Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, О функции $S(t)$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 27–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/im86>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 08:20:10

УДК 511

А. А. Карацуба

О функции $S(t)$

Доказаны теорема о плотности нулей функции Римана $\zeta(s)$ в узких прямоугольниках окрестностей критической прямой и теоремы о моментах и количестве перемен знака $S(t)$ на коротких промежутках вещественной прямой.

Библиография: 13 наименований.

Основное содержание статьи посвящено изучению поведения аргумента функции Римана $\zeta(s)$ при условии, что s лежит на критической прямой, т.е. $s = \frac{1}{2} + it$, t – вещественное число. Введем известные функции $S(t)$, $S_1(t)$ (см. [1, с. 90–91], [4, с. 209, 220]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. При вещественном числе t , не равном мнимой части нуля $\zeta(s)$,

$$S(t) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right),$$

где $\arg \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right)$ получается непрерывным продолжением $\arg \zeta(s)$ вдоль ломаной линии, начинающейся в точке $s = 2$ ($\arg \zeta(2) = 0$), идущей к точке $s = 2 + it$ и затем к точке $s = \frac{1}{2} + it$. Если же t – мнимая часть нуля $\zeta(s)$, то

$$S(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2} \{S(t + \delta) + S(t - \delta)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. При положительном числе t функция $S_1(t)$ определяется равенством

$$S_1(t) = \int_0^t S(u) du.$$

Основными утверждениями статьи являются следующие четыре теоремы.

ТЕОРЕМА А. При $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$ и $1/2 \leq \sigma \leq 1$ выполняется оценка

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) = O(HT^{-0,1\alpha(2\sigma-1)} \log T),$$

где $N(\sigma, T)$ – количество нулей дзета-функции Римана в прямоугольнике $\operatorname{Re} s \geq \sigma$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$, и постоянная в знаке O зависит только от α .

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 94-01-00002.

ТЕОРЕМА В. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, k – натуральное число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\int_T^{T+H} |S(t)|^{2k} dt = \frac{(2k)!}{k! (2\pi)^{2k}} H (\log \log T)^k + O(H (\log \log T)^{k-1/2}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от α и k .

ТЕОРЕМА С. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, k – натуральное число. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\int_T^{T+H} |S_1(t)|^{2k} dt = c_k H + O(H \log^{-1} T),$$

где c_k – положительная постоянная, зависящая только от k , и постоянная в знаке O зависит только от α и k .

ТЕОРЕМА D. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$. Тогда существуют положительные числа $T_1 = T_1(\alpha)$ и $A = A(\alpha)$ такие, что при $T \geq T_1$ функция $S(t)$ меняет знак на промежутке $(T, T+H)$ не менее, чем K раз,

$$K = [H (\log T)^{1/3} \exp(-A \sqrt{\log \log T})].$$

Основополагающей работой в области теории дзета-функции Римана является статья [1]. В [1] А. Сельберг создал метод, с помощью которого, в частности, доказал утверждения теорем A–D при условии, что $T^a \leq H \leq T$, $a > 1/2$. Здесь мы существенно пользуемся этим методом. В тех местах статьи, где повторяются рассуждения А. Сельберга, мы указываем на это, а в ряде случаев опускаем соответствующие выкладки. Вместе с тем мы сочли необходимым поместить формулировки теорем 2 и 3 из [1], в которых доказаны оригинальные формулы, связывающие $S(t)$ и $S_1(t)$ с отрезками рядов Дирихле и нулями $\zeta(s)$. Отметим также, что исследованию $S(t)$ и $S_1(t)$ уделено значительное внимание в монографии Е. К. Титчмарша [4], где вместе с некоторыми теоремами А. Сельберга доказаны также условные (при выполнении гипотезы Римана) теоремы (см. еще [13]).

После моих работ [5], [6], в которых были доказаны гипотезы А. Сельберга из [2] о нулях $\zeta(s)$, лежащих на коротких промежутках критической прямой и в узких прямоугольниках окрестности критической прямой, стало ясно, что подобные утверждения могут быть доказаны и для $S(t)$, $S_1(t)$. В частности, на это мне неоднократно указывал Я. Мозер. Я глубоко благодарен профессору Я. Мозеру, которому в значительной мере обязано появление настоящей работы.

ОБОЗНАЧЕНИЯ. Употребляются стандартные теоретико-числовые обозначения: $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные абсолютные постоянные, в разных утверждениях, вообще говоря, разные; соотношение $X \asymp Y$ означает, что $0 < c_1 X \leq Y \leq c_2 X$; α – фиксированное число с условием $0 < \alpha < 0,001$; $T \geq T_1(\alpha) > 0$; $L = \log T$; короткий интервал (промежуток) – интервал вида $(T, T+H)$, $H = T^\beta$, $0 < \beta < 1$; узкий прямоугольник – прямоугольник вида $T \leq \operatorname{Im} s \leq T+H$, $H = T^\beta$, $\beta < 1$, $\sigma_1 < \operatorname{Re} s \leq \sigma_2$; во всех случаях, исключая специально отмеченные, постоянные в знаках O и $\ll$ абсолютные; (ν_1, ν_2) – общий наибольший делитель натуральных чисел ν_1, ν_2 ; $N(u, T)$ – количество нулей $\zeta(s)$ в полосе $\operatorname{Re} s > u$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$; $N(T)$ – количество нулей $\zeta(s)$ в полосе $0 < \operatorname{Im} s \leq T$; $\Lambda(n)$ – функция Мангольда; p – простое число; $H = T^{27/82+\alpha}$.

§ 1. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе приводятся вспомогательные утверждения, которые сформулированы как леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $s = \sigma + it$, $x \geq 1$, $s \neq 1$. Тогда равномерно по $\sigma \geq 0$, $|t| \leq x$, справедливо следующее равенство:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} - \frac{x^{1-s}}{1-s} + O(x^{-\sigma}).$$

ЛЕММА 2. Пусть $s = \sigma + it$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $2\pi xy = |t|$, $x \geq 1$, $y \geq 1$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq y} n^{s-1} + O(x^{-\sigma}) + O(y^{\sigma-1}|t|^{\frac{1}{2}-\sigma}),$$

где

$$\chi(s) = e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t} \left(\frac{|t|}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \left(\frac{|t|}{2\pi e} \right)^{-it}$$

и постоянные в знаках O абсолютные.

Леммы 1 и 2 принадлежат Г. Харди и Д. Литтлвуду (см. [7], [8]).

ЛЕММА 3. Пусть вещественная функция $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ со своими производными до k -го порядка ($k \geq 2$) включительно. Пусть, кроме того,

$$0 < \lambda_k \leq f^{(k)}(x) \leq r\lambda_k \quad (\text{либо} \quad 0 < \lambda_k \leq -f^{(k)}(x) \leq r\lambda_k),$$

$x_2 - x_1 \geq 1$, $K = 2^{k-1}$. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\left| \sum_{x_1 < x \leq x_2} e^{2\pi i f(x)} \right| \leq c_1 r^{2/K} (x_2 - x_1) \lambda_k^{1/(2K-2)} + c_2 (x_2 - x_1)^{1-2/K} \lambda_k^{-1/(2K-2)}.$$

Это есть известная лемма Корпуга, ее доказательство см., например, в [9, с. 362] или [4, с. 110].

ЛЕММА 4. Пусть вещественная функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f(x)$ имеет непрерывную четвертую производную;
- 2) при некоторых положительных числах A , U с условиями $0 < c_1 \leq A \leq c_2 U$, $0 < b - a \leq U$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_3 A^{-1} &\leq f^{(2)}(x) \leq c_4 A^{-1}, \\ |f^{(3)}(x)| &\leq c_5 A^{-1} U^{-1}, \quad |f^{(4)}(x)| \leq c_6 A^{-1} U^{-2}. \end{aligned}$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения

$$f'(x_n) = n,$$

будем иметь

$$\sum_{a < x \leq b} e^{2\pi i f(x)} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{f'(a) < n \leq f'(b)} e^{2\pi i(f(x_n) - nx_n)} + O(R),$$

где

$$R = \sqrt{A} + \log(UA^{-1} + 2)$$

и постоянная в знаке O зависит только от $c_1, \dots, c_6$.

Эта лемма является упрощенным вариантом известной формулы Харди–Литтлвуда–Виноградова–Корпута замены тригонометрической суммы более короткой (см., [10], [9, с. 67–68]).

Следующая лемма об оценке двойной тригонометрической суммы W играет главную роль при доказательстве плотностных теорем о количестве нулей $\zeta(s)$ в узких прямоугольниках критической полосы. Варианты этой леммы содержатся в [5], [6], [9]. Отметим также, что лемма может быть доказана и при меньших значениях H , т.е. при $H = T^\beta$, $\beta < 27/82$, если воспользоваться оценками тригонометрических сумм, полученными в последние годы Э. Бомбьери, Г. Иванцом, Г. Колесником, М. Хаксли. Однако это меньшее значение β незначительно отличается от $27/82$, а применяемые для доказательства средства исключительно громоздки.

