Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон, О простых идеальных гиперболических многогранниках Кокстера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2008, том 72, выпуск 1, 123–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:59:40

УДК 514.132+514.172.45

П. В. Тумаркин, А. А. Феликсон

О простых идеальных гиперболических многогранниках Кокстера

Доказано, что в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ размерности $n > 8$ не существует простых идеальных гиперболических многогранников Кокстера.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Рассмотрим выпуклый многогранник P в n -мерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$. Он называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями π .

Гиперболические многогранники Кокстера до сих пор не классифицированы. Примеры компактных гиперболических многогранников Кокстера известны только в пространствах размерности $n \leq 8$, а примеры некомпактных многогранников Кокстера конечного объема известны только для $n \leq 19$ [1], [2] и $n = 21$ [3]. Известно также, что в гиперболическом пространстве большей размерности нет многогранников Кокстера конечного объема. Ограничение размерности основано на следующем результате В. В. Никулина.

Пусть P – n -мерный простой многогранник (т.е. многогранник, любая k -мерная грань которого содержится ровно в $n - k$ гипергранях), а α_i , $i = 0, 1, \dots, n - 1$, – число его i -мерных граней (иначе, i -граней). Для каждой грани f многогранника P обозначим через α_i^f число ее i -граней. Обозначим через

$$\alpha_k^{(i)} = \frac{1}{\alpha_k} \sum_{\dim f=k} \alpha_i^f$$

среднее число i -граней k -мерной грани многогранника P .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ (В. В. Никулин [4]). *Для любого простого ограниченного выпуклого многогранника P в $\mathbb{R}^n$ и параметров $i < k \leq [n/2]$ выполнена следующая оценка:*

$$\alpha_k^{(i)} < C_{n-i}^{n-k} \frac{C_{[n/2]}^i + C_{[(n+1)/2]}^i}{C_{[n/2]}^k + C_{[(n+1)/2]}^k}.$$

Используя эту оценку для 2-граней ($i = 0$, $k = 2$) и простоту компактных гиперболических многогранников Кокстера, Э. Б. Винберг [5] доказал отсутствие компактных гиперболических многогранников Кокстера размерности, большей 29.

А. Г. Хованский [6] показал, что та же оценка верна для многогранников, простых в ребрах (многогранник называется *простым в ребрах*, если любое его

ребро является пересечением ровно $n - 1$ гиперграней). Это было использовано М. Н. Прохоровым [7] при доказательстве отсутствия многогранников Кокстера конечного объема в гиперболических пространствах размерности $n \geq 996$.

Многогранник $P \subset \mathbb{H}^n$ называется *идеальным*, если все его вершины лежат на границе пространства $\mathbb{H}^n$. В настоящей работе мы изучаем простые идеальные гиперболические многогранники Кокстера. Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *В гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$ размерности $n > 8$ не существует простых идеальных гиперболических многогранников Кокстера.*

В § 1 содержатся основные определения и сведения о схемах Кокстера сферических, евклидовых и гиперболических многогранников Кокстера. В § 2 мы исследуем комбинаторику схемы Кокстера простого идеального гиперболического многогранника Кокстера и показываем, что такой многогранник при $n > 5$ не имеет треугольных 2-граней и имеет сравнительно мало четырехугольных 2-граней. Как показано в § 3, в размерностях $n > 8$ это противоречит оценке Никулина.

Основная часть работы была выполнена во время пребывания авторов в Институте математики Макса Планка в Бонне. Авторы благодарят Институт за гостеприимство.

§ 1. Схемы Кокстера

Многогранники Кокстера удобно описывать с помощью *схем Кокстера*.

Схема Кокстера – это одномерный симплициальный комплекс, ребрам которого присвоены положительные веса либо не меньшие единицы, либо вида $\cos \frac{\pi}{m}$, где $m \geq 3$. Графически схемы Кокстера изображаются следующим образом:

- 1) если вес ребра равен $\cos \frac{\pi}{m}$, то изображается либо $(m - 2)$ -кратное ребро, либо простое ребро с отметкой m ;
- 2) если вес ребра равен 1, то рисуют толстое ребро;
- 3) если вес w ребра превосходит 1, то рисуют пунктирное ребро с отметкой w .

Подсхемой схемы Кокстера называется подкомплекс, который можно получить удалением из схемы одной или нескольких вершин и всех выходящих из них ребер.

Пусть Σ – схема Кокстера с d вершинами $u_1, \dots, u_d$. Определим симметрическую $(d \times d)$ -матрицу $G(\Sigma)$ следующим образом: $g_{ii} = 1$; если вершины u_i и u_j соединены ребром весом w_{ij} , то $g_{ij} = -w_{ij}$; если вершины u_i и u_j не соединены, то $g_{ij} = 0$.

Схемой Кокстера $\Sigma(P)$ многогранника Кокстера P называется схема Кокстера Σ , для которой матрица $G(\Sigma)$ совпадает с матрицей Грама многогранника P . Иными словами, вершины схемы Кокстера соответствуют гиперграням многогранника P . Две вершины соединены $(m - 2)$ -кратным ребром (или простым ребром с отметкой m), если соответствующий двугранный угол равен $\frac{\pi}{m}$; если соответствующие гиперграницы параллельны, то вершины соединены толстым ребром; если гиперграницы расходятся, то соответствующие им вершины схемы соединены пунктиром.

