Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 57–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/im87>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:46:38

УДК 513.6+517.6

В. А. Краснов

Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия

Разрабатываются методы вычисления когомологической группы Брауэра вещественного алгебраического многообразия. С помощью этих методов полностью вычисляется группа Брауэра поверхности Энриквеса.

Библиография: 11 наименований.

Введение

Имеются две группы Брауэра произвольной схемы X . Первая из них $\mathrm{Br}(X)$ – группа классов подобия алгебр Адзумаи над X , а вторая $\mathrm{Br}'(X) = H_{\mathrm{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ – когомологическая группа Брауэра. Всегда имеется включение $\mathrm{Br}(X) \hookrightarrow \mathrm{Br}'(X)$, которое может быть несюръективным, но оно сюръективно, если X – аффинная схема. Оно также сюръективно, если $\dim X \leq 1$, а если X регулярна, то при $\dim X \leq 2$. Если схема X имеет конечное число компонент связности, то $\mathrm{Br}(X)$ является группой кручения, а если X – регулярная схема с конечным числом компонент связности, то $\mathrm{Br}'(X)$ также является группой кручения. Эти и другие факты о группе Брауэра более подробно можно посмотреть в [1], [2]. Группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия изучалась в работах [3]–[5]. В них, в частности, исследовался вопрос о сюръективности канонического гомоморфизма

$${}_2\mathrm{Br}'(X) \rightarrow {}_2\mathrm{Br}'(\cup P_i) = (\mathbb{Z}/2)^s, \quad (0.1)$$

где ${}_2\mathrm{Br}'(X)$ – группа элементов второго порядка в $\mathrm{Br}'(X)$, s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, P_i – точка из i -й компоненты $X(\mathbb{R})$, а X – гладкая проективная поверхность. В работе [5] для этой и других целей применялись эквивариантные группы когомологий $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, где $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа. Там вопрос об эпиморфности гомоморфизма (0.1) был сведен к вопросу о первой спектральной последовательности

$$I_2^{p,q} = H^p(X(\mathbb{C})/G; \mathcal{H}^q(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

А именно, эпиморфность гомоморфизма (0.1) равносильна обращению в нуль дифференциала $d_3^{0,2}$ этой спектральной последовательности. В статье [6] эта спектральная последовательность была полностью изучена. В частности, дифференциал $d_3^{0,2}$ для гладкой поверхности равен нулю, поэтому гомоморфизм (0.1) эпиморфен.

В работе [5] вычислялась размерность пространства ${}_2\mathrm{Br}'(X)$ в случае, когда X – гладкая проективная поверхность такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $H^3(X(\mathbb{C})/G; \mathbb{F}_2) = 0$. Там для нее получена следующая формула:

$$\dim {}_2\mathrm{Br}'(X) = 2s - 1 + \rho_0(X), \quad (0.2)$$

где $\rho_0(X)$ – размерность коядра гомоморфизма

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_-,$$

а $H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_-$ – подпространство $H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$, на котором инволюция комплексного сопряжения $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ действует умножением на -1 . Это число мы называем *числом Лефшеца*, по аналогии с числом Лефшеца комплексного алгебраического многообразия (см. [7]).

В данной работе мы пробуем вычислить группу Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ для произвольного неособого проективного алгебраического многообразия над полем вещественных чисел. Для этого мы сначала переносим задачу в категорию комплексно аналитических многообразий. А именно, обозначим через $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$ подгруппу кручения группы $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$, где $\mathcal{O}^*$ – пучок ростков обратимых комплексно аналитических функций на $X(\mathbb{C})$. Заметим, что группа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует на $\mathcal{O}^*$ по правилу: если $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*)$, то $g^*(f) = \overline{f} \circ g$, где черта означает комплексное сопряжение. Мы показываем, что справедлива

ТЕОРЕМА 0.1. *Существует канонический изоморфизм $\mathrm{Br}'(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$.*

Таким образом, вычисление группы $\mathrm{Br}'(X)$ сводится к вычислению группы $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)_{\mathrm{tors}}$. Для вычисления аналитической группы Брауэра мы используем точную экспоненциальную последовательность G -пучков:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[1] \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1, \quad (0.3)$$

где $\mathbb{Z}[1] = 2\pi i\mathbb{Z}$. Тогда получается

ТЕОРЕМА 0.2. *Существует разложение*

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}. \quad (0.4)$$

Заметим, что разложение (0.4) не является каноническим. На самом деле имеет место только точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\delta} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}},$$

где δ – кограничный гомоморфизм, который получается из точной последовательности (0.3), а $\mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}})$ – ядро гомоморфизма δ , причем доказывается, что группа $\mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}})$ изоморфна группе $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)}$. Из инъективности $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}})$ вытекает существование разложения (0.4).

Группу $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}$ мы обозначаем через $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})$ и называем *топологической группой Брауэра*. Вполне возможно, что выполняется равенство

$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = \mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})$, где группа $\mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})$ определяется как группа классов подобия алгебр Адзумаи с вещественной структурой на топологическом пространстве с инволюцией $(X(\mathbb{C}), g)$. Группу $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})$ можно определять так же, как $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$, а именно

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}_{\mathrm{top}}^*)_{\mathrm{tors}},$$

где $\mathcal{O}_{\mathrm{top}}^*$ – пучок ростков обратимых комплекснозначных непрерывных функций. В связи с введением топологической группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})$ заметим, что равенство В. В. Никулина (0.2) для поверхности, удовлетворяющей соответствующим условиям, означает, что для нее

$$\dim_2 \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = 2s - 1.$$

Мы пробуем вычислить топологическую группу Брауэра $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})$. Для этого прежде всего заметим, что канонический гомоморфизм

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])^G \quad (0.5)$$

индуцирует гомоморфизм групп

$$\alpha: \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(X(\mathbb{C}))^G, \quad (0.6)$$

где $\mathrm{Br}'(X(\mathbb{C})) = H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}$ – группа Брауэра топологического пространства $X(\mathbb{C})$. Ядро гомоморфизма (0.5) равно группе $F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$, где $\{F^q H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])\}$ – возрастающая фильтрация, которая получается из второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (0.7)$$

Так как группа $F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ конечна, то она равна ядру гомоморфизма (0.6). Обозначим ее через $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0$; тогда получим точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0 \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Br}'(X(\mathbb{C}))^G. \quad (0.8)$$

Мы показываем, что группа $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0$ состоит из элементов второго порядка. Если спектральная последовательность (0.7) вырождается, то гомоморфизм α в последовательности (0.8) эпиморфен, причем оказывается, что тогда существует разложение

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0 \oplus \mathrm{Br}'(X(\mathbb{C}))^G.$$

В случае вырождения спектральной последовательности (0.7) получаем равенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0 = 1 + \dim H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) + \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])).$$

Число $\dim H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]))$ имеет геометрический смысл, оно равно $\log_2 s_a$, где s_a – число компонент связности множества вещественных точек многообразия Альбанезе $A(X)$ (см. [8]). Если X – поверхность и группа $H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$

свободная, то число $\dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]))$ вычисляется через инварианты инволюции g^* и квадратичной формы на $H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ (см. [9]). Оказывается, что спектральная последовательность (0.7) вырождается тогда и только тогда, когда вырождается следующая аналогичная последовательность:

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}). \quad (0.9)$$

Заметим, что вырождение спектральной последовательности (0.9) означает, что X является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием (см. [9]).