ЛЕММА 5. Пусть $0 < \xi, \eta \leq 1$, h – целое неотрицательное число, $x = T^{0,1\alpha}$, $|\xi - \eta + h| \geq x^{-2}$, $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, $T^{27/82} \leq M \leq xT^{1/2}$,

$$c_1 M \leq M_1 = M_1(h) \leq M_2 = M_2(h) \leq c_2 M.$$

Тогда для двойной тригонометрической суммы W ,

$$W = \sum_{0 \leq h \leq MH^{-1}L^2} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right|,$$

справедлива следующая оценка:

$$W \leq cMT^{-\frac{4}{3}\alpha}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем оценивать верхнюю грань модуля суммы по m , причем оценку будем проводить по-разному, в зависимости от величины M .

1. *Случай “малых” M .* Пусть M удовлетворяет неравенствам

$$T^{27/82} \leq M \leq T^{55/164}.$$

К сумме по m применим лемму 3, полагая в ней

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{T}{2\pi} \log \frac{x+h+\xi}{x+\eta}, \quad x_1 = M_1, \quad x_2 = M_2, \\ k &= 3, \quad \lambda_3 = c_3 |h+\xi-\eta| M^{-4} T. \end{aligned}$$

Для W получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned} W &\ll \sum_{0 \leq h \leq MH^{-1}L^2} \left(M|h + \xi - \eta|^{\frac{1}{6}}(M^{-4}T)^{\frac{1}{6}} \right. \\ &\quad \left. + M^{\frac{1}{2}}|h + \xi - \eta|^{-\frac{1}{6}}(M^{-4}T)^{-\frac{1}{6}} \right) \\ &\ll (M^{\frac{3}{2}}T^{\frac{1}{6}}H^{-\frac{7}{6}} + M^2T^{-\frac{1}{6}}H^{-\frac{5}{6}})L^2 \ll MT^{-\frac{4}{3}\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы справедливо для “малых” M .

2. *Случай “больших” M .* Пусть M удовлетворяет неравенствам

$$T^{55/164} < M \leq xT^{1/2}.$$

Сумму по h разобьем на две, причем в W_1 включим слагаемые с $h \leq x^2$, в W_2 – слагаемые с $x^2 < h \leq MH^{-1}L^2$. Получим равенство

$$W = W_1 + W_2,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{0 \leq h \leq x^2} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} \left(\frac{m + h + \xi}{m + \eta} \right)^{iT} \right|, \\ W_2 &= \sum_{x^2 < h \leq MH^{-1}L^2} \left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} \left(\frac{m + h + \xi}{m + \eta} \right)^{iT} \right|. \end{aligned}$$

Сумму W_1 оценим так же, как оценивали W в п. 1, т.е. пользуясь порядком третьей производной функции, стоящей в экспоненте. Находим

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \sum_{0 \leq h \leq x^2} \left(M|h + \xi - \eta|^{\frac{1}{6}}(M^{-4}T)^{\frac{1}{6}} \right. \\ &\quad \left. + M^{\frac{1}{2}}|h + \xi - \eta|^{-\frac{1}{6}}(M^{-4}T)^{-\frac{1}{6}} \right) \\ &\ll M^{\frac{1}{3}}T^{\frac{1}{6}}x^{\frac{7}{3}} + M^{\frac{7}{6}}T^{-\frac{1}{6}}x^{\frac{5}{3}} \ll MT^{-\frac{4}{3}\alpha}, \end{aligned}$$

так как $T^{55/164} < M \leq xT^{1/2}$.

Рассмотрим теперь W_2 . Сумму по m заменим более короткой, применяя для этого лемму 4. Возьмем в лемме 4

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{T}{2\pi} \log \frac{x + h + \xi}{x + \eta}, \quad a = M_1, \quad b = M_2, \quad U = cM, \\ c &= c_2 - c_1 + 1, \quad A = (|h + \xi - \eta|M^{-3}T)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $h \leq MH^{-1}L^2$, $T^{55/164} < M$, то

$$|h + \xi - \eta|M^{-3}T \ll M^{-2}H^{-1}L^2T \ll T^{-\alpha}L^2 \ll 1,$$

т.е. $A \gg 1$. Кроме того, так как $h > x^2$, $M \leq xT^{1/2}$, то

$$A \ll (x^2 M^{-3} T)^{-1} \ll M.$$

Остальные условия леммы, очевидно, выполняются. Определим x_n из уравнения

$$f'(x_n) = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{1}{x_n + h + \xi} - \frac{1}{x_n + \eta} \right) = n.$$

Находим

$$x_n = -\frac{h + \xi + \eta}{2} + \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi(-n)} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2}\right)^2}.$$

Заметим, что n принимает значения отрицательных целых чисел из промежутка $[-N_2, -N_1]$, где

$$N_2 = \frac{(h + \xi - \eta)T}{2\pi(M_1 + h + \xi)(M_1 + \eta)}, \quad N_1 = \frac{(h + \xi - \eta)T}{2\pi(M_2 + h + \xi)(M_2 + \eta)}.$$

Применяя лемму 4, получаем следующую формулу (заменяли $-n$ на n):

$$\sum_{M_1 < m \leq M_2} \left(\frac{m + h + \xi}{m + \eta} \right)^{iT} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{N_1 < n \leq N_2} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_n)}} + O(\sqrt{A} + \log T), \quad (1)$$

где $g(n) = f(x_{-n}) + nx_{-n}$. Так как

$$x_{-n} = \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi n} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2}\right)^2} - \frac{h + \xi + \eta}{2}$$

с ростом n монотонно убывает, то

$$f''(x_{-n}) = \frac{T(h + \xi - \eta)}{(x_{-n} + h + \xi)(x_{-n} + \eta)} \left(\frac{1}{x_{-n} + h + \xi} + \frac{1}{x_{-n} + \eta} \right)$$

монотонно возрастает. Напомним также, что

$$c_1 A^{-1} \leq f''(x_{-n}) \leq c_2 A^{-1}.$$

Применяя к сумме по n в (1) формулу частного суммирования, получим

$$\sum_{N_1 < n \leq N_2} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_{-n})}} = - \int_{N_1}^{N_2} \mathbb{C}(u) d \frac{1}{\sqrt{f''(x_{-u})}} + \mathbb{C}(N_2) \frac{1}{\sqrt{f''(x_{-N_2})}}, \quad (2)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{N_1 < n \leq u} e^{2\pi i g(n)}.$$

Переходя в (2) к неравенствам, пользуясь монотонностью $\frac{d}{du}(f''(x_{-u}))^{-1/2}$ по u и замечанием о порядке $f''(x_{-u})$, приходим к следующему соотношению:

$$\left| \sum_{N_1 < n \leq N_2} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_{-n})}} \right| \ll A^{\frac{1}{2}} |\mathbb{C}(N_3)|, \quad (3)$$

где $N_1 < N_3 \leq N_2$. Сумму $\mathbb{C}(N_3)$ оценим, пользуясь леммой 3, полагая в ней $k = 5$. Так как

$$f'(x_u) = u, \quad g(u) = f(x_{-u}) + ux_{-u},$$

то

$$\frac{d}{du}g(u) = -f'(x_{-u})x'_{-u} + x_{-u} - ux'_{-u} = x_{-u}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{d^5}{du^5}g(u) \right| = \left| \frac{d^4}{du^4}x_{-u} \right| = \left| \frac{d^4}{du^4} \sqrt{\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u} + \left(\frac{h+\xi-\eta}{2}\right)^2} \right|. \quad (4)$$

Так как

$$u \asymp N \asymp (h+\xi-\eta)TM^{-2},$$

то

$$\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u} \asymp M^2 \gg \left(\frac{h+\xi-\eta}{2}\right)^2,$$

и, следовательно, главным членом под радикалом в (4) является первое слагаемое. Раскладывая радикал в ряд Тейлора, найдем

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u} + \left(\frac{h+\xi-\eta}{2}\right)^2} &= \sqrt{\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u}} \sqrt{1 + \frac{h+\xi-\eta}{2T}\pi u} \\ &= \sqrt{\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T(h+\xi-\eta)}{2\pi u}} \cdot \frac{h+\xi-\eta}{2T} \pi u + \dots \end{aligned}$$

Порядок четвертой производной по u от выписанного выражения будет равен порядку четвертой производной по u от первого слагаемого, т.е.

$$\left| \frac{d^5}{du^5}g(u) \right| \asymp \sqrt{T(h+\xi-\eta)} N^{-9/2}.$$

Следовательно, в лемме 3 можно взять

$$\lambda_5 = c_4(Th)^{1/2}N^{-9/2}.$$

Для $|\mathbb{C}(N_3)|$ получаем оценку

$$|\mathbb{C}(N_3)| \ll N\lambda_5^{\frac{1}{30}} + N^{\frac{7}{8}}\lambda_5^{-\frac{1}{30}} \ll (Th)^{\frac{13}{15}}M^{-\frac{17}{10}} + (Th)^{\frac{121}{120}}M^{-\frac{41}{20}}.$$

Вместе с (3) и (4) это дает

$$\left| \sum_{M_1 < m \leq M_2} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right| \ll (Th)^{\frac{11}{30}}M^{-\frac{1}{5}} + (Th)^{\frac{61}{120}}M^{-\frac{11}{20}} + (Th)^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{3}{2}}.$$

Наконец, суммируя по $h \leq MH^{-1}L^2$ последнюю оценку, получим

$$W_2 \ll MT^{-\frac{4}{3}\alpha}, \quad W \ll MT^{-\frac{4}{3}\alpha}.$$

Лемма полностью доказана.

