Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций, голоморфных в трубчатых конусах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 6, 45–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/im866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:28:43

УДК 517.5

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Асимптотически однородные обобщенные функции и граничные свойства функций, голоморфных в трубчатых конусах

Введено и изучено сферическое представление обобщенных функций и в его терминах дано полное описание асимптотически однородных обобщенных функций в случае некритических порядков и достаточные условия в случае критических порядков. Обобщенные функции медленного роста, обладающие (квази)асимптотикой на бесконечности в асимптотической шкале правильно меняющихся функций, называются асимптотически однородными. В частности, к этим функциям принадлежат все однородные обобщенные функции. Полученные результаты применены для изучения особенностей голоморфных функций в трубчатых областях над конусами.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ обозначаем стандартное пространство Шварца быстро убывающих основных функций, а через $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ – соответствующее пространство медленно растущих обобщенных функций.

Обобщенные функции $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, обладающие квазиасимптотикой относительно автомодельных функций, мы далее называем *асимптотически однородными*, точнее, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ – положительная непрерывная функция при $k > 0$. Мы говорим, что $f(t)$ *асимптотически однородна* (обладает квазиасимптотикой) на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$, если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \longrightarrow g(t) \quad \left(\frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{t}{k}\right) \longrightarrow g(t) \right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (0.1)$$

где $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Если $g(t) \equiv 0$, то мы говорим, что $f(t)$ обладает *тривиальной квазиасимптотикой* на бесконечности (в нуле) относительно $\rho(k)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-00312) и Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-1542.2006.1).

Если выполнено соотношение (0.1), то функция $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. Другими словами, для любого $a > 0$ и некоторого α существует предел

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha, \quad k \rightarrow \infty,$$

равномерно по a на компактах в $(0, +\infty)$. Число α называется *порядком* автомодельности ρ . Примерами автомодельных функций порядка α могут служить функции следующих видов:

$$k^\alpha, \quad k^\alpha \ln k, \quad k^\alpha \ln \ln k, \quad k^\alpha \left(1 + \frac{1}{2} \sin(\ln \ln k)\right), \\ k^\alpha e^{\sqrt{\ln k}}, \quad k^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right) \sin(\sqrt{\ln k})\right)$$

и другие (подробнее см. [3]).

Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$, фигурирующей в (0.1), называется *порядком асимптотически однородной обобщенной функции*. Отметим, что предельная функция $g(t)$ в (0.1) является однородной обобщенной функцией степени α . Как показано в [1], при $\alpha \leq -n$ свойство функции быть асимптотически однородной не является чисто асимптотическим, а зависит от глобальных свойств функции в целом. Например, для обобщенных функций с финитными носителями квазиасимптотика всегда существует относительно $\rho(k) = k^\alpha$, $\alpha = -n - p$, при некотором $p = 0, 1, \dots$, при этом предельная функция представляется линейной комбинацией дельта-функций и их производных, поэтому следующее определение будет характеризовать именно асимптотические свойства обобщенной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2. Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ называется *асимптотически однородной в существенном* относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , если существуют целое число $N \geq 0$ и постоянные c_j , $|j| \leq N$ (где $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс) такие, что функция $f(t) - \sum_{|j| \leq N} c_j \delta^{(j)}(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt) - \sum_{|j| \leq N} c_j \delta^{(j)}(kt), \varphi(t) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (f_0(t), \varphi(t)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (0.2)$$

Отметим, что обобщенная функция $f_0(t)$ однородна степени однородности α .

Поскольку при $\alpha + n + |j| > 0$ в силу соотношения

$$\frac{1}{\rho(k)} \sum_{|j| \leq N} c_j \delta^{(j)}(kt) = \sum_{|j| \leq N} \frac{c_j}{\rho(k) k^{n+|j|}} \delta^{(j)}(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

сумма дельта-функций в (0.2) не существенна (не влияет ни на существование предела, ни на предельную функцию), то в (0.2) мы можем считать, что $N \leq -n - \alpha$. Таким образом, при $\alpha > -n$ функция $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$.

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах

математической физики. Их описание и свойства хорошо изучены для функций из пространства $\mathcal{S}'_+$ обобщенных функций медленного роста с носителями на положительной полуоси. В частности, функция $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , если

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} C f_{\alpha+1}(r) \quad \text{в } \mathcal{S}'_+, \quad (0.3)$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования $f_\beta(r) \in \mathcal{S}'_+$ определяется формулой

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \frac{\Theta(r)r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r) & \text{при } \beta \leq 0, \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N. \end{cases}$$

Здесь $\Gamma(\beta)$ – гамма-функция, $\Theta(r)$ – функция Хевисайда.

Для того чтобы $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\alpha - 1$, что

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N \rho(r)} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} A. \quad (0.4)$$

Здесь $f^{(-N)}(r)$ – первообразная порядка N .

Первообразная (производная) порядка β обобщенной функции $f(r) \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r).$$

Отметим, что постоянные C и A в (0.3) и (0.4) связаны формулой

$$C = A\Gamma(\alpha + N + 1). \quad (0.5)$$

Как известно, $\frac{N!}{r^N} f^{(-N)}(r) = \mathcal{S}_r^N(f)$ – чезаровское среднее порядка N , таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $\mathcal{S}'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних.

Основной целью настоящей статьи является получение подобного рода описания асимптотически однородных функций в общем случае.

Отметим другой частный случай, где асимптотически однородные обобщенные функции также имеют простое описание, только в несколько других терминах. Этот случай демонстрирует тесную связь асимптотически однородных функций с граничными свойствами функций, голоморфных в трубчатых конусах.

Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C – острый выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C . Это означает, что $F(z)$ голоморфна в T^C и удовлетворяет в T^C оценке

$$|F(z)| \leq A \frac{(1 + |z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in C, \quad (0.6)$$

с некоторыми постоянными A , b и d . Здесь $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C . Известно, что $F(z)$ имеет граничное значение в $\mathcal{S}'$ при $y \rightarrow +0$, так что $F(x) = \lim_{y \rightarrow +0} F(x + iy)$ (см. [1]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.3. Будем говорить, что голоморфная функция $F(z) \in H(T^C)$ ведет себя в T^C при $z \rightarrow 0$ как $\rho(\frac{1}{|z|})$, где $\rho(k)$ – автомодельная функция, если:

- 1) существует $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} F(\frac{z}{k})$ для любого $z \in T^C$;
- 2) существуют числа b, c, ε такие, что

$$|F(z)| \leq \rho\left(\frac{1}{|z|}\right) \frac{c}{\varphi^b}, \quad |z| < \varepsilon,$$

где $\varphi = \min\{\Delta_C(\frac{y}{|y|}), \frac{|y|}{|z|}\}$.

Имеет место следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 0.1. Функция $F(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда $F(z)$ ведет себя в T^C при $z \rightarrow 0$ как $\rho(\frac{1}{|z|})$ (см. [1]).

Отметим, что в работах [11], [12] доказано, что $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ разлагается в ряд по сферическим гармоникам. Можно было бы развивать теорию асимптотически однородных обобщенных функций, опираясь на результаты этих работ, в частности доказать, что радиальные части разложений асимптотически однородных функций являются асимптотически однородными функциями из S'_+ . Однако мы избрали другой подход, который основан на сферических представлениях обобщенных функций и позволяет избежать многих технических трудностей, связанных с необходимостью “суммирования” бесконечного числа квазиасимптотических свойств, а также, что особенно важно, полностью сохранить информацию о носителях исследуемых функций.

Работа состоит из шести параграфов и приложения.

В §1 определяется сферическое представление обобщенных функций, при котором каждой обобщенной функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ соответствует ее сферическое представление $F(r, e) \in S'(\mathbb{R}_+ \times S^{n-1})$. Приведено полное описание ядра этого соответствия.

В §2 приведены доказательства лемм, которые необходимы для доказательства основных теорем настоящей работы. Некоторые из этих лемм представляют и самостоятельный интерес.

В §3 дано описание сферических представлений однородных обобщенных функций (в том числе и критических порядков). Хотя этот частный случай асимптотически однородных обобщенных функций изучался в работе [2], мы для полноты изложения приводим необходимые нам результаты с полными доказательствами.

В §4 доказываются теоремы о квазиасимптотике сферических представлений асимптотически однородных обобщенных функций.

В §5 дается описание сферических представлений асимптотически однородных обобщенных функций для не критических порядков. Для критических порядков здесь же приведено несколько достаточных условий. Рассмотрены примеры вычисления квазиасимптотик некоторых обобщенных функций с использованием этих результатов.

В § 6 полученные результаты применяются для исследования особенностей голоморфных функций в трубчатых областях над острыми конусами. В частности, доказан ряд теорем, касающихся “некомпенсации” особенностей голоморфных функций. Часть из них сформулированы в терминах точности некоторой гомологической последовательности.

В приложении мы сделали необходимые нам добавления и уточнения к некоторым классическим теоремам функционального анализа и теории обобщенных функций, поскольку доказательство этих добавлений и уточнений в основном тексте перегрузило бы изложение и затруднило восприятие основных результатов.

§ 1. Сферическое представление обобщенных функций

Через $\mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n)$ обозначим подпространство $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль в начале координат вместе со всеми производными до порядка $\ell - 1$ включительно, а через $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ – подпространство функций, имеющих нуль в начале координат бесконечного порядка, так что $\mathcal{S}^\infty = \mathcal{S}_0$. Пусть S^{n-1} – единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathcal{S}(S^{n-1}) = C^\infty(S^{n-1})$ является пространством бесконечно дифференцируемых на S^{n-1} функций со стандартной топологией равномерной сходимости вместе со всеми производными. Как обычно, если $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс, то $j! = j_1! \dots j_n!$ и $|j| = j_1 + \dots + j_n$. Пусть $e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}$, положим $E_j(e) = e_1^{j_1} \dots e_n^{j_n}$. Обозначим через W пространство $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$, т. е. пространство функций $\psi(r, e)$, $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $e \in S^{n-1}$, бесконечно дифференцируемых на S^{n-1} и по r на $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{r \geq 0\}$. Топологию в нем зададим следующим образом. Пусть U_i , $i = 1, 2, \dots$, – атлас карт на единичной сфере, в каждой карте $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ – соответствующие координаты и

$$Q_m^i[\psi(r, e)] = \max_{|j| \leq m} \sup_{r \geq 0, \Theta \in U_i} (1+r)^m \left| \frac{\partial^{|j|}}{\partial \theta_1^{j_1} \dots \partial \theta_{n-1}^{j_{n-1}} \partial r^{j_n}} \psi(r, \Theta) \right|.$$

В качестве системы полунорм в W берем

$$Q_m[\psi(r, e)] = \max_i Q_m^i[\psi(r, e)], \quad m = 0, 1, \dots \quad (1.1)$$

Ясно, что эта топология не зависит от выбора атласа на единичной сфере.

Через W^ℓ обозначим подпространство W , состоящее из функций $\psi(r, e) \in W$, все производные которых по r в нуле до $\ell - 1$ порядка включительно обращаются в нуль. Легко видеть, что

$$W^\ell = \{\psi(r, e) \in W : \psi(r, e) = r^\ell \varphi(r, e), \varphi(r, e) \in W\}, \quad (1.2)$$

причем отображение $\psi(r, e) \mapsto \varphi(r, e)$ является изоморфизмом W^ℓ на W .

Через W_0 обозначим пространство, состоящее из функций $\psi(r, e) \in W$, обращающихся в нуль вместе со всеми своими производными при $r = 0$. Другими словами, можно считать, что $W_0 = W^\ell$ при $\ell = \infty$; W_0 является замкнутым подпространством пространства W .

Рассмотрим в W подпространство

$$V = \left\{ \psi(r, e) \in W : \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \psi(r, e) \Big|_{r=0} = \sum_{|j|=p} c_j E_j(e), \quad p = 0, 1, \dots \right\}. \quad (1.3)$$

где $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, имеем

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1} = \psi_r(r, \theta_1, \dots, \varphi) \cos \theta_1 - \frac{1}{r} \psi_{\theta_1}(r, \theta_1, \dots, \varphi) \sin \theta_1. \quad (1.8)$$

Обозначим правую часть соотношения (1.8) через ψ_1 и покажем, что она продолжается на все $\mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ как бесконечно дифференцируемая функция. Возьмем атлас с достаточно мелкими картами, покрывающими всю сферу S^{n-1} . Рассмотрим сначала карту, в которой $\theta_1 \neq 0, \pi$. Без ограничения общности можно считать, что $\theta_i \neq 0, \pi$, $i = 2, \dots, n-2$, а $\varphi \neq 0, 2\pi$ (так как всегда можно подходящим образом повернуть систему координат (1.7) вокруг оси t_1 , не изменив производную (1.8)). В пределах этой карты координаты (1.7) не особые. Заметим, что $\psi(r, \Theta)$ при $r = 0$ есть постоянная функция, поэтому $\psi_{\theta_1}|_{r=0} = 0$. Следовательно, в этой карте функция $\frac{1}{r} \psi_{\theta_1}$ бесконечно дифференцируема по (r, Θ) .

Если карта содержит полюс (по θ_1), то вместо координат (1.7) введем координаты r, x' , $|x'| < 1$, где $x' = (x_2, \dots, x_n)$ – проекция точки единичной сферы на экваториальную плоскость $\theta_1 = \frac{1}{2}\pi$. В этих координатах получим

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t_1} = \psi_r(r, x') \sqrt{1 - |x'|^2} - \frac{\sqrt{1 - |x'|^2}}{r} (\psi_{x_2} x_2 + \dots + \psi_{x_n} x_n).$$

Поскольку как $\psi(0, x') = \text{const}$, то $\psi_{x_i}(0, x') = 0$, $i = 2, \dots, n$, следовательно, функция ψ_1 бесконечно дифференцируема вплоть до $r = 0$.

Покажем теперь, что $\psi_1(|t|, \frac{t}{|t|}) \equiv \psi_1(r, e) \in V$. Так как в окрестности $r = 0$

$$\psi(r, e) \approx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} r^p P_p(e),$$

где $P_p(e)$ – однородный многочлен степени p , то в окрестности нуля

$$\begin{aligned} \psi_r(r, e) &\approx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} r^p P_{p+1}(e), \\ \frac{1}{r} \psi_{\theta_1}(r, e) &\approx \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} r^{p-1} \frac{\partial P_p(e)}{\partial \theta_1} = \sum_{p=-1}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!} r^p \frac{\partial P_{p+1}(e)}{\partial \theta_1} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)!} r^p \frac{\partial P_{p+1}(e)}{\partial \theta_1}. \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы учли, что $P_0(e) = \text{const}$, и, следовательно, $\frac{\partial P_0}{\partial \theta_1} = 0$. Из (1.8) в окрестности нуля имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-2}, \varphi) &= \psi_r(r, \theta_1, \dots, \varphi) \cos \theta_1 - \frac{1}{r} \psi_{\theta_1}(r, \theta_1, \dots, \varphi) \sin \theta_1 \\ &\approx \sum_{p=0}^{\infty} \left[\frac{1}{p!} P_{p+1}(e) \cos \theta_1 - \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial P_{p+1}(e)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \right] r^p. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Покажем, что выражения, стоящее в (1.9) в квадратных скобках, есть однородные многочлены от $e = (e_1, \dots, e_n)$ степени p . Достаточно это проверить

в случае, когда $P_{p+1}(e) = e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n}$, где $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = p + 1$. Считая $\alpha_1 \neq 0$, имеем

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{p!} P_{p+1}(e) \cos \theta_1 - \frac{1}{(p+1)!} \frac{\partial P_{p+1}(e)}{\partial \theta_1} \sin \theta_1 \\
 &= \frac{1}{(p+1)!} \left[(\alpha_1 + \dots + \alpha_n) e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n} \cos \theta_1 + \alpha_1 e_1^{\alpha_1-1} \sin \theta_1 e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n} \sin \theta_1 \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{i=2}^n \alpha_i e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n} \cos \theta_1 \right] \\
 &= \frac{\alpha_1}{(p+1)!} [e_1^{\alpha_1} \dots e_n^{\alpha_n} \cos \theta_1 + e_1^{\alpha_1-1} e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n} \sin^2 \theta_1] \\
 &= \frac{\alpha_1}{(p+1)!} e_1^{\alpha_1-1} e_2^{\alpha_2} \dots e_n^{\alpha_n} (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1).
 \end{aligned}$$

Если $\alpha_1 = 0$, то аналогичная выкладка приводит к нулевому результату. Утверждение доказано.

Из (1.5) и (1.3) нетрудно видеть, что пространство V инвариантно относительно операции $r \frac{\partial}{\partial r}$. Положим $V^\ell = W^\ell \cap V$, так что V^ℓ – подпространство V , состоящее из функций, обращающихся в нуль в начале координат, вместе с производными до порядка $\ell - 1$ включительно.

