem of the zeros of some Dirichlet series”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **207** (1995), 163–177.
16. A. Selberg, *Zeros on the critical line of linear combinations of Euler products*, The talk on the Analysis seminar at Uppsala University on 08.09.1998, 1998, <http://publications.ias.edu/sites/default/files/DOCuu98.pdf>.
17. A. Selberg, *Linear combinations of L -functions and zeros on the critical Line*, The talk at MSRI on a workshop “Random matrices and their applications”, June 7–11, 1999, 1999, <http://www.msri.org/realvideo/ln/msri/1999/random/selberg/1/main.html>.
18. И. С. Резвякова, “О нулях линейных комбинаций L -функций Гекке на критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:6 (2010), 183–222; англ. пер.: I. S. Rezvyakova, “Zeros of linear combinations of Hecke L -functions on the critical line”, *Izv. Math.*, **74**:6 (2010), 1277–1314.
19. Э. Бомбьери, А. Гош, “Вокруг функции Дэвенпорта–Хейльбронна”, *УМН*, **66**:2(398) (2011), 15–66; англ. пер.: E. Bombieri, A. Ghosh, “Around the Davenport–Heilbronn function”, *Russ. Math. Surv.*, **66**:2 (2011), 221–270.
20. И. С. Резвякова, “О нулях дзета-функции Эпштейна на критической прямой”, *УМН*, **70**:4(424) (2015), 213–214; англ. пер.: I. S. Rezvyakova, “On the zeros of the Epstein zeta-function on the critical line”, *Russian Math. Surveys*, **70**:4 (2015), 785–787.
21. E. Hecke, “Über die Zetafunktion beliebiger algebraischer Zahlkörper”, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen. Mat.-Phys. Kl.*, **1917** (1917), 77–89.

22. E. Hecke, “Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen”, *Math. Ann.*, **97**:1 (1927), 210–242.
23. K.-M. Tsang, *The distribution of the values of the Riemann zeta-function*, Thesis (Ph.D.), Princeton Univ. Press, Princeton, 1984, 189 pp.
24. A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function – Mean value theorems and the distribution of $|S(T)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.
25. A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155.
26. W. Luo, “Zeros of Hecke L -functions associated with cusp forms”, *Acta Arith.*, **71**:2 (1995), 139–158.
27. E. Hecke, “Über Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung. I”, *Math. Ann.*, **114**:1 (1937), 1–28.
28. R. A. Rankin, “Contributions to the theory of Ramanujan’s function $\tau(n)$ and similar arithmetical questions. II”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **35**:3 (1939), 357–372.
29. A. Sankaranarayanan, “On Hecke L -functions associated with cusp forms. II. On the sign changes of $S_f(T)$ ”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**:1 (2006), 213–238.

ИРИНА СЕРГЕЕВНА РЕЗВЯКОВА
(IRINA S. REZVYAKOVA)

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: irezvyakova@gmail.com;
rezvyakova@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
22.10.2015