ЛЕММА 6. Пусть μ_1, μ_2 – натуральные числа, не превосходящие x , $x = T^{0,1\alpha}$, $(\mu_1, \mu_2) = 1$, $x \leq N \leq P = \sqrt{T/(2\pi)}$, m и n принимают значения натуральных чисел, причем $m \leq N\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}$, $n \leq N\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}$. При $0 \leq \sigma \leq 1$ рассмотрим интеграл I следующего вида ($K = [L]$, $H_1 = HK^{-1}$):

$$I = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m\mu_1 \neq n\mu_2} (nm)^{-\sigma} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K.$$

Тогда для $|I|$ справедлива оценка

$$|I| \ll 2^K H H_1^K T^{-\alpha} \max(H^{1-2\sigma}, (H+N)^{1-2\sigma}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать, что $m\mu_1 > n\mu_2$. Сумму по m, n разобьем на две: в первую отнесем те m, n , для которых выполняется неравенство

$$m\mu_1 > n\mu_2(1 + 2LH_1^{-1}); \quad (5)$$

во вторую отнесем оставшиеся слагаемые. Таким образом, для пары m, n , попадающей во вторую сумму, выполняются неравенства

$$n\mu_2 < m\mu_1 \leq n\mu_2(1 + 2LH_1^{-1}). \quad (6)$$

Обозначим символами J_1, J_2 интегралы вида I соответственно от первой и второй суммы. Следовательно,

$$I = J_1 + J_2. \quad (7)$$

Оценим сверху $|J_1|$. Так как $0 < 2LH_1^{-1} < 1/2$, то из (5) находим

$$\log \frac{m\mu_1}{n\mu_2} > \log(1 + 2LH_1^{-1}) = 2LH_1^{-1} - \frac{1}{2}(2LH_1^{-1})^2 + \dots > LH_1^{-1}.$$

Поэтому при $H_2 = 2H$, H_1 выполняются следующие соотношения:

$$\left| \int_{-H_2}^{H_2} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{iu} du \right| = \left| \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{iH_2} - \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{-iH_2} \right| \left(\log \frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{-1} \leq 2H_1 L^{-1}.$$

Тем самым для $|J_1|$ получаем оценку

$$|J_1| \leq 2^{K+2} (H_1 L^{-1})^{K+1} \sum_{m,n} (mn)^{-\sigma} < 2^{K+2} (H_1 L^{-1})^{K+1} P^2 \ll 2^K H H_1^K T^{-10}. \quad (8)$$

Оценим сверху $|J_2|$. Прежде всего заметим, что если $2n\mu_2 L H_1^{-1} < 1$, то ввиду (6) соответствующая часть второй суммы будет пустой. Поэтому будем считать, что

$$H_1 (2L\mu_2)^{-1} \leq n \leq N \sqrt{\mu_1 \mu_2^{-1}}. \quad (9)$$

Таким образом, пары m, n , отвечающие второй сумме, удовлетворяют неравенствам (6) и (9). Разбивая промежуток суммирования по n на $\ll L$ промежутков вида $N_1 < N_2 \leq 2N_1$, где

$$H_1(2L\mu_2)^{-1} < N_1 \leq N\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}},$$

и переходя в J_2 к оценке, получаем

$$|J_2| \ll L2^K HH_1^K \left| \sum_{N_1 < n \leq N_2} \sum_m (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{iT_1} \right|, \quad (10)$$

где N_1, N_2 удовлетворяют отмеченным выше неравенствам, а T_1 – некоторое число из промежутка $[T - 3H, T + 3H]$.

Сумма W_1 по m, n в (10) имеет осциллирующие слагаемые, и ее оценку достаточно просто свести к оценке суммы W леммы 5. Прежде всего преобразуем слагаемые W_1 , которые для простоты записи обозначим символами $u(m, n)$, т.е.

$$u(m, n) = (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{iT_1}.$$

Представим n в виде $n = \mu_1 n_1 + n_2$, где $n_2 = 1, \dots, \mu_1$, а n_1 при заданном n_2 принимает значения из промежутка

$$(N_1 - n_2)\mu_1^{-1} < n_1 \leq (N_2 - n_2)\mu_1^{-1}. \quad (11)$$

Аналогично, представим m в виде $m = \mu_2 m_1 + m_2$, где $m_2 = 1, \dots, \mu_2$, а m_1 при заданном m_2 принимает значения из промежутка

$$(n\mu_2\mu_1^{-1} - m_2)\mu_2^{-1} < m_1 \leq (n\mu_2\mu_1^{-1}(1 + 2LH_1^{-1}) - m_2)\mu_2^{-1}. \quad (12)$$

Сумма W_1 переписывается так:

$$W_1 = \sum_{n_2=1}^{\mu_1} \sum_{m_2=1}^{\mu_2} \sum_{n_1} \sum_{m_1} u(\mu_2 m_1 + m_2, \mu_1 n_1 + n_2). \quad (13)$$

Неравенства (12) перепишем в следующем виде:

$$n_1 + (n_2\mu_1^{-1} - m_2\mu_2^{-1}) < m_1 \leq n_1(1 + 2LH_1^{-1}) + (n_2\mu_1^{-1} - m_2\mu_2^{-1}) + 2n_2\mu_1^{-1}LH_1^{-1}. \quad (14)$$

Из (14) получаем, что $m_1 = n_1 + h$, где h – целое неотрицательное число, причем если $h = 0$, то $m_2\mu_2^{-1} - n_2\mu_1^{-1} > 0$, что непосредственно следует из (6). Также из (14) находим верхнюю границу изменения величины h , именно,

$$\begin{aligned} 0 \leq h \leq R, \quad R &= 2n_1LH_1^{-1} + \delta, \\ \delta &= n_2\mu_1^{-1} - m_2\mu_2^{-1} + 2n_2L\mu_1^{-1}H_1^{-1}. \end{aligned} \quad (15)$$

Переходя в (13) к оценкам, получаем

$$|W_1| \leq \sum_{n_2=1}^{\mu_1} \sum_{m_2=1}^{\mu_2} \left| \sum_{n_1} \sum_h u_1(n_1, h) \right|, \quad (16)$$

где границы суммирования по n_1, h определяются неравенствами (11) и (15),

$$u_1(n_1, h) = u(\mu_2(n_1 + h) + m_2, \mu_1 n_1 + n_2).$$

Меняя в (16) порядки суммирования по n_1 и h и переходя к оценкам, получим

$$|W_1| \leq \sum_{n_2=1}^{\mu_1} \sum_{m_2=1}^{\mu_2} \sum_{0 \leq h \leq R_1} \left| \sum_{N_3 < n_1 \leq N_4} u_1(n_1, h) \right|, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= 2(N_2 - n_2)\mu_1^{-1}LH_1^{-1} + 2, \\ N_3 &= \max((N_1 - n_2)\mu_1^{-1}, (h - \delta)H_1(2L)^{-1}), \\ N_4 &= (N_2 - n_2)\mu_1^{-1}. \end{aligned}$$

Слагаемые $u_1(n_1, h)$ суммы в (17) имеют следующий вид:

$$u_1(n_1, h) = (\mu_1\mu_2)^{-2\sigma} ((n_1 + h + m_2\mu_2^{-1})(n_1 + n_2\mu_1^{-1}))^{-\sigma} \left(\frac{n_1 + h + m_2\mu_2^{-1}}{n_1 + n_2\mu_1^{-1}} \right)^{iT_1}.$$

К сумме по n_1 применим формулу частного суммирования; найдем

$$\begin{aligned} \sum_{N_3 < n_1 \leq N_4} u_1(n_1, h) &= -(\mu_1\mu_2)^{-2\sigma} \int_{N_3}^{N_4} \mathbb{C}(u) d((u + h + m_2\mu_2^{-1}) \times \\ &\quad \times (u + n_2\mu_1^{-1}))^{-\sigma} + (\mu_1\mu_2)^{-2\sigma} \mathbb{C}(N_4) ((N_4 + h + m_2\mu_2^{-1})(N_4 + n_2\mu_1^{-1}))^{-\sigma}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{N_3 < n_1 \leq u} \left(\frac{n_1 + h + m_2\mu_2^{-1}}{n_1 + n_2\mu_1^{-1}} \right)^{iT_1}.$$

Подставим получившееся выражение в (17) и перейдем к оценкам; найдем

$$|W_1| \ll (\mu_1\mu_2)^{1-2\sigma} N_1^{-2\sigma} \sum_{0 \leq h \leq R_2} \left| \sum_{N_3 < n \leq N_5} \left(\frac{n + h + m_2\mu_2^{-1}}{n + n_2\mu_1^{-1}} \right)^{iT_1} \right|,$$

где

$$R_2 = 2N_2\mu_1^{-1}LH_1^{-1} + 2, \quad N_5 \leq N_2\mu_1^{-1}.$$

Последняя двойная сумма по h, n является суммой W леммы 5. Действительно,

$$\begin{aligned} N_3 \asymp N_5 \ll N_1, \quad T^{1/2}x \geq N_1 > H_1(2L\mu_2)^{-1} \gg T^{27/82}, \\ R_2 \ll NH^{-1}L^2. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя оценку леммы 5, последовательно получаем

$$\begin{aligned} W_1 &\ll (\mu_1\mu_2)^{1-2\sigma} N_1^{1-2\sigma} T^{-\frac{4}{3}\alpha}, \\ |J_2| &\ll L^2 K H H_1^K (N_1\mu_1\mu_2)^{1-2\sigma} T^{-\frac{4}{3}\alpha} \\ &\ll 2^K H H_1^K T^{-\alpha} \max(H^{1-2\sigma}, (H + N)^{1-2\sigma}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (8) следует утверждение леммы 6.