ТАБЛИЦА 1. Связные эллиптические и параболические схемы Кокстера

A_n ($n \geq 1$)		$\tilde{A}_1$
$B_n = C_n$ ($n \geq 2$)		$\tilde{A}_n$ ($n \geq 2$)
D_n ($n \geq 4$)		$\tilde{B}_n$ ($n \geq 3$)
$G_2^{(m)}$		$\tilde{C}_n$ ($n \geq 2$)
F_4		$\tilde{D}_n$ ($n \geq 4$)
E_6		$\tilde{G}_2$
E_7		$\tilde{F}_4$
E_8		$\tilde{E}_6$
H_3		$\tilde{E}_7$
H_4		$\tilde{E}_8$

Порядком схемы называется число ее вершин. Сигнатурой и рангом схемы Σ называются сигнатура и ранг матрицы $G(\Sigma)$.

Схема Кокстера Σ называется *эллиптической*, если матрица $G(\Sigma)$ положительно определена. Связная схема Кокстера Σ называется *параболической*, если матрица $G(\Sigma)$ вырождена и любая подсхема схемы Σ является эллиптической. Эллиптические и связные параболические схемы Кокстера – это в точности схемы Кокстера сферических и евклидовых симплексов Кокстера соответственно (классифицированные Г. С. М. Кокстером [8]). В табл. 1 мы приводим список связных эллиптических и параболических схем Кокстера.

Несвязная схема Кокстера называется *параболической*, если все ее связные компоненты являются параболическими. Схема называется *неопределенной*, если хотя бы одна ее компонента не является ни эллиптической, ни параболической.

Рассмотрим k -грань F простого n -мерного многогранника P . В силу простоты многогранника грань F является пересечением ровно $n - k$ гиперграней $f_1, \dots, f_{n-k}$. Обозначим через $v_1, \dots, v_{n-k}$ соответствующие вершины схемы $\Sigma(P)$. Подсхему с вершинами $\{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ назовем *схемой грани F* и обозначим через Σ_F . Назовем *полной схемой грани F* наименьшую подсхему схемы $\Sigma(P)$, содержащую схемы всех вершин грани F .

Следующие свойства схем $\Sigma(P)$ и Σ_F доказаны в [9]:

- 1) сигнатура матрицы $G(\Sigma(P))$ равна $(n, 1)$ [9, следствие теоремы 2.1];

2) если k -грань F многогранника P не является идеальной вершиной (т. е. F не является точкой на границе пространства $\mathbb{H}^n$), то Σ_F является эллиптической схемой ранга $n - k$ [9, следствие теоремы 3.1];

3) если F – идеальная вершина многогранника P , то Σ_F – параболическая схема ранга $n - 1$; если к тому же вершина F является простой (т. е. лежит ровно в n гипергранях), то схема Σ_F связна [9, следствие теоремы 3.2];

4) каждая эллиптическая подсхема схемы $\Sigma(P)$ является схемой грани многогранника P ; каждая параболическая подсхема схемы $\Sigma(P)$ является подсхемой схемы ровно одной идеальной вершины многогранника P [9, следствие теорем 3.1, 3.2].

Для случая простого идеального многогранника Кокстера $P \subset \mathbb{H}^n$ это означает, что:

(I) любые две непересекающиеся неопределенные подсхемы схемы $\Sigma(P)$ соединены в $\Sigma(P)$;

(II) каждая эллиптическая подсхема схемы $\Sigma(P)$ содержит не более $n - 1$ вершин;

(III) каждая параболическая подсхема схемы $\Sigma(P)$ связна и содержит ровно n вершин.

ЛЕММА 1. *Схема Кокстера простого идеального многогранника Кокстера в $\mathbb{H}^n$, $n > 3$, содержит только простые, двойные и пунктирные ребра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из табл. 1, в связную параболическую схему, содержащую более трех вершин, не входят ни толстые ребра, ни ребра кратности $m > 2$. Докажем, что любое не пунктирное ребро схемы $\Sigma(P)$ содержится в некоторой связной параболической подсхеме порядка n . Действительно, такое ребро (обозначим его через uv) вместе с его концами составляет эллиптическую схему ранга два, а следовательно, является схемой некоторой $(n - 2)$ -мерной грани F многогранника P . Грань F имеет хотя бы одну вершину, и схема этой вершины – связная параболическая схема порядка n – содержит схему грани F , т. е. ребро uv .

Введем следующие обозначения.

Пусть $f_1, \dots, f_{n-k}$ – гиперграни многогранника P , содержащие k -грань F этого многогранника, а $v_1, \dots, v_{n-k}$ – соответствующие вершины схемы $\Sigma(P)$. Как и прежде, мы обозначаем через Σ_F схему грани F , т. е. подсхему схемы $\Sigma(P)$ с вершинами $v_1, \dots, v_{n-k}$.

Мы пишем $\Sigma_F = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle$ и $\Sigma_F = \langle v_1, \Theta \rangle$, где $\Theta = \langle v_2, \dots, v_{n-k} \rangle$. При этом мы говорим, что Σ_F – подсхема, *натяннутая* на $v_1, \dots, v_{n-k}$. Под $\Sigma \setminus \{v_1, \dots, v_m\}$ мы имеем в виду подсхему схемы Σ , натянутую на все вершины схемы Σ , кроме $v_1, \dots, v_m$.

Мы используем стандартные обозначения эллиптических и параболических схем (см. табл. 1). Например, мы пишем $\Sigma_F = \hat{A}_{n-1}$, если F – идеальная вершина типа $\hat{A}_{n-1}$.

Пусть v и u – вершины схемы $\Sigma(P)$. Тогда:

- (i) $[v, u] = 0$, если u и v не соединены ребром в $\Sigma(P)$;
- (ii) $[v, u] = 1$, если u и v соединены простым ребром;
- (iii) $[v, u] = 2$, если u и v соединены двойным ребром;
- (iv) $[v, u] = \infty$, если u и v соединены пунктиром.