В случае, когда спектральная последовательность (0.7) не вырождается (т.е. X не является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием), мы можем только утверждать, что гомоморфизм p -групп при $p \neq 2$

$$\alpha: \text{Br}'(X^{\text{top}})(p) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(p)$$

является изоморфизмом. Напомним, что если A – абелева группа, p – простое число, то p -группа $A(p)$ состоит из элементов A , порядок которых есть степень p . Если X является M -многообразием, то мы доказываем, что гомоморфизм

$$\alpha: {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) \rightarrow {}_2\text{Br}'(X(\mathbb{C}))$$

эпиморфен; тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 \rightarrow {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) \rightarrow {}_2\text{Br}'(X(\mathbb{C})) \rightarrow 0,$$

а поэтому выполняется равенство

$$\dim {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) = \dim \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 + \dim {}_2\text{Br}'(X(\mathbb{C})).$$

До сих пор речь шла о группе Брауэра многообразия произвольной размерности. Сейчас мы сформулируем специальные результаты, которые говорят о группе Брауэра поверхности.

ТЕОРЕМА 0.3. *Пусть поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ – конечная группа; тогда выполняется неравенство*

$$\dim {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) \geq 2s - 1.$$

ТЕОРЕМА 0.4. *Пусть $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхность X такая, что $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ – конечная группа и инволюция $g^*: \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2)$ тривиальна; тогда выполняется равенство*

$$\dim {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) = 2s - 1.$$

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и гомоморфизм

$$H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C})/G; \mathbb{F}_2)$$

эпиморфен; тогда выполняется неравенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X^{\text{top}}) \leq 2s - 1.$$

Заметим, что если $H^3(X(\mathbb{C})/G; \mathbb{F}_2) = 0$, то из теорем 0.3, 0.5 вытекает равенство В. В. Никулина (0.2).

Доказательство теорем 0.3–0.5 основывается на изучении канонического гомоморфизма

$$\text{Br}'(X^{\text{top}}) \xrightarrow{\cup \omega} (\mathbb{F}_2)^{2s-1},$$

который получается из гомоморфизма

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \xrightarrow{\cup \omega} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

где ω – образующая группы

$$F^0 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) = \mathbb{F}_2.$$

С помощью этих методов мы вычисляем группу Брауэра поверхности Энриквеса (см. § 4).

Прежде чем сформулировать еще одну теорему, введем дополнительные обозначения. Образ отображения цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{R}}: \text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

будем называть *алгебраической группой когомологий*, а ее размерность обозначим через $b_a^1(X(\mathbb{R}))$. Определение отображения $\text{cl}_{\mathbb{R}}$ можно посмотреть в [10]. Через $\varkappa_n$ обозначим размерность ядра гомоморфизма

$$H_n(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_n(X(\mathbb{C})/G; \mathbb{F}_2);$$

тогда справедлива

ТЕОРЕМА 0.6. Если X – поверхность, то выполняется неравенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X) \geq 2s - \varkappa_2 + \varkappa_1 - b_a^1,$$

которое становится равенством для M -поверхности.

Заметим, что $\varkappa_1 - b_a^1 \geq 0$, поэтому справедливо более слабое неравенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X) \geq 2s - \varkappa_2.$$

Число $\varkappa_2$ равно числу соотношений между классами гомологий в $H_2(X(\mathbb{C})/G; \mathbb{F}_2)$, которые задаются компонентами связности множества вещественных точек $X(\mathbb{R})$.

§ 1. Предварительные результаты

1.1. Число Лефшеца вещественного алгебраического многообразия. В этом пункте X – неособое полное вещественное алгебраическое многообразие. Рассмотрим отображение цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q}).$$

Его образ содержится в подпространстве

$$H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_- = \{h \in H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) | g^*(h) = -h\},$$

где $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$ – инволюция комплексного сопряжения. Размерность коядра отображения

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{C}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_-$$

обозначим через $\rho_0(X)$ и назовем *числом Лефшеца вещественного алгебраического многообразия X* . Это название мы дали по аналогии с числом Лефшеца комплексного алгебраического многообразия (см. [7]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Число Лефшеца $\rho_0(X)$ равно размерности образа гомоморфизма*

$$H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_- \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathcal{O}),$$

который индуцирован вложением постоянного пучка $\mathbb{Q}$ в пучок ростков голоморфных функций $\mathcal{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для комплексного алгебраического многообразия $\overline{X} = X \otimes \mathbb{C}$ по теореме Лефшеца об $(1, 1)$ -классах имеет место точная последовательность

$$(\mathrm{Pic} \overline{X}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathcal{O}). \quad (1.1)$$

Гомоморфизм cl в ней антикоммутирует с инволюцией g^* , т.е. выполняется равенство $g^* \circ \mathrm{cl} = -\mathrm{cl} \circ g^*$. Действительно, если Y – кривая на $\overline{X}$, то отображение $g: Y(\mathbb{C}) \rightarrow g^*(Y)(\mathbb{C})$ меняет ориентацию. Второе отображение в последовательности (1.1) коммутирует с инволюцией g^* . Так как векторные пространства $(\mathrm{Pic} \overline{X}) \otimes \mathbb{Q}$, $H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})$ разлагаются в суммы

$$\begin{aligned} \mathrm{Pic} \overline{X} \otimes \mathbb{Q} &= (\mathrm{Pic} \overline{X} \otimes \mathbb{Q})_+ \oplus (\mathrm{Pic} \overline{X} \otimes \mathbb{Q})_-, \\ H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q}) &= H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_+ \oplus H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_-, \end{aligned}$$

где знак “+” означает инвариантное относительно инволюции g^* подпространство, а знак “–” – антиинвариантное подпространство, то из точной последовательности (1.1) вытекает точная последовательность

$$(\mathrm{Pic} \overline{X} \otimes \mathbb{Q})_+ \xrightarrow{\mathrm{cl}} H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_- \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathcal{O}).$$

Осталось заметить, что выполняется равенство

$$(\mathrm{Pic} \overline{X} \otimes \mathbb{Q})_+ = \mathrm{Pic} X \otimes \mathbb{Q}.$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $h^{2,0}(X(\mathbb{C})) = 0$, то $\rho_0(X) = 0$.

Рассмотрим теперь гомоморфизм вложения G -пучков: $\mathbb{Z}[1] \rightarrow \mathcal{O}$, где $\mathbb{Z}[1] = 2\pi i\mathbb{Z}$; он индуцирует гомоморфизм эквивариантных когомологий

$$i^*: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}).$$

Для него имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Группа кручения*

$$\left(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) / i^* (H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])) \right)_{\text{tors}} \quad (1.2)$$

изоморфна группе $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $i^*(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]))$ свободная, и если она имеет ранг ρ , то группа кручения (1.2) изоморфна группе $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\rho$. Поэтому достаточно показать, что $\rho = \rho_0(X)$. Для этого рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow{i^*} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \\ \downarrow \alpha & & \cong \downarrow \alpha \\ H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])^G & \xrightarrow{i^*} & H^2(X(\mathbb{C}); \mathcal{O})^G \end{array}$$

Гомоморфизм $\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathcal{O})^G$ является изоморфизмом; это вытекает из рассмотрения второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathcal{O})) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}).$$

Из такой же спектральной последовательности для $H^n(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ получаем, что ядро и коядро гомоморфизма

$$\alpha: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])^G$$

являются конечными группами. Поэтому ранги групп $i^*(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]))$, $i^*(H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])^G)$ совпадают. Осталось заметить, что ранг группы $i^*(H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])^G)$ равен размерности пространства $i^*(H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Q})_-)$, и применить предложение 1.1. Предложение доказано.