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; тогда функционал $f_s(r, e)$, определяемый формулой

$$(f_s(r, e), \psi(r, e)) = \left(f(t), \psi\left(|t|, \frac{t}{|t|}\right) \right) \quad \forall \psi \in V, \quad (1.10)$$

принадлежит V' . По теореме Хана–Банаха мы можем продолжить f_s на все W . Обозначим это продолжение $F(r, e)$ и назовем его *сферическим представлением* обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'$. Отметим, что справедлива формула

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r, e), \varphi(re)) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (1.11)$$

Сферическое представление $F(r, e) \in W'$ обобщенной функции $f \in \mathcal{S}'$ определяется неоднозначно. Опишем эту неоднозначность. Пусть F_1 и F_2 – сферические представления $f(t) \in \mathcal{S}'$. Обозначая $\Psi(r, e) = F_1(r, e) - F_2(r, e)$, для любой $\psi(r, e) \in V$ имеем $(\Psi(r, e), \psi(r, e)) = 0$. Ясно, что $\text{supp } \Psi(r, e) \subset \{0\} \times S^{n-1}$, а потому существует N такое, что

$$\Psi(r, e) = \sum_{p=0}^N \delta^{(p)}(r) \Phi_p(e),$$

где $\Phi_p(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Отсюда для любой $\psi(r, e) \in V$ согласно (1.3) имеем

$$\begin{aligned}
 (\Psi(r, e), \psi(r, e)) &= \left(\sum_{p=0}^N \delta^{(p)}(r) \Phi_p(e), \psi(r, e) \right) \\
 &= \sum_{p=0}^N \left(\Phi_p(e), (-1)^p \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^p \psi(r, e) \Big|_{r=0} \right) \\
 &= \sum_{p=0}^N (-1)^p \sum_{|j|=p} c_j (\Phi(e), E_j(e)) = 0.
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Учитывая, что c_j могут быть произвольными, для этого достаточно в окрестности начала координат положить

$$\psi(r, e) = \sum_{p=0}^N \frac{r^p}{p!} \sum_{|j|=p} c_j E_j(e),$$

из (1.12) выводим, что $(\Phi(e), E_j(e)) = 0$ для $|j| = p$.

Общий вид сферического представления для любой функции $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ следующий:

$$F(r, e) + \sum_{p=0}^N \delta^{(p)}(r) \Phi_p(e), \quad p = 0, 1, \dots,$$

где $F(r, e)$ – какое-то (конкретное) сферическое представление, а обобщенные функции $\Phi_p(e)$ удовлетворяют условиям

$$(\Phi_p(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = p, \quad p = 0, 1, \dots \quad (1.13)$$

Тем самым фактически мы нашли Кег τ^* – ядро сопряженного к τ отображения τ^* . Оно состоит из функций вида

$$\sum_{q=0}^N \delta^{(q)}(r) \Phi_q(e), \quad N = 0, 1, \dots, \quad (1.14)$$

где $\Phi_q(e)$ удовлетворяют условиям ортогональности (1.13).

ПРИМЕР. Одним из сферических представлений производных дельта-функции $\delta^{(j)}(t)$, $|j| = p$, является обобщенная функция

$$\Delta_j(r, e) = \frac{j!}{|j|!} \delta^{(|j|)}(r) E_j^*(e).$$

С другой стороны, если $F(r, e) = \delta^{(q)}(r) \Phi(e)$, где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, то $F(r, e)$ является сферическим представлением обобщенной функции

$$f(t) = \sum_{|j|=q} \frac{q!}{j!} (\Phi(e), E_j(e)) \delta^{(j)}(t). \quad (1.15)$$

Это легко проверяется непосредственным счетом на основных функциях $\varphi(t) = \varphi(re)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ порядка β на (некотором) подпространстве $Q \subset W$, если существует предел

$$\frac{1}{\rho_1(k)} (F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (F_0(r, e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in Q. \quad (1.16)$$

Если Q совпадает с W , то будем говорить, что $F(r, e)$ асимптотически однородна по r на бесконечности относительно $\rho_1(k)$.

Функция $F(r, e) \in W'$ асимптотически однородна по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка β тогда и только тогда, когда

существует N , $N > -1 - \beta$, такое, что первообразная $F^{(-N)}(r, e) \in W'$ по r порядка N непрерывна по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и

$$\frac{1}{r^N \rho_1(r)} F^{(-N)}(r, e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi_0(e) \quad \text{в } \mathcal{S}'(S^{n-1}). \quad (1.17)$$

Данный результат вытекает из соответствующего одномерного результата (см. (0.4)) и стандартных рассуждений, связанных с ядерностью пространства W .

Отметим, что если $F(r, e) \in W'$ – сферическое представление обобщенной функции $f(t) \in \mathcal{S}'$, то для всех $\psi(r, e) \in V$ имеет место формула

$$(F(kr, e), \psi(r, e)) = k^{n-1} \left(f(kt), \psi \left(|t|, \frac{t}{|t|} \right) \right).$$

Непосредственно из соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1(k)} (F(kr, e), \psi(r, e)) &= \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \psi \left(|t|, \frac{t}{|t|} \right) \right) = \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) \\ \forall \psi(r, e) \in V, \quad \psi \left(|t|, \frac{t}{|t|} \right) &= \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \end{aligned} \quad (1.18)$$

следует, что обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда любое ее сферическое представление $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1} \rho(k)$ на всех основных функциях из V .

Из соотношения (1.18) легко видеть, что если функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени α , то любое ее сферическое представление $F(r, e)$ однородно степени $\beta = \alpha + n - 1$ на V . Отметим также следующий хорошо известный факт. Если функция $f(r) \in \mathcal{S}'_+$ однородна порядка β , то $f(r) = c f_{\beta+1}(r)$, в частности, если $\beta \neq -1, -2, \dots$, то $f(r) = c r_+^\beta$, где $r_+^\beta = \Gamma(\beta + 1) f_{\beta+1}$, если же $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, то $f(r) = c \delta^{(p)}(r)$.

Аналогичные результаты справедливы и для пространства W' . Если функция $F_0(r, e) \in W'$ однородна по r порядка β , то

$$F_0(r, e) = \begin{cases} r_+^\beta \Phi(e), & \text{если } \beta \neq -1, -2, \dots, \\ \delta^{(p)}(r) \Phi(e), & \text{если } \beta = -1 - p, \quad p = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (1.19)$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Будем говорить, что $F(r, e) \in W'$ асимптотически однородна в существенном по r относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ порядка β , если существуют целое число $N \geq 0$ и обобщенные функции $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $q = 0, 1, \dots, N$, такие, что

$$\frac{1}{\rho_1(k)} \left(F(kr, e) - \sum_{q \leq N} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(kr), \psi(r, e) \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (F_0(r, e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in W.$$

Нетрудно видеть, что $F_0(r, e)$ однородна по r степени β , т.е. выполняется (1.19). При $\beta > -1$ всякая асимптотически однородная в существенном по r функция будет асимптотически однородной по r относительно $\rho_1(k)$.

§ 2. Основные леммы

ЛЕММА 2.1. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ на всех основных функциях из W_0 . Тогда существует $\ell < \infty$ такое, что $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho(k)$ и на W^ℓ , т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_\psi \quad \forall \psi \in W^\ell.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем на W_0 следующую топологию. Пусть U_i , $i = 1, 2, \dots, t$, – карты атласа, покрывающие сферу S^{n-1} , и в каждой карте $(r, \Theta) = (r, \Theta_1, \dots, \Theta_{n-1})$ – координаты. Рассмотрим систему норм

$$\Psi_N[\psi(r, e)] = \max_i \max_{|j| \leq N} \max_{p \leq N} \sup_{r \geq 0, \Theta \in U_i} \left(\frac{1}{r} + r \right)^N \left| \frac{\partial^p}{\partial r^p} \frac{\partial^{|j|}}{\partial \theta_1^{j_1} \dots \partial \theta_{n-1}^{j_{n-1}}} \psi(r, \Theta) \right|,$$

где $N = 0, 1, \dots$, $\psi(r, e) \in W_0$. Через $\mathcal{X}_N$ обозначим банахово пространство, полученное пополнением W_0 по норме Ψ_N . Ясно, что W_0 – проективный предел пространств $\mathcal{X}_N$, т. е. $W_0 = \bigcap_N \mathcal{X}_N$. Поскольку $F(r, e)$ имеет конечный порядок сингулярности на W_0 и обладает квазиасимптотикой, то последовательность $F_k(r, e) = \frac{1}{\rho(k)} F(kr, e)$, сходящаяся на W_0 , будет сходиться и на некотором $\mathcal{X}_{N_0}$. (Это доказывается так же, как и для пространства $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.) Нетрудно видеть, что $W^\ell \subset \mathcal{X}_{N_0}$ при достаточно большом ℓ . Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in (W^\ell)'$ однородна по r степени β , где $\ell > -\beta - 1$ (допускается $\ell = \infty$). Тогда существует единственная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$F(r, e) = r^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W^\ell, \quad (2.1)$$

т. е.

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= \int_0^\infty r^\beta (\Phi(e), r^\ell \varphi(r, e)) dr \\ &= \int_0^\infty r^{\beta+\ell} (\Phi(e), \varphi(r, e)) dr \quad \forall \psi(r, e) \in W^\ell. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\psi(r, e) = r^\ell \varphi(r, e)$, где $\varphi(r, e) \in W$.

Если $\ell \leq -\beta - 1$, то

$$F(r, e) = f_{\beta+1}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W^\ell. \quad (2.3)$$

В частности, если $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, то $F(r, e) = \delta^{(p)}(r) \Phi(e)$ на W^ℓ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\ell + \beta > -1$; заметим, что тогда интеграл в формуле (2.2) имеет смысл. Отметим также, что $F(r, e)$ на W_0 – однородный функционал по r степени β , а потому $F_1(r, e) = \frac{1}{r^\beta} F(r, e)$ является однородным функционалом на W_0 степени нуль. Покажем, что $F_1(r, e)$ не зависит от r на W_0 .

Действительно, дифференцируя по k равенство

$$(F_1(r, e), \varphi(r, e)) = (F_1(kr, e), \varphi(r, e)) = \frac{1}{k} \left(F_1(r, e), \varphi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \quad \forall \varphi \in W_0$$

и полагая $k = 1$, получим

$$(F_1(r, e), \varphi(r, e)) + (F_1(r, e), r\varphi_r(r, e)) = \left(F_1(r, e), \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi(r, e)) \right) = 0.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial}{\partial r} F_1(r, e) = 0$ на W_0 , следовательно, $F_1(r, e) = 1(r) \Phi(e)$, где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ (см. [1, § 1.6]). Таким образом, соотношение (2.1) имеет место на всех основных функциях из W_0 .

Обозначим через $F_2(r, e)$ продолжение $F(r, e)$ с W_0 на W^ℓ , задаваемое формулой

$$\begin{aligned} (F_2(r, e), \psi(r, e)) &= \int_0^\infty r^\beta (\Phi(e), r^\ell \varphi(r, e)) dr \\ &= \int_0^\infty r^{\beta+\ell} (\Phi(e), \varphi(r, e)) dr \quad \forall \psi(r, e) \in W^\ell. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $\psi(r, e) = r^\ell \varphi(r, e)$, где $\varphi(r, e) \in W$. Ясно, что это продолжение однородно степени однородности β и на W_0 совпадает с $F(r, e)$. Положим $F_3(r, e) = F_2(r, e) - F(r, e)$. Заметим, что F_3 – однородная функция на W^ℓ порядка β и на W_0 обращается в нуль. Определим $\bar{F}_3(r, e) \in W'$ формулой

$$(\bar{F}_3(r, e), \varphi(r, e)) = (F_3(r, e), r^\ell \varphi(r, e)) \quad \forall \varphi \in W.$$

(Отметим, что отображение

$$\nu: \psi(r, e) \mapsto \frac{1}{r^\ell} \psi(r, e) = \varphi(r, e), \quad \psi(r, e) \in W^\ell, \quad \varphi(r, e) \in W,$$

осуществляет изоморфизм пространств W^ℓ и W .) Пользуясь однородностью F_3 по r порядка β на W^ℓ , для любой $\varphi(r, e) \in W$ имеем

$$\begin{aligned} (\bar{F}_3(kr, e), \varphi(r, e)) &= \frac{1}{k} \left(\bar{F}_3(r, e), \varphi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) = \frac{1}{k} \left(F_3(r, e), r^\ell \varphi\left(\frac{r}{k}, e\right) \right) \\ &= k^\ell (F_3(kr, e), r^\ell \varphi(r, e)) = k^{\ell+\beta} (F_3(r, e), r^\ell \varphi(r, e)) \\ &= k^{\ell+\beta} (\bar{F}_3(r, e), \varphi(r, e)). \end{aligned}$$

Это соотношение показывает, что $\bar{F}_3$ – однородная функция степени $\ell + \beta$. Кроме того, она совпадает с F_3 на W_0 и, следовательно, на W_0 равна нулю. Другими словами, $\bar{F}_3$ обращается в нуль на всех основных функциях с носителями, отделенными от начала координат. Поэтому функция F_3 сосредоточена в нуле, а следовательно,

$$\bar{F}_3(r, e) = \sum_{p < N} c_p(e) \delta^{(p)}(r), \quad c_p(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}).$$

Она может быть однородна степени $\ell + \beta > -1$ только тогда, когда все $c_p(e) \equiv 0$, а потому $\bar{F}_3(r, e) \equiv 0$. Отсюда $F_2(r, e) = F(r, e)$ на W^ℓ . Теперь, пользуясь (2.4), завершаем доказательство соотношения (2.1). Единственность $\Phi(e)$ очевидна.

Пусть $\ell \leq -\beta - 1$. Введем функцию $F_1(r, e) = r^\ell F(r, e)$. Она однородна на W степени $\beta + \ell$, поэтому $F_1(r, e) = f_{\beta+\ell+1}(r)\Phi_1(e)$ (см. (1.19)). Для

$$\psi(r, e) \in W^\ell, \quad \psi(r, e) = r^\ell \varphi(r, e), \quad \varphi(r, e) \in W,$$

пользуясь равенством

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z+\ell)} f_z(r) r^\ell = f_{z+\ell}(r), \quad z \neq 0, -1, \dots, -\ell + 1,$$

при $z = \beta + 1$ имеем

$$\begin{aligned} (F(r, e), \psi(r, e)) &= (F(r, e), r^\ell \varphi(r, e)) = (F_1(r, e), \varphi(r, e)) \\ &= (f_{\beta+\ell+1}(r)\Phi_1(e), \varphi(r, e)) \\ &= \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\ell+1)} f_{\beta+1}(r) r^\ell \Phi_1(e), \varphi(r, e) \right) \\ &= (f_{\beta+1}(r)\Phi(e), \psi(r, e)). \end{aligned}$$

Таким образом, на W^ℓ получим равенство (2.3). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка β на всех основных функциях из W^ℓ , $\ell > -\beta$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } W^\ell. \quad (2.5)$$

Тогда (2.5) будет иметь место и на всех основных функциях из $W^{\ell-1}$. При этом $F_0(r, e) = r^\beta \Phi(e)$, где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} k^\ell (F(kr, e), r^{\ell-1} \varphi(r, e)) &= - \int_1^k \left(F(r\mathcal{K}, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathcal{K}^{\ell-1} d\mathcal{K} \\ &\quad + (\gamma(r, e), \varphi(r, e)) \quad \forall \varphi(r, e) \in W, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\gamma(r, e) \in W'$. (Оно легко проверяется дифференцированием по k .) Из тождества (2.6) следует соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (F(kr, e), r^{\ell-1} \varphi(r, e)) &= - \frac{1}{k^\ell \rho(k)} \int_1^k \left(F(r\mathcal{K}, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathcal{K}^{\ell-1} d\mathcal{K} \\ &\quad + \frac{1}{k^\ell \rho(k)} (\gamma(r, e), \varphi(r, e)). \end{aligned}$$

Поскольку $\ell + \beta > 0$, то $k^\ell \rho(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$. По условию

$$\left(F(r\mathcal{K}, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \sim \text{const} \cdot \rho(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \rightarrow +\infty,$$

и по свойству автомодельных функций ($\beta + \ell - 1 > -1$)

$$\int_1^k \rho(\mathcal{K}) \mathcal{K}^{\ell-1} d\mathcal{K} \sim \text{const} \cdot k^\ell \rho(k), \quad k \rightarrow +\infty.$$

Отсюда теперь следует, что $F(r, e)$ обладает требуемыми свойствами. Осталось заметить, что $F_0(r, e)$ – однородная функция степени β на W^ℓ и согласно лемме 2.2 выполнено $F_0(r, e) = r^\beta \Phi(e)$ с некоторой функцией $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Лемма доказана.

Прежде чем сформулировать следующую лемму, введем автомодельную функцию $\hat{\rho}(k)$, определяемую по автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α (см. [9], [10]):

$$\hat{\rho}(k) = \begin{cases} k^\alpha \int_1^k \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty, \\ k^\alpha \int_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что $\hat{\rho}(k)$ – автомодельная функция порядка α . Отметим некоторые ее свойства.

1. Пусть непрерывная комплекснозначная функция $r(k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{k^\alpha}{\hat{\rho}(k)} \int_1^k \frac{\rho(\varkappa)r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty; \\ \frac{k^\alpha}{\hat{\rho}(k)} \int_k^\infty \frac{\rho(\varkappa)r(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2. Имеет место

$$\frac{\hat{\rho}(k)}{k^\alpha} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty, \\ 0, & \text{если } \int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty. \end{cases} \quad (2.9)$$

3. Существует предел

$$\frac{\hat{\rho}(k)}{\rho(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (2.10)$$

ЛЕММА 2.4. Пусть $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, на всех основных функциях из W^ℓ , где $\ell = -\beta = p + 1$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r^{-p-1} \Phi(e) \quad \text{на } W^\ell \quad (W^{p+1}). \quad (2.11)$$

Тогда если

$$\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\beta+1}} d\varkappa = \infty, \quad (2.12)$$

то

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W^{\ell-1} \quad (W^p). \quad (2.13)$$

Если

$$\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\beta+1}} d\varkappa < \infty, \quad (2.14)$$

то существует функция $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что функция $G(r, e) = F(r, e) - \Psi(e)\delta^{(p)}(r)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$ на всех основных функциях из $W^{\ell-1}$, т.е.