§ 2. Отсутствие треугольных 2-граней и оценка числа четырехугольных 2-граней

Пусть V – вершина простого идеального многогранника Кокстера P в $\mathbb{H}^n$. Тогда из V выходит ровно n ребер VV_i , $i = 1, \dots, n$. Обозначим через v_i вершину схемы Σ_V такую, что $\Sigma_{VV_i} = \Sigma_V \setminus \{v_i\}$, а через u_i – вершину схемы $\Sigma(P)$ такую, что $\Sigma_{V_i} = \langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$. Очевидно, схема

$$\Sigma_i = \langle u_i, \Sigma_V \rangle = \langle v_i, \Sigma_{V_i} \rangle = \langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$$

является полной схемой ребра VV_i .

Заметим, что в Σ_i есть ровно две параболические подсхемы Σ_V и Σ_{V_i} и, следовательно, вершины v_i и u_i можно найти в Σ_i как $u_i = \Sigma_i \setminus \Sigma_V$, $v_i = \Sigma_i \setminus \Sigma_{V_i}$. Полную схему ребра Σ_i будем называть *элементарной*, если существует автоморфизм схемы Σ_i , меняющий местами u_i и v_i и сохраняющий остальные вершины. В противном случае полную схему ребра будем называть *неэлементарной*.

Для каждой связной параболической схемы Σ_V несложно описать все возможные полные схемы ребер, содержащие Σ_V . Например, предположим, что $\Sigma_V = \tilde{A}_{n-1}$, $n \neq 3, 8, 9$. Тогда $\Sigma_{VV_i} = \Sigma_V \setminus v_i = A_{n-1}$. При $n \neq 3, 8, 9$ схема $\tilde{A}_{n-1}$ является единственной параболической схемой порядка n , содержащей подсхему A_{n-1} . Поэтому $\Sigma_{V_i} = \tilde{A}_{n-1}$ и схема $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ является элементарной. При этом $[v_i, u_i] \neq 0$ и $[v_i, u_i] \neq 1$, иначе $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ не удовлетворяет условию (III). Таким образом, $[v_i, u_i] = 2$ или $[v_i, u_i] = \infty$ (лемма 1), и подсхема $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ является одной из двух схем, приведенных на рис. 1.

Рис. 1. Две возможные полные схемы $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ ребра VV_i при условии $\Sigma_V = \tilde{A}_{n-1}$, $n \neq 3, 8, 9$

Аналогично, можно перечислить все возможные полные схемы $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ для всех остальных типов схемы Σ_V (напомним, что Σ_V является одной из схем, перечисленных в правом столбце табл. 1).

ЛЕММА 2. Пусть $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ – неэлементарная полная схема ребра VV_i . Если $n > 5$ и схема Σ_{VV_i} связна, то $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ является одной из схем, приведенных в табл. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ребро VV_i с неэлементарной полной схемой может появиться в двух случаях: либо схемы вершин ребра различны, либо схемы

Таблица 2. Ребра с неэлементарными полными схемами $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ при условии, что $n > 5$ и схема Σ_{VV_i} связна

$\Sigma_{VV_i} = A_{n-1}$	$\Sigma_{VV_i} = B_{n-1}$	$\Sigma_{VV_i} = D_{n-1}$
$\tilde{A}_7 \leftrightarrow \tilde{E}_7$ $\tilde{A}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$ $\tilde{E}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$	$\tilde{C}_{n-1} \leftrightarrow \tilde{B}_{n-1}$	$\tilde{D}_{n-1} \leftrightarrow \tilde{B}_{n-1}$ $\tilde{D}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$ $\tilde{B}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$ $\tilde{E}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$

вершин ребра одинаковы, но схема Σ_{VV_i} ребра VV_i достраивается до схем вершин разными способами. Поскольку $n > 5$ и схема Σ_{VV_i} связна, схема Σ_{VV_i} является одной из A_{n-1} , B_{n-1} , D_{n-1} и E_6, E_7, E_8 . Рассмотрим эти случаи.

1. $\Sigma_{VV_i} = A_{n-1}$. Поскольку $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ являются параболическими схемами порядка n , содержащими A_{n-1} , каждая из этих схем может иметь тип $\tilde{A}_{n-1}$ ($n \geq 6$), или $\tilde{E}_7$ ($n = 8$), или $\tilde{E}_8$ ($n = 9$).

Далее, схема A_{n-1} может быть единственным образом достроена до $\tilde{A}_{n-1}$, схема A_7 единственным образом достраивается до $\tilde{E}_7$, а схема A_8 двумя способами достраивается до $\tilde{E}_8$. Следовательно, при $n \neq 8, 9$ полная схема ребра VV_i всегда является элементарной; при $n = 8$ получается одна неэлементарная схема (кратность одного из ребер $u_i v_i$ которой не определена), мы обозначим ее через $\tilde{A}_7 \leftrightarrow \tilde{E}_7$; при $n = 9$ получаются три неэлементарные схемы (две $\tilde{A}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$ и одна $\tilde{E}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$), однако две из них, $\tilde{A}_8 \leftrightarrow \tilde{E}_8$, совпадают с точностью до перенумерации вершин. Все три получившиеся неэлементарные схемы приведены в левом столбце табл. 2. Вершины v_i и u_i соединены волнистым ребром, означающим, что $[v_i, u_i] \in \{0, 1, 2, \infty\}$ (при некоторых из этих значений условия (I)–(III) могут оказаться не выполнены).