1.2. Эквивариантные этальные когомологии. Через X_{et} , $\overline{X}_{\text{et}}$ будем обозначать этальные топологии на X , $\overline{X}$ соответственно. Группа Галуа $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ действует на $\overline{X}$, если рассматривать $\overline{X}$ как вещественное алгебраическое многообразие. Если $g \in G$ — образующая, то морфизм $g: \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ является вещественной инволюцией. Введем понятие G -пучка абелевых групп на $\overline{X}_{\text{et}}$. Если $\pi: U \rightarrow \overline{X}$ — этальный морфизм, то $g^{-1} \circ \pi: U \rightarrow \overline{X}$ также этальный морфизм. G -структура пучка F на $\overline{X}_{\text{et}}$ состоит из изоморфизмов $g^*: \Gamma(g^{-1} \circ \pi; F) \rightarrow \Gamma(\pi; F)$ таких, что композиция

$$\Gamma(\pi; F) \xrightarrow{g^*} \Gamma(g^{-1} \circ \pi; F) \xrightarrow{g^*} \Gamma(\pi; F)$$

является тождественным отображением. Изоморфизмы g^* должны также функториально зависеть от π . Категорию абелевых G -пучков на $\overline{X}_{\text{et}}$ будем обозначать через $GS(\overline{X}_{\text{et}})$. Если F – пучок на X_{et} , то на пучке $\overline{F} = F|_{\overline{X}_{\text{et}}}$ имеется каноническая G -структура. Действительно, композиции морфизмов $g^{-1} \circ \pi$, π с проекцией $\overline{X} \rightarrow X$ совпадают, поэтому группы $\Gamma(g^{-1} \circ \pi; \overline{F})$, $\Gamma(\pi; \overline{F})$ равны; это равенство и задает изоморфизм $g^*: \Gamma(g^{-1} \circ \pi; \overline{F}) \rightarrow \Gamma(\pi; \overline{F})$.

Обозначим через $\mathbb{S}(X_{\text{et}})$ категорию абелевых групп на X_{et} ; тогда функтор ограничения $F \rightarrow \overline{F}$ задает изоморфизм категорий $\mathbb{S}(X_{\text{et}}) \xrightarrow{\sim} GS(\overline{X}_{\text{et}})$. Обратный функтор определяется следующим образом. Если $\pi: U \rightarrow X$ – этальный морфизм, то он индуцирует этальный морфизм $\overline{\pi}: \overline{U} \rightarrow \overline{X}$ с помощью умножения на $\text{Spec } \mathbb{C}$. Тогда из произвольного G -пучка $\overline{F}$ на $\overline{X}_{\text{et}}$ получается пучок F на X_{et} с помощью равенства $\Gamma(\pi; F) = \Gamma(\overline{\pi}; \overline{F})^G$. Любой G -модуль M определяет G -пучок на $\overline{X}_{\text{et}}$; будем его обозначать через $\overline{M}$, а соответствующий пучок на X_{et} также обозначим через M . Для G -пучка $\overline{F}$ на $\overline{X}_{\text{et}}$ определены эквивариантные этальные когомологии

$$H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, \overline{F}) = R^q \Gamma^G(\overline{F}),$$

где Γ^G – функтор: $\overline{F} \mapsto \Gamma(\overline{X}; \overline{F})^G$. Так как $\Gamma(\overline{X}; \overline{F})^G = \Gamma(X; F)$, а функтор ограничения $F \mapsto \overline{F} = F|_{\overline{X}_{\text{et}}}$ задает изоморфизм категорий $\mathbb{S}(X_{\text{et}}) \xrightarrow{\sim} GS(\overline{X}_{\text{et}})$, то имеет место равенство

$$H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, \overline{F}) = H_{\text{et}}^q(X; F). \quad (1.3)$$

Через X^{an} будем обозначать соответствующее $\overline{X}$ комплексно аналитическое многообразие. Через $(X^{\text{an}})_{\text{et}}$ обозначим топологию, состоящую из голоморфных отображений $U \rightarrow X^{\text{an}}$, которые локально биголоморфны. Инволюция $g: \overline{X} \rightarrow \overline{X}$ индуцирует антиголоморфную инволюцию $g: X^{\text{an}} \rightarrow X^{\text{an}}$; поэтому если M – G -модуль, то определены G -пучок M на $(X^{\text{an}})_{\text{et}}$ и эквивариантные этальные когомологии $H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, M)$, а также канонический гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, M) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, M). \quad (1.4)$$

Если мы рассмотрим евклидову топологию на $X(\mathbb{C})$, то получим гомоморфизм

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, M) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, M). \quad (1.5)$$

Гомоморфизм (1.4) всегда является изоморфизмом, так как гомоморфизмы

$$H^s(X(\mathbb{C}); M) \rightarrow H_{\text{et}}^s(X^{\text{an}}; M)$$

являются изоморфизмами, а поэтому получаем изоморфизм вторых спектральных последовательностей:

$$\Pi_2^{r,s}(X(\mathbb{C})) \xrightarrow{\sim} \Pi_2^{r,s}(X_{\text{et}}^{\text{an}}),$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_2^{r,s}(X(\mathbb{C})) &= H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); M)), \\ \Pi_2^{r,s}(X_{\text{et}}^{\text{an}}) &= H^r(G, H_{\text{et}}^s(X^{\text{an}}; M)). \end{aligned}$$

А если G -модуль M конечен, то гомоморфизм (1.4) также является изоморфизмом, так как тогда гомоморфизмы

$$H_{\text{et}}^s(\overline{X}; M) \rightarrow H_{\text{et}}^s(X^{\text{an}}; M)$$

являются изоморфизмами (см. [2]). В итоге если учесть равенство (1.3), то для конечного G -модуля M получаем цепочку равенств

$$H_{\text{et}}^q(X; M) = H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, M) = H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, M) = H^q(X(\mathbb{C}); G, M). \quad (1.6)$$

1.3. Аналитическая группа Брауэра. Напомним, что пучок $\mathbb{G}_m$ на X_{et} определяется следующим образом. Если $\pi: U \rightarrow X$ – этальный морфизм, то $\Gamma(\pi; \mathbb{G}_m) = \Gamma(U; \mathcal{O})^*$. Аналогичный пучок определяется на $(X^{\text{an}})_{\text{et}}$, его мы будем также обозначать через $\mathbb{G}_m$. Для каждого $q \geq 0$ имеем канонический гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, \mathbb{G}_m). \quad (1.7)$$

Так как

$$H_{\text{et}}^q(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) = H_{\text{et}}^q(X; \mathbb{G}_m), \quad H_{\text{et}}^q(X^{\text{an}}; G, \mathbb{G}_m) = H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*),$$

то гомоморфизм (1.7) определяет гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^q(X; \mathbb{G}_m) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*). \quad (1.8)$$

При $q = 0$ он, конечно, является изоморфизмом. При $q = 1$ гомоморфизм (1.8) также будет изоморфизмом, потому что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{et}}^1(X; \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \\ \parallel & & \parallel \\ \text{Pic } X & \longrightarrow & \text{Pic}(X(\mathbb{C}), g) \end{array} \quad (1.9)$$

где $\text{Pic}(X(\mathbb{C}), g)$ – группа линейных расслоений (с точностью до изоморфизма) с вещественной структурой (см. [10]). Так как нижняя строка в диаграмме (1.9) является изоморфизмом, то и верхняя строка дает изоморфизм. При $q = 2$ гомоморфизм (1.8) уже не обязательно должен быть изоморфизмом, так как $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)$ может не быть группой кручения. Положим

$$\text{Br}'(X^{\text{an}}) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*)_{\text{tors}}$$