ЛЕММА 7. Пусть $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, $L = \log T$, $K = [L]$; $H = T^{27/82+\alpha}$, $H_1 = HK^{-1}$; $x = T^{0,1\alpha}$; μ_1, μ_2 – натуральные взаимно простые числа, не превосходящие x . Тогда при $1/2 < \sigma \leq 1$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} |\zeta(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))|^2 \\ &\quad \times \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K \\ &= 2^{K+2} H H_1^K \{(\mu_1 \mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) + (\mu_1 \mu_2)^{\sigma-1} P^{2-4\sigma} \zeta(2-2\sigma)\} + O(R), \end{aligned}$$

где $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $R = 2^K H H_1^K T^{-\alpha}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, будем считать $\mu_1 \geq \mu_2$. При $T - 3H \leq t \leq T + 3H$ определим числа x, y равенствами $y = P$, $2\pi xy = t$. Из приближенного уравнения Харди–Литтлвуда (лемма 2) находим

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma + it) &= \sum_{n < x \sqrt{\mu_1 \mu_2^{-1}}} n^{-\sigma - it} \\ &\quad + X \sum_{n < P \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-1}}} n^{\sigma - 1 + it} + O(T^{-0,5\sigma} (\mu_1 \mu_2^{-1})^{\frac{1-\sigma}{2}}), \\ \zeta(\sigma - it) &= \sum_{m < x \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-1}}} m^{-\sigma + it} \\ &\quad + \bar{X} \sum_{m < P \sqrt{\mu_1 \mu_2^{-1}}} m^{\sigma - 1 - it} + O(T^{-0,5\sigma} (\mu_1 \mu_2^{-1})^{\frac{\sigma}{2}}), \end{aligned}$$

где

$$X = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it}.$$

Так как t лежит на промежутке $(T - 3H, T + 3H)$, то при замене в вышеприведенных формулах x на P соответствующая сумма может измениться на одно последнее слагаемое, величина которого есть $O(P^{-\sigma} (\mu_1 \mu_2^{-1})^{-0,5\sigma})$ в первом равенстве и $O(P^{-\sigma} (\mu_2 \mu_1^{-1})^{-0,5\sigma})$ – во втором. Но остаточные члены в этих соотношениях имеют не меньший порядок. Следовательно, заменяя x на P и перемножая левые и правые части этих равенств, найдем

$$|\zeta(\sigma + it)|^2 \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{it} = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + O(A_5), \quad (18)$$

где $A_j = A_j(t)$, $j = 1, \dots, 5$, определяются формулами

$$\begin{aligned}
A_1 &= \sum_{n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} \sum_{m < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{it}; \\
A_2 &= \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{1-2\sigma} \sum_{n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} \sum_{m < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\mu_1}{m\mu_2} \right)^{it}; \\
A_3 &= \overline{X} \sum_{m, n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \left(\frac{mn\mu_2}{\mu_1} \right)^{-it}; \\
A_4 &= X \sum_{m, n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} m^{-\sigma} n^{\sigma-1} \left(\frac{mn\mu_1}{\mu_2} \right)^{it}; \\
A_5 &= T^{-0,5\sigma} \sqrt{x} \left\{ \left| \sum_{n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} n^{-\sigma+it} \right| \right. \\
&\quad + \left| \sum_{n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} n^{-\sigma+it} \right| + T^{\frac{1}{2}-\sigma} \left| \sum_{n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} n^{\sigma-1+it} \right| + \\
&\quad \left. + T^{\frac{1}{2}-\sigma} \left| \sum_{n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} n^{\sigma-1+it} \right| + T^{-0,5\sigma} \right\}.
\end{aligned}$$

Из (18) и определения интеграла I получаем

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + O(I_5), \quad (19)$$

где

$$I_j = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} A_j(T+t+t_1+\dots+t_K) dt dt_1 \dots dt_K.$$

Интеграл I_5 оценим, пользуясь неравенством Коши. Имеем

$$I_5 \ll T^{-0,5\sigma} \sqrt{x} \sqrt{2^K H H_1^K} \sqrt{I_6 + I_7}, \quad (20)$$

где

$$I_6 = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{n < P_1} n^{-\sigma+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right|^2 dt dt_1 \dots dt_K, \quad (21)$$

$$I_7 = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{n < P_1} n^{\sigma-1+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right|^2 dt dt_1 \dots dt_K, \quad (22)$$

а $P_1 = P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}$ или $P_1 = P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}$ (величина P_1 берется такой, при которой соответствующий интеграл принимает максимальное значение).

Выделяя “диагональные” слагаемые после возведения модуля суммы в квадрат, приходим к неравенству

$$I_6 + I_7 \ll 2^K HH_1^K \sum_{n \leq P\sqrt{x}} (n^{-2\sigma} + T^{1-2\sigma} n^{2\sigma-2}) + I_8 + I_9,$$

где

$$I_8 = \left| \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m \neq n} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m}{n}\right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K \right|,$$

$$I_9 = T^{1-2\sigma} \left| \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m \neq n} (mn)^{\sigma-1} \times \left(\frac{m}{n}\right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K \right|.$$

Каждый из интегралов I_8, I_9 оценивается по лемме 6, в которой следует взять $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Получаем

$$I_8 \ll 2^K HH_1^K T^{-\alpha},$$

$$I_9 \ll 2^K HH_1^K T^{1-2\sigma} (P\sqrt{x})^{2\sigma-1} T^{-\alpha} \ll 2^K HH_1^K T^{-\alpha} \sqrt{x}.$$

Оценивая сумму по n тривиально, найдем

$$I_6 + I_7 \ll 2^K HH_1^K (L + \sqrt{x}). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (20), будем иметь

$$I_5 \ll T^{-0,5\sigma} \sqrt{x} 2^K HH_1^K \sqrt{L + \sqrt{x}} \ll 2^K HH_1^K T^{-0,2}. \quad (24)$$

Оценим I_4, I_3 . Прежде всего упростим $X(t)$, пользуясь тем, что t лежит на коротком промежутке, именно, что $T - 3H \leq t \leq T + 3H$. По теореме Лагранжа о конечном приращении имеем

$$X(t) = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} + O(HT^{-\frac{1}{2}-\sigma}).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} t^{it} &= e^{it \log(T+(t-T))} = e^{it \log T} e^{it \log(1+\frac{t-T}{T})} \\ &= e^{it \log T} e^{it \frac{t-T}{T}} \{1 + O(H^2 T^{-1})\} = e^{it \log T + i(t-T)} \{1 + O(H^2 T^{-1})\}; \\ \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} &= e^{-it \log T + iT + it \log 2\pi} + O(H^2 T^{-1}); \\ X(t) &= e^{i(\frac{\pi}{4}+T)} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-it \log T + iT + it \log 2\pi} + O(H^2 T^{-\frac{1}{2}-\sigma}). \end{aligned}$$

Поэтому для I_4 , I_3 получаем новые выражения

$$I_4 = I_4^* + O(R_4), \quad I_3 = I_3^* + O(R_3), \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} I_4^* &= e^{i(\frac{\pi}{4}+T)} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m,n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} m^{-\sigma} n^{\sigma-1} \\ &\quad \times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(\frac{2\pi mn\mu_1}{T\mu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K; \\ I_3^* &= e^{-i(\frac{\pi}{4}+T)} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m,n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \\ &\quad \times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(\frac{2\pi mn\mu_2}{T\mu_1} \right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K; \\ R_4 &= H^2 T^{-\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\quad \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{m,n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} m^{-\sigma} n^{\sigma-1} (mn)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right| dt dt_1 \dots dt_K; \\ R_3 &= H^2 T^{-\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\quad \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{m,n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (mn)^{-i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right| dt dt_1 \dots dt_K. \end{aligned}$$

Величины R_4 , R_3 оценим подобно тому, как оценивали I_5 , т.е. применив к интегралам теорему Коши и лемму 6:

$$\begin{aligned} R_4 &\ll H^2 T^{-\frac{1}{2}-\sigma} 2^K H H_1^K (P(\mu_2\mu_1^{-1}))^{\sigma-\frac{1}{2}} L \ll 2^K H H_1^K T^{-0,2}; \\ R_3 &\ll 2^K H H_1^K T^{-0,2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Интегралы I_4^* , I_3^* оцениваются одинаково. Оценим, например, I_4^* . Суммирование по m , n в I_4^* разобьем на две части: в первую отнесем те слагаемые по m , n , для которых выполняется неравенство

$$P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}(1 - LH_1^{-1}) < \max(m, n);$$