2. $\Sigma_{VV_i} = B_{n-1}$. Поскольку $n > 5$, каждая из схем $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ имеет тип $\tilde{B}_{n-1}$ или $\tilde{C}_{n-1}$. Схема B_{n-1} достраивается до каждой из этих схем единственным образом. Единственная получившаяся неэлементарная схема $\tilde{C}_{n-1} \leftrightarrow \tilde{B}_{n-1}$ приведена в среднем столбце табл. 2.

3. $\Sigma_{VV_i} = D_{n-1}$. Каждая из схем $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ имеет тип $\tilde{B}_{n-1}$, или $\tilde{D}_{n-1}$ ($n \geq 6$), или $\tilde{E}_8$ ($n = 9$). Поскольку $n > 5$, схема D_{n-1} достраивается до

схем $\tilde{B}_{n-1}$ и $\tilde{D}_{n-1}$ единственным образом. Схема D_8 достраивается до $\tilde{E}_8$ двумя способами. Все получившиеся неэлементарные схемы $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ приведены в правом столбце табл. 2.

4. $\Sigma_{VV_i} = E_6, E_7, E_8$. Тогда каждая из схем $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ имеет тип $\tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ соответственно. При этом каждая из схем E_k , $k = 6, 7, 8$, достраивается до $\tilde{E}_k$ единственным образом. Поэтому схема $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ элементарна.

Лемма доказана.

Вершина v схемы Σ называется *листом* схемы Σ , если v принадлежит ровно одному ребру этой схемы.

ЛЕММА 3. Пусть $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ – полная схема ребра VV_i . Если $n > 5$, то $[v_i, u_i] \neq 0$ и $[v_i, u_i] \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $[v_i, u_i] = 0$ или $[v_i, u_i] = 1$.

Предположим, что $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ – элементарная полная схема ребра. Рассмотрим два случая:

1) Пусть v_i – лист схемы $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$. Обозначим через a вершину схемы $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$, соединенную с v_i . Тогда из элементарности схемы $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и предположения $[v_i, u_i] \neq \infty$ следует, что подсхема $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \setminus a \rangle$ является эллиптической подсхемой порядка n , что невозможно ввиду условия (II).

2) Пусть v_i не лист схемы $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$. Тогда v_i соединена как минимум с двумя вершинами a_1 и a_2 схемы $\langle v_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$. Из табл. 1 видно, что одно из ребер a_1v_i и a_2v_i простое, а другое – простое или двойное. Из элементарности схемы $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ и предположения $[v_i, u_i] = 0, 1$ следует, что подсхема $\langle v_i, u_i, a_1, a_2 \rangle$ содержит параболическую подсхему $\tilde{A}_2, \tilde{C}_2$ или $\tilde{A}_3$, что невозможно ввиду условия (III).

Пусть теперь $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ – неэлементарная полная схема ребра. Предположим, что схема Σ_{VV_i} связна. Тогда по лемме 2 схема $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ является одной из схем, приведенных в табл. 2. При $[v_i, u_i] = 0, 1$ ни одна из этих схем не удовлетворяет условиям (II) и (III) одновременно. Следовательно, схема Σ_{VV_i} несвязна.

Обозначим через Σ_1 и Σ_2 две из связных компонент схемы Σ_{VV_i} (всего их две или три; см. табл. 1). Ясно, что каждая из вершин v_i и u_i соединена с каждой из связных компонент ровно одним ребром. Поэтому схема $\langle \Sigma_1, \Sigma_2, v_i, u_i \rangle$ содержит цикл C , в который входят вершины v_i и u_i .

Предположим, что подсхема $\langle \Sigma_1, \Sigma_2 \rangle$ не содержит двойных ребер. Тогда все ребра схемы $\langle \Sigma_1, \Sigma_2, v_i, u_i \rangle$ простые и, следовательно, цикл C в этой схеме является параболической схемой $\tilde{A}_k$, содержащей u_i и v_i . При $k < n - 1$ это противоречит условию (III), а при $k = n - 1$ – предположению о том, что $\langle v_i, u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ является полной схемой ребра VV_i . Поэтому хотя бы одна из схем Σ_1 и Σ_2 содержит двойное ребро, входящее в цикл C , т. е. является схемой B_k для некоторого $2 \leq k < n - 1$. Будем считать, что $\Sigma_1 = B_k$. Обозначим через t_1 и t_2 концы двойного ребра так, что t_1 – лист схемы Σ_1 . Поскольку ребро t_1t_2 входит в цикл C , одна из вершин u_i или v_i (для определенности u_i) соединена с t_1 , а другая не соединена. Предположим, что $k > 2$. Тогда в параболической схеме $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle$ вершины t_1 и t_2 не являются листьями, а следовательно, $\langle u_i, \Sigma_{VV_i} \rangle = \tilde{F}_4$ (см. табл. 1), что противоречит предположению $n > 5$.

Таким образом, $\Sigma_1 = B_2 = t_1 t_2$, причем u_i соединена с t_1 , а v_i — с t_2 . Из классификации параболических схем также следует, что ребра $u_i t_1$ и $v_i t_2$ — простые. Рассмотрим теперь два случая: $[u_i, v_i] = 1$ и $[u_i, v_i] = 0$.

1) Пусть $[u_i, v_i] = 1$. Тогда схема $\langle v_i, u_i, \Sigma_2 \rangle$ также содержит цикл и по причинам, аналогичным изложенным выше, $\Sigma_2 = B_2$. Поскольку единственной связной параболической схемой порядка n , содержащей $B_2 + B_2$, является линейная схема $\tilde{C}_{n-1}$, то схема Σ_{V_i} не содержит других связных компонент, кроме $\Sigma_1 = B_2$ и $\Sigma_2 = B_2$. Поэтому $n-1 = 4$, что противоречит предположению о том, что $n > 5$.