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W^{\ell-1} \quad (W^p). \quad (2.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала предположим, что выполнено соотношение (2.12). Пользуясь тождеством (2.6), где $\ell = p + 1$, и определением (2.7), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{\rho}(k)} (F(kr, e), r^p \varphi(r, e)) \\ &= -\frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_1^k \left(F(r\mathfrak{x}, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} + \frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} (\gamma(r, e), \varphi(r, e)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку $k^{p+1} \hat{\rho}(k) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, то последнее слагаемое в (2.16) стремится к нулю. Из (2.11) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho(\mathfrak{x})} \left(F(r\mathfrak{x}, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \\ & \xrightarrow{\mathfrak{x} \rightarrow \infty} \left(r^{-1-p} \Phi(e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) = -(\Phi(e), \varphi(0, e)). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая (2.12) и (2.8), из соотношения (2.17) выводим

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_1^k \left(F(r\mathfrak{x}, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} \\ &= -\frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_1^k \frac{1}{\rho(\mathfrak{x})} \left(F(r\mathfrak{x}, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \rho(\mathfrak{x}) \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} \\ & \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\Phi(e), \varphi(0, e)). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{\rho}(k)} (F(kr, e), r^p \varphi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\Phi(e), \varphi(0, e)) \\ &= \left(\Phi(e), \frac{\partial^p}{\partial r^p} \frac{r^p}{p!} \varphi(r, e) \Big|_{r=0} \right) = \frac{(-1)^p}{p!} (\delta^{(p)}(r) \Phi(e), r^p \varphi(r, e)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

что и доказывает (2.13).

Пусть теперь выполнено (2.14). Воспользуемся равенством

$$\begin{aligned} k^{p+1} (F(kr, e), r^p \varphi(r, e)) &= \int_k^\infty \left(F(r\mathfrak{x}, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathfrak{x}^p d\mathfrak{x} \\ &+ (\gamma(r, e), \varphi(r, e)) \quad \forall \varphi(r, e) \in W, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\gamma(r, e) \in W'$. Заметим, что интеграл в (2.19) сходится в силу (2.17) и (2.14). Положим в (2.19) $\varphi(r, e) = r\psi(r, e)$, $\psi(r, e) \in W$. Учитывая, что при $k \rightarrow +\infty$

$$(F(kr, e), r^p r\psi(r, e)) \sim \text{const} \cdot \rho(k)$$

и $k^{p+1}\rho(k) \rightarrow 0$, заключаем, что левая часть равенства (2.19) стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$.

С другой стороны, интеграл в (2.19) также стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$, так как подынтегральное выражение пропорционально $\varkappa^p \rho(\varkappa)$ (см. (2.14)). Отсюда получаем, что $(\gamma(r, e), r\psi(r, e)) = 0$. Следовательно,

$$\gamma(r, e) = \delta(r)\Psi(e), \quad \Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}).$$

Учитывая теперь тождество

$$\begin{aligned} (\delta(r)\Psi(e), \varphi(r, e)) &= \frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!} (\delta^{(s-1)}(r)\Psi(e), r^{s-1}\varphi(r, e)) \\ &= \frac{(-1)^{s-1}k^s}{(s-1)!} (\delta^{(s-1)}(kr)\Psi(e), r^{s-1}\varphi(r, e)) \end{aligned}$$

и полагая $s = p + 1$ и

$$G(r, e) = F(r, e) - \frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r)\Psi(e),$$

из (2.19) получим

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} (G(kr, e), r^p \varphi(r, e)) = \frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_k^\infty \left(F(r\varkappa, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \varkappa^p d\varkappa.$$

Отсюда, пользуясь (2.17), (2.8) и (2.18), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_k^\infty \left(F(r\varkappa, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \varkappa^p d\varkappa \\ &= \frac{1}{k^{p+1} \hat{\rho}(k)} \int_k^\infty \frac{1}{\rho(\varkappa)} \left(F(r\varkappa, e), r^{p+1} \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \rho(\varkappa) \varkappa^p d\varkappa \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -(\Phi(e), \varphi(0, e)) = -\frac{(-1)^p}{p!} (\delta^{(p)}(r)\Phi(e), r^p \varphi(r, e)), \end{aligned}$$

что и доказывает (2.15). Лемма доказана.

ЛЕММА 2.5. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка β на всех основных функциях из W^ℓ , $\ell < -\beta$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } W^\ell. \quad (2.20)$$

Тогда существует функция $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что $G(r, e) = F(r, e) - \Psi(e)\delta^{(\ell-1)}(r)$ обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно $\rho(k)$ на всех основных функциях из $W^{\ell-1}$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } W^{\ell-1}. \quad (2.21)$$

При этом

$$F_0(r, e) = f_{\beta+1}(r)\Phi(e), \quad \Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}). \quad (2.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 2.4, только следует воспользоваться тем, что для автомодельных функций

$$\int_k^\infty \rho(\varkappa) \varkappa^{\ell-1} d\varkappa \sim \text{const} \cdot k^\ell \rho(k), \quad k \rightarrow +\infty, \quad \ell < -\beta.$$

ЛЕММА 2.6. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ порядка $\beta \neq -1, -2, \dots$ на всех основных функциях из W_0 , т. е.

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W_0, \quad (2.23)$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$. Тогда существуют функции

$$\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}), \quad q = 0, 1, \dots, \quad q < -1 - \beta, \quad (2.24)$$

такие, что функция

$$G(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q < -1 - \beta} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) \quad (2.25)$$

обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно $\rho_1(k)$ на всех основных функциях из W , т. е. является асимптотически однородной по r . При этом

$$\frac{1}{\rho_1(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r_+^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W. \quad (2.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что согласно лемме 2.1 из (2.23) вытекает существование $\ell < \infty$ такого, что

$$\frac{1}{\rho_1(k)} (F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (F_0(r, e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi \in W^\ell. \quad (2.27)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\ell > -\beta$. Отметим также, что $F_0(r, e)$ – однородная функция степени β и по лемме 2.2 она равна $r^\beta \Phi(e)$ на W^ℓ . Пользуясь леммой 2.3 последовательно несколько раз, каждый раз снижаем на 1 показатель пространства W^ℓ , на котором выполняется соотношение (2.27), до тех пор, пока на каком-то шаге этот показатель не станет строго меньше $-\beta$. Пользуясь далее леммой 2.5 последовательно несколько раз, каждый раз вычитая соответствующий контрчлен, получим требуемое соотношение (2.26). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если в условиях леммы $\beta > -1$, то в (2.25) сумма отсутствует.

ЛЕММА 2.7. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ порядка $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, на всех основных функциях из W_0 , т. е. выполнено (2.23). Тогда существуют функции $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $q = 0, 1, \dots, p$, такие, что функция

$$G(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) \quad (2.28)$$

асимптотически однородна по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}_1(k)$. При этом если $\int_1^\infty \frac{\rho_1(x)}{x^{\beta+1}} dx = \infty$, то

$$\frac{1}{\hat{\rho}_1(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W \quad (2.29)$$

и в сумме (2.28) последнее слагаемое можно считать равным нулю, а если $\int_1^\infty \frac{\rho_1(x)}{x^{\beta+1}} dx < \infty$, то

$$\frac{1}{\hat{\rho}_1(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W. \quad (2.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В условиях леммы 2.7 функция $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k)$ на всех основных функциях из $W^{-\beta}$, т. е.

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W^{-\beta} \quad (W^{p+1}). \quad (2.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.7. Отметим, что согласно лемме 2.1 из (2.23) вытекает существование $\ell < \infty$ такого, что выполнено (2.27). Без ограничения общности можно считать, что $\ell > -\beta$. Точно так же, как и в лемме 2.6, пользуясь леммой 2.3, снижаем на единицу показатель пространства W^ℓ , на котором выполнено соотношение (2.27), до тех пор, пока он не станет равным $-\beta = p+1$. (Отсюда следует (2.31).) Затем, пользуясь леммой 2.4, снижаем этот показатель на единицу (вычитая, если нужно, соответствующий контрчлен), при этом заменяя ρ на $\hat{\rho}$. Далее последовательно несколько раз пользуемся леммой 2.5 до тех пор, пока не дойдем до соотношений (2.29) и (2.30) соответственно. Лемма доказана.

§ 3. Сферическое представление однородных обобщенных функций

Рассмотрим случай однородных обобщенных функций. Хотя этот случай достаточно изучен (см. [2]), для полноты изложения мы приведем необходимые нам результаты с доказательствами. Нас будут интересовать однородные обобщенные функции на пространствах $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^\ell$, V , V^ℓ . Отметим, что описание однородных функций на W и W^ℓ дается леммой 2.2.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$ на $\mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n)$. Тогда существует единственная обобщенная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$(f(t), \varphi(t)) = (f_{\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(re)) \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n). \quad (3.1)$$

Здесь $\beta = \alpha + n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(t)$ однородна степени α на $\mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n)$; тогда любое ее сферическое представление $F(r, e)$ однородно по r степени $\beta \neq -1, -2, \dots$ на V^ℓ , следовательно, и на W_0 . Поэтому $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно k^β на W_0 . По лемме 2.6 существуют $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $0 \leq q < -1 - \beta$, такие, что функция

$$F_1(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q < -1 - \beta} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$$

обладает квазиасимптотикой по r относительно k^β на W , т. е. существует $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такое, что

$$\frac{1}{k^\beta} F_1(kr, e) = \frac{1}{k^\beta} F(kr, e) - \frac{1}{k^\beta} \sum_{0 \leqslant < -1-\beta} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_{\beta+1}(r) \Phi(e).$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi(r, e) &= r^{\ell_1} E_j(e) \omega(r^2), \quad |j| = \ell_1, \quad \ell_1 \geqslant \ell, \\ \omega(\xi) &\in \mathcal{S}_+, \quad \omega(\xi) = 1 \text{ при } \xi < 1. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая, что $\varphi(r, e) \in V^\ell$, и пользуясь однородностью $F(r, e)$ на V^ℓ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\beta} (F_1(kr, e), \varphi(r, e)) &= (F(r, e), \varphi(r, e)) - \frac{(-1)^{\ell_1} \ell_1!}{k^{\beta+\ell_1+1}} (\Phi_{\ell_1}(e), E_j(e)) \\ &\rightarrow (f_{\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(r, e)), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Если $k^{\beta+\ell_1+1} \rightarrow 0$, то $(\Phi_{\ell_1}(e), E_j(e)) = 0$, и в этом случае

$$(F(r, e), \varphi(r, e)) = (f_{\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(r, e)). \quad (3.3)$$

Если $k^{\beta+\ell_1+1} \rightarrow \infty$, то в пределе тоже получим (3.3). Следовательно, для функций вида (3.2) утверждение доказано. Но функции вида (3.2) плотны в V^ℓ , что и доказывает (3.1). Единственность $\Phi(e)$ следует из леммы 2.2. Теорема доказана.

Теорему 3.1 можно переформулировать следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ однородна по r степени $\beta \neq -1, -2, \dots$ на V^ℓ тогда и только тогда, когда существует единственная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что*

$$(F(r, e), \varphi(r, e)) = (f_{\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(r, e)), \quad \varphi(r, e) \in V^\ell.$$

При $\ell = 0$ из теоремы 3.1 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$ тогда и только тогда, когда существует единственная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что $F(r, e) = f_{\beta+1}(r) \Phi(e)$, $\beta = \alpha + n - 1$, – сферическое представление $f(t)$, т. е.*

$$(f(t), \varphi(t)) = (f_{\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(re)) \quad \forall \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (3.4)$$

Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени α . Тогда $|t|^\lambda f(t)$ – хорошо определенная обобщенная функция при достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$. Пользуясь следствием 3.2, нетрудно видеть, что существует функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что при достаточно больших $\operatorname{Re} \lambda$

$$(|t|^\lambda f(t), \varphi(t)) = \Gamma(\lambda + \beta + 1) (f_{\lambda+\beta+1}(r) \Phi(e), \varphi(re)), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Здесь $\beta = \alpha + n - 1$. Отсюда (см. [2]) вытекает, что она аналитична по λ во всей комплексной плоскости, кроме $\lambda = -\alpha - n, -\alpha - n - 1, \dots$, в которых она может

иметь простые полюсы. В частности, если $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$, то эти полюсы расположены в точках $p, p - 1, \dots$, причем

$$\operatorname{Res}_{\lambda=0} |t|^\lambda f_0(t) = (-1)^p \sum_{|j|=p} \frac{1}{j!} (\Phi(e), E_j(e)) \delta^{(j)}(t), \quad (3.5)$$

где $\Phi(e)$ определяется соотношением

$$(|t|^\lambda f_0(t), \varphi(t)) = (r^{\lambda-p-1} \Phi(e), \varphi(re)), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad \operatorname{Re} \lambda > p.$$

ЛЕММА 3.1. Пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$, на $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n). \quad (3.6)$$

Тогда $f(t)$ асимптотически однородна в существенном относительно $\hat{\rho}(k)$. Другими словами, найдутся постоянные c_j , $|j| \leq p$, такие, что обобщенная функция

$$g(t) = f(t) - \sum_{|j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t) \quad (3.7)$$

асимптотически однородна на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$. При этом

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} g(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm \operatorname{Res}_{\lambda=0} |t|^\lambda f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (3.8)$$

Здесь берется знак $+$, если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty$, и знак $-$, если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(r, e) \in W'$ – какое-то сферическое представление $f(t)$. Тогда на W_0 оно обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1} \rho(k)$ порядка $\beta = \alpha + n - 1$, причем

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W_0.$$

Здесь мы учли, что предельная функция однородна по r и по лемме 2.2 должна иметь вид $r^\beta \Phi(e)$. По лемме 2.7 существуют обобщенные функции $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $q = 0, 1, \dots, p$, такие, что функция

$$G(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq p} \delta^{(q)}(r) \Phi_q(e)$$

обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}_1(k)$ на W . При этом $\Phi_p(e) = 0$, если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty$. Из (2.29) или (2.30) следует

$$\frac{1}{\hat{\rho}_1(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm \frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(r) \Phi(e) \quad \text{на } W. \quad (3.9)$$

Знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от расходимости или сходимости соответствующего интеграла (см. лемму 2.7). Пусть $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет своим сферическим представлением функцию $G(r, e)$. Тогда

$$g(t) = f(t) - \sum_{|j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t),$$

где c_j определяются по формуле (1.15). Из (3.9) и (1.15) вытекает соотношение

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} g(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (-1)^p \sum_{|j|=p} \frac{1}{j!} (\Phi(e), E_j(e)) \delta^{(j)}(t),$$

которое в силу (3.5) совпадает с (3.8). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь критические степени однородности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть p – целое неотрицательное число и обобщенная функция $\Phi(e)$ принадлежит $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем выполнено условие ортогональности

$$(\Phi(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = p. \quad (3.10)$$

Обобщенную функцию $f_{\Phi,p}(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ определим формулой

$$(f_{\Phi,p}(t), \varphi(t)) = \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \varphi(re) - T_{\varphi(re)}^p(r, e)), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (3.11)$$

где $T_{\psi(r,e)}^p(r, e)$ – тейлоровский многочлен по r порядка p функции $\psi(r, e)$. В частности,

$$T_{\varphi(re)}^p(r, e) = \sum_{|j| \leq p} \frac{r^{|j|}}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(0).$$

Отметим, что выражение в (3.11) справа определено корректно, так как слагаемые порядка p равны нулю в силу условия ортогональности (3.10). Заметим также, что $f_{\Phi,p}(t)$ является однородной обобщенной функцией степени однородности $\alpha = -n - p$.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$, на $\mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n)$, $\ell \leq p$. Тогда существуют единственная функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$,

$$(\Phi(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = p, \quad (3.12)$$

и единственные постоянные c_j , $|j| = p$, такие, что

$$f(t) = f_{\Phi,p}(t) + \sum_{|j|=p} c_j \delta^{(j)}(t) \quad \text{на } \mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F(r, e)$ – сферическое представление $f(t)$. По условию оно однородно по r степени $\beta = \alpha + n - 1$ на V^ℓ , следовательно, обладает квазиасимптотикой по r относительно k^β , $\beta = -1 - p$, на W_0 , а потому по лемме 2.1 и на W^{ℓ_0} при некотором ℓ_0 . Применяя несколько раз лемму 2.3, получим, что функция $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно k^β на W^{p+1} , причем существует функция $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$\frac{1}{k^\beta} (F(kr, e), \psi(r, e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \psi(r, e)) \quad \forall \psi(r, e) \in W^{p+1}. \quad (3.14)$$

По лемме 2.7 существует функция

$$F_1(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$$

с некоторыми $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, обладающая квазиасимптотикой по r относительно $\hat{\rho}_1(k) = k^\beta \ln k$, так что

$$\frac{1}{k^\beta \ln k} F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm \frac{(-1)^p}{p!} \Phi(e) \delta^{(p)}(r) \quad \text{на } W. \quad (3.15)$$

Положим

$$\varphi(r, e) = r^p E_j(e) \omega(r^2), \quad \text{где } |j| = p, \quad \omega(\xi) \in \mathcal{S}_+, \quad \omega(\xi) = 1 \text{ при } \xi < 1.$$

Ясно, что $\varphi(r, e) \in V^\ell$, а потому в силу однородности $F(r, e)$ на V^ℓ из (3.15) имеем

$$\begin{aligned} \frac{k^{p+1}}{\ln k} (F_1(kr, e), \varphi(r, e)) &= \frac{1}{\ln k} (F(r, e), \varphi(r, e)) - \frac{(-1)^p p!}{\ln k} (\Phi_p(e), E_j(e)) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm (\Phi(e), E_j(e)). \end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, следовательно, $(\Phi(e), E_j(e)) = 0$ при $|j| = p$. Заметим теперь, что из (3.14) при $\varphi(t) \in \mathcal{S}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ вытекает

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(r, e), \varphi(re)) = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \varphi(re)), \quad (3.16)$$

так как в этом случае $\varphi(re) \in V^{p+1}$, левая часть соотношения (3.14) в силу однородности $F(r, e)$ не зависит от k . По функции $\Phi(e)$ определим обобщенную функцию $f_{\Phi, p}(t)$ формулой (3.11). Для любой основной функции $\varphi(t) \in \mathcal{S}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$ из (3.16) следует, что $(f(t) - f_{\Phi, p}(t), \varphi(t)) = 0$. Отсюда вытекает, что

$$f(t) = f_{\Phi, p}(t) + \sum_{|j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

или

$$f(t) = f_{\Phi, p}(t) + \sum_{\ell \leq |j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t) \quad \text{на } \mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n).$$

В правой части последнего равенства функция $f_{\Phi, p}(t)$ однородна степени $\alpha = -n - p$, а в левой части $f(t)$ однородна степени α на $\mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n)$. Теперь очевидно, что в сумме дельта-функций могут присутствовать лишь слагаемые при $|j| = p$. Итак, формула (3.13) доказана. Единственность функции $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ следует из леммы 2.1, а единственность c_j – из формулы $(f(t), t^j \omega(|t|^2)) = (-1)^{|j|} j! c_j$, где $|j| = p$, $\omega(\xi) \in \mathcal{S}_+$ и $\omega(\xi) = 1$ при $\xi < 1$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если в условиях теоремы $\ell > p$, то формула (3.13) также справедлива, при этом она принимает вид

$$(f(t), \varphi(t)) = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \varphi(re)), \quad \varphi \in \mathcal{S}^\ell(\mathbb{R}^n). \quad (3.17)$$

Более того, в этом случае условия ортогональности (3.12) могут не выполняться.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Функция $F(r, e) \in W'$ однородна по r степени $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, на V^ℓ , $\ell \leq p$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (F(r, e), \varphi(r, e)) &= \int_0^\infty (\Phi(e), \varphi(r, e) - T_{\varphi(r, e)}^p(r, e)) dr \\ &+ (\Psi(e), \varphi^{(p)}(0, e)), \quad \varphi(r, e) \in V^\ell, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\Phi(e)$ – однозначно определяемая функция из $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, а $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ – произвольная функция, удовлетворяющая системе уравнений

$$(-1)^P \frac{p!}{j!} (\Psi(e), E_j(e)) = c_j, \quad |j| = p, \quad (3.19)$$

где c_j определяются из (3.13) по $f(t)$, сферическим представлением которой является $F(r, e)$.