и назовем эту группу *аналитической группой Брауэра*; тогда гомоморфизм (1.8) при $q = 2$ определяет гомоморфизм групп Брауэра

$$\text{Br}'(X) \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{an}}).$$

Если A – абелева группа, то через ${}_n A$ будем обозначать ядро гомоморфизма

$$A \xrightarrow{\times n} A.$$

ЛЕММА 1.4. *При каждом $n \in \mathbb{N}$ гомоморфизм*

$${}_n\mathrm{Br}'(X) \rightarrow {}_n\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность Куммера

$$1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

Из нее получается следующая коммутативная диаграмма из точных последовательностей эквивariantных когомологий:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{\mathrm{et}}^1(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\mathrm{et}}^2(\overline{X}; G, \mu_n) & \longrightarrow & {}_nH_{\mathrm{et}}^2(\overline{X}; G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H_{\mathrm{et}}^1(X^{\mathrm{an}}; G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\mathrm{et}}^2(X^{\mathrm{an}}; G, \mu_n) & \longrightarrow & {}_nH_{\mathrm{et}}^2(X^{\mathrm{an}}; G, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

которую можно переписать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Pic} X & \longrightarrow & H_{\mathrm{et}}^2(X; \mu_n) & \longrightarrow & {}_n\mathrm{Br}'(X) & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathrm{Pic}(X(\mathbb{C}), g) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_n) & \longrightarrow & {}_n\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Два первых вертикальных гомоморфизма в ней являются изоморфизмами (см. [10, п. 1.2]), поэтому и последний – изоморфизм. Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает

ТЕОРЕМА 1.5. *Канонический гомоморфизм $\mathrm{Br}'(X) \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$ является изоморфизмом.*

ТЕОРЕМА 1.6. *Аналитическая группа Брауэра $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$ изоморфна прямой сумме групп*

$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}. \quad (1.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экспоненциальную точную последовательность G -пучков на $X(\mathbb{C})$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{i^*} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 1.$$

Из нее получаем следующую точную последовательность:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O})/i^*(H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])) \\ \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Покажем теперь, что гомоморфизм

$$\delta: \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}} \quad (1.12)$$

эпиморфен. Для этого достаточно проверить, что гомоморфизм

$$\delta: {}_n\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow {}_nH^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$$

является эпиморфизмом при каждом $n \in \mathbb{N}$. Для проверки такого утверждения рассмотрим коммутативную диаграмму из G -пучков, строки в которой точны:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \xrightarrow{i^*} & \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] & \xrightarrow{\exp} & \mu_n \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{O} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}^* \longrightarrow 1 \end{array}$$

где $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] = \frac{2\pi i}{n} \cdot \mathbb{Z}$. Так как

$${}_n\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_n) / \delta(\mathrm{Pic}(X(\mathbb{C}), g)),$$

то из этой диаграммы G -пучков получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_n) & \xrightarrow{\delta} & {}_nH^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \parallel & & \\ {}_n\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) & \xrightarrow{\delta} & {}_nH^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \\ 0 & & & & \end{array}$$

Верхняя строка и левый столбец в данной диаграмме точны, поэтому и нижняя строка точна. Итак, эпиморфность гомоморфизма (1.12) доказана. Из точной последовательности (1.11) и предложения 1.3 получаем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}} \rightarrow 0.$$

Осталось применить инъективность $\mathbb{Z}$ -модуля $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)}$. Теорема доказана.

Заметим, что представление $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}})$ в виде прямой суммы (1.10) не является каноническим. В связи с этим обозначим через $\mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}})$ ядро гомоморфизма (1.12); эта группа изоморфна $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)}$. Группу $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}$ будем обозначать через $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})$ и называть *топологической группой Брауэра*. Исходя из этих обозначений, получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}'_0(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{an}}) \rightarrow \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) \rightarrow 0.$$

§ 2. Вычисление топологической группы Брауэра

2.1. Первая спектральная последовательность. Обозначим через Y факторпространство $X(\mathbb{C})/G$ и через f – проекцию $X(\mathbb{C})$ на Y . Пусть $\tilde{Z} = f_*(\mathbb{Z}[1])$; тогда $\tilde{Z}$ является G -пучком на Y , где действие G на Y тривиальное. Если $\mathcal{H}^s(G, \mathbb{Z}[1]) = R^s f_*^G(\mathbb{Z}[1])$, то $\mathcal{H}^s(G, \mathbb{Z}[1]) = H^s(G, \tilde{Z})$ (см. [9]). Поэтому имеем равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(G, \mathbb{Z}[1]) &= \tilde{Z}^G, & \mathcal{H}^{2q+1}(G, \mathbb{Z}[1]) &= \mathbb{F}_2|_{X(\mathbb{R})}, & q \geq 0, \\ \mathcal{H}^{2q}(G, \mathbb{Z}[1]) &= 0, & q &> 0. \end{aligned}$$

Напомним, что первая спектральная последовательность для пучка $\mathbb{Z}[1]$ имеет вид

$$I_2^{r,s} = H^r(Y; \mathcal{H}^s(G, \mathbb{Z}[1])) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *При $q > 2 \dim X$ гомоморфизм ограничения*

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1])$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность G -пучков на $X(\mathbb{C})$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{Z}[1] \rightarrow \mathbb{Z}[1]|_{X(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}$ – ядро гомоморфизма ограничения. Из равенства

$$\mathcal{H}^s(G, \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}) = H^s(G, f_*(\mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}))$$

получаем $\mathcal{H}^0(G, \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}) = \tilde{Z}^G$, $\mathcal{H}^s(G, \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}) = 0$ при $s > 0$. Следовательно,

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}) = H^q(Y; \tilde{Z}^G).$$

Поэтому

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]_{X(\mathbb{C})-X(\mathbb{R})}) = 0 \quad \text{при } q > 2 \dim X.$$

Осталось выписать точную последовательность эквивариантных когомологий для последовательности G -пучков (2.1). Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *При $q > 2 \dim X$ группа $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ состоит из элементов второго порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [6] установлено равенство

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^{q-1}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \oplus H^{q-3}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \oplus \dots, \quad (2.2)$$

поэтому при $q > 2 \dim X$ группа

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1])$$

состоит из элементов второго порядка. Следствие доказано.

2.2. Вторая спектральная последовательность. Напомним, что вторая спектральная последовательность для пучка $\mathbb{Z}[1]$ имеет вид

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (2.3)$$

Если $q > 2 \dim X$, то из нее вытекает неравенство

$$\dim_{\mathbb{F}_2} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \leq \sum_{r+s=q} \dim_{\mathbb{F}_2} H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])). \quad (2.4)$$

В силу предложения 2.1 и разложения (2.2) эта последовательность неравенств равносильна следующим двум неравенствам:

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{чет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^1(G, H^{\text{чет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])), \\ \dim H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^1(G, H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^{\text{чет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $H^{\text{чет}} = \bigoplus_q H^{2q}$, $H^{\text{нечет}} = \bigoplus_q H^{2q+1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Неравенства (2.5) будут равенствами тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если спектральная последовательность (2.3) вырождается, то при $q > 2 \dim X$ неравенства (2.4) становятся равенствами, а поэтому и неравенства (2.5) становятся равенствами. Для доказательства обратного утверждения заметим сначала, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, так как $\dim H^1(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) = 1$. В этом случае для спектральной последовательности пучка $\mathbb{Z}$

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \quad (2.6)$$

дифференциалы $d_k^{2q, k-1}$ нулевые (см. [9]), поэтому имеем равенство

$$\Pi_k^{2q, 0}(\mathbb{Z}) = H^{2q}(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) = \mathbb{F}_2, \quad q > 0, \quad k \geq 2.$$

Обозначим образующую из этой группы через ω_q и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \Pi_k^{r,s}(\mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow{\cup \omega_q} & \Pi_k^{r+2q,s}(\mathbb{Z}[1]) \\ \downarrow d_k^{r,s} & & \downarrow d_k^{r+2q,s} \\ \Pi_k^{r+k,s-k+1}(\mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow{\cup \omega_q} & \Pi_k^{r+2q+k,s-k+1}(\mathbb{Z}[1]) \end{array} \quad (2.7)$$

После этого заметим, что если неравенства (2.4) становятся равенствами, то дифференциалы $d_k^{r,s}$ в спектральной последовательности (2.3) при $r + s > 2 \dim X$ будут нулевыми. Из диаграммы (2.7) тогда вытекает, что все дифференциалы $d_k^{r,s}$ равны нулю, потому что, полагая последовательно $k = 2, 3, \dots$, мы получаем, что нижняя строка в диаграмме является изоморфизмом, а верхняя по крайней мере эпиморфизмом. Предложение доказано.