2) Пусть $[u_i, v_i] = 0$. Тогда $\langle v_i, u_i, \Sigma_1 \rangle = F_4$. Предположим, что u_i и v_i соединены с одной и той же вершиной x схемы Σ_2 . Тогда $\langle v_i, u_i, \Sigma_1, \Sigma_2 \setminus x \rangle$ является эллиптической схемой порядка n , что невозможно ввиду условия (II). Поэтому u_i и v_i соединены с разными вершинами x_1 и x_2 схемы Σ_2 . Если u_i соединена с x_1 простым ребром, то $\langle x_1, u_i, t_1, t_2, v_i \rangle = \tilde{F}_4$, что противоречит условию (III) в предположении $n > 5$. Если же u_i соединена с x_1 двойным ребром, то $\langle x_1, u_i, t_1, t_2 \rangle = \tilde{C}_3$, что также противоречит условию (III) в предположении $n > 5$.

ЛЕММА 4. *Простой идеальный многогранник Кокстера в $\mathbb{H}^n$, $n > 5$, не имеет треугольных 2-граней.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P — рассматриваемый многогранник. Предположим, что UVW — треугольная 2-грань многогранника P . Поскольку многогранник P прост, UVW содержится ровно в $n-2$ гипергранях. Существует единственная гипергрань, содержащая ребро VW и не содержащая треугольник UVW . Обозначим эту гипергрань через $\bar{u}$. Аналогично определим гипергрань $\bar{v}$ и $\bar{w}$: они содержат соответственно ребра UW и UV и не содержат UVW . Обозначим соответствующие вершины схемы $\Sigma(P)$ через u, v и w . Заметим, что схема вершины U совпадает с $\langle v, w, \Sigma_{UVW} \rangle$. Аналогично, $\Sigma_V = \langle u, w, \Sigma_{UVW} \rangle$ и $\Sigma_W = \langle u, v, \Sigma_{UVW} \rangle$ (рис. 2, а). В частности, каждая из этих трех схем является связной параболической (ввиду свойства (III)), а схема $\Sigma = \langle u, v, w, \Sigma_{UVW} \rangle$ является одновременно полной схемой треугольной 2-грани UVW и полной схемой каждого из ребер VW , UW и UV .

Рис. 2. Обозначения для треугольника (а) и четырехугольника (b)

Рассмотрим ребро схемы Σ , соединяющее вершины u и v . По лемме 3 имеем $[u, v] = 2$ или $[u, v] = \infty$.

Если $[u, v] = \infty$, то $\Sigma_W = \langle u, v, \Sigma_{UVW} \rangle$ содержит пунктирное ребро, что противоречит тому, что схема Σ_W параболическая. Поэтому $[u, v] \neq \infty$, т. е. $[u, v] = 2$. Аналогично, $[v, w] = 2$ и $[u, w] = 2$. Далее, поскольку Σ_W – параболическая схема порядка $n > 5$, одна из вершин u или v двойного ребра uv является листом. Положим для определенности, что u является листом схемы Σ_W , т. е. u не соединена с Σ_{UVW} . Тогда, очевидно, вершина v соединена с Σ_{UVW} . Рассматривая аналогичным образом схему $\Sigma_U = \langle v, w, \Sigma_{UVW} \rangle$, мы получаем, что w также не соединена с Σ_{UVW} . Следовательно, схема $\langle u, w, \Sigma_{UVW} \rangle = \Sigma_V$ не связна, что противоречит условию (III).

Заметим, что идеальный пятимерный многогранник Кокстера может иметь треугольную 2-грань. Например, схема Кокстера, приведенная на рис. 3, определяет идеальный пятимерный симплекс Кокстера и, следовательно, многогранник, у которого любая 2-грань является треугольником.

Рис. 3. Схема Кокстера, определяющая пятимерный идеальный симплекс Кокстера

ЛЕММА 5. Пусть V – вершина простого идеального многогранника Кокстера P в $\mathbb{H}^n$, $n > 9$. Тогда V лежит не более чем в $n + 3$ четырехугольных 2-гранях многогранника P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q – четырехугольная 2-грань с вершинами V , V_i , V_j и V_{ij} . Тогда Q лежит в $n - 2$ гипергранях, каждое ребро грани Q лежит в $n - 1$ гипергранях и каждая вершина – в n гипергранях. Обозначим через $\bar{v}_i, \bar{u}_i, \bar{v}_j$ и $\bar{u}_j$ гиперграни, содержащие ребра VV_j, V_iV_{ij}, VV_i и V_jV_{ij} соответственно, но не содержащие грань Q (см. рис. 2, б). Обозначим через v_i, u_i, v_j и u_j соответствующие вершины схемы $\Sigma(P)$.

Тогда $\Sigma_V = \langle v_i, v_j, \Sigma_Q \rangle$, $\Sigma_{V_i} = \langle v_j, u_i, \Sigma_Q \rangle$, $\Sigma_{V_j} = \langle v_i, u_j, \Sigma_Q \rangle$ и $\Sigma_{V_{ij}} = \langle u_i, u_j, \Sigma_Q \rangle$. Таким образом,

$$\Sigma = \langle v_i, u_i, v_j, u_j, \Sigma_Q \rangle$$

– полная схема грани Q . На рис. 4 приведен пример построения полной схемы четырехугольника Q .