При $\ell = 0$ из теоремы 3.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени однородности $\alpha = -n - p$, где p – целое неотрицательное число, тогда и только тогда, когда существуют единственная функция

$$\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}), \quad (\Phi(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = p,$$

и единственные постоянные c_j , $|j| = p$, такие, что

$$f(t) = f_{\Phi, p}(t) + \sum_{|j|=p} c_j \delta^{(j)}(t). \quad (3.20)$$

§ 4. Основные теоремы

Основная цель настоящего параграфа – доказать следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (4.1)$$

где

$$(f_0(t), \varphi(t)) = (f_{\beta+1}(r)\Phi(e), \varphi(re)), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (4.2)$$

Здесь $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $\beta = \alpha + n - 1$. Тогда если $\alpha > -n$, то любое ее сферическое представление $F(r, e) \in W'$ асимптотически однородно по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$, если же $\alpha < -n$, то существует ее сферическое представление $F(r, e)$, асимптотически однородное по r на бесконечности относительно $\rho_1(k)$. При этом

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_{\beta+1}(r)\Phi(e) \quad \text{на } W. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что (4.2) обязательно имеет место, поскольку $f_0(t)$ однородна (см. следствие 3.2). Пусть обобщенная функция $F_1(r, e) \in W'$ – какое-то сферическое представление $f(t)$. Тогда она обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ порядка $\beta = \alpha + n - 1$ на V , а следовательно, и на W_0 . Причем

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_{\beta+1}(r) \Phi(e) \quad \text{на } V \quad (4.4)$$

(см. (1.18)). По лемме 2.6 существуют $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $0 \leq q < -\beta - 1 = -n - \alpha$, такие, что

$$G(r, e) = F_1(r, e) - \sum_{0 \leq q < -\beta - 1} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$$

обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k)$ на W , а следовательно, и на V . Поэтому обобщенная функция $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, сферическое представление которой есть $G(r, e)$, обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$. Далее имеем

$$\gamma(t) \equiv f(t) - g(t) = \sum_{|j| < -\beta - 1} c_j \delta^{(j)}(t), \quad c_j = \frac{|j|!}{j!} (\Phi_{|j|}(e), E_j(e)) \quad (4.5)$$

(см. (1.15)). Обобщенная функция $\gamma(t)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho(k)$, так как f и g обладают ею. Возьмем основную функцию $\omega(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, чтобы $\omega(t) = 1$ при $|t| < 1$. Пусть j – мультииндекс, $|j| < -\beta - 1$. Из (4.5) следует

$$\frac{1}{\rho(k)} (\gamma(kt), t^j \omega(t)) = c_j j! \frac{1}{\rho(k) k^{|j|+n}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const.} \quad (4.6)$$

Поскольку $\alpha + |j| + n < \alpha - \beta - 1 + n = 0$, то (4.6) возможно только тогда, когда $c_j = 0$, и мы получаем, что

$$(\Phi_q(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = q, \quad q = 0, 1, \dots, -\beta - 1. \quad (4.7)$$

Следовательно, $\sum_{0 \leq q < -\beta - 1} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$ принадлежит ядру отображения τ^* (см. (1.14)). Полагая теперь $F(r, e) = G(r, e)$, получаем искомое сферическое представление для $f(t)$. При этом из (4.6), (4.7) и (4.4) следует, что $G(r, e)$ и $F_1(r, e)$ обладают одной и той же квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\rho_1(k)$, равной $f_{\beta+1}(r) \Phi(e)$. Осталось заметить, что любое сферическое представление отличается от $G(r, e)$ на обобщенную функцию $\sum_{q=0}^N \Psi_q(e) \delta^{(q)}(r)$, которая обладает тривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$, если $\beta > -1$ или $\alpha > -n$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots, m.e.$

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (4.8)$$

где

$$(f_0(t), \varphi(t)) = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \varphi(re) - T_{\varphi(re)}^p) + \sum_{|j|=p} c_j \varphi^{(j)}(0), \quad \varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (4.9)$$

с некоторыми c_j , $|j| = p$, и $\Phi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$. Тогда существует ее сферическое представление $F(r, e) \in W'$, асимптотически однородное по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}_1(k)$, где $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$, так что

$$\frac{1}{\hat{\rho}_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm \frac{(-1)^p}{p!} \Phi(e) \delta^{(p)}(r). \quad (4.10)$$

Здесь берется знак $+$, если $\int_1^{+\infty} \frac{\rho(\kappa)}{\kappa^{\alpha+1}} d\kappa = \infty$, и знак $-$, если $\int_1^{+\infty} \frac{\rho(\kappa)}{\kappa^{\alpha+1}} d\kappa < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что (4.9) обязательно имеет место, поскольку $f_0(t)$ однородна (см. следствие 3.4). Пусть обобщенная функция $F_1(r, e) \in W'$ – какое-то сферическое представление $f(t)$; тогда она обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ порядка $\beta = \alpha + n - 1$ на W_0 , причем согласно лемме 2.2

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F_1(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} r^\beta \Phi(e) \quad \text{на } W_0, \quad (4.11)$$

где $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ определяется формулой (4.9) (см. (1.18)). По лемме 2.7 существуют $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $0 \leq q \leq -\beta - 1 = p$ (причем $\Phi_p(e) = 0$, если $\int_1^\infty \frac{\rho(\kappa)}{\kappa^{\alpha+1}} d\kappa = \infty$), такие, что функция

$$G(r, e) = F_1(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) \quad (4.12)$$

асимптотически однородна по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}_1(k)$ на W , так что

$$\frac{1}{\hat{\rho}_1(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \pm \frac{(-1)^p}{p!} \Phi(e) \delta^{(p)}(e). \quad (4.13)$$

Поэтому обобщенная функция $g(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, сферическое представление которой есть $G(r, e)$, асимптотически однородна на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$. Из (4.13) в силу (1.15) имеем

$$\gamma(t) \equiv f(t) - g(t) = \sum_{|j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t), \quad c_j = \frac{|j|!}{j!} (\Phi_{|j|}(e), E_j(e)). \quad (4.14)$$

Обобщенная функция $\gamma(t)$ обладает квазиасимптотикой на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$, так как g обладает ею, а квазиасимптотика $f(t)$ относительно $\hat{\rho}(k)$ по свойству (2.10) тривиальна. Возьмем основную функцию $\omega(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ такую, что $\omega(t) = 1$ при $|t| < 1$. Пусть j – мультииндекс, $|j| \leq -\beta - 1 = p$. Из (4.14) и существования квазиасимптотики следует, что

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} (\gamma(kt), t^j \omega(t)) = c_j j! \frac{1}{\hat{\rho}(k) k^{|j|+n}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const.} \quad (4.15)$$

Если $\alpha + |j| + n < \alpha - \beta - 1 + n < 0$, то соотношение (4.15) возможно только тогда, когда $c_j = 0$, и мы получаем, что

$$(\Phi_{|j|}(e), E_j(e)) = 0 \quad (4.16)$$

для этих j . Если $|j| = -\beta - 1 = p$ и $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa = \infty$, то (4.16) выполняется тривиально, так как $\Phi_{|j|}(e) = 0$. Если же $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\alpha+1}} d\varkappa < \infty$, то при $|j| = -\beta - 1 = p$ из (4.15) имеем

$$\frac{1}{\hat{\rho}(k)} (\gamma(kt), t^j \omega(t)) = c_j j! \frac{1}{\hat{\rho}(k) k^{|j|+n}} = c_j j! \frac{k^\alpha}{\hat{\rho}(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const},$$

и по свойству (2.9) $c_j = 0$. Значит, (4.16) выполняется и при этих j . Следовательно, $\sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$ принадлежит ядру отображения τ^* (см. (1.14)). Полагая теперь $F(r, e) = G(r, e)$, получаем искомое сферическое представление для $f(t)$. Теорема доказана.

Далее нам понадобится следующая

ЛЕММА 4.1. Пусть обобщенная функция $F(r, e) \in W'$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, на основных функциях из V^ℓ , где $\ell \leq -1 - \beta = p$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } V^\ell. \quad (4.17)$$

Тогда существует $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что функция $G(r, e) = F(r, e) - \Psi(e) \delta^{(\ell-1)}(r)$ обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ на основных функциях из $V^{\ell-1}$, т. е.

$$\frac{1}{\rho(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } V^{\ell-1}. \quad (4.18)$$

Функция $F_0(r, e)$ в (4.17) и (4.18) задается формулой

$$\begin{aligned} (F_0(r, e), \varphi(r, e)) &= \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi(e), \varphi(r, e) - T_{\varphi(r, e)}^p(r, e)) \\ &\quad + (\Psi(e), \varphi^{(p)}(0, e)), \quad \varphi(r, e) \in V^{\ell-1}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где $\Phi(e), \Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такие же, как в следствии 3.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия леммы следует, что (4.17) выполнено и на W_0 , а потому по лемме 2.7 существуют $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $0 \leq q \leq p$, такие, что функция

$$F_1(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$$

обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$ на W . При этом $\Phi_p(e) = 0$, если $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^{\beta+1}} d\varkappa = \infty$. Из (4.17) и (2.10) вытекает, что $F(r, e)$ обладает тривиальной квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$ на V^ℓ . Следовательно,

$$\Sigma(r, e) \equiv \sum_{0 \leq q < \ell} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) + \sum_{\ell \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) \equiv \Sigma_1(r, e) + \Sigma_2(r, e)$$

обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно $\hat{\rho}(k)$ на V^ℓ . Поскольку $r^s \varphi(r^2) E_j(e) \in V^\ell$ при $\varphi \in \mathcal{S}_+$, $s \geq \ell$ и $|j| = s$, то, считая $\varphi(r^2) \equiv 1$ при $r^2 < 1$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{\rho}(k)} \left(\sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(kr), r^s E_j(e) \varphi(r^2) \right) \\ &= \sum_{0 \leq q \leq p} \frac{1}{k^{q+1} \hat{\rho}(k)} (\Phi_q(e), E_j(e)) (\delta^{(q)}(r), r^s \varphi(r^2)) \\ &= \frac{1}{k^{s+1} \hat{\rho}(k)} (\Phi_s(e), E_j(e)) s! \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const.} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Если $s < p$, то $k^{s+1} \hat{\rho}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, поэтому из (4.20) следует

$$(\Phi_s(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = s. \quad (4.21)$$

Если $s = p$ и $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^p} d\varkappa = \infty$, то (4.21) выполняется тривиально, поскольку тогда $\Phi_p(e) = 0$. Если же $s = p$ и $\int_1^\infty \frac{\rho(\varkappa)}{\varkappa^p} d\varkappa < \infty$, то согласно (2.9) и в этом случае $k^{s+1} \hat{\rho}(k) \rightarrow 0$, и опять выполняется (4.21). Замечая теперь, что на V^ℓ сумма $\Sigma_1(r, e)$ равна нулю, получаем

$$\left(\sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r), \psi(r, e) \right) = 0, \quad \psi(r, e) \in V^\ell.$$

Следовательно, $F_1(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r в бесконечности относительно $\rho(k)$ на основных функциях из V^ℓ . Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} & k^\ell (F_1(kr, e), r^{\ell-1} \varphi(r, e)) \\ &= \int_k^\infty \left(F_1(r\varkappa, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \varkappa^{\ell-1} d\varkappa + (\gamma(r, e), \varphi(r, e)) \quad \forall \varphi(r, e) \in W. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отметим, что интеграл в (4.22) корректно определен, поскольку при $\ell \leq p$

$$\left(F_1(r\varkappa, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \varkappa^{\ell-1} \sim \text{const} \cdot \hat{\rho}(\varkappa) \varkappa^{\ell-1},$$

а $-p - 1 + \ell - 1 \leq -2$. Покажем, что $\gamma(r, e) = 0$. Из (4.22) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{\rho}(k)} (F_1(kr, e), r^{\ell-1} \varphi(r, e)) \\ &= \frac{1}{k^\ell \hat{\rho}(k)} \int_k^\infty \left(F_1(r\varkappa, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \varkappa^{\ell-1} d\varkappa + \frac{1}{k^\ell \hat{\rho}(k)} (\gamma(r, e), \varphi(r, e)). \end{aligned} \quad (4.23)$$

По свойству автомодельных функций интеграл в (4.23) ведет себя как $k^\ell \hat{\rho}(k)$, поэтому первое слагаемое справа в (4.23) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$. Функция F_1 обладает квазиасимптотикой по r относительно $\hat{\rho}$, следовательно,

$\frac{1}{k^\ell \hat{\rho}(k)} (\gamma(r, e), \varphi(r, e))$ также имеет предел при $k \rightarrow +\infty$. Однако $k^\ell \hat{\rho}(k) \rightarrow 0$, поскольку $\ell \leq p < -\beta$. Это возможно, только если $\gamma(r, e) \equiv 0$. Поэтому из (4.22) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho(k)} (F_1(kr, e), r^{\ell-1} \varphi(r, e)) \\ &= \frac{1}{k^\ell \rho(k)} \int_k^\infty \left(F_1(r\mathfrak{x}, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathfrak{x}^{\ell-1} d\mathfrak{x} \quad \forall \varphi(r, e) \in W. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Пусть теперь $\psi(r, e) = r^{\ell-1} \varphi(r, e) \in V^{\ell-1}$. Тогда

$$r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) = r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi(r, e)}{r^{\ell-1}} \right) = -(\ell-1)\psi(r, e) + r \frac{\partial}{\partial r} \psi(r, e) \in V^\ell$$

(напомним, что V инвариантно относительно $r \frac{\partial}{\partial r}$). При таких $\varphi(r, e)$ из (4.24), учитывая, что F_1 обладает квазиасимптотикой по r относительно $\rho(k)$ на V^ℓ , для выражения справа при $k \rightarrow +\infty$ имеем

$$\frac{1}{k^\ell \rho(k)} \int_k^\infty \left(F_1(r\mathfrak{x}, e), r^\ell \frac{\partial}{\partial r} \varphi(r, e) \right) \mathfrak{x}^{\ell-1} d\mathfrak{x} \sim \frac{\text{const}}{k^\ell \rho(k)} \int_k^\infty \rho(\mathfrak{x}) \mathfrak{x}^{\ell-1} d\mathfrak{x} \sim \text{const}.$$

Здесь мы пользуемся свойствами автомодельных функций, поскольку $\beta + \ell - 1 = -1 - p + \ell - 1 \leq -2$ при $\ell \leq p$. Из (4.24) теперь следует, что $F_1(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно $\rho(k)$ на $V^{\ell-1}$. Так как на $V^{\ell-1}$ в сумме $\sum_{0 \leq q \leq p} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$ все слагаемые, кроме, может быть, $\Phi_{\ell-1}(e) \delta^{(\ell-1)}(r)$, равны нулю, то это и доказывает соотношение (4.18). Формула (4.19) следует из следствия 3.4 и того факта, что

$$(F(r, e), \varphi(r, e)) = (G(r, e), \varphi(r, e)) \quad \forall \varphi(r, e) \in V^\ell.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. В условиях леммы 4.1 существуют обобщенные функции $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, $0 \leq q \leq \ell - 1$, такие, что функция

$$G(r, e) = F(r, e) - \sum_{0 \leq q \leq \ell-1} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r) \quad (4.25)$$

обладает квазиасимптотикой по r относительно $\rho(k)$ на V , так что

$$\frac{1}{\rho(k)} G(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } V, \quad (4.26)$$

где $F_0(r, e)$ определяется формулой (4.19) при $\varphi(r, e) \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из леммы 4.1, примененной несколько раз.