во вторую часть отнесем оставшиеся слагаемые. Соответственно этому разбиению I_4^* представится суммой двух слагаемых:

$$I_4^* = I_a + I_b.$$

Второе слагаемое легко оценить. Действительно, в этом случае имеем

$$m, n \leq P \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-1}} (1 - LH_1^{-1});$$

$$\log \frac{T \mu_2}{2 \pi m n \mu_1} \geq 2 \log \frac{1}{1 - LH_1^{-1}} > 2 LH_1^{-1}.$$

Поэтому, интегрируя в I_b по $t, t_1, \dots, t_K$ и тривиально оценивая проинтегрированные члены, получим

$$|I_b| \ll T^{\frac{1}{2}-\sigma} \sum_{m, n < P \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-1}}} m^{-\sigma} n^{\sigma-1} 2^K H H_1^K L^{-(K+1)} \ll 2^K H H_1^K T^{-10}.$$

Оценим теперь $|I_a|$. Полагая для краткости $P_1 = P \sqrt{\mu_2 \mu_1^{-1}}$, находим

$$\begin{aligned} |I_a| &= T^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\quad \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left\{ \left| \sum_{P_1(1-LH_1^{-1}) < n \leq P_1} n^{-\sigma+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right. \right. \\ &\quad \times \sum_{m \leq n} m^{\sigma-1+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \Big| \\ &\quad + \left| \sum_{P_1(1-LH_1^{-1}) < m \leq P_1} m^{\sigma-1+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right. \\ &\quad \times \sum_{n \leq m} n^{-\sigma+i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \Big| \Big\} dt dt_1 \dots dt_K \\ &\ll T^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\{ P_1^{1-\sigma} L H_1^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \right. \\ &\quad \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{m \leq n_1} m^{\sigma-1} m^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right| dt dt_1 \dots dt_K \\ &\quad + P_1^\sigma L H_1^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\quad \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left| \sum_{n \leq m_1} n^{-\sigma} n^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} \right| dt dt_1 \dots dt_K, \end{aligned}$$

где $m_1, n_1 \leq P_1$.

Наконец, последние два интеграла оценим, пользуясь неравенством Коши и леммой 6; будем иметь

$$\begin{aligned} |I_a| &\ll T^{\frac{1}{2}-\sigma} \left\{ P_1^{1-\sigma} L H_1^{-1} 2^K H H_1^K \sqrt{P_1^{2\sigma-1} + L} \right. \\ &\quad \left. + P_1^\sigma L H_1^{-1} 2^K H H_1^K \sqrt{L} \right\} \ll 2^K H H_1^K T^{-1/12}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$I_4^* \ll 2^K H H_1^K T^{-1/12}, \quad I_3^* \ll 2^K H H_1^K T^{-1/12}.$$

Из (25) и (26) следуют неравенства для I_4, I_3 :

$$I_4 \ll 2^K H H_1^K T^{-1/12}, \quad I_3 \ll 2^K H H_1^K T^{-1/12}. \quad (27)$$

Теперь займемся выводом асимптотических формул для интегралов I_1, I_2 . Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} \sum_{n < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} (mn)^{-\sigma} \\ &\quad \times \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\cdots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K \\ &= 2^{K+2} H H_1^K \sum_{m\mu_1=n\mu_2} (mn)^{-\sigma} + I_1^*, \end{aligned}$$

где

$$I_1^* = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m\mu_1 \neq n\mu_2} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\mu_1}{n\mu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\cdots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K.$$

Интеграл I_1^* является интегралом леммы 6, и так как $\sigma \geq 1/2$, то для него справедлива следующая оценка:

$$I_1^* \ll 2^K H H_1^K T^{-\alpha}. \quad (28)$$

Сумма по m, n легко вычисляется. Так как $(\mu_1, \mu_2) = 1$, то из равенства $m\mu_1 = n\mu_2$ следует, что $m = \nu\mu_2, n = \nu\mu_1, \nu < P(\mu_1\mu_2)^{-0,5}$. Поэтому, применяя лемму 1, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{m\mu_1=n\mu_2} (mn)^{-\sigma} &= (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \sum_{\nu < P(\mu_1\mu_2)^{-0,5}} \nu^{-2\sigma} \\ &= (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) - \frac{P^{1-2\sigma}}{(2\sigma-1)\sqrt{\mu_1\mu_2}} + O(P^{-2\sigma}). \end{aligned}$$

Тем самым для I_1 получили асимптотическую формулу

$$I_1 = 2^{K+2} H H_1^K \left\{ (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) - \frac{P^{1-2\sigma}}{(2\sigma-1)\sqrt{\mu_1\mu_2}} \right\} + O(2^K H H_1^K T^{-\alpha}). \quad (29)$$

Аналогично вычисляется I_2 . Заменяя в $A_2(t)$ первый сомножитель постоянной величиной $(T/(2\pi))^{1-2\sigma}$, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1-2\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} \\ &\quad \times \sum_{m < P\sqrt{\mu_1\mu_2^{-1}}} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\mu_1}{m\mu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\cdots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K + O(R_2), \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$R_2 \ll HT^{-2\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{n < P\sqrt{\mu_2\mu_1^{-1}}} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n}{m}\right)^{i(T+t+t_1+\cdots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K.$$

Последний интеграл оценим, применив к нему неравенство Коши и лемму 6:

$$R_2 \ll HT^{-2\sigma} 2^K HH_1^K (T^{\sigma-1/2}x + L) \ll 2^K HH_1^K T^{-0,5}.$$

Наконец, первый интеграл в (30), который обозначим символом J , представим суммой двух слагаемых, первое из которых получается при $n\mu_1 = m\mu_2$. Будем иметь

$$J = 2^{K+2} HH_1^K \sum_{n\mu_1=m\mu_2} (mn)^{\sigma-1} + J^*, \quad (31)$$

где

$$J^* = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{n\mu_1 \neq m\mu_2} (mn)^{\sigma-1} \times \left(\frac{n\mu_1}{m\mu_2}\right)^{i(T+t+t_1+\cdots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K.$$

Интеграл J^* является интегралом леммы 6, т.е.

$$|J^*| \ll 2^K HH_1^K P^{2\sigma-1} T^{-\alpha}. \quad (32)$$

Сумму по $n\mu_1 = m\mu_2$ вычислим, применяя лемму 1:

$$\begin{aligned} \sum_{n\mu_1=m\mu_2} (mn)^{\sigma-1} &= (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \sum_{\nu < P(\mu_1\mu_2)^{-0,5}} \nu^{2\sigma-2} \\ &= (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \left\{ \zeta(2-2\sigma) + \frac{(P(\mu_1\mu_2)^{-0,5})^{2\sigma-1}}{2\sigma-1} \right\} \\ &\quad + O((P(\mu_1\mu_2)^{-0,5})^{-2+2\sigma}) \\ &= (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) + \frac{P^{2\sigma-1}}{(2\sigma-1)\sqrt{\mu_1\mu_2}} + O(P^{-2+2\sigma}(\mu_1\mu_2)^{1-\sigma}). \end{aligned} \quad (33)$$

Из (31)–(33) получаем асимптотическую формулу для I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1-2\sigma} 2^{K+2} HH_1^K \\ &\quad \times \left\{ (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) + \frac{P^{2\sigma-1}}{(2\sigma-1)\sqrt{\mu_1\mu_2}} + O(P^{-2+2\sigma}(\mu_1\mu_2)^{1-\sigma}) \right\} \\ &\quad + O(2^K HH_1^K P^{1-2\sigma} T^{-\alpha}) = P^{2-4\sigma} 2^{K+2} HH_1^K (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) \\ &\quad + 2^{K+2} HH_1^K \frac{P^{1-2\sigma}}{(2\sigma-1)\sqrt{\mu_1\mu_2}} + O(2^K HH_1^K P^{-2\sigma}(\mu_1\mu_2)^{1-\sigma}) \\ &\quad + O(2^K HH_1^K P^{1-2\sigma} T^{-\alpha}). \end{aligned} \quad (34)$$

Из (19), (24), (27), (29), (34) следует утверждение леммы:

$$I = 2^{K+2} H H_1^K \{ (\mu_1 \mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) + P^{2-4\sigma} (\mu_1 \mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) \} + O(2^K H H_1^K T^{-\alpha}).$$

Лемма полностью доказана.