А теперь отметим, что имеет место и соответствующее утверждение для пучка $\mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Всегда выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \dim H^{\text{чет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^2(G, H^{\text{чет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})), \\ \dim H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^2(G, H^{\text{нечет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^{\text{чет}}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})), \end{aligned} \quad (2.8)$$

причем они оба будут равенствами тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (2.6).

Это предложение доказывается так же, как предложение 2.3. Оно было сформулировано в работе [9], но не доказывалось там, так как перед ним было разобрано аналогичное утверждение для пучка $\mathbb{F}_2$. Неравенства (2.8) совпадают с неравенствами (2.5), так как

$$\begin{aligned} H^1(G, H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) &= H^2(G, H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})), \\ H^2(G, H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) &= H^1(G, H^q(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})); \end{aligned}$$

поэтому получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Спектральная последовательность (2.3) вырождается тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (2.6).*

В случае, когда неравенства (2.8) становятся равенствами, мы называли многообразие X $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием; поэтому получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.6. *Спектральная последовательность (2.3) вырождается тогда и только тогда, когда X является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием.*

2.3. Гомоморфизм $\alpha: \text{Br}'(X^{\text{top}}) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))^G$. Если $\mathcal{A}$ – произвольный G -пучок абелевых групп на $X(\mathbb{C})$, то определен канонический гомоморфизм

$$\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})^G.$$

Его можно определить с помощью второй спектральной последовательности

$$\Pi_2^{r,s} = H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}). \quad (2.9)$$

Действительно, имеем вложение

$$\Pi_{\infty}^{q,0} \subset \Pi_2^{q,0} = H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})^G;$$

тогда проекция $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow \Pi_{\infty}^{q,0}$ задает гомоморфизм α . Можно определить этот гомоморфизм по-другому. Для этого рассмотрим резольвенту из инъективных G -пучков

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}^q \rightarrow \dots;$$

тогда по определению имеем равенство

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) = \frac{\text{Ker}[\Gamma^G(\mathcal{A}^q) \rightarrow \Gamma^G(\mathcal{A}^{q+1})]}{\text{Im}[\Gamma^G(\mathcal{A}^{q-1}) \rightarrow \Gamma^G(\mathcal{A}^q)]}.$$

Так как инъективные G -пучки являются просто инъективными пучками (см. [11]), то справедливо еще следующее равенство:

$$H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A}) = \frac{\text{Ker}[\Gamma(\mathcal{A}^q) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^{q+1})]}{\text{Im}[\Gamma(\mathcal{A}^{q-1}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{A}^q)]}.$$

Тогда гомоморфизм α индуцируется вложением $\Gamma^G(\mathcal{A}^q) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{A}^q)$.

ЛЕММА 2.7. *Ядро гомоморфизма $\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})$ состоит из элементов второго порядка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \Gamma^G(\mathcal{A}^q)$ – такой элемент, что $a = \partial b$, где $b \in \Gamma(\mathcal{A}^{q-1})$; тогда $b + g(b) \in \Gamma^G(\mathcal{A}^{q-1})$ и $\partial(b + g(b)) = a + g(a) = 2a$. Это означает, что класс когомологий $[2a]$ равен нулю в $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})$. Лемма доказана.

Заметим, что из первого определения гомоморфизма $\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})$ следует равенство

$$\text{Ker } \alpha = F^{q-1}H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}),$$

где $\{F^k H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})\}$ – фильтрация, которая получается из спектральной последовательности (2.9).

ЛЕММА 2.8. *Пусть группа $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})$ конечно порождена; тогда для каждого простого числа $p \neq 2$ гомоморфизм*

$$\alpha: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})(p) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})^G(p) \quad (2.10)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.7 вытекает мономорфность гомоморфизма (2.10); покажем, что он является эпиморфизмом. Пусть $a \in H^q(X(\mathbb{C}); \mathcal{A})^G(p)$; тогда $d_2^{q,0}(a) = 0$, так как группа $H^2(G, H^{q-1}(X(\mathbb{C}); \mathcal{A}))$ состоит из элементов второго порядка. Продолжая рассуждения, получим равенства $d_k^{q,0}(a) = 0$ при $k \geq 2$. Следовательно, существует элемент $b \in H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})$ такой, что $\alpha(b) = a$. Из леммы 2.7 следует, что $b \in H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})_{\text{tors}}$. Если теперь $b^p \in H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})(p)$ – составляющая b в разложении $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A})_{\text{tors}}$ на p -группы, то $\alpha(b^p) = a$. Лемма доказана.

Положим $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])_{\text{tors}} = \text{Br}'(X(\mathbb{C}))$; эту группу будем называть *группой Брауэра топологического пространства $X(\mathbb{C})$* (см. [1]). Ядро гомоморфизма

$$\alpha: \text{Br}'(X^{\text{top}}) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))$$

обозначим через $\text{Br}'(X^{\text{top}})^0$. Эта группа равна $F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ и состоит из элементов второго порядка.

ТЕОРЕМА 2.9. *Справедливы утверждения:*

1) *для каждого простого числа $p \neq 2$ гомоморфизм*

$$\alpha: \text{Br}'(X^{\text{top}})(p) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(p)$$

является изоморфизмом;

2) *если X является M -многообразием, то точна последовательность*

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 \rightarrow {}_2\text{Br}'(X^{\text{top}}) \xrightarrow{\alpha} {}_2\text{Br}'(X(\mathbb{C})) \rightarrow 0;$$

3) *если X является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -многообразием, то точна последовательность*

$$0 \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{top}})(2) \xrightarrow{\alpha} \text{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(2) \rightarrow 0,$$

причем существует разложение

$$\text{Br}'(X^{\text{top}})(2) = \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 \oplus \text{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(2). \quad (2.11)$$

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из леммы 2.8. Для доказательства второго утверждения рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F^1 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
0 & \longrightarrow & F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) & \longrightarrow & {}_2\mathrm{Br}'(X(\mathbb{C})) \longrightarrow 0
\end{array} \quad (2.12)$$

где δ – гомоморфизм Бокштейна, который получается из точной последовательности G -пучков

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[1] \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}[1] \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0.$$

Второй и третий гомоморфизмы Бокштейна в диаграмме (2.12) являются эпиморфизмами. Так как X является M -многообразием, то верхняя строка в диаграмме (2.12) будет точной последовательностью, поэтому и нижняя строка является точной.