§ 5. Представления асимптотически однородных обобщенных функций

В случае некритических порядков асимптотической однородности ситуация достаточно проста. Следующую теорему можно рассматривать как обобщение соответствующего результата для обобщенных функций из $\mathcal{S}'_+$ (см. (0.4)).

ТЕОРЕМА 5.1. Для того чтобы обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq -n, -n-1, \dots, m.e.$

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (5.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы существовало N , $N+\alpha > -n$, такое, чтобы $f(t)$ представлялось в виде

$$f(t) = \sum_{|j|=N} f_j^{(j)}(t), \quad (5.2)$$

где $f_j(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и

$$(f_j(t), \varphi(t)) = (\Phi_j(r, e), \varphi(re)), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad |j| = N, \quad (5.3)$$

причем функции $\Phi_j(r, e) \in W'$, $|j| = N$, непрерывны по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$ и

$$\frac{1}{\rho_1(r)r^N} \Phi_j(r, e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi_{0,j}(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1}). \quad (5.4)$$

Здесь $\rho_1(r) = r^{n-1}\rho(r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено соотношение (5.1) и $F(r, e)$ – сферическое представление $f(t)$, обладающее квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k)$, которое существует по теореме 4.1. Ее первообразная по r порядка N (при достаточно большом N) $F^{(-N)}(r, e) = \Phi(r, e)$ непрерывна по r со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, причем

$$\frac{1}{\rho_1(r)r^N} \Phi(r, e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi_0(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$$

(см. (1.17)). Теперь для любой функции $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\begin{aligned} (f(t), \varphi(t)) &= (F(r, e), \varphi(re)) = \left(F^{(-N)}(r, e), \sum_{|j|=N} \frac{|j|!}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(re) \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\Phi(r, e), \sum_{|j|=N} \frac{|j|!}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(re) \right) dr \\ &= (-1)^N \sum_{|j|=N} \int_0^\infty (\Phi_j(r, e), \varphi^{(j)}(re)) dr, \end{aligned}$$

где $\Phi_j(r, e) = (-1)^N \frac{|j|!}{j!} \Phi(r, e) E_j(e)$. Тогда $f_j(t)$ определяется своим сферическим представлением $\Phi_j(r, e)$.

Обратно, пусть выполнены соотношения (5.2)–(5.4). Для доказательства асимптотической однородности $f(t)$ относительно $\rho(k)$ достаточно доказать асимптотическую однородность $f_j(t)$ относительно $k^{|j|}\rho(k)$. Поскольку сферическим представлением $f_j(t)$ согласно (5.3) является функция $\Phi_j(r, e)$, поэтому достаточно доказать, что она обладает квазиасимптотикой по r относительно $k^{|j|}\rho_1(k)$, но по условию функция $\Phi_j(r, e)$ имеет даже обычную асимптотику по r относительно $r^N\rho_1(r)$ порядка $\alpha + n - 1 + N > -1$, откуда и следует доказательство теоремы (см. (1.17)).

Теперь рассмотрим случай критических порядков асимптотической однородности. Ясно, что если сферическое представление $F(r, e)$ обобщенной функции $f(t)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно $\rho_1(k)$, т.е. асимптотически однородно с предельной функцией $F_0(r, e) \in W'$, и $F_0(r, e)$ не принадлежит ядру отображения τ^* , то согласно (1.18) функция $f(t)$ обладает нетривиальной квазиасимптотикой относительно $\rho(k) = k^{1-n}\rho_1(k)$. Если же $F_0(r, e)$ принадлежит ядру этого отображения, то эта квазиасимптотика тривиальна и, возможно, существует другая автомодельная функция $\rho^*(k)$, относительно которой $f(t)$ обладает нетривиальной квазиасимптотикой. Далее мы найдем некоторые условия, при которых данная ситуация действительно реализуется.

ЛЕММА 5.1. *Обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна в существенном относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, где $p = 0, 1, \dots$, тогда и только тогда, когда любое ее сферическое представление $F(r, e)$ обладает свойствами:*

- 1) $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ на W^{p+1} , т.е. на основных функциях вида $r^{p+1}\psi(r, e)$, $\psi(r, e) \in W$;
- 2) для любого мультииндекса j , $|j| = p$, существует постоянная d_j такая, что функция $(F(r, e), E_j(e)) - d_j\delta^{(p)}(r) \in \mathcal{S}'_+$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$ на функциях вида $r^p\psi(r)$, где $\psi(r) \in \mathcal{S}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть существуют a_j , $|j| \leq p$, такие, что функция $f(t) - \sum_{|j| \leq p} a_j \delta^{(j)}(t)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho(k)$. Тогда функция

$$F(r, e) - \sum_{q=0}^p B_q(e) \delta^{(q)}(r), \quad \text{где} \quad B_q(e) = \sum_{|j|=q} \frac{j!}{q!} a_j E_j^*(e), \quad (5.5)$$

обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ на V (следовательно, и на W_0), а тогда по лемме 2.1 – и на W^ℓ при достаточно большом ℓ . Поэтому согласно лемме 2.3 она обладает квазиасимптотикой и на W^{p+1} . Отсюда вытекает, что выполнено свойство 1), так как $(\sum_{q=0}^p B_q(e) \delta^{(q)}(r), r^{p+1}\psi(r, e)) = 0$.

Покажем, что выполняется и свойство 2). Замечая, что $r^p\psi_1(r^2)E_j(e) \in V^p$ при $|j| = p$ (напомним, что $V^p = W^p \cap V$) и $\psi_1(\xi) \in \mathcal{S}_+$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F(kr, e) - \sum_{q=0}^p B_q(e) \delta^{(q)}(kr), r^p\psi_1(r^2)E_j(e) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_1(k)} (F_j(kr) - (B_p(e), E_j(e))\delta^{(p)}(kr), r^p\psi_1(r^2)) \\ &= \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F_j(kr) - \frac{j!}{p!} a_j \delta^{(p)}(kr), r^p\psi_1(r^2) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const.} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь мы обозначили $F_j(r) = (F(r, e), E_j(e)) \in \mathcal{S}_+$ и учли, что

$$(B_p(e), E_j(e)) = \sum_{|j|=p} \frac{j!}{p!} a_j (E_j^*(e), E_j(e)) = \frac{j!}{p!} a_j. \quad (5.7)$$

Пусть теперь $\psi(r)$ – любая функция из $\mathcal{S}_+$. Считая $\psi(0) = \psi_1(0)$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F_j(kr) - \frac{j!}{p!} a_j \delta^{(p)}(kr), r^p \psi(r) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F_j(kr) - \frac{j!}{p!} a_j \delta^{(p)}(kr), r^p \psi_1(r^2) \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F_j(kr) - \frac{j!}{p!} a_j \delta^{(p)}(kr), r^p (\psi(r) - \psi_1(r^2)) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const}, \end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое сходится в силу (5.6), а второе – в силу того, что $r^p(\psi(r) - \psi_1(r^2)) \in W^{p+1}$. Таким образом, выполнено условие 2) при $d_j = \frac{j!}{p!} a_j$.

Достаточность. Пусть выполнены свойства 1) и 2). Покажем, что существует функция $\Phi_p(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что функция $F(r, e) - \Phi_p(e) \delta^{(p)}(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$ на $V^p = V \cap W^p$. Пусть $\varphi(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, т. е. $\varphi(re) \in W^p$ (точнее, $\varphi(re) \in V^p$), и пусть $\omega(\xi) \in \mathcal{S}_+$, $\omega(\xi) = 1$ при $\xi < 1$. Положим $\Phi_p(e) = \sum_{|j|=p} d_j E_j^*(e)$, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho_1(k)} (F(kr, e) - \Phi_p(e) \delta^{(p)}(kr), \varphi(re)) \\ &= \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F(kr, e), \varphi(re) - \sum_{|j| \leq p} \frac{r^{|j|}}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(0) \omega(r^2) \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F(kr, e), \sum_{|j|=p} \frac{r^p}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(0) \omega(r^2) \right) \\ &- \frac{(-1)^p p!}{k^{p+1} \rho_1(k)} \sum_{|j|=p} \frac{(\Phi_p(e), E_j(e))}{j!} \varphi^{(j)}(0) \\ &= \frac{1}{\rho_1(k)} \left(F(kr, e), \varphi(re) - \sum_{|j| \leq p} \frac{r^{|j|}}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(0) \omega(r^2) \right) \\ &+ \frac{1}{\rho_1(k)} \sum_{|j|=p} \left(F_j(kr) - (\Phi_p(e), E_j(e)) \delta^{(p)}(kr), \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} r^p \omega(r^2) \right). \quad (5.8) \end{aligned}$$

Мы воспользовались формулой $\frac{(-1)^p p!}{k^{p+1}} = (\delta^{(p)}(kr), r^p \omega(r^2))$. Первое слагаемое (в последнем равенстве (5.8)) имеет предел по условию 1), а второе – по условию 2), если заметить, что $(\Phi_p(e), E_j(e)) = d_j$. Итак, выражение (5.8) имеет предел при $k \rightarrow +\infty$, т. е. $F(r, e) - \Phi_p(e) \delta^{(p)}(r)$ обладает квазиасимптотикой по r относительно $\rho_1(k)$ на V^p . Теперь несколько раз воспользуемся леммой 2.7. Получим, что существуют функции $\Phi_q(e)$, $q = p, p-1, \dots, 0$, такие, что $F(r, e) - \sum_{q=0}^p \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$ на всех основных функциях из V . А это и означает, что функция $f(t) - \sum_{|j| \leq p} c_j \delta^{(j)}(t)$ с соответствующими c_j обладает квазиасимптотикой на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если $f(t)$ асимптотически однородна относительно автономной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$, то условие 2) выполняется при $d_j = 0$, $|j| = p$. Действительно, в этом случае $a_j = 0$ (см. (5.7) и доказательство необходимости).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В условиях леммы 5.1 существуют a_j , $|j| \leq p$, такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt) - \sum_{|j| \leq p} a_j \delta^{(j)}(kt) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (5.9)$$

при этом согласно следствию 3.4 существуют $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ и постоянные c_j , $|j| = p$, такие, что

$$f_0(t) = f_{\Phi,p}(t) + \sum_{|j|=p} c_j \delta^{(j)}(t). \quad (5.10)$$

Кроме того, условие 1) означает, что

$$\frac{1}{\rho_1(k)} F(kr, e) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, e) \quad \text{на } W^{p+1}, \quad (5.11)$$

при этом согласно лемме 2.2 существует $\Phi_1(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ такая, что

$$(F_0(r, e), \psi(r, e)) = \int_0^\infty \frac{dr}{r^{p+1}} (\Phi_1(e), \psi(r, e)), \quad \psi(r, e) \in W^{p+1}. \quad (5.12)$$

Условие 1) согласно лемме 2.2 означает, что

$$\frac{1}{\rho_1(k)} ((F(kr, e), E_j(e)) - d_j \delta^{(p)}(kr)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} A_j \delta^{(p)}(r) \quad \text{на } \mathcal{S}_+^p \quad (5.13)$$

с некоторыми A_j , $|j| = p$.

Нетрудно показать, что $\Phi_1(e) = \Phi(e)$, и, кроме того, если $k^\alpha \rho(k) \not\rightarrow \text{const} \neq 0$, то

$$c_j = \frac{p!}{j!} A_j, \quad |j| = p. \quad (5.14)$$

Если же $k^\alpha \rho(k) \rightarrow B \neq 0$, то выполняется соотношение

$$j! \left(\frac{a_j}{B} - c_j \right) = -p! \left(\frac{d_j}{B} + A_j \right), \quad |j| = p. \quad (5.15)$$

В данном случае (5.9) и (5.13) выполняются при $a_j = 0$, $|j| = p$, и $d_j = 0$, $|j| = p$, при этом снова справедлива формула (5.14).

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть обобщенная функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$. Пусть $F(r, e)$ – ее сферическое представление. Положим $F_M(r, e) = r^M F(r, e)$, где $M \geq p + 1$; тогда существует целое число N такое, что ее первообразная порядка N имеет вид

$$F_M^{(-N)}(r, e) = \Phi(e) r^{M+N} \rho_1(r) + o(r^{M+N} \rho_1(r)), \quad r \rightarrow +\infty. \quad (5.16)$$

Здесь $\rho_1(k) = k^{n-1} \rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\beta = n - 1 + \alpha = -1 - p$, а $\Phi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$.

Если, кроме того, справедливо разложение

$$F_M^{(-N)}(r, e) = \Phi(e) r^{M+N} \rho_1(r) + \Psi(e) r^{M+N} \rho_2(r) + o(r^{M+N} \rho_2(r)), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (5.17)$$

где $\rho_2(k)$ – автомодельная функция и $\Psi(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$, и существует j_0 , $|j_0| = p$, такое, что

$$(\Psi(e), E_{j_0}(e)) \neq 0, \quad (5.18)$$

то

$$\frac{\hat{\rho}_2(k)}{\rho_1(k)} \longrightarrow C, \quad k \rightarrow +\infty. \quad (5.19)$$

Здесь постоянная C может быть равна нулю.

Обратно, пусть для некоторых $M \geq p + 1$ и $N \geq 0$ выполняются соотношения (5.17), (5.19), где $\rho_1(k)$ – автомодельная функция порядка $\beta = -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$, а $\rho_2(k)$ – автомодельная функция порядка не больше β , причем

$$(\Phi(e), E_j(e)) = 0 \quad \forall j, \quad |j| = p. \quad (5.20)$$

Тогда обобщенная функция $f(t)$, определяемая сферическим представлением $F(r, e)$, асимптотически однородна в существенном относительно $\rho(k) = k^{1-n}\rho_1(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$ и $F(r, e)$ – ее сферическое представление. Из свойства 1) леммы 5.1 следует, что $F_M(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $k^M\rho_1(k)$ на всем W . Поэтому для достаточно большого N выполняется соотношение (5.16) (см. (1.17)).

Допустим, что выполнены еще соотношения (5.17) и (5.18). Докажем (5.19). Сначала заметим, что если порядок автомодельности $\rho_2(k)$ строго меньше β , то утверждение (5.19) тривиально. Поэтому далее полагаем, что $\rho_2(k)$ – автомодельная функция порядка $\beta = n - 1 + \alpha = -1 - p$. Положим

$$F_*(r) = (F_M(r, e), E_{j_0}(e)) = r^{M-p}F_{j_0}(r) \in \mathcal{S}'_+, \quad \text{где} \quad F_j(r) = r^p(F(r, e), E_j(e)).$$

Из (5.17) следует, что $F_*(r)$ обладает нетривиальной квазиасимптотикой относительно $k^M\rho_2(k)$ на $\mathcal{S}_+$, поскольку

$$F_*^{(-N)}(r) = (\Psi(e), E_{j_0}(e))r^{M+N}\rho_2(r) + o(r^{M+N}\rho_2(r))$$

имеет обычную нетривиальную (см. (5.18)) асимптотику относительно $r^{M+N}\rho_2(r)$. Таким образом, для любой $\varphi(r) \in \mathcal{S}_+$, пользуясь (0.5), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^M\rho_2(k)}(F_*(kr), \varphi(r)) &= \frac{1}{k^M\rho_2(k)}((kr)^{M-p}F_{j_0}(kr), \varphi(r)) \\ &= \frac{1}{k^p\rho_2(k)}(F_{j_0}(kr), r^{M-p}\varphi(r)) \\ &\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \Gamma(N+M-p)(\Psi(e), E_{j_0}(e))(f_{M-p}(r), \varphi(r)) \\ &= c\left(\frac{1}{r}, r^{M-p}\varphi(r)\right), \end{aligned}$$

где $c = \frac{\Gamma(N+M-p)(\Psi(e), E_{j_0}(e))}{\Gamma(M-p)} \neq 0$, а $f_{M-p}(r)$ – ядро дробного интегрирования (см. (0.3)). Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k^p\rho_2(k)}F_{j_0}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{c}{r} \quad \text{на} \quad \mathcal{S}_+^{M-p} = \{\psi(r) = r^{M-p}\varphi(r) : \varphi(r) \in \mathcal{S}_+\}. \quad (5.21)$$

Если $M - p > 1$, то, пользуясь леммой 2.3 последовательно несколько раз (учитывая, что автомодельная функция $k^p \rho_2(k)$ имеет порядок, равный -1), получим, что соотношение (5.21) справедливо и на $\mathcal{S}_+^1$. Теперь из леммы 2.5 вытекает, что

$$\frac{1}{k^p \hat{\rho}_2(k)} (F_{j_0}(kr) - a\delta(kr)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c\delta(r) \quad (5.22)$$

с некоторым a (см. (2.21) и (2.22)). Кроме того, согласно свойству 2) леммы 5.1

$$\frac{1}{k^p \rho_1(k)} F_{j_0}(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const} \cdot \delta(r). \quad (5.23)$$

Рассмотрим два возможных случая (см. (2.9)). Пусть $\int_1^\infty \varkappa^p \rho_2(\varkappa) d\varkappa = \infty$, тогда $k^{p+1} \hat{\rho}_2(k) \rightarrow +\infty$ и a в (5.24) можно считать равным нулю. Теперь из (5.22) и (5.23) следует (5.19). Пусть теперь $\int_1^\infty \varkappa^p \rho_2(\varkappa) d\varkappa < \infty$ и $a \neq 0$ (если $a = 0$, то верны предыдущие рассуждения). Тогда $k^{p+1} \hat{\rho}_2(k) \rightarrow 0$ и для $\varphi(r) \in \mathcal{S}_+$, $\varphi(0) \neq 0$, имеем

$$\frac{1}{k^p \hat{\rho}_2(k)} (a\delta(kr), \varphi(r)) = \frac{a\varphi(0)}{k^{p+1} \hat{\rho}_2(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Отсюда и из (5.22) следует, что

$$\frac{1}{k^p \hat{\rho}_2(k)} (F_{j_0}(kr), \varphi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Теперь из (5.23) вытекает, что $\frac{\hat{\rho}_2(k)}{\rho_1(k)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$. Итак, (5.19) доказано.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполнены соотношения (5.17) и (5.19). Сначала заметим, что из (5.19) вытекает, что $\frac{\rho_2(k)}{\rho_1(k)} \rightarrow 0$ (см. (2.10)).