Предположим, что $\Sigma_V = \tilde{A}_{n-1}$. Поскольку $n > 8$, схема каждой из вершин V_i, V_j, V_{ij} также имеет тип $\tilde{A}_{n-1}$. Рассмотрим схему $\langle v_i, u_i, \Sigma_{V_i} \rangle$, т. е. полную схему ребра VV_i . По лемме 3 имеем $[v_i, u_i] = \infty$ или $[v_i, u_i] = 2$ (ср. с рис. 1). Аналогично, рассматривая полную схему ребра VV_j , мы получаем, что $[v_j, u_j] = \infty$ или $[v_j, u_j] = 2$.

Допустим, что вершины v_i и v_j не соединены в Σ_V . Тогда схема $\Sigma_Q = \Sigma_V \setminus \{v_i, v_j\}$ не связна. Поскольку также $\Sigma_{V_{ij}} \setminus \{u_i, u_j\} = \Sigma_Q$, мы получаем

Рис. 4. Пример четырехугольника $VV_iV_jV_j$

$[u_i, u_j] = 0$ (рис. 5). В силу того, что $n > 5$, хотя бы одна из связных компонент Σ_1 и Σ_2 схемы Σ_Q содержит не менее трех вершин, т.е. мы можем считать, что $\Sigma_1 = A_k$, $k \geq 3$. Обозначим через w_i и w_j листья схемы Σ_1 , соединенные в Σ_V с v_i и v_j соответственно. Тогда $\Sigma(P)$ содержит две не соединенные друг с другом, неопределенные подсхемы $v_i u_i w_i$ и $v_j u_j w_j$, что противоречит условию (I). Таким образом, v_i и v_j – соседние вершины в схеме Σ_V , т.е. каждая четырехугольная грань, содержащая вершину V , соответствует паре соседних вершин схемы Σ_V , и, следовательно, V лежит не более чем в n четырехугольных 2-гранях.

Рис. 5. Не соединенные неопределенные подсхемы $v_i u_i w_i$ и $v_j u_j w_j$, где $k_i, k_j = 2, \infty$

Далее мы предполагаем, что $\Sigma_V \neq \tilde{A}_{n-1}$. Поскольку $n > 9$, то $\Sigma_V = \tilde{B}_{n-1}, \tilde{C}_{n-1}, \tilde{D}_{n-1}$. Определим расстояние $\rho(u, w)$ между вершинами u и w связного графа как число ребер кратчайшего в данном графе пути, соединяющего вершину u с вершиной w .

Пусть x – лист схемы Σ_V . Обозначим через $\Sigma_V^{(5)}(x)$ связную подсхему схемы Σ_V , натянутую на пять вершин, ближайших к листу x в Σ_V (т.е. если $v_k \in \Sigma_V^{(5)}(x)$ и $v_l \notin \Sigma_V^{(5)}(x)$, то $\rho(x, v_k) \leq \rho(x, v_l)$). Легко видеть, что если $\Sigma_V = \tilde{B}_{n-1}, \tilde{C}_{n-1}, \tilde{D}_{n-1}$ при $n \geq 9$, то схема $\Sigma_V^{(5)}(x)$ корректно определена для любого листа x схемы Σ_V .

Обозначим через $L(\Sigma_V)$ множество листьев схемы Σ_V . Пусть

$$\Sigma_V^{(5)} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{x \in L(\Sigma_V)} \Sigma_V^{(5)}(x)$$

(см. пример на рис. 6). Заметим, что при $n > 10$ схема $\Sigma_V^{(5)}$ состоит из двух связных компонент. В случае $n = 10$ схема $\Sigma_V^{(5)}$ связна. Однако существуют два листа x и y такие, что $\Sigma_V = \Sigma_V^{(5)}(x) \cup \Sigma_V^{(5)}(y)$ и $\Sigma_V^{(5)}(x) \cap \Sigma_V^{(5)}(y) = \emptyset$. В этом случае назовем подсхемы $\Sigma_V^{(5)}(x)$ и $\Sigma_V^{(5)}(y)$ “компонентами” и будем использовать их в случае $n = 10$ так же, как при $n > 10$ используются связные компоненты.

Рис. 6. Подсхема $\Sigma_V^{(5)}$ для схемы $\Sigma_V = \tilde{B}_{12}$

Предположим, что v_i и v_j не лежат в одной связной компоненте (соответственно, при $n = 10$ – в одной “компоненте”) схемы $\Sigma_V^{(5)}$ (при этом v_i или v_j может лежать в $\Sigma_V \setminus \Sigma_V^{(5)}$). Тогда таким же образом, как и в случае схемы $\Sigma_V = \tilde{A}_{n-1}$, получаем, что v_i и v_j – соседние вершины в схеме Σ_V .

Предположим теперь, что v_i и v_j лежат в одной и той же связной компоненте схемы $\Sigma_V^{(5)}$ (соответственно, в одной “компоненте” в случае $n = 10$). Допустим, что v_i и v_j не соединены. Прямой перебор возможностей с проверкой условий (I)–(III) показывает, что если Σ_Q – схема четырехугольной 2-грани, то соответствующая связная компонента (или “компонента”) схемы $\Sigma_V^{(5)}$ (с точностью до перемены мест v_i и v_j) является одной из следующих схем:

Таким образом, четырехугольная 2-грань Q , содержащая V , может быть одного из двух видов: она соответствует либо паре соседних вершин схемы Σ_V (таких пар $n-1$), либо одной из двух пар, описанных выше, для каждой связной компоненты (или “компоненты” при $n = 10$) схемы $\Sigma_V^{(5)}$. Тем самым, общее число четырехугольников, содержащих V , не превышает $2 + 2 + (n-1) = n+3$.