Перейдем к доказательству третьего утверждения теоремы. Точность последовательности в этом утверждении следует из того, что спектральная последовательность (2.3) вырождается для $\mathrm{GM}\mathbb{Z}$ -многообразия. Действительно, если $a \in \mathrm{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(2)$, то из вырождения последовательности (2.3) следует существование элемента $b \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ такого, что $\alpha(b) = a$. Но из лемм 2.7, 2.8 получаем, что $b \in \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})(2)$. Итак, гомоморфизм $\alpha: \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})(2) \rightarrow \mathrm{Br}'(X(\mathbb{C}))^G(2)$ эпиморфен, следовательно, последовательность точна. Для доказательства существования разложения (2.11) нужно показать только, что если $a \in \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0$ – ненулевой элемент, то a нельзя разделить на 2 в $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})(2)$. Для проверки этого факта рассмотрим гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \xrightarrow{\cup \omega} H^{2n+3}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

где ω – образующая группы

$$F^0 H^{2n}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = H^{2n}(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) = \mathbb{F}_2,$$

а $n = \dim X$. Так как гомоморфизм

$$H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \xrightarrow{\cup \omega} H^{r+2n}(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]))$$

является изоморфизмом при $r > 0$, а спектральная последовательность (2.3) вырождается, то гомоморфизм

$$F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \xrightarrow{\cup \omega} H^{2n+3}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \quad (2.13)$$

мономорфен. В силу того, что

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0 = F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

а группа $H^{2n+3}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ состоит из элементов второго порядка, из мономорфности гомоморфизма (2.13) следует, что a нельзя разделить на 2 в $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$. Итак, существование разложения (2.11) доказано. Теорема доказана.

§ 3. Группа Брауэра поверхности

В этом параграфе X – поверхность.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть X – GM-поверхность и группа $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ свободная; тогда $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0$ и выполняется равенство

$$\dim \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = 2s - \log_2 s_a - 1,$$

где s – число компонент связности в $X(\mathbb{R})$, s_a – число компонент связности во множестве вещественных точек многообразия Альбанезе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений следует, что X является GM $\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [8]), поэтому спектральные последовательности (2.3), (2.6) вырождаются. Следовательно, имеем равенства

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0 &= \dim F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \\ &= \dim H^3(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) + \dim H^2(G, H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &\quad + \dim H^1(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &= \sum_{r+s=5} \dim H^r(G, H^s(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &\quad - \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) - \dim H^1(G, H^4(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \\ &= \dim H^{\mathrm{чет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) - \dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) - 1 \\ &= 2s - \log_2 s_a - 1, \end{aligned}$$

так как (см. [8])

$$\dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) / \mathrm{tors}) = \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) = \log_2 s_a.$$

Осталось заметить, что из равенства $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})_{\mathrm{tors}} = 0$ следует равенство

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = \mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}})^0.$$

Предложение доказано.

Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда выполняются равенства

$$F^0 H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) = \mathbb{F}_2.$$

Обозначим через ω образующую этой группы и рассмотрим гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \xrightarrow{\cup \omega} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (3.1)$$

ЛЕММА 3.2. Коядро гомоморфизма (3.1) изоморфно $\mathbb{F}_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из спектральной последовательности (2.3) вытекает, что коядро гомоморфизма (3.1) равно $\Pi_\infty^{1,4}$. Так как

$$\Pi_2^{1,4} = H^1(G, H^4(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) = \mathbb{F}_2,$$

то достаточно показать, что $d_k^{1,4} = 0$ при $k \geq 2$. Для проверки этих равенств рассмотрим гомоморфизм спектральных последовательностей

$$\Pi_k^{r,s}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]) \rightarrow \Pi_k^{r,s}(\tilde{X}(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]), \quad (3.2)$$

где $\tilde{X}(\mathbb{C})$ получается из $X(\mathbb{C})$ с помощью выбрасывания вещественной точки, а гомоморфизм (3.2) есть гомоморфизм ограничения. Если $k = 2$ и $s = 4$, то гомоморфизм (3.2) нулевой, а если $k = 2$ и $s \neq 4$, то он является изоморфизмом. Следовательно, $d_2^{r,4} = 0$. Продолжая это рассуждение, получим равенства $d_k^{r,4} = 0$ при $k \geq 2$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ – конечная группа; тогда выполняется неравенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X^{\text{top}}) \geq 2s - 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ – конечная группа, то группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ также конечная. Это вытекает из рассмотрения спектральной последовательности (2.3). Поэтому имеет место равенство

$$\text{Br}'(X^{\text{top}}) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (3.4)$$

Так как

$$H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^{\text{чет}}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2),$$

то благодаря равенству (3.4) и лемме 3.2 из гомоморфизма (3.1) получаем следующий эпиморфизм:

$$\text{Br}'(X^{\text{top}}) \xrightarrow{\cup \omega} (\mathbb{F}_2)^{2s-1},$$

который индуцирует эпиморфизм

$$\text{Br}'(X^{\text{top}})(2) \xrightarrow{\cup \omega} (\mathbb{F}_2)^{2s-1}. \quad (3.5)$$

Если имеем разложение

$$\text{Br}'(X^{\text{top}})(2) = \mathbb{Z}_{2^{r_1}} \oplus \mathbb{Z}_{2^{r_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2^{r_m}},$$

где $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m \geq 1$, то эпиморфность гомоморфизма (3.5) влечет неравенство $m \geq 2s - 1$. Осталось заметить, что $\dim_2 \text{Br}'(X^{\text{top}}) = m$. Теорема доказана.

Возникает вопрос: когда неравенство (3.3) становится равенством?

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхность X такая, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ – конечная группа и инволюция $g^*: \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2)$ тривиальна; тогда выполняется равенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X^{\text{top}}) = 2s - 1. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X является $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхностью и инволюция $g^*: \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2) \rightarrow \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2)$ тривиальна, то гомоморфизм (3.1) индуцирует следующую коммутативную диаграмму из точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \text{Br}'(X^{\text{top}})^0 & \longrightarrow & \text{Br}'(X^{\text{top}})(2) & \xrightarrow{\alpha} & \text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2) & \longrightarrow 0 \\ & \cong \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & F^2 H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \longrightarrow & (\mathbb{F}_2)^{2s-1} & \longrightarrow & \Pi_2^{2,3} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Первый вертикальный гомоморфизм в ней – изоморфизм, а последний является эпиморфизмом, ядро которого равно $2(\text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2))$. Так как гомоморфизм $\alpha: 2(\text{Br}'(X^{\text{top}})(2)) \rightarrow 2(\text{Br}'(X(\mathbb{C}))(2))$ является изоморфизмом в силу разложения (2.11), то в итоге получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow 2(\text{Br}'(X^{\text{top}})(2)) \rightarrow \text{Br}'(X^{\text{top}})(2) \xrightarrow{\cup \omega} (\mathbb{F}_2)^{2s-1} \rightarrow 0,$$

из которой следует равенство (3.6). Теорема доказана.

Применить эту теорему затруднительно, так как в случае $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})_{\text{tors}} \neq 0$ нет достаточных условий для того, чтобы X была $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхностью. Мы приведем еще другую теорему, но сначала будет доказана

ЛЕММА 3.5. Пусть гомоморфизм

$$H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{F}_2),$$

индуцированный вложением $X(\mathbb{R}) \subset Y$, эпиморфен; тогда гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cup \omega} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$$

мономорфен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow{\beta} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) \\ \downarrow R & & \downarrow R \\ H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \end{array}$$

Гомоморфизмы β в ней – это гомоморфизмы ограничения, они являются изоморфизмами (см. предложение 2.3). Гомоморфизмы R в ней – это гомоморфизмы редукции по $\text{mod } 2$, правый из них является вложением (см. [6]), поэтому и левый гомоморфизм мономорфен.