Из (5.17) следует, что $F_M^{(-N)}(r, e)$ обладает обычной асимптотикой относительно $r^{N+M} \rho_1(r)$, поэтому $F_M(r, e)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $k^M \rho_1(k)$ на W . Следовательно, функция $F(r, e)$ обладает квазиасимптотикой относительно $\rho_1(k)$ на W^M . Учитывая, что $M \geq p + 1$, и пользуясь леммой 2.3 последовательно несколько раз, получим, что $F(r, e)$ удовлетворяет свойству 1) леммы 5.1.

Докажем, что $F(r, e)$ удовлетворяет и свойству 2) леммы 5.1. Фиксируем j , $|j| = p$. Из (5.17), учитывая (5.20), получим, что N -я первообразная функции $r^{M-p} F_j(r) = (F_M(r, e), E_j(e))$ обладает обычной асимптотикой относительно $r^{N+M} \rho_2(r)$. Следовательно, $r^{M-p} F_j(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^M \rho_2(k)$ на $\mathcal{S}_+$. Поэтому $F_j(r)$ обладает квазиасимптотикой относительно $k^p \rho_1(k)$ на $\mathcal{S}_+^{M-p}$. Если $M - p = 1$, то

$$\frac{1}{k^p \rho_2(k)} F_j(kr) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{\bar{c}_j}{r} \quad \text{на } \mathcal{S}_+^1, \quad \text{где } \bar{c}_j = \frac{\Gamma(N + M - p)}{\Gamma(M - p)} (\Psi(e), E_j(e)). \quad (5.24)$$

Если $M - p > 1$, то, пользуясь леммой 2.3 несколько раз, снова приходим к (5.24). По лемме 2.4 существуют a_j , $|j| = p$, такие, что

$$\frac{1}{k^p \hat{\rho}_2(k)} (F_j(kr) - a_j \delta(kr)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \bar{c}_j \delta(r) \quad \text{на } \mathcal{S}_+.$$

Отсюда с учетом (5.19) имеем

$$\frac{1}{k^p \rho_1(k)} (F_j(kr) - a_j \delta(kr)) = \frac{\hat{\rho}_2(k)}{\rho_1(k)} \frac{1}{k^p \hat{\rho}_2(k)} (F_j(kr) - a_j \delta(kr))$$

$$\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_j \delta(r) \quad \text{на } \mathcal{S}_+, \quad c_j = \frac{\Gamma(N+M-p)}{\Gamma(M-p)} (\Psi(e), E_j(e)) C.$$

Следовательно, для $\varphi(r) \in \mathcal{S}_+$ и $|j| = p$ имеем

$$\frac{1}{\rho_1(k)} \left((F(kr, e), E_j(e)) - a_j \frac{(-1)^p}{p!} \delta^{(p)}(kr), r^p \varphi(r) \right)$$

$$= \frac{1}{k^p \rho_1(k)} (F_j(kr) - a_j \delta(kr), \varphi(r)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} c_j \varphi(0),$$

и условие 2) леммы 5.1 выполняется при $d_j = \frac{(-1)^p}{p!} a_j$. Утверждение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть выполнены условия (5.17), (5.19) и (5.20). Тогда согласно утверждению 5.1 существуют a_j , $|j| \leq p$, такие, что

$$\frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt) - \sum_{|j| \leq p} a_j \delta^{(j)}(kt) \right) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f_0(t) \quad \text{на } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \quad (5.25)$$

причем согласно следствию 3.4 существуют $\Phi_1(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ и c_j , $|j| = p$, такие, что

$$f_0(t) = f_{\Phi_1, p}(t) + \sum_{|j|=p} c_j \delta^{(j)}(t). \quad (5.26)$$

Нетрудно показать, что если $\frac{\rho(k)}{k^\alpha} \not\rightarrow B \neq 0$ при $k \rightarrow +\infty$, то

$$\Phi_1(e) = \frac{\Gamma(N+M-p)}{\Gamma(M-p)} \Phi(e), \quad (5.27)$$

$$c_j = \pm \frac{(-1)^p}{j!} \frac{\Gamma(N+M-p)}{\Gamma(M-p)} (\Psi(e), E_j(e)) C, \quad |j| = p, \quad (5.28)$$

где выбирается знак $+$ в случае $\int_0^\infty \varkappa^p \rho_2(\varkappa) d\varkappa = \infty$ и знак $-$ в случае $\int_0^\infty \varkappa^p \rho_2(\varkappa) d\varkappa < \infty$.

Если $\frac{\rho(k)}{k^\alpha} \rightarrow B \neq 0$, $k \rightarrow +\infty$, то формула (5.27) остается справедливой, однако в этом случае коэффициенты c_j в (5.26) не определяются разложением (5.17).

Далее мы рассмотрим примеры нахождения квазиасимптотики некоторых обобщенных функций. В следующих примерах $t = (t_1, t_2)$, а $r = |t|$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ – полярные координаты в $\mathbb{R}^2$.

ПРИМЕР 5.1. Пусть $f(t) = \frac{\sin(|t|\varphi)}{|t|}$. Тогда $F(r, \varphi) = \sin(r\varphi)$ – ее сферическое представление. Пусть $F^{(-2)}(r, \varphi)$ – ее вторая первообразная по r , а $\psi(\varphi) \in \mathcal{S}(S^1)$. Тогда

$$(F^{(-2)}(r, \varphi), \psi(\varphi)) = \int_0^{2\pi} \frac{r\varphi - \sin(r\varphi)}{\varphi^2} \psi(\varphi) d\varphi = r \int_0^{2\pi} \frac{\xi - \sin \xi}{\xi^2} \psi\left(\frac{\xi}{r}\right) d\xi$$

$$= \psi(0)r \ln r + o(r \ln r) = \psi(0)r^2 \rho_1(r) + o(r^2 \rho_1(r)).$$

Здесь $\rho_1(r) = \frac{\ln r}{r}$ и $r \rightarrow \infty$. Стало быть, $F^{(-2)}(r, \varphi)$ обладает обычной асимптотикой относительно $r^2 \rho_1(r)$. Следовательно, $F(r, \varphi)$ обладает квазиасимптотикой по r на бесконечности относительно $\rho_1(k)$, т. е.

$$\frac{k}{\ln k} F(kr, \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} F_0(r, \varphi) = \delta(r) \delta(\varphi) \quad \text{на } W.$$

Поскольку F_0 не принадлежит ядру отображения τ , так как $(\delta(\varphi), E_0) = 1$ (отлично от нуля), то

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \psi(t)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (f_0(t), \psi(t)) = (\delta(r) \delta(\varphi), \psi(r \cos \varphi, r \sin \varphi)) = \psi(0),$$

где $\rho(k) = k^{-1} \rho_1(k)$. Таким образом,

$$\frac{k^2}{\ln k} f(kt) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \delta(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2). \quad (5.29)$$

ПРИМЕР 5.2. Пусть $f(t) = \cos(|t|\varphi)$. Ее сферическим представлением является $F(r, \varphi) = r \cos(r\varphi)$. Нетрудно выяснить, что

$$\frac{1}{\rho_1^*(k)} F(kr, \varphi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\delta(r) \delta'(\varphi) \quad \text{на } W, \quad (5.30)$$

где $\rho_1^*(k) = \frac{\ln k}{k}$. Поскольку $\delta(r) \delta'(\varphi)$ принадлежит ядру отображения τ^* (см. (1.14)), то квазиасимптотика функции $f(t)$ относительно $\rho^*(k) = k^{-1} \rho_1^*(k) = \frac{\ln k}{k^2}$ тривиальна. Поэтому поступим так, как нам диктует утверждение 5.1. Попробуем взять $M = 1$ (далее мы увидим, что этого достаточно). Будем искать асимптотику первообразных высокого порядка N от $F_1(r, \varphi) = r F(r, \varphi) = r^2 \cos(r\varphi)$. Нетрудно видеть, что для любой $\psi(\varphi) \in \mathcal{S}(S^1)$ для достаточно большого N имеем

$$(F_1^{(-N)}(r, \varphi), \psi(\varphi)) = r^{N+1} \int_0^{2r\pi} \frac{\eta^{(-N)}(\xi)}{\xi^{N+2}} \psi\left(\frac{\xi}{r}\right) d\xi,$$

где $\eta(\xi) = \xi^2 \cos \xi$. Учитывая, что $\int_0^\infty \frac{\eta^{(-N)}(\xi)}{\xi^{N+2}} d\xi = 0$, нетрудно получить, что

$$F_1^{(-N)}(r, \varphi) = -A_N r^{N+1} \rho_1(r) \delta'(\varphi) + O(r^{N+1} \rho_2(r)), \quad (5.31)$$

где $\rho_1(k) = \frac{1}{k}$, $\rho_2(k) = \frac{1}{k^2}$ и $A_N = \int_0^\infty \frac{\eta^{(-N)}(\xi)}{\xi^{N+1}} d\xi = \frac{1}{N!}$. Тем самым выполнено соотношение (5.17) при $p = 0$ и $\Psi(e) = 0$. Поэтому существует число a такое, что

$$\frac{1}{\rho(k)} (f(kt) - a \delta(kt)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\delta'(t_2) \Theta(t_1), \quad (5.32)$$

где $\rho(k) = \frac{1}{k^2}$. Осталось вычислить число a , которое (см. замечание 5.3) из разложения (5.31) не определяется. Пусть $\psi \in \mathcal{S}_+$, $\psi(0) = 1$; имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \psi(|t|^2)) &= k^2 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \cos(kr\varphi) \psi(r^2) d\varphi r dr \\ &= \frac{1}{2\pi} k \int_0^\infty \sin(kr) \psi(r^2) dr \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \psi(0). \end{aligned}$$

Учитывая, что $(\delta'(t_2)\Theta(t_1), \psi(|t|^2)) = 0$, из (5.32) получим $a = \frac{1}{2\pi}$. Таким образом,

$$k^2 \cos(k|t|\varphi) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} -\delta'(t_2)\Theta(t_1) + \frac{1}{2\pi} \delta(t). \quad (5.33)$$

§ 6. Некоторые применения

В настоящем параграфе полученные выше теоремы применяются для изучения особенностей голоморфных функций в трубчатых областях. Эти функции являются преобразованиями Фурье–Лапласа обобщенных функций с носителями в конусах. В связи с этим нам потребуются следующие леммы, несколько уточняющие предыдущие результаты.

ЛЕММА 6.1. Пусть $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, Γ – замкнутый конус, $\text{pr } \Gamma$ – регулярное множество на S^{n-1} . Если $\text{supp } f(t) \subset \Gamma$, то существует $F(r, e)$ – сферическое представление $f(t)$, такое, что

$$\text{supp } F(r, e) \subset \{r \geq 0, e \in \text{pr } \Gamma\}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G(r, e)$ – какое-то сферическое представление $f(t)$. Тогда

$$\text{supp } G(r, e) \subset \{r = 0, e \in S^{n-1}\} \cup \{r \geq 0, e \in \text{pr } \Gamma\}.$$

Покроем S^{n-1} двумя картами U_i , $i = 1, 2$, $U_1 \cup U_2 = S^{n-1}$, и рассмотрим функции $\chi_i(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$, $i = 1, 2$, со свойствами:

$$\chi_1(e) + \chi_2(e) = 1, \quad \text{supp } \chi_i(e) = \mathcal{K}_i, \quad i = 1, 2,$$

где $\mathcal{K}_i$ – компакты, принадлежащие U_i , и $\mathcal{K}_i \cap \text{pr } \Gamma$ – регулярные множества на S^{n-1} . Положим $G_i(r, e) = \chi_i(e)G(r, e)$. В каждой карте U_i введем координаты $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$; тогда G_i будут обобщенными функциями координат (r, t) . Ясно, что

$$\text{supp } G_i(r, t) \subset \{r = 0, t \in \mathcal{K}_i\} \cup \{r \geq 0, t \in \text{pr } \Gamma \cap \mathcal{K}_i\}.$$

Согласно теореме Владимирова (см. [6]) существуют меры $d\mu_j^i(r, t)$ такие, что

$$G_i(r, t) = \sum_{|j| < M} D^j d\mu_j^i(r, t),$$

$$\text{supp } d\mu_j^i(r, t) \subset \{r = 0, t \in \mathcal{K}_i\} \cup \{r \geq 0, t \in \text{pr } \Gamma \cap \mathcal{K}_i\}.$$

Положим $d\nu_j^i(A) = d\mu_j^i(A) - d\mu_j^i(A \cap \{r = 0\})$, где A – произвольные борелевские множества. Ясно, что $\text{supp } d\nu_j^i(r, t) \subset \{r \geq 0, t \in \text{pr } \Gamma \cap \mathcal{K}_i\}$. Пусть теперь

$$\widehat{G}_i(r, t) = \sum_{|j| < M} D^j d\nu_j^i(r, t), \quad i = 1, 2.$$

Переходя на сферу, имеем

$$G(r, e) = \widehat{G}_1 + \widehat{G}_2 + H, \quad \text{supp } H \subset \{r = 0, e \in S^{n-1}\}.$$

Следовательно, $H = \sum_{q < N} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r)$. Пусть $e_0 \in \text{pr } \Gamma$. Представим

$$H = \sum_{q < N} [\Phi_q(e) - \chi_{qe_0}(e)] \delta^{(q)}(r) + \sum_{q < N} \chi_{qe_0}(e) \delta^{(q)}(r), \quad (6.2)$$

где функции $\chi_{qe_0}(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(\chi_{qe_0}(e), E_j(e)) = (\Phi_q(e), E_j(e)) \quad \forall |j| = q, \quad q < N; \quad \text{supp } \chi_{qe_0} = \{e_0\}.$$

Поскольку первое слагаемое в (6.2) принадлежит ядру отображения $\tau^*: V' \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то обобщенная функция

$$F(r, e) = \hat{G}_1(r, e) + \hat{G}_2(r, e) + \sum_{q < N} \chi_{qe_0}(e) \delta^{(q)}(r)$$

дает нужное сферическое представление $f(t)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 6.2. Пусть $F(r, e) \in W'$ асимптотически однородна по r относительно $\rho_1(k)$, и пусть существует функция $F_1(r, e) \in W'$, удовлетворяющая свойствам:

- 1) $F(r, e) - F_1(r, e) \in \text{Ker } \tau^*$ (см. (1.14));
- 2) $\text{supp } F_1(r, e) \subset \mathcal{K} \times \{r \geq 0\}$, где $\mathcal{K}$ – компакт на $\mathcal{S}(S^{n-1})$.

Тогда существует функция $F_2(r, e) \in W'$ со свойствами:

- a) $F_2(r, e)$ асимптотически однородна по r относительно $\rho_1(k)$;
- b) $\text{supp } F_2(r, e) \subset \mathcal{K} \times \{r \geq 0\}$;
- c) $F(r, e) - F_2(r, e) \in \text{Ker } \tau^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $H(r, e) = F(r, e) - F_1(r, e)$. Тогда (см. (1.14))

$$H(r, e) = \sum_{q \leq N} \Phi_q(e) \delta^{(q)}(r), \quad (6.3)$$

где $\Phi_q(e) \in \mathcal{S}'(S^{n-1})$ и

$$(\Phi_q(e), E_j(e)) = 0, \quad |j| = q, \quad q = 0, 1, \dots \quad (6.4)$$

Положим $F_2(r, e) = F_1(r, e) - \hat{H}(r, e)$, где $\hat{H}(r, e)$ – сумма членов в сумме (6.3) с номерами q , для которых $\frac{1}{\rho_1(k)k^{q+1}} \not\rightarrow \text{const} \neq 0$. Покажем, что $F_2(r, e)$ – искомая функция. Пусть q такой номер; возьмем $\psi(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$ и $\text{supp } \psi(e) \subset S^{n-1} \setminus \mathcal{K}$. Тогда

$$\frac{1}{\rho_1(k)} (F(kr, e), \chi(r) \psi(e) r^q) = \frac{(-1)^q q!}{k^{q+1} \rho_1(k)} (\Phi_q(e), \psi(e)) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \text{const},$$

где $\chi(r) \in \mathcal{S}_+$ и $\chi(r) = 1$ при $r < 1$. Мы учли, что по свойству 2)

$$(F_1(r, e), \chi(r) \psi(e) r^q) = 0.$$

Отсюда следует, что $(\Phi_q(e), \psi(e)) = 0$, т. е. $\text{supp } \Phi_q(e) \subset \mathcal{K}$. Стало быть, выполнено свойство б). Свойства а) и с) очевидны. Лемма доказана.