Следуя А. Сельбергу (см. [1, с. 101–102]), введем “успокаивающую” функцию $\eta_\sigma(s)$. Для этого при целом положительном числе ρ определим величины $\varphi_\gamma(\rho)$ равенством

$$\varphi_\gamma(\rho) = \rho^\gamma \sum_{d|\rho} \mu(d) d^{-\gamma} = \rho^\gamma \prod_{p|\rho} (1 - p^{-\gamma}).$$

По формуле обращения Мёбиуса находим

$$n^\gamma = \sum_{\rho|n} \varphi_\gamma(\rho).$$

Далее, при $1/2 < \sigma \leq 1$ и $x > 1$ определим величины λ_ν , $1 \leq \nu < x$, равенствами

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \nu^{2\sigma} \left(\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} \right)^{-1} \sum_{\rho < x\nu^{-1}} \frac{\mu(\rho\nu)\mu(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho\nu)} \\ &= \frac{\mu(\nu)\nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} \left(\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} \right)^{-1} \sum_{\substack{\rho < x\nu^{-1} \\ (\rho, \nu)=1}} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\lambda_1 = 1$ и для $|\lambda_\nu|$, $\nu > 1$, выполняются оценки

$$|\lambda_\nu| \leq \frac{\nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} = \prod_{p|\nu} (1 - p^{-2\sigma})^{-1} = O\left(\prod_{p < x} (1 + p^{-1}) \right) = O(\log x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Функцией Сельберга* назовем следующую функцию $\eta_\sigma(s)$:

$$\eta_\sigma(s) = \sum_{\nu < x} \lambda_\nu \nu^{-s}.$$

Ниже (при доказательстве леммы 9) потребуется утверждение А. Сельберга о суммах, связанных с λ_ν и $\varphi_\gamma(\rho)$ (см. [1, с. 103–104]).

ЛЕММА 8. *При $1/2 < \sigma \leq 1$ справедливы следующие соотношения:*

- 1) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} ((\nu_1, \nu_2))^{2\sigma} = \left(\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} \right)^{-1};$
- 2) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} ((\nu_1, \nu_2))^{2-2\sigma} > 0;$
- 3) $\zeta(2\sigma) \left(\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} \right)^{-1} < 1 + O(x^{1-2\sigma}).$

ЛЕММА 9. Пусть $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, $H = T^{27/82+\alpha}$, $K = [\log T]$, $H_1 = HK^{-1}$, $x = T^{0,1\alpha}$ и, кроме того,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} \leq \sigma \leq 1.$$

Тогда для интеграла

$$J = \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} |\zeta(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))|^2 \\ \times |\eta_\sigma(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))|^2 dt dt_1 \dots dt_K$$

справедливо следующее неравенство:

$$J < 2^{K+2} H H_1^K + O(2^K H H_1^K T^{-0,1\alpha(2\sigma-1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения функции Сельберга $\eta_\sigma(s)$ и леммы 7 получаем

$$J = \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^\sigma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} |\zeta(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))|^2 \\ \times \left(\frac{\nu_1}{\nu_2} \right)^{i(T+t+t_1+\dots+t_K)} dt dt_1 \dots dt_K \\ = 2^{K+2} H H_1^K \zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} ((\nu_1, \nu_2))^{2\sigma} \\ + 2^{K+2} H H_1^K P^{2-4\sigma} \zeta(2-2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} ((\nu_1, \nu_2))^{2-2\sigma} \\ + O(2^K H H_1^K T^{-0,8\alpha}), \quad (35)$$

если воспользоваться тривиальной оценкой следующего вида:

$$\left| \sum_{\nu < x} \lambda_\nu \nu^{-\sigma} \right| \ll L \sum_{\nu < x} \nu^{-0,5} \ll L x^{0,5}.$$

Далее, из п. 1) и п. 3) леммы 8 находим

$$\zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\lambda_{\nu_1} \lambda_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} ((\nu_1, \nu_2))^{2\sigma} = \zeta(2\sigma) \left(\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} \right)^{-1} < 1 + O(x^{1-2\sigma}).$$

Из п. 2) этой же леммы следует, что второе слагаемое в (35) является отрицательным, так как $\zeta(2-2\sigma) < 0$ при $1/2 < \sigma \leq 1$.

Действительно, при $\operatorname{Re} s > 0$

$$\zeta(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{s-1} + s \int_1^\infty \rho(u) u^{-s-1} du, \quad \rho(u) = \frac{1}{2} - \{u\}$$

(см., например, [11, с. 62]). Поэтому если $0 < \sigma < 1$, то

$$\zeta(\sigma) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-\sigma} + \sigma \int_1^\infty \rho(u) u^{-\sigma-1} du.$$

Так как $|\rho(u)| \leq 1/2$, то

$$\begin{aligned} \left| \sigma \int_1^\infty \rho(u) u^{-\sigma-1} du \right| &\leq \frac{1}{2} \sigma \int_1^\infty u^{-\sigma-1} du = \frac{1}{2}; \\ \zeta(\sigma) &\leq 1 - \frac{1}{1-\sigma} = -\frac{\sigma}{1-\sigma} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J &< 2^{K+2} H H_1^K (1 + O(x^{1-2\sigma})) + O(2^K H H_1^K T^{-0,8\alpha}) \\ &= 2^{K+2} H H_1^K + O(2^K H H_1^K T^{-0,1\alpha(2\sigma-1)}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Плотностная теорема

Нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 10. При $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$ и $1/2 \leq \sigma \leq 1$ справедлива следующая оценка:

$$I = \int_\sigma^1 \{N(u, T+H) - N(u, T-H)\} du = O(HT^{-0,1\alpha(2\sigma-1)}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем утверждение леммы при

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} \leq \sigma \leq 1, \quad x = T^{0,1\alpha}.$$

Пусть $K = [\log T]$, $H_1 = HK^{-1}$, $|t_j| \leq H_1$, $j \leq K$. Легко видеть, что при $\sigma \leq u \leq 1$ выполняется такое неравенство:

$$N(u, T+H) - N(u, T-H) \leq N(u, T+2H+t_1+\dots+t_K) - N(u, T-2H+t_1+\dots+t_K).$$

Следовательно,

$$I \leq \int_\sigma^1 \{N(u, T+2H+t_1+\dots+t_K) - N(u, T-2H+t_1+\dots+t_K)\} du.$$

Как и в [1], применим теорему Д. Литтлвуда [12] к функции $\Phi(s)$,

$$\Phi(s) = \zeta(s) \eta_\sigma(s),$$

и прямоугольнику с вершинами $s_1, s_2, s_3, s_4, \beta \geq 3$:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma + i(T - 2H + t_1 + \dots + t_K), & s_2 &= \beta + i(T - 2H + t_1 + \dots + t_K), \\ s_3 &= \sigma + i(T + 2H + t_1 + \dots + t_K), & s_4 &= \beta + i(T + 2H + t_1 + \dots + t_K). \end{aligned}$$

Пользуясь оценками интегралов от аргументов $\Phi(u + iT)$, которые имеют порядок $O(\log T)$ (см. [1, с. 106] или [4, с. 210–211]), приходим к неравенству

$$I \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-2H}^{2H} \log |\Phi(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))| dt + O(\log T). \quad (36)$$

Интегрируя (36) по $t_j, |t_j| \leq H_1, j = 1, \dots, K$, найдем

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{2\pi} (2H_1)^{-K} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\dots \int_{-H_1}^{H_1} \log |\Phi(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))| dt dt_1 \dots dt_K + O(\log T). \end{aligned} \quad (37)$$

Далее, при $y \geq 0$ справедливо неравенство

$$\log y \leq y - 1. \quad (38)$$

Действительно, если $0 < y < 2$, то (38) следует из формулы

$$\log y = \log(1 + y - 1) = y - 1 - \frac{1}{2}(y - 1)^2 + \frac{1}{3}(y - 1)^2 - \dots \leq y - 1;$$

если же $y \geq 2$, то (38) следует из формулы

$$y \leq e^{y-1} = 1 + (y - 1) + \frac{1}{2!}(y - 1)^2 + \frac{1}{3!}(y - 1)^3 + \dots$$

В частности, при $y \geq 0$ имеем

$$\log y = \frac{1}{2} \log y^2 \leq \frac{1}{2} (y^2 - 1).$$

Поэтому (37) можно переписать так:

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{1}{4\pi} (2H_1)^{-K} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \\ &\dots \int_{-H_1}^{H_1} \{ |\Phi(\sigma + i(T + t + t_1 + \dots + t_K))|^2 - 1 \} dt dt_1 \dots dt_K + O(\log T). \end{aligned}$$

Применяя к последнему интегралу оценку леммы 9, получаем утверждение при $\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x} \leq \sigma \leq 1$:

$$I \ll HT^{-0,1\alpha(2\sigma-1)} + L \ll HT^{-0,1\alpha(2\sigma-1)}.$$

Если же $\frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}$, то легко находим

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sigma}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}} \{ N(u, T + H) - N(u, T - H) \} du \\ &\quad + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}}^1 \{ N(u, T + H) - N(u, T - H) \} du \\ &\ll \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{\log x}} \{ N(T + H) - N(T - H) \} du + H \ll H \frac{\log T}{\log x} + H \ll H. \end{aligned}$$

Следовательно, лемма доказана при любых $\sigma, 1/2 \leq \sigma \leq 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 10 может быть сформулирована в том виде, который имеет соответствующая ей лемма 8 из [1].