Рассмотрим еще одну коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc}
H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \otimes \mathbb{F}_2 & \xrightarrow{\cup \omega} & H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \\
\downarrow R & & \downarrow R \\
H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup \omega} & H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \\
\downarrow \beta & & \cong \downarrow \beta \\
H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\cup \tilde{\omega}} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \\
\parallel & & \parallel \\
\bigoplus_{q=0}^3 H^q(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) & = & \bigoplus_{q=0}^5 H^q(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)
\end{array}$$

где $\tilde{\omega} = \beta(\omega) \in H^2(G, H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z})) = H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$. Элемент $\tilde{\omega}$ равен сумме образующих $H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$, соответствующих компонентам. Умножение на $\tilde{\omega}$ задает мономорфизм, так как на разложениях это каноническое вложение прямой суммы. Из этой диаграммы видно, что верхний гомоморфизм будет мономорфизмом, если мономорфен гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2), \quad (3.7)$$

проверкой чего мы сейчас займемся. Для этого рассмотрим гомоморфизм первых спектральных последовательностей

$$I_k^{r,s}(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} I_k^{r,s}(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2).$$

Так как спектральная последовательность $I(X(\mathbb{R}))$ вырождается, а также

$$I_2^{r,s}(X(\mathbb{C})) = I_2^{r,s}(X(\mathbb{R})) = H^r(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \quad \text{при } s > 0,$$

то гомоморфизмы $\beta: I_\infty^{r,s}(X(\mathbb{C})) \rightarrow I_\infty^{r,s}(X(\mathbb{R}))$ являются мономорфизмами при $s > 0$. Покажем теперь, что $I_\infty^{3,0}(X(\mathbb{C})) = 0$. Это следует из того, что дифференциал

$$d_2^{1,1}: I_2^{1,1}(X(\mathbb{C})) \rightarrow I_2^{3,0}(X(\mathbb{C}))$$

совпадает с гомоморфизмом Гизина (см. [6])

$$H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{F}_2),$$

который по предположению эпиморфен. Итак, мы получили мономорфность гомоморфизмов

$$\beta: I_\infty^{r,s}(X(\mathbb{C})) \rightarrow I_\infty^{r,s}(X(\mathbb{R}))$$

при $r + s = 3$. Следовательно, гомоморфизм (3.7) также мономорфен. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, гомоморфизм $H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{F}_2)$ эпиморфен; тогда выполняется неравенство

$$\dim {}_2\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) \leq 2s - 1. \quad (3.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.5 следует, что гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cup \omega} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) / \Pi_{\infty}^{1,4} = (\mathbb{F}_2)^{2s-1}$$

является мономорфизмом; поэтому мономорфен гомоморфизм

$$\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cup \omega} (\mathbb{F}_2)^{2s-1}, \quad (3.9)$$

так как $\mathrm{Br}'(X^{\mathrm{top}}) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])_{\mathrm{tors}}$. Из мономорфности гомоморфизма (3.9) следует неравенство (3.8). Теорема доказана.

Мы хотим доказать теорему, которая дает оценку снизу размерности 2-кручения всей группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$, причем предположений на X не делается. Прежде чем ее сформулировать, сделаем несколько замечаний.

Рассмотрим точную последовательность Куммера G -пучков на $X(\mathbb{C})$:

$$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow \mathcal{O}^* \xrightarrow{\times 2} \mathcal{O}^* \rightarrow 1.$$

Из нее получается точная последовательность групп

$$0 \rightarrow (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow {}_2\mathrm{Br}'(X) \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

Будем отождествлять группу $(\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2$ с ее образом в $H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$; тогда гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

индуцирует следующий гомоморфизм:

$$\beta: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2). \quad (3.11)$$

Рассмотрим теперь отображение цикла

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}: \mathrm{Pic} X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2),$$

которое устроено следующим образом. Если V – неприводимая кривая на X и $\dim V(\mathbb{R}) = 1$, то $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(V) = [V(\mathbb{R})]^*$ – двойственный класс когомологий, в противном случае $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}(V) = 0$. Гомоморфизм $\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}$ спускается на $(\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2$, т.е. имеем гомоморфизм

$$\mathrm{cl}_{\mathbb{R}}: (\mathrm{Pic} X) \otimes \mathbb{F}_2 \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2).$$

ЛЕММА 3.7. *Гомоморфизм (3.11) совпадает с композицией гомоморфизмов $Sq \circ cl_{\mathbb{R}}$, где Sq – полный квадрат Стинрода.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму из G -пучков

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[1] & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{O}^* \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \times \frac{1}{2} & & \downarrow \times \frac{1}{2} & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \longrightarrow & \mathcal{O} & \xrightarrow{e_2} & \mathcal{O}^* \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \exp & & \downarrow \exp & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \mu_2 & \longrightarrow & \mathcal{O}^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^* \longrightarrow 1,
 \end{array} \tag{3.12}$$

где $e_2(f) = e^{2f}$. Гомоморфизм

$$\delta: \text{Pic } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

который получается из верхней точной строки, совпадает с эквивариантным отображением цикла (см. [10])

$$cl: \text{Pic } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]).$$

Гомоморфизм

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_2) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

который получается из левого столбца диаграммы (3.12), совпадает с гомоморфизмом редукции по mod 2. Поэтому гомоморфизм

$$\delta: \text{Pic } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_2),$$

который получается из нижней строки диаграммы (3.12), совпадает с композицией гомоморфизма cl и редукции по mod 2. Но композиция гомоморфизмов cl , редукции и ограничения

$$\text{Pic } X \xrightarrow{cl} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta} H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

совпадает с композицией $Sq \circ cl$ (см. [6]). Лемма доказана.

Образ гомоморфизма

$$cl_{\mathbb{R}}: \text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

будем обозначать через $H_a^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ и называть *алгебраической группой когомологий*. Размерность этого пространства обозначим через $b_a^1(X(\mathbb{R}))$. Через κ_n обозначим размерность ядра гомоморфизма

$$H_n(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_n(Y; \mathbb{F}_2).$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 3.8. *Всегда выполняется неравенство*

$$\dim_2 \text{Br}'(X) \geq 2s - \varkappa_2 + \varkappa_1 - b_a^1,$$

которое становится равенством для M -поверхности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

к точной последовательности (3.10); тогда получим неравенство

$$\dim_2 \text{Br}'(X) \geq \dim \text{Im } \beta - \dim \text{Im}(\beta|_{(\text{Pic } X) \otimes \mathbb{F}_2}), \quad (3.13)$$

которое будет равенством, если β является мономорфизмом. Для M -поверхности β – мономорфизм (см. [10]), поэтому для M -поверхности неравенство (3.13) становится равенством. Так как полный квадрат Стиррода Sq обратим, то из леммы 3.7 вытекает равенство

$$\dim \text{Im}(\beta|_{(\text{Pic } X) \otimes \mathbb{F}_2}) = b_a^1.$$

Следовательно, нам достаточно доказать равенство

$$\dim \text{Im } \beta = 2s - \varkappa_2 + \varkappa_1. \quad (3.14)$$

Для доказательства этого равенства рассмотрим первую спектральную последовательность

$$I_2^{r,s}(X(\mathbb{C})) = H^r(Y; \mathcal{H}^s(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Заметим, что

$$\mathcal{H}^s(G, \mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{при } s = 0, \\ \mathbb{F}_2|_{X(\mathbb{R})} & \text{при } s > 0, \end{cases}$$

а дифференциалы $d_k^{r,s}$ устроены следующим образом. Дифференциалы $d_2^{0,1}, d_2^{1,1}, d_2^{2,1}$ совпадают с гомоморфизмами Гизина для вложения $X(\mathbb{R}) \subset Y$, а остальные дифференциалы равны нулю (см. [6]). Таким образом, получаем равенства

$$\begin{aligned} I_\infty^{2,0}(X(\mathbb{C})) &= H^2(Y; \mathbb{F}_2)/j^*(H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)), \\ I_\infty^{1,1}(X(\mathbb{C})) &= \text{Ker}[j^*: H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{F}_2)], \\ I_\infty^{0,2}(X(\mathbb{C})) &= H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где j^* – гомоморфизм Гизина. Рассмотрим теперь первую спектральную последовательность для $X(\mathbb{R})$:

$$I_2^{r,s}(X(\mathbb{R})) = H^r(X(\mathbb{R}); \mathcal{H}^s(G, \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{r+s}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2).$$