Теперь мы можем уточнить, например, теорему 4.1.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и, кроме того, $\text{supp } f(t) \subset \Gamma$, где Γ – замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\text{pr } \Gamma$ – регулярное множество на сфере S^{n-1} . Тогда в (4.3) можно считать, что $\text{supp } F(r, e) \subset \text{pr } \Gamma \times \{r \geq 0\}$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть Γ – замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$ такой, что $\text{pr } \Gamma \subset \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – регулярное множество на S^{n-1} , и замкнутые множества K_i , $i = 1, 2, \dots, m$, таковы, что

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m K_i. \quad (6.5)$$

Пусть функция $f(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f \subset \Gamma$, асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq -n - p$, $p = 0, 1, \dots$. Тогда существуют обобщенные функции $f_i(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f_i \subset \Gamma_i$, $\text{pr } \Gamma_i = K_i$, асимптотически однородные на бесконечности относительно $\rho(k)$, такие, что

$$\sum_{i=1}^m f_i(t) = f(t). \quad (6.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 функция $f(t)$ имеет сферическое представление $F(r, e)$, асимптотически однородное по r на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho_1(k) = k^{n-1}\rho(k)$ порядка $\beta = \alpha + n - 1 \neq -1 - p$, $p = 0, 1, \dots$. При этом согласно следствию 6.1 можно считать, что $\text{supp } F(r, e) \subset \{[0, +\infty) \times \mathcal{F}\}$. Следовательно, существует число N ($N + \beta > 0$) такое, что $F(r, e) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^N G(r, e)$, где $G(r, e)$ – непрерывная по r обобщенная функция со значениями в $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, имеющая обычную асимптотику по r относительно $\rho_2(r) = r^N \rho_1(r)$. Продолжим $\rho_2(r)$ непрерывным образом на всю полуось $[0, +\infty)$, так что $\rho_2(r) = 1$ при $r < 1$ и $\rho_2(r) = r^N \rho_1(r)$ при $r > 2$. Тогда $\Phi_r(e) = \frac{G(r, e)}{\rho_2(r)}$ – семейство обобщенных функций на $\mathcal{S}'(S^{n-1})$, непрерывное по параметру r . При этом

$$\text{supp } \Phi_r(e) \subset \mathcal{F}, \quad \Phi_r(e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi_\infty(e) \quad \text{на } S(S^{n-1}).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\mathcal{F}$ не совпадает с единичной сферой S^{n-1} и его можно покрыть одной картой (скажем, стереографической проекцией) с координатами $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Семейство $\Phi_r(e)$ определяет семейство обобщенных функций $\hat{\Phi}_r(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$ (аналогично, $\Phi_\infty(e)$ определяет $\hat{\Phi}_\infty(x)$), при этом $\text{supp } \hat{\Phi}_r(x) \subset \hat{\mathcal{F}}$, где $\hat{\mathcal{F}}$ – компактное регулярное множество в $\mathbb{R}^{n-1}$ (образ $\mathcal{F}$ при стереографической проекции). Аналогично, через $\hat{K}_i$ обозначаем образы K_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Отметим, что $\hat{\Phi}_r(x) \rightarrow \hat{\Phi}_\infty(x)$ при $r \rightarrow +\infty$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

По теореме II.2 (см. далее) существуют число M , меры $d\mu_{j,r}$, $d\nu_j$, $|j| \leq M$, такие, что $d\mu_{j,r}$ измеримы по r ,

$$\hat{\Phi}_r(x) = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\mu_{j,r}, \quad \hat{\Phi}_\infty(x) = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\nu_j.$$

При этом

$$\text{Var} \frac{d\mu_{j,r} - d\nu_j}{(1 + |t|)^Q} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{Var} \frac{d\mu_{j,r}}{(1 + |x|)^Q} < \text{const}$$

для некоторого Q . Определим теперь меры $d\mu_{j,r}^i$, $d\nu_j^i$, $i = 1, \dots, m$, как сужения мер на соответствующие множества формулами

$$\begin{aligned} d\mu_{j,r}^1 &= d\mu_{j,r}|_{\mathcal{K}_1}, \quad d\nu_j^1 = d\nu_j|_{\mathcal{K}_1}, \quad \dots, \quad d\mu_{j,r}^i = d\mu_{j,r}|_{\mathcal{K}_i \setminus \bigcup_{p=1}^{i-1} \mathcal{K}_p}, \\ d\nu_j^i &= d\nu_j|_{\mathcal{K}_i \setminus \bigcup_{p=1}^{i-1} \mathcal{K}_p}, \quad \dots, \quad d\mu_{j,r}^m = d\mu_{j,r}|_{\mathcal{K}_m \setminus \bigcup_{p=1}^{m-1} \mathcal{K}_p}, \\ d\nu_j^m &= d\nu_j|_{\mathcal{K}_m \setminus \bigcup_{p=1}^{m-1} \mathcal{K}_p}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

При этом ясно, что

$$\text{Var} \frac{d\mu_{j,r}^i - d\nu_j^i}{(1+|t|)^Q} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{Var} \frac{d\mu_{j,r}^i}{(1+|x|)^Q} < \text{const.}$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^m d\mu_{j,r}^i = d\mu_{j,r}, \quad \sum_{i=1}^m d\nu_{j,r}^i = d\nu_{j,r}, \quad |j| \leq M.$$

Легко видеть также, что $d\mu_{j,r}^i$ измеримы по r . Положим теперь

$$\widehat{\Phi}_r^i(x) = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\mu_{j,r}^i, \quad \widehat{\Phi}_\infty^i(x) = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\nu_j^i.$$

Переходя на сферу, мы получим семейства обобщенных функций $\Phi_r^i(e)$ и $\Phi_\infty^i(e)$ такие, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \Phi_r^i(e) &= \Phi_r(e), \quad \sum_{i=1}^m \Phi_\infty^i(e) = \Phi_\infty(e), \\ \text{supp } \Phi_r^i(e) &\subset \mathcal{K}_i, \quad \Phi_r^i(e) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \Phi_\infty^i(e) \quad \text{в } \mathcal{S}'(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Положим $F_i(r, e) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^N \rho_2(r) \Phi_r^i(e)$, $i = 1, \dots, m$, и $f_i(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ – соответствующие обобщенные функции, сферическими представлениями которых являются $F_i(r, e)$. Имеем

$$\sum_{i=1}^m F_i(r, e) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^N \rho_2(r) \Phi_r(e) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^N G(r, e) = F(r, e).$$

Отсюда следует соотношение (6.6). Поскольку $\text{supp } F_i(r, e) \subset \{[0, +\infty) \times \mathcal{K}_i\}$, то, следовательно, $\text{supp } f_i(t) \subset \Gamma_i$.

Проверим, что $f_i(t)$ асимптотически однородны на бесконечности относительно $\rho(k)$. Положим $G_i(r, e) = \rho_2(r) \Phi_r^i(e)$. Тогда $F_i(r, e) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^N G_i(r, e)$. Отметим, что функции $(\Phi_r^i(e), \omega(e))$ измеримы и ограничены по r для любой $\omega(e) \in \mathcal{S}(S^{n-1})$ и

$$(\Phi_r^i(e), \omega(e)) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} (\Phi_\infty^i(e), \omega(e)).$$

Теперь из соотношения

$$(G_i(r, e), \psi(r, e)) = \int_0^\infty \rho_2(r) (\Phi_r^i(e), \psi(r, e)) dr \quad \forall \psi \in W$$

получим

$$\frac{1}{k^N \rho_1(k)} (G_i(kr, e), \psi(r, e)) = \int_0^\infty \frac{\rho_2(kr)}{k^N \rho_1(k)} (\Phi_{kr}^i(e), \psi(r, e)) dr \quad \forall \psi \in W. \quad (6.8)$$

Заметим, что подынтегральная функция стремится к $r^{\beta+N} (\Phi_\infty^i(e), \psi(r, e))$ при $k \rightarrow +\infty$. Кроме того, выполнены оценки

$$|(\Phi_{kr}^i(e), \psi(r, e))| \leq \frac{C_Q}{(1+r)^Q}, \quad k > 0, \quad r \geq 0,$$

где Q можно считать сколь угодно большим;

$$\frac{\rho_2(kr)}{k^N \rho_1(k)} \leq \begin{cases} C_1 r^{\beta+N+\varepsilon} & \text{при } r > 1, \quad k > 1, \\ C_2 & \text{при } r < 1, \quad k > 1. \end{cases}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало (напомним, что $\beta + N > 0$). Теперь по теореме Лебега в (6.8) можно перейти к пределу при $k \rightarrow +\infty$ под знаком интеграла. Отсюда вытекает, что $F_i(r, e)$ асимптотически однородны по r относительно $\rho_1(k)$. Следовательно, $f_i(t)$ асимптотически однородны относительно $\rho(k)$. Теорема доказана.

Далее, пользуясь теоремой 6.1, мы докажем несколько теорем, которые можно назвать теоремами о некомпенсации особенностей для голоморфных функций в трубчатых областях над острыми конусами. Существенную роль при этом будут играть определение 0.3 и утверждение 0.1 (см. введение).

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть C_i , $i = 1, 2, \dots, m$, – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_i = C_i^*$ – сопряженные конусы, причем $\text{pr}(\bigcup_{i=1}^m \Gamma_i) = \mathcal{F}$ – регулярное множество на единичной сфере S^{n-1} . Пусть $F_i(z) \in H(T^{C_i})$, причем сумма их граничных значений $F(x) = \sum_{i=1}^m F_i(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда существуют $\hat{F}_i(z) \in H(T^{C_i})$, $i = 1, 2, \dots, m$, ведущие себя в T^{C_i} как $\rho(\frac{1}{|z|})$, так что их граничные значения $\hat{F}_i(x)$ асимптотически однородны в нуле относительно $\rho(k)$ и $\sum_{i=1}^m \hat{F}_i(x) = F(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к преобразованию Фурье, имеем $\tilde{f}(t) = \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t)$, и $\tilde{f}(t)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно $k^{-n}\rho(k)$, порядок которой равен $\beta \neq -n, -n-1, \dots$. При этом $\text{supp } \tilde{f}(t) \subset \Gamma = \bigcup_{i=1}^m \Gamma_i$, где $\text{pr } \Gamma = \mathcal{F}$ – регулярное множество. По теореме 6.1 существуют

$$\tilde{f}_i(t) \in \mathcal{S}', \quad i = 1, \dots, m, \quad \text{supp } \tilde{f}_i(t) \subset \Gamma_i, \quad \sum_{i=1}^m \tilde{f}_i(t) = \tilde{f}(t),$$

причем $\tilde{f}_i(t)$ асимптотически однородны на бесконечности относительно $k^{-n}\rho(k)$. Делая обратное преобразование Фурье и пользуясь утверждением 0.1, завершаем доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Если в условиях теоремы 6.2 $\alpha = 0, -1, \dots$, то в ее утверждении функции $F_i(z)$ ведут себя в нуле как $\hat{\rho}(\frac{1}{|z|})$.

Рассмотрим частный случай.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть C_1 и C_2 – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ такие, что

$$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset, \quad \text{ch}(C_1 \cup C_2) = \mathbb{R}^n. \quad (6.9)$$

Пусть $F_i(z) \in H(T^{C_i})$, $i = 1, 2$, и $F_1(z) - F_2(z)$ ведет себя в $T^{C_1 \cap C_2}$ как $\rho(\frac{1}{|z|})$, где $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Тогда существует многочлен $Q(z)$ такой, что

$$F_i(z) - Q(z) \text{ ведет себя в } T^{C_i} \text{ как } \rho\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad i = 1, 2. \quad (6.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 6.2 и утверждению 0.1 существуют $\Phi_i(z) \in H(T^{C_i})$, ведущие себя в T^{C_i} как $\rho(\frac{1}{|z|})$, причем $F_1(z) - F_2(z) = \Phi_1(z) - \Phi_2(z)$ в $T^{C_1 \cap C_2}$. Следовательно, $F_1(z) - \Phi_1(z) = F_2(z) - \Phi_2(z)$. Отсюда вытекает, что $F_1(z) - \Phi_1(z)$ и $F_2(z) - \Phi_2(z)$ представляют собой единую функцию, голоморфную в $T^{C_1 \cup C_2}$, а поэтому в силу условия (6.9) – целую функцию полиномиального роста, т. е. многочлен $Q(z)$. Стало быть,

$$F_1(z) - \Phi_1(z) = F_2(z) - \Phi_2(z) = Q(z).$$

Отсюда и следует (6.10).

Этот частный результат был получен ранее в работе [13]. Его можно сформулировать и в другом, более “изопренном” виде. Для этого проведем некоторые предварительные построения.

Пусть C_q , $q = 1, 2, \dots, m$, – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_q = C_q^*$ – сопряженные конусы. Рассмотрим пространства

$$H^p = \left\{ f_{i_1 \dots i_p}(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \tilde{f}_{i_1 \dots i_p}(t) \subset \bigcup_{\ell=1}^p \Gamma_{i_\ell} \right\},$$

где $p = 1, \dots, m$ и $f_{i_1 \dots i_p}(x)$ полностью антисимметричны по индексам (волна над f означает преобразование Фурье). Считаем также, что

$$H^0 = \left\{ f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \tilde{f}(t) \subset \bigcap_{q=1}^m \Gamma_q \right\}.$$

Введем операторы δ_p по следующему правилу: если $f \in H^p$, то $\delta_p f \in H^{p+1}$, где

$$[\delta_p f]_{i_0 i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k f_{i_0 \dots \check{i}_k \dots i_p}.$$

Здесь символ $\check{}$ сверху означает, что соответствующий индекс опущен.

Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Положим $A^p = \{f \in H^p : \text{каждая компонента } f \text{ асимптотически однородна в нуле относительно } \rho(k)\}$. Поскольку $\delta_p A^p \subset A^{p+1}$, то для факторпространств $G^p = H^p / A^p$ корректно определены операторы δ_p и $\delta_p G^p \subset G^{p+1}$, $p = 0, 1, \dots, m$.

Итак, мы построили последовательность отображений

$$0 \rightarrow G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_m} G^m \rightarrow 0, \quad (6.11)$$

где, как обычно, $\delta_p \delta_{p+1} = 0$.

Оказывается, что следствие 6.2 означает, что при $m = 2$ последовательность (6.11) точна в члене G_1 (при выполнении условия (6.9)). Можно показать, что последовательность (6.11) точна и в более общем случае.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть C_q , $q = 1, 2, \dots, m$, – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ такие, что $\text{ch}(\bigcup_{q=1}^m C_q) = \mathbb{R}^n$ и $\alpha \neq 0, -1, \dots$. Тогда последовательность

$$0 \rightarrow G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_m} G^m \rightarrow 0$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $A_s^p = \{f \in H^p: \text{существуют многочлены } \mathcal{P}_{i_1 \dots i_p}(x), \text{ антисимметричные по индексам, такие, что } f_{i_1 \dots i_p}(x) - \mathcal{P}_{i_1 \dots i_p}(x) \text{ асимптотически однородны в нуле относительно } \rho(k)\}$. Аналогично для факторпространств $G_s^p = H^p/A_s^p$ корректно определены операторы δ_p . Докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА 6.3. В условиях теоремы 6.3 последовательность

$$0 \rightarrow G_s^0 \xrightarrow{\delta_0} G_s^1 \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_m} G_s^m \rightarrow 0 \quad (6.12)$$

точна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем точность в p -м члене, т.е. что если $g \in H^p$ и $\delta_p g \in A_s^{p+1}$, то существует элемент $h \in H^{p-1}$ такой, что $\delta_{p-1} h - g \in A_s^p$. Для этого перейдем к преобразованию Фурье. Положим $U_q = S^{n-1} \setminus \text{pr } \Gamma_q$. Ясно, что $\bigcup_{q=1}^m U_q = S^{n-1}$. Пусть $\{\Omega_q(e), q = 1, \dots, m\}$ – разбиение единицы на S^{n-1} , подчиненное этому покрытию. Пусть $G_{i_1 \dots i_p}(r, e)$ – какое-то сферическое представление $\tilde{g}_{i_1 \dots i_p}(t)$ и $G(r, e)$ – совокупность всех $G_{i_1 \dots i_p}(r, e)$. При этом можно считать (см. следствие 6.1), что

$$\text{supp } G_{i_1 \dots i_p}(r, e) \subset \left\{ r > 0, e \in \text{pr } \bigcup_{\ell=1}^p \Gamma_{i_\ell} \right\} \cup \{r = 0, e \in S^{n-1}\}. \quad (6.13)$$

Определим G^q как совокупность

$$\begin{aligned} \{G_{i_1 \dots i_{p-1}}^q, i_s = 1, \dots, m; s = 1, \dots, p-1\}, \quad q = 1, \dots, m, \\ [G^q]_{i_1 \dots i_{p-1}} = G_{qi_1 \dots i_{p-1}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Положим $H(r, e) = \sum_{q=1}^m \Omega_q(e) G^q(r, e)$. Пусть $\tilde{h}(t) = \{\tilde{h}_{i_1 \dots i_{p-1}}(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), i_s = 1, \dots, m; s = 1, \dots, p-1\}$, где $\tilde{h}_{i_1 \dots i_{p-1}}(t)$ имеет своим сферическим представлением $H_{i_1 \dots i_{p-1}}(r, e)$. Пусть теперь $h(x)$ – обратное покомпонентное преобразование Фурье от $\tilde{h}(t)$. Покажем, что $h(x)$ обладает необходимыми для нас свойствами. Нужные частотные свойства следуют из (6.13) и того факта, что $\Omega_q(e) = 0$ на Γ_q (см. (6.14)). Далее, пользуясь формулой

$$\delta_{p-1} G^q = G - [\delta_p G]^q, \quad q = 1, \dots, m, \quad p = 1, \dots, m, \quad (6.15)$$