ЛЕММА 6. Пусть V – вершина простого идеального многогранника Кокстера P в $\mathbb{H}^9$. Тогда V содержится в не более чем 15 четырехугольных 2-гранях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v_1, \dots, v_9$ – вершины схемы Σ_V . В доказательстве леммы 5 мы оценивали число пар (v_i, v_j) таких, что 2-грань со схемой $\Sigma_V \setminus \{v_i, v_j\}$ могла бы быть четырехугольником. Другими словами, мы искали такие пары вершин (v_i, v_j) , что можно добавить к схеме Σ_V вершины x и y так, чтобы схема $\langle x, y, \Sigma_V \rangle$ удовлетворяла условиям (I)–(III), а схемы $\langle x, \Sigma_V \setminus v_i \rangle$, $\langle y, \Sigma_V \setminus v_j \rangle$ и $\langle x, y, \Sigma_V \setminus \{v_i, v_j\} \rangle$ были бы связными параболическими. В этом случае схема $\langle x, y, \Sigma_V \rangle$ является полной схемой четырехугольной грани со схемой $\Sigma_V \setminus \{v_i, v_j\}$.

Очевидно, такая оценка числа четырехугольников является грубой. В частности, при $n = 9$ она дает существенно худший результат. Для доказательства леммы мы используем другой метод, дающий лучшую оценку, однако при существенно большем количестве вычислений. Мы действуем по следующему алгоритму.

Шаг 1. Рассмотрим отдельно случаи $\Sigma_V = \tilde{A}_8, \tilde{B}_8, \tilde{C}_8, \tilde{D}_8, \tilde{E}_8$.

Шаг 2. Перечислим все возможные полные схемы ребер, инцидентных V . Для этого для каждой вершины v_i , $i = 1, \dots, 9$, схемы Σ_V перечислим все возможные схемы $\langle u_i^k, \Sigma_V \rangle$, $k = 1, \dots, k_i$, удовлетворяющие условиям (I)–(III) и такие, что $\langle u_i^k, \Sigma_V \setminus v_i \rangle$ – параболическая подсхема. Здесь k_i – число различных полных схем ребер, построенных по вершине v_i схемы Σ_V . Непосредственная проверка показывает, что $1 \leq k_i \leq 8$ для разных вершин схем $\tilde{A}_8, \tilde{B}_8, \tilde{C}_8, \tilde{D}_8, \tilde{E}_8$ (например, $k_i = 8$ для одной из вершин схемы $\tilde{E}_8$).

Шаг 3. Для каждой пары $(\langle u_i^k, \Sigma_V \rangle, \langle u_j^l, \Sigma_V \rangle)$ полных схем ребер ($i \neq j$) проверяем, можно ли придать ребру $u_i^k u_j^l$ вес такой, чтобы схема $\langle u_i^k, u_j^l, \Sigma_V \rangle$ была полной схемой четырехугольника. В частности, при этом схема $\langle u_i^k, u_j^l, \Sigma_V \setminus \{v_i, v_j\} \rangle$ должна быть параболической, из чего следует, что вершины u_i^k и u_j^l либо не соединены, либо соединены простым или двойным ребром. Найденные пары назовем *хорошими* парами полных схем ребер.

Шаг 4. Для каждой из девяти вершин v_i выберем по полной схеме $\langle u_i^{r_i}, \Sigma_V \rangle$ ребра, $1 \leq r_i \leq k_i$. Теперь посчитаем, сколько пар $(\langle u_i^{r_i}, \Sigma_V \rangle, \langle u_j^{r_j}, \Sigma_V \rangle)$ являются хорошими (здесь $i \neq j$). На данном этапе необходимо проверить достаточно большое число случаев (свыше 15000 для $\Sigma_V = \tilde{E}_8$), что было сделано при помощи компьютера. Обозначим полученное число хороших пар через $M(r_1, \dots, r_9)$. Обозначим через $M(\Sigma_V)$ максимальное значение $M(r_1, \dots, r_9)$ по всем наборам $(r_1, \dots, r_9)$, где $1 \leq r_i \leq k_i$. Ясно, что число $M(\Sigma_V)$ является оценкой сверху для числа четырехугольных 2-граней, содержащих вершину V . Заметим также, что оценка довольно грубая (например, при вычислении $M(r_1, \dots, r_9)$ мы не проверяли, удовлетворяют ли условиям (I)–(III) схемы с более чем $n + 2$ вершинами). Вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} M(\tilde{A}_8) &= 15, & M(\tilde{C}_8) &= 12, \\ M(\tilde{B}_8) &= 14, & M(\tilde{D}_8) &= 15, \\ M(\tilde{E}_8) &= 14. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что V лежит не более чем в 15 четырехугольных 2-гранях.

§ 3. Отсутствие многогранников в больших размерностях

Напомним, что через α_i мы обозначаем число i -граней многогранника P , а через $\alpha_k^{(i)}$ – среднее число i -граней k -мерных граней многогранника P .

ЛЕММА 7. Пусть P – простой n -мерный многогранник и l – число его вершин. Тогда

$$\frac{l}{\alpha_2} = \frac{2}{n(n-1)} \alpha_2^{(1)}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через m_i число i -угольных 2-граней многогранника P . Вычислим общее число N вершин 2-граней: $N = \sum_{i \geq 3} i m_i$. С другой стороны, каждая пара ребер, исходящих из одной вершины простого многогранника, определяет ровно одну 2-грань многогранника. Поэтому $N = \frac{n(n-1)}{2} l$, и мы получаем

$$\frac{n(n-1)}{2} l = \sum_{i \geq 3} i m_i. \quad (2)$$

По определению имеем

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{\sum_{i \geq 3} i m_i}{\alpha_2}. \quad (3)$$