Пусть $T^a \leq H \leq T$, $a > 27/82$, $T \geq T_1(a) > 0$; тогда справедлива следующая оценка:

$$\int_{\sigma}^1 \{N(u, T+H) - N(u, T-H)\} du = O(H(T^{27/82}H^{-1})^{0,0001(2\sigma-1)}). \quad (39)$$

Действительно, пусть $H = T^{\beta}$. Если $27/82 < \beta \leq 27/82 + 0,001$, то (39) следует из леммы 10. Если же $27/82 + 0,001 < \beta \leq 1$, то, разбивая промежуток $(T, T+H)$ на промежутки вида $(T+kh, T+kh+h)$, где $h = T^{27/82+0,001}$, и применяя к каждому из них лемму 10, а затем складывая получившиеся результаты, приходим к (39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ А. Можно считать $\sigma \geq 1/2 + L^{-1}$, так как в противном случае утверждение теоремы является тривиальным следствием формулы Римана–Мангольдта о величине $N(T)$. Так как функция $f(u)$,

$$f(u) = N(u, T+H) - N(u, T-H),$$

монотонно не возрастает, то, применяя лемму 10, будем иметь

$$\begin{aligned} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) &\leq (\log T) \int_{\sigma-L^{-1}}^{\sigma} \{N(u, T+H) - N(u, T-H)\} du \\ &\leq (\log T) \int_{\sigma-L^{-1}}^1 \{N(u, T+H) - N(u, T-H)\} du = O(HT^{-0,1\alpha(2\sigma-1)} \log T), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $H = T^a$, $27/82 < a \leq 1$, $T \geq T_1(a) > 0$. Тогда при $1/2 \leq \sigma \leq 1$ имеем

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) = O(H(T^{27/82}H^{-1})^{0,0001(2\sigma-1)} \log T).$$

§ 3. Явные формулы

Для формулировки двух упомянутых во введении теорем А. Сельберга потребуется одно новое понятие. Пусть $t \geq 2$, $2 \leq x \leq t^2$ и $\rho = \beta + i\gamma$ пробегает значения нулей дзета-функции Римана с условием

$$|t - \gamma| \leq \frac{x^{3|\beta-0,5|}}{\log x}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Символом $\sigma_{x,t}$ обозначим следующую величину:

$$\sigma_{x,t} = \frac{1}{2} + 2 \max \left(\left| \beta - \frac{1}{2} \right|, \frac{2}{\log x} \right).$$

ТЕОРЕМА 1. При $t \geq 2$ и $2 \leq x \leq t^2$ справедливо равенство

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n < x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}}} \cdot \frac{\sin(t \log n)}{\log n} + O\left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \left| \sum_{n < x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t} + it}} \right| \right) + O\left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \log t\right),$$

где

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & 1 \leq n \leq x, \\ \Lambda(n) \frac{\log^2 \frac{x^3}{n} - 2 \log^2 \frac{x^2}{n}}{2 \log^2 x}, & x \leq n \leq x^2, \\ \Lambda(n) \frac{\log^2 \frac{x^3}{n}}{2 \log^2 x}, & x^2 \leq n \leq x^3. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2. При $t \geq 2$ и $2 \leq x \leq t^2$ справедливо следующее равенство:

$$S_1(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{0,5}^{\infty} \log |\zeta(\sigma)| d\sigma + \frac{1}{\pi} \sum_{n < x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t}} \log^2 n} \left(1 + \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right) \log n\right) \cos(t \log n) + O\left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2 \left| \sum_{n < x^3} \frac{\Lambda_x(n)}{n^{\sigma_{x,t} + it}} \right| \right) + O\left(\left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^2 \log t\right).$$

Доказательство теорем 1 и 2 см. в [1, с. 116–121].

§ 4. Оценки средних значений уклонений $S(t)$ и $S_1(t)$ от отвечающих им начальных отрезков ряда Дирихле

Для доказательства теорем 3 и 4, на основе которых доказываются теоремы В и С, потребуется следующая лемма 11, подобная лемме 12 из [1, с. 121].

ЛЕММА 11. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, $x \geq 2$, k – натуральное число, $1 \leq y \leq x^{8k}$, $x^3 y^2 \leq T^{0,1\alpha}$.

Тогда при $0 \leq \nu \leq 8k$ справедливы следующие оценки:

$$I(\nu) = \int_T^{T+H} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}\right)^\nu y^{\sigma_{x,t} - \frac{1}{2}} dt = O(H(\log x)^{-\nu}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от α и k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь определением $\sigma_{x,t}$, находим

$$I(\nu) \ll H(\log x)^{-\nu} + R(\nu), \quad (40)$$

где

$$R(\nu) = \sum_{\substack{T-H < \gamma \leq T+2H \\ \beta > 0,5}} \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^\nu \frac{(x^3 y^2)^{\beta - \frac{1}{2}}}{\log x},$$

и суммирование в последней сумме ведется по нулям $\zeta(s)$ вида $\rho = \beta + i\gamma$. Слагаемые в $R(\nu)$ представим в несколько ином виде. Так как

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{\beta} \frac{\nu}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} (x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} du \\ = \frac{(\beta - \frac{1}{2})^{\nu} (x^3 y^2)^{\beta-\frac{1}{2}}}{\log x} - \int_{1/2}^{\beta} \frac{\log x^3 y^2}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu} (x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

то, увеличивая несколько правую часть $R(\nu)$, получим

$$\begin{aligned} R(\nu) &\leq \sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} \int_{1/2}^{\beta} \left\{ \frac{\log x^3 y^2}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu} (x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} (x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} \right\} du \\ &= \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{\log x^3 y^2}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu} + \frac{\nu}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \right\} \\ &\quad \times (x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} \left(\sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} g(\gamma; u) \right) du, \end{aligned}$$

где

$$g(\gamma; u) = \begin{cases} 1, & 1/2 < u < \beta, \\ 0, & u \geq \beta. \end{cases}$$

Далее, имеем

$$\sum_{T-2H < \gamma \leq T+2H} g(\gamma; u) = \sum_{\substack{T-2H < \gamma \leq T+2H \\ \beta > u}} 1 = N(u, T+2H) - N(u, T-2H).$$

По теореме А

$$N(u, T+2H) - N(u, T-2H) = O(HT^{-0,2\alpha(u-\frac{1}{2})} \log T);$$

по условию леммы

$$(x^3 y^2)^{u-\frac{1}{2}} \leq T^{0,1\alpha(u-\frac{1}{2})}, \quad \log x^3 y^2 \leq \log T.$$

Следовательно, для $R(\nu)$ находим оценку

$$R(\nu) \ll \int_{1/2}^1 \left\{ \frac{\log T}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu} + \frac{\nu}{\log x} \left(u - \frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \right\} HT^{-0,1\alpha(u-\frac{1}{2})} (\log T) du. \quad (41)$$

Последний интеграл легко оценить. Действительно, производя замену переменной интегрирования вида $v = 0, 1\alpha(u - \frac{1}{2}) \log T$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 \left(u - \frac{1}{2}\right)^\nu T^{-0,1\alpha(u-\frac{1}{2})} du &= \int_0^{0,05\alpha \log T} \frac{(10v)^{\nu+1} e^{-v}}{(\alpha \log T)^{\nu+1}} dv \\ &\leq 10^{\nu+1} (\alpha \log T)^{-(\nu+1)} \int_0^\infty v^{\nu+1} e^{-v} dv = (\nu+1)! 10^{\nu+1} (\alpha \log T)^{-(\nu+1)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (41) и (42) находим

$$R(\nu) \ll \frac{\log^2 T}{\log x} H(\log T)^{-(\nu+1)} + \frac{\log T}{\log x} H(\log T)^{-\nu} \ll H(\log x)^{-\nu}.$$

Из (40) и последнего неравенства следует утверждение леммы.

ЛЕММА 12. Пусть $H_0 > 1$, $1 < y \leq H_0^{1/k}$, k – натуральное число и, при $p \leq y$, p – простые числа,

$$|\alpha_p| \leq c_1 \frac{\log p}{\log y}, \quad |\alpha'_p| \leq c_2.$$

Тогда имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \int_0^{H_0} \left| \sum_{p < y} \alpha_p p^{-\frac{1}{2}-it} \right|^{2k} dt &= O(H_0); \\ \int_0^{H_0} \left| \sum_{p < y} \alpha'_p p^{-1-i2t} \right|^{2k} dt &= O(H_0). \end{aligned}$$

Это есть лемма 3 из [3].

ТЕОРЕМА 3. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, k – натуральное число, $T^{\alpha/k} < x < H^{1/k}$.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt = O(H),$$

где постоянная в знаке O зависит только от α и k .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $H = T^{27/82+\alpha}$, $0 < \alpha < 0,001$, $T \geq T_1(\alpha) > 0$, k – натуральное число, $T^{\alpha/k} < x < H^{1/k}$.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\int_T^{T+H} \left| S_1(t) + \frac{1}{\pi} \int_{0,5}^\infty \log |\zeta(\sigma)| d\sigma - \frac{1}{\pi} \sum_{n < x} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \log^2 n} \cos(t \log n) \right|^{2k} dt = O(HL^{-2k}),$$

где постоянная в знаке O зависит только от α и k .