где $[\delta_p G]^q$ определяется аналогично тому, как определено G^q (см. (6.14)), получим

$$\begin{aligned}\delta_{p-1}H(r, e) &= \sum_{q=1}^m \Omega_q(e) \delta_{p-1}[G^q(r, e)] = \sum_{q=1}^m \Omega_q(e) \{G(r, e) - [\delta_p G]^q(r, e)\} \\ &= G(r, e) - \sum_{q=1}^m \Omega_q(e) [\delta_p G]^q(r, e).\end{aligned}\quad (6.16)$$

Осталось показать, что последняя сумма в (6.16) асимптотически однородна в существенном относительно $\rho_3(k) = k^{n-1}\rho_2(k)$, где $\rho_2(k) = \frac{1}{k^n}\rho(k)$. По условию $\delta_p \tilde{g}(t) \in A_s^{p+1}$ (асимптотически однородна в существенном относительно $\rho_2(k)$), а потому $\delta_p G$ – ее сферическое представление – асимптотически однородно в существенном относительно $\rho_3(k) = k^{n-1}\rho_2(k)$. Следовательно, $[\delta_p G]^q(r, e)$ такова же, а потому и вся сумма в (6.14) асимптотически однородна в существенном относительно $\rho_3(k)$. Лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы. Пусть $g \in H^p$ и $\delta_p g \in A^{p+1}$. Нужно доказать, что существует элемент $h \in H^{p-1}$ такой, что $\delta_{p-1}h - g \in A^p$. Согласно лемме 6.3 существует элемент $u \in H^{p-1}$ такой, что $\delta_{p-1}u - g \in A_s^p$. Переходя к преобразованию Фурье, имеем $\delta_{p-1}\tilde{u} - \tilde{g} \in \tilde{A}_s^p$ (асимптотически однородна в существенном на бесконечности относительно $\rho_2(k)$), т. е. существует элемент

$$\xi = \left\{ \xi_{i_1 \dots i_p} = \sum_{|j| < -\alpha} c_{i_1 \dots i_p}^j \delta^{(j)}(t) \right\} = \sum_{|j| < -\alpha} C^j \delta^{(j)}(t)$$

(здесь $j = (j_1 \dots j_n)$ – мультииндекс) такой, что

$$\delta_{p-1}\tilde{u} - \tilde{g} - \xi \in \tilde{A}^p. \quad (6.17)$$

Отсюда следует, что

$$\delta_p[\delta_{p-1}\tilde{u} - \tilde{g} - \xi] = -\delta_p \tilde{g} - \delta_p \xi \in \tilde{A}^{p+1}.$$

Поскольку по условию $\delta_p \tilde{g} \in \tilde{A}^{p+1}$, следовательно, $\delta_p \xi \in \tilde{A}^{p+1}$. Таким образом, элемент

$$\delta_p \xi = \sum_{|j| < -\alpha} \delta_p [C^j] \delta^{(j)}(t)$$

асимптотически однороден относительно $\rho_2(k)$, что возможно, только если все $\delta_p [C^j] = 0$. Ясно, что существует числовой вектор B^j такой, что $\delta_{p-1}[B^j] = C^j$. Положим

$$\eta = \sum_{|j| < -\alpha} B^j \delta^{(j)}(t).$$

Учитывая теперь, что $\xi = \delta_{p-1}\eta$, имеем

$$\delta_{p-1}\tilde{u} - \tilde{g} - \delta_{p-1}\eta = \delta_{p-1}\tilde{h} - \tilde{g} \in \tilde{A}^p,$$

где $\tilde{h} = \tilde{u} - \eta$. Делая обратное преобразование Фурье, завершим доказательство теоремы.

Выясним смысл точности последовательности (6.11) в члене G^1 в ситуации, аналогичной рассмотренной в следствии 6.2 при произвольном m .

СЛЕДСТВИЕ 6.3. Пусть C_i , $i = 1, 2, \dots, m$, – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ такие, что

$$\text{ch}\left(\bigcup_{i=1}^m C_i\right) = \mathbb{R}^n, \quad C_i \cap C_{i+1} \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, m-1,$$

и $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$. Пусть функции $F_i(z) \in H(T^{C_i})$ таковы, что $F_i(z) - F_{i+1}(z)$ ведут себя как $\rho(\frac{1}{|z|})$ в $T^{C_i \cap C_{i+1}}$. Тогда существует многочлен $Q(z)$ такой, что $F_i(z) - Q(z)$ ведут себя как $\rho(\frac{1}{|z|})$ в T^{C_i} , $i = 1, 2, \dots, m$.

Выясним еще смысл точности последовательности (6.11) в предпоследнем члене. Для наглядности рассмотрим случай $m = 3$. Пусть C_i , $i = 1, 2, 3$, – открытые острые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $C_{ij} = C_i \cap C_j$, $i < j$. Пусть функции $F_{ij}(z) \in H(T^{C_{ij}})$ обладают “нужными” частотными свойствами, т. е. каждая F_{ij} разлагается в сумму двух функций, голоморфных в T^{C_i} и T^{C_j} соответственно. Если $C_{ij} = \emptyset$, то считаем, что $F_{ij}(z) \equiv 0$. Пусть сумма граничных значений всех этих функций $\sum_{i < j} F_{ij}(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, -1, \dots$. Тогда согласно теореме 6.2 функции $F_{ij}(z)$ можно подправить так, чтобы они вели себя как $\rho(\frac{1}{|z|})$ в соответствующих трубчатых областях. Другими словами, существуют функции

$$\Delta_{ij}(z) \in H(T^{C_{ij}}), \quad i < j, \quad \sum_{i < j} \Delta_{ij}(x) = 0,$$

такие, что функции

$$F_{12}(z) - \Delta_{12}(z), \quad F_{13}(z) - \Delta_{13}(z), \quad F_{23}(z) - \Delta_{23}(z)$$

ведут себя как $\rho(\frac{1}{|z|})$ соответственно в $T^{C_{12}}$, $T^{C_{13}}$, $T^{C_{23}}$.

Нетрудно видеть, что точность последовательности

$$0 \rightarrow G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} G^2 \xrightarrow{\delta_m} G^3 \rightarrow 0$$

в члене G^2 означает, что функции $\Delta_{ij}(z)$ можно представить в виде

$$\Delta_{12}(z) = Q_1(z) - Q_2(z), \quad \Delta_{13}(z) = Q_3(z) - Q_1(z), \quad \Delta_{23}(z) = Q_2(z) - Q_3(z),$$

где $Q_i(z) \in H(T^{C_i})$. Если $C_{ij} = \emptyset$, то $Q_i(x) - Q_j(x)$ – асимптотически однородные функции.

Аналогичные, хотя и менее наглядные результаты можно получить исходя из точности последовательности (6.11) в произвольном члене.

Приложение

В этом приложении мы докажем ряд вспомогательных утверждений, которые были использованы в основном тексте.

ТЕОРЕМА П.1 (замечание к теореме Хана–Банаха). Пусть $\mathbb{B}$ – сепарабельное банахово пространство и $\mathbb{B}_0$ – его подпространство. На $\mathbb{B}_0$ задано семей-

ство линейных непрерывных функционалов $\{f_k(x), x \in \mathbb{B}_0, k \geq 1\}$ таких, что

$$|f_k(x)| \leq \|x\|_{\mathbb{B}_0} \quad \forall x \in \mathbb{B}_0. \quad (\text{П.1})$$

При этом для каждого $x \in \mathbb{B}_0$ функция $f_k(x)$ измерима по k на $[1, +\infty)$. Тогда на $\mathbb{B}$ существует семейство линейных непрерывных функционалов $\{\hat{f}_k(x), x \in \mathbb{B}, k \geq 1\}$ таких, что

$$\hat{f}_k(x) = f_k(x) \quad \text{при } x \in \mathbb{B}_0, \quad |\hat{f}_k(x)| \leq \|x\|_{\mathbb{B}} \quad \forall x \in \mathbb{B}, \quad (\text{П.2})$$

причем для каждого $x \in \mathbb{B}$ функция $\hat{f}_k(x)$ измерима по k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем придерживаться схемы доказательства, приведенного в книге [5, с. 134–137]. Сначала считаем, что функционалы $f_k(x)$ вещественны. Пусть $z \notin \mathbb{B}_0$. Продолжим семейство $\{f_k(x), k \geq 1\}$ на подпространство, порожденное $\mathbb{B}_0$ и z . Его элементы имеют вид $tz + x$, где $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{B}_0$. Если f'_k – искомое продолжение, то

$$f'_k(tz + x) = tf'_k(z) + f'_k(x) = tc_k + f_k(x), \quad f'_k(z) = c_k.$$

Для выполнения (П.2) необходимо, чтобы

$$-f_k\left(\frac{x}{t}\right) + \left\|\frac{x}{t} + z\right\|_{\mathbb{B}} \geq c_k, \quad t > 0, \quad -f_k\left(\frac{x}{t}\right) - \left\|-\frac{x}{t} - z\right\|_{\mathbb{B}} \leq c_k.$$

Нетрудно видеть, что для любых y' и y'' из $\mathbb{B}_0$ справедливо неравенство

$$-f_k(y') - \|-y' - z\|_{\mathbb{B}} \leq -f_k(y'') + \|y'' + z\|_{\mathbb{B}}.$$

Выбирая $c_k = \sup_{y' \in \mathbb{B}_0} (-f_k(y') - \|-y' - z\|_{\mathbb{B}})$, имеем

$$\sup_{y' \in \mathbb{B}_0} (-f_k(y') - \|-y' - z\|_{\mathbb{B}}) = c_k \leq \inf_{y'' \in \mathbb{B}_0} (-f_k(y'') + \|y'' + z\|_{\mathbb{B}}).$$

Этот выбор обеспечивает выполнение условий (П.2). Поскольку при каждом $y' \in \mathbb{B}_0$ функция $f_k(y')$ измерима по k , то функция $-f_k(y') - \|-y' - z\|_{\mathbb{B}}$ также измерима по k . Учитывая сепарабельность $\mathbb{B}$ (а следовательно, и $\mathbb{B}_0$) и заменяя $\sup_{y' \in \mathbb{B}_0}$ на $\sup$ по счетному множеству, выводим, что c_k – измеримая функция ($\sup$ по счетному множеству измеримых функций есть измеримая функция). Следовательно, $f'_k(tz + x)$ при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{B}_0$ измерима по k . Далее, пользуясь леммой Цорна, продолжаем наше семейство функционалов до измеримого семейства на всем $\mathbb{B}$. Теперь доказательство завершается так же, как и в [5].

Следующая теорема дополняет теорему В.С. Владимирова (см. [6]).

ТЕОРЕМА П.2. Пусть $\mathcal{F}$ – замкнутое регулярное множество в $\mathbb{R}^n$ и $\{f_k(t) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \text{supp } f_k \subset \mathcal{F}, k \geq 1\}$ – ограниченное семейство обобщенных функций таких, что

$$f_k(t) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f_0(t) \quad \text{в } \mathcal{S}'.$$

Тогда существуют число M , меры $d\mu_{j,k}$, $|j| \leq M$, $\text{supp } d\mu_{j,k} \subset \mathcal{F}$, $k \geq 1$, меры $d\nu_j$, $\text{supp } d\nu_j \subset \mathcal{F}$, $|j| \leq M$, такие, что

$$f_k = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\mu_{j,k}, \quad f_0 = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\nu_j, \quad (\text{П.3})$$

причем существует постоянная C такая, что

$$\text{Var} \frac{d\mu_{j,k}}{(1+|t|)^M} \leq C, \quad \text{Var} \frac{d\mu_{j,k} - d\nu_j}{(1+|t|)^M} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0. \quad (\text{П.4})$$

Если, кроме того, для любой $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ функции $(f_k(t), \varphi(t))$ измеримы по k , то можно считать, что $d\mu_{j,k}$ измеримы по k , т.е. функции

$$\int \frac{\psi(t)}{(1+|t|)^M} d\mu_{j,k} \quad \text{измеримы по } k, \quad |j| \leq M, \quad (\text{П.5})$$

для любой непрерывной ограниченной функции $\psi(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ П.1. Поскольку функции f_k ограничены в $\mathcal{S}'$, то порядок сингулярности f_k при всех $k \geq 1$ ограничен одним и тем же числом. Постоянная C в формуле (П.4) зависит только от этого числа и показателя регулярности множества $\mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ П.2. Пусть сначала $f_0 = 0$. Существует N такое, что $\|f_k\|_{-N} \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$, а в силу регулярности $\mathcal{F}$ следует, что существует число M такое, что

$$|(f_k(t), \varphi(t))| \leq \text{const} \cdot \|f_k\|_{-N} \max_{|j| \leq M} \sup_{t \in \mathcal{F}} (1+|t|)^M |\varphi^{(j)}(t)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad (\text{П.6})$$

(см. [6, с. 34]). Положим $\mathcal{L} = \bigoplus_{|j| \leq M} A_j$, где $j = (j_1, \dots, j_n)$ – мультииндекс, и $A_j = C_0(\mathcal{F})$, при этом $\|\psi(t)\|_{\mathcal{L}} = \max_{|j| \leq M} \sup_{t \in \mathcal{F}} |\psi_j(t)|$. Рассмотрим отображение $\mathcal{S}$ в $\mathcal{L}$, определяемое формулой

$$\eta: \varphi(t) \mapsto \bigoplus \psi_j(t), \quad \text{где} \quad \psi_j(t) = (1+|t|)^M \varphi^{(j)}(t).$$

Ясно, что $\text{Ker } \eta = \{0\}$. Обозначим образ $\mathcal{S}$ при отображении η через $\mathcal{L}_0$. Определим семейство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{L}_0$ формулой

$$h_k(\psi) = (f_k(t), \varphi(t)), \quad \psi = \eta(\varphi) \in \mathcal{L}_0, \quad k \leq 1.$$

При $\psi \in \mathcal{L}_0$, пользуясь (П.6), имеем

$$|h_k(\psi)| = |(f_k, \varphi)| \leq c \|f_k\|_{-N} \max_{|j| \leq M} \|\psi_j\|_{C_0(\mathcal{F})} = c \|f_k\|_{-N} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{L}} \quad (\text{П.7})$$

с некоторой постоянной c . Отметим, что в силу условия теоремы при каждом $\psi \in \mathcal{L}_0$ функции $h_k(\psi)$ измеримы по k . По теореме П.1 существует продолжение h_k на все $\mathcal{L}$, т.е. существуют линейные непрерывные функционалы $\hat{h}_k(\psi)$, $\psi \in \mathcal{L}$, с сохранением оценки (П.7) и измеримости по k . По теореме Рисса существуют меры $\widehat{d\mu}_{j,k}$ с носителями в $\mathcal{F}$ такие, что для любой $\psi(t) = \{\psi_j(t) \in C_0(\mathbb{R}^n), |j| \leq M\}$ имеем

$$\hat{h}_k(\psi) = \sum_{|j| \leq M} \int \psi_j(t) \widehat{d\mu}_{j,k}, \quad \text{Var } \widehat{d\mu}_{j,k} \leq c \|f\|_{-N}.$$

При этом функция $\int \psi_j(t) \widehat{d\mu}_{j,k}$ измерима по k для любого мультииндекса j , $|j| \leq M$. Теперь имеем

$$(f_k(t), \varphi(t)) = \sum_{|j| \leq M} \int \psi_j(t) \widehat{d\mu}_{j,k} = \sum_{|j| \leq M} \int (-1)^{|j|} \varphi^{(j)}(t) d\mu_{j,k},$$

где $d\mu_{j,k} = (-1)^{|j|}(1 + |t|)^M \widehat{d\mu}_{j,k}$. Если $f_0 \neq 0$, то аналогично доказывается, что $f_0(t) = \sum_{|j| \leq M} D^{(j)} d\nu_j$ с соответствующими свойствами $d\nu_j$. Полагая $g_k = f_k - f_0$ и пользуясь уже доказанным, завершим доказательство теоремы.

Список литературы

1. Владимиров В. С., Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., *Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций*, Наука, М., 1986.
2. Гельфанд И. М., Шилор Г. Е., *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, М., 1959.
3. Сенета Е., *Правильно меняющиеся функции*, Наука, М., 1985.
4. Владимиров В. С., *Обобщенные функции в математической физике*, Наука, М., 1979.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976.
6. Владимиров В. С., *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М., 1964.
7. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., “Многомерные тауберовы теоремы для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах”, *Матем. сб.*, **194**:11 (2003), 17–64.
8. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., “Об одной многомерной теореме тауберова типа для обобщенных функций со значениями в банаховых пространствах”, *Докл. РАН*, **391**:2 (2003), 158–161.
9. Гольдберг А. А., “Интегральное представление монотонных медленно меняющихся функций”, *Изв. вузов. Сер. матем.*, 1988, № 4, 21–27.
10. Напалков В. В., Таров В. А., “Функции, эквивалентные правильно меняющимся функциям”, *Докл. РАН*, **391**:5 (2003), 598–601.
11. Zinoviev Yu. M., “On Lorentz invariant distributions”, *Commun. Math. Phys.*, **47**:1 (1976), 33–42.
12. Зиновьев Ю. М., “Формулы обращения преобразования Лапласа. II. Световой конус”, *ТМФ*, **65**:2 (1985), 163–175.
13. Дрожжинов Ю. Н., Завьялов Б. И., “Теоремы типа Харди–Литтлвуда для знако-неопределенных мер в конусе”, *Матем. сб.*, **186**:5 (1995), 49–68.

Ю. Н. ДРОЖЖИНОВ (YU. N. DROZHZNINOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: drozzin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
25.08.2005

Б. И. ЗАВЬЯЛОВ (B. I. ZAV'YALOV)
Математический институт им. В. А. Стеклова
E-mail: bzavial@mi.ras.ru