Объединяя (2) и (3), получаем

$$\frac{l}{\alpha_2} = \frac{2}{n(n-1)} \frac{\sum_{i \geq 3} i m_i}{\alpha_2} = \frac{2}{n(n-1)} \alpha_2^{(1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Мы используем обозначения, введенные в лемме 7. Напомним, что $\alpha_2 = \sum_{i \geq 3} m_i$. По лемме 4 имеем $m_3 = 0$. Используя (3), получаем

$$\alpha_2^{(1)} \geq \frac{1}{\alpha_2} \left(4m_4 + 5 \sum_{i \geq 5} m_i \right) = \frac{1}{\alpha_2} \left(5 \sum_{i \geq 4} m_i - m_4 \right) = 5 - \frac{m_4}{\alpha_2}. \quad (4)$$

Рассмотрим оценку Никулина для $\alpha_2^{(1)}$:

$$\alpha_2^{(1)} < C_{n-1}^{n-2} \frac{C_{[n/2]}^1 + C_{[(n+1)/2]}^1}{C_{[n/2]}^2 + C_{[(n+1)/2]}^2} = 4 \cdot \frac{n-1+\varepsilon}{n-2+\varepsilon}, \quad (5)$$

где $\varepsilon = 0$, если n четно, и $\varepsilon = 1$ в противном случае.

Объединяя (4) и (5), получаем

$$5 - \frac{m_4}{\alpha_2} \leq \alpha_2^{(1)} < 4 \cdot \frac{n-1+\varepsilon}{n-2+\varepsilon}. \quad (6)$$

Обозначим через l число вершин многогранника P , а через $N_4 = 4m_4$ – общее число вершин всех четырехугольных 2-граней. По леммам 5 и 6 каждая из l вершин принадлежит не более чем $n+6$ четырехугольным граням. Поэтому $N_4 \leq l(n+6)$ и $4m_4 \leq l(n+6)$. Ввиду (1) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \frac{m_4}{\alpha_2} &\leq \frac{1}{4} \frac{l(n+6)}{\alpha_2} = \frac{n+6}{4} \frac{2}{n(n-1)} \alpha_2^{(1)} \\ &< \frac{n+6}{2n(n-1)} \frac{4(n-1+\varepsilon)}{n-2+\varepsilon} = 2 \cdot \frac{n+6}{n(n-1)} \frac{n-1+\varepsilon}{n-2+\varepsilon}. \end{aligned} \quad (7)$$

Используя (6) и (7), получаем

$$5 - \frac{4(n-1+\varepsilon)}{n-2+\varepsilon} < \frac{m_4}{\alpha_2} < 2 \cdot \frac{n+6}{n(n-1)} \frac{n-1+\varepsilon}{n-2+\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что

$$(n-6+\varepsilon)n(n-1) < 2(n+6)(n-1+\varepsilon).$$

При четных n это условие эквивалентно неравенству $n^2 - 8n - 12 < 0$, а при не четных – неравенству $n^2 - 8n - 7 < 0$. Первое из этих неравенств не имеет целых решений при $n \geq 10$, а второе – при $n \geq 9$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Э. Б. Винберг, “О группах единиц некоторых квадратичных форм”, *Матем. сб.*, **87(129):1** (1972), 18–36; англ. пер.: Eh. B. Vinberg, “On groups of unit elements of certain quadratic forms”, *Math. USSR-Sb.*, **16:1** (1972), 17–35.
2. Э. Б. Винберг, И. М. Каплинская, “О группах $O_{18,1}(Z)$ и $O_{19,1}(Z)$ ”, *Докл. АН СССР*, **238:6** (1978), 1273–1275; англ. пер.: Eh. B. Vinberg, I. M. Kaplinskaja, “The groups $O_{18,1}(Z)$ and $O_{19,1}(Z)$ ”, *Soviet Math. Dokl.*, **19:1** (1978), 194–197.
3. R. Borcherds, “Automorphism groups of Lorentzian lattices”, *J. Algebra*, **111:1** (1987), 133–153.
4. В. В. Никулин, “О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45:1** (1981), 113–142; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On the classification of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **18:1** (1982), 99–123.
5. Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, *Тр. ММО*, **47** (1984), 68–102; англ. пер.: Eh. B. Vinberg, “The non-existence of crystallographic groups of reflections in Lobachevskij spaces of large dimension”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1985, 75–112.
6. А. Г. Хованский, “Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского”, *Функц. анализ и его прил.*, **20:1** (1986), 50–61; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Hyperplane sections of polyhedra, toroidal manifolds, and discrete groups in Lobachevskii space”, *Funct. Anal. Appl.*, **20:1** (1986), 41–50.
7. М. Н. Прохоров, “Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространстве Лобачевского большой размерности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50:2** (1986), 413–424; англ. пер.: M. N. Prokhorov, “the absence of discrete reflection groups with noncompact fundamental polyhedron of finite volume in Lobachevsky space of large dimension”, *Math. USSR-Izv.*, **28:2** (1987), 401–411.
8. H. S. M. Coxeter, “Discrete groups generated by reflections”, *Ann. of Math. (2)*, **35:3** (1934), 588–621.
9. Э. Б. Винберг, “Гиперболические группы отражений”, *УМН*, **40:1** (1985), 29–66; англ. пер.: Eh. B. Vinberg, “Hyperbolic reflection groups”, *Russian Math. Surveys*, **40:1** (1985), 31–75.

П. В. ТУМАРКИН (P. V. TUMARKIN)
Независимый московский университет
E-mail: pasha@mccme.ru

Поступило в редакцию
21.02.2006

А. А. ФЕЛИКСОН (A. A. FELIKSON)
Независимый московский университет
E-mail: felixson@mccme.ru