Доказательства теорем 3 и 4 основаны на теоремах 1 и 2 и леммах 11, 12 и повторяют доказательство теоремы 4 из [1] с заменой в соответствующих местах рассуждений леммы 12 из [1] на лемму 11. Приведем только (как и в [1]) доказательство теоремы 3. Положим в теореме 1 $x = T^{\alpha/60k}$ и прибавим к обеим частям равенства этой теоремы сумму

$$\frac{1}{\pi} \sum_{p < x^3} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}}.$$

Переходя к оценкам в правой части получившегося соотношения, будем иметь

$$S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x^3} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} = O\left(\sum_{j=1}^7 R_j\right), \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda(p) - \Lambda_x(p)}{\sqrt{p} \log p} p^{-it} \right|, \\ R_2 &= \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{\sqrt{p} \log p} (1 - p^{0,5 - \sigma_{x,t}}) p^{-it} \right|, \\ R_3 &= \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t} + it}} \right|, \\ R_4 &= \left| \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p \log p} p^{-i2t} \right|, \\ R_5 &= \left| \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p \log p} (1 - p^{1 - 2\sigma_{x,t}}) p^{-i2t} \right|, \\ R_6 &= \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \left| \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p^{2\sigma_{x,t} + i2t}} \right|, \\ R_7 &= \sum_{r > 2} \sum_{p^r < x^3} \frac{\log p}{p^{r/2}}. \end{aligned}$$

Каждую из величин R_j , $j = 2, 5, 6, 7$, преобразуем к единообразному виду (похожему на вид R_3). Прежде всего имеем следующие очевидные неравенства:

$$\begin{aligned} R_7 &\ll 1 \ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log T, \\ R_6 &\ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\log p}{p} \ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log T, \\ R_5 &\ll \sum_{p < x^{1,5}} \frac{1}{p} (1 - p^{1 - 2\sigma_{x,t}}) \ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\log p}{p} \ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) \log T. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь R_2 . Легко видеть, что

$$R_2 = \left| \int_{0,5}^{\sigma_{x,t}} \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{u+it}} du \right| \leq \int_{0,5}^{\sigma_{x,t}} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{u+it}} \right| du.$$

Далее, при $1/2 \leq u \leq \sigma_{x,t}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{u+it}} \right| &= \left| x^{u-\frac{1}{2}} \int_u^\infty x^{\frac{1}{2}-v} \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{v+it}} dv \right| \\ &\leq x^{\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}} \int_{0,5}^\infty x^{\frac{1}{2}-v} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{v+it}} \right| dv. \end{aligned}$$

Поэтому для R_2 получаем неравенство

$$R_2 \ll \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right) x^{\sigma_{x,t}-\frac{1}{2}} \int_{0,5}^\infty x^{\frac{1}{2}-v} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{v+it}} \right| dv.$$

Из (43) и найденных оценок приходим к следующему соотношению:

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x^3} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt = O\left(\sum_{j=1}^4 K_j \right), \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda(p) - \Lambda_x(p)}{\sqrt{p} \log p} p^{-it} \right|^{2k} dt, \\ K_2 &= \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < x^{1,5}} \frac{\Lambda_x(p^2)}{p \log p} p^{-i2t} \right|^{2k} dt, \\ K_3 &= (\log T)^{2k} \int_T^{T+H} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{2k} dt, \\ K_4 &= \int_T^{T+H} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{2k} x^{2k(\sigma_{x,t}-\frac{1}{2})} \\ &\quad \times \left\{ \int_{0,5}^\infty x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right| du \right\}^{2k} dt. \end{aligned}$$

Из леммы 12 имеем

$$K_1 = O(H), \quad K_2 = O(H);$$

из леммы 11 следует, что

$$K_3 = O\left(H \left(\frac{\log T}{\log x} \right)^{2k} \right) = O(H).$$

Применяя к K_4 неравенство Коши, найдем

$$K_4 \ll \left\{ \int_T^{T+H} \left(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2} \right)^{4k} x^{4k(\sigma_{x,t} - \frac{1}{2})} dt \right\}^{1/2} \\ \times \left\{ \int_T^{T+H} \left(\int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right| du \right)^{4k} dt \right\}^{1/2}. \quad (45)$$

Первый интеграл в (45) оценивается по лемме 11 величиной I_1 ,

$$I_1 \ll H(\log x)^{-4k}. \quad (46)$$

Далее, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

$$\left(\int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right| du \right)^{4k} \\ \leq \left(\int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} du \right)^{4k-1} \int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right|^{4k} du \\ = (\log x)^{-4k+1} \int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right|^{4k} du.$$

Следовательно, второй интеграл в (45) оценивается величиной I_2 ,

$$I_2 \ll (\log x)^{-4k+1} \int_T^{T+H} \int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it}} \right|^{4k} dt du \\ = (\log x)^{4k+1} \int_{0,5}^{\infty} x^{\frac{1}{2}-u} \left(\int_T^{T+H} \left| \sum_{p < x^3} \frac{\Lambda_x(p) \log(xp)}{p^{u+it} \log^2 x} \right|^{4k} dt \right) du \ll H(\log x)^{4k} \quad (47)$$

(мы еще раз применили лемму 12, оценивая последний интеграл по t). Поэтому из (45)–(47) получаем

$$K_4 \ll H.$$

Из (44) и оценок $K_j \ll H$, $j = 1, 2, 3, 4$, следует неравенство

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt = O(H),$$

где $y = T^{\alpha/20k}$. Пусть теперь $T^{\alpha/k} < x < H^{1/k}$. Переходя к неравенствам, пользуясь доказанными соотношениями и леммой 12, будем иметь

$$\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \ll \int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \\ + \int_T^{T+H} \left| \sum_{y \leq p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \ll H,$$

что и требовалось доказать.

§ 5. Доказательство теорем В, С, D

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Возьмем в теореме 3 $x = T^{\alpha/k}$. Находим

$$\begin{aligned} |S(t)|^{2k} &= \left| \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} - \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right) \right|^{2k} \\ &= \frac{1}{\pi^{2k}} \left(\sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right)^{2k} + O(R_1 + R_2), \end{aligned} \quad (48)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k}, \\ R_2 &= \left| \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k-1} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|. \end{aligned}$$

Пользуясь асимптотической формулой А. Сельберга (см. [3, лемма 4]), получаем

$$\int_T^{T+H} \left(\sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right)^{2k} dt = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}} H (\log \log T)^k + O(H (\log \log T)^{k-1}). \quad (49)$$

Применяя теорему 3 к оценке интеграла от R_1 , будем иметь

$$\int_T^{T+H} R_1 dt = O(H). \quad (50)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера, пользуясь теоремой 3 и (49), находим

$$\begin{aligned} \int_T^{T+H} R_2 dt &\ll \left(\int_T^{T+H} \left| S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \right)^{\frac{1}{2k}} \\ &\quad \times \left(\int_T^{T+H} \left| \sum_{p < x} \frac{\sin(t \log p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} dt \right)^{1 - \frac{1}{2k}} \\ &= O(H^{\frac{1}{2k}} (H (\log \log T)^k)^{1 - \frac{1}{2k}}) = O(H (\log \log T)^{k-0,5}). \end{aligned} \quad (51)$$

Из (48)–(51) следует утверждение теоремы.

Как уже отмечалось выше, основой доказательства теоремы С служит теорема 4; в остальных деталях оно совпадает с доказательством теоремы В.

Доказательство теоремы D повторяет доказательство теоремы 8 из [1], только в соответствующих местах надо воспользоваться теоремами В и С.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теоремы В–D имеют место при условии, что

$$H = T^a, \quad 27/82 < a \leq 1, \quad T \geq T_1(a) > 0.$$

Список литературы

1. *Selberg A.* Contributions to the theory of the Riemann zeta-function // Archiv für Mathematik og Naturvidenskab. 1946. B. XLVIII. № 5. S. 89–155.
2. *Selberg A.* On the zeros of Riemann's zeta-function // Skr. Norske Vid. Akad. Oslo. 1942. V. 10. P. 1–59.
3. *Selberg A.* On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ // Avhandlinger Norske Vid. Akad. Oslo. 1944. № 1.
4. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
5. *Карацуба А. А.* О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 3. С. 569–584.
6. *Карацуба А. А.* О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 326–333.
7. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The zeros of Riemann's zeta-function on the critical line // Math. Zeitschr. 1921. V. 10. P. 283–317.
8. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* The approximate functional equation in the theory of the zeta-function with applications to the divisor problem of Dirichlet and Piltz // Proc. London Math. Soc. 1922. V. 21. № 2. P. 39–74.
9. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана. М.: Физматлит, 1994. 376 с.
10. *Karatsuba A. A.* Approximation of exponential sums by shorter ones // Proc. Indian Acad. Sci. 1987. V. 97. № 1–3. P. 167–178.
11. *Карацуба А. А.* Основы аналитической теории чисел. 2-е изд. М.: Наука, 1983. 240 с.
12. *Littlewood J. E.* On the zeros of Riemann zeta-function // Proc. Camb. Phil. Soc. 1924. V. 22. P. 295–318.
13. *Selberg A.* Old and new conjectures and results about a class of Dirichletseries // Proc. Amalfi Conference on Analytic Number Theory. Univ. Salerno, 1992. P. 367–386.

Поступило в редакцию
12.III.1996