Эта спектральная последовательность вырождается, поэтому имеем равенства

$$\begin{aligned} I_\infty^{2,0}(X(\mathbb{R})) &= H^2(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2), \\ I_\infty^{1,1}(X(\mathbb{R})) &= H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2), \\ I_\infty^{0,2}(X(\mathbb{R})) &= H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из равенств (3.15), (3.16) получаем следующее равенство:

$$\dim \text{Im } \beta = \dim \text{Im}(\beta|_{I_\infty^{2,0}(X(\mathbb{C}))}) + \dim I_\infty^{1,1}(X(\mathbb{C})) + s. \quad (3.17)$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \dim I_\infty^{1,1}(X(\mathbb{C})) &= \dim \text{Ker}\{j^*: H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{F}_2)\} = \varkappa_1, \\ \dim(\beta|_{I_\infty^{2,0}(X(\mathbb{C}))}) &= s - \dim \text{Coker}[\beta: H^2(Y; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)] = s - \varkappa_2. \end{aligned}$$

Поэтому из равенства (3.17) получаем равенство (3.14). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда имеет место равенство

$$\varkappa_2 = \dim H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)^G - \dim H^1(Y; \mathbb{F}_2) + 1.$$

Действительно, рассмотрим точную последовательность, которую дают первые члены спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}))$:

$$0 \rightarrow H^1(Y; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j^*} H^2(Y; \mathbb{F}_2);$$

тогда получим равенство

$$\varkappa_2 = \dim \operatorname{Ker} j^* = \dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) - \dim H^1(Y; \mathbb{F}_2).$$

Осталось заметить, что из второй спектральной последовательности вытекает равенство

$$\dim H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \dim H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)^G + 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Выполняется неравенство $\varkappa_1 \geq b_a^1$. Оно следует из того, что образ отображения цикла

$$\operatorname{cl}_{\mathbb{R}}: \operatorname{Pic} X \rightarrow H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$$

содержится в ядре гомоморфизма $H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y; \mathbb{F}_2)$. Действительно, если V – неприводимая кривая на X , то $V(\mathbb{C})/G$ – двумерная цепь в Y , граница которой равна $V(\mathbb{R})$.

§ 4. Группа Брауэра поверхности Энриквеса

В этом параграфе X – вещественная поверхность Энриквеса. Сначала мы сформулируем несколько простых фактов о таких поверхностях. Часть из них приведем без доказательства, для более сложных приведем краткое доказательство; соответствующие утверждения сведены в лемму 4.1. Подробности можно посмотреть в [4], [5].

Фундаментальная группа $\pi_1(X(\mathbb{C}))$ равна $\mathbb{Z}_2$. Пусть θ – образующая группы $H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$; тогда ограничение ее на $X(\mathbb{R})$ равно $w_1(X(\mathbb{R}))$. Если $\pi: W \rightarrow X(\mathbb{C})$ – универсальное накрытие, то оно двухлистно. Поверхность W является комплексной алгебраической КЗ-поверхностью с двумя вещественными структурами, $g': W \rightarrow W$, $g'': W \rightarrow W$, накрывающими вещественную структуру $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то группа $\pi_1(Y)$ равна 0 или $\mathbb{Z}_2$, так как тогда гомоморфизм $f_*: \pi_1(X(\mathbb{C})) \rightarrow \pi_1(Y)$ эпиморфен. Если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то отображение $f \circ \pi: W \rightarrow Y$ является универсальным накрытием. Группа монодромии этого накрытия порождена инволюциями g' , g'' , которые коммутируют; следовательно, в этом случае $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Положим $W^{g'} = V'$, $W^{g''} = V''$; тогда множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$ разбивается на две части: $X(\mathbb{R})' = \pi(V')$, $X(\mathbb{R})'' = \pi(V'')$, одна из которых может быть пустой. Пусть

$$X(\mathbb{R})' = X_1 \cup \dots \cup X_m, \quad X(\mathbb{R})'' = X_{m+1} \cup \dots \cup X_n, \quad V_i = \pi^{-1}(X_i);$$

тогда отображение $\pi: V_i \rightarrow X_i$ является двухлистным накрытием, которое устроено следующим образом. Если X_i – ориентируемая поверхность, то над X_i лежат два экземпляра X_i . Если X_i – неориентируемая поверхность, то отображение $\pi: V_i \rightarrow X_i$ является ориентирующим накрытием. Все эти факты нетрудно установить, если описать накрытие $\pi: W \rightarrow X(\mathbb{C})$ следующим образом. Пусть K – каноническое расслоение на X ; тогда расслоение $K^{\otimes 2}$ тривиально. Возьмем ненулевое вещественное сечение $h(x)$ расслоения $K^{\otimes 2}(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$; тогда поверхность W задается уравнением $w^2 = h(x)$, где w – переменная точка $K(\mathbb{C})$. Множества V', V'' равны $K(\mathbb{R}) \cap W$, $iK(\mathbb{R}) \cap W$ соответственно.

Теперь мы хотим доказать несколько фактов о числах $\varkappa_1, \varkappa_2$. Итак, если $b_1 = \dim H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$, то имеет место

ЛЕММА 4.1. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда справедливы утверждения:

- 1) число $\varkappa_2$ может равняться 1 или 2;
- 2) $\varkappa_2 = 1 \iff H_1(Y; \mathbb{Z}) \neq 0$;
- 3) $\varkappa_2 = 1 \iff$ одно из множеств $X(\mathbb{R})', X(\mathbb{R})''$ пустое;
- 4) число $\varkappa_1$ может равняться b_1 или $b_1 - 1$;
- 5) $\varkappa_1 = b_1 - 1 \iff X(\mathbb{R})$ – неориентируемая поверхность и одно из множеств $X(\mathbb{R})', X(\mathbb{R})''$ пустое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Два первых утверждения следуют из замечания 3.9, так как $H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, а гомоморфизм $\pi^*: H^1(Y; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ мономорфен.

Перейдем к доказательству третьего утверждения. Если $X(\mathbb{R})' = \emptyset$, то отображение $\pi: W/g'' \rightarrow Y$ является двухлистным накрытием без ветвления; поэтому $\pi_1(Y) = H_1(Y; \mathbb{Z}) \neq 0$, следовательно, $\varkappa_2 = 1$. Если оба множества $X(\mathbb{R})', X(\mathbb{R})''$ непустые, то классы гомологий $[X(\mathbb{R})'], [X(\mathbb{R})'']$ в Y равны нулю, так как отображения $W/g' \rightarrow X(\mathbb{C})/g$, $W/g'' \rightarrow X(\mathbb{C})/g$ являются двухлистными накрытиями Y с ветвлением вдоль $X(\mathbb{R})'', X(\mathbb{R})'$ соответственно. Итак, если множества $X(\mathbb{R})', X(\mathbb{R})''$ непустые, то $\varkappa_2 = 2$. Третье утверждение доказано.

Четвертое утверждение очевидно, пятое утверждение следует из того факта, что ограничение образующей $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ равно $w_1(X(\mathbb{R}))$. Лемма доказана.

Пусть $\tilde{\mathbb{Z}} = f_*(\mathbb{Z}[1])$; тогда образ гомоморфизма $e + g^*: \tilde{\mathbb{Z}} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}$ равен $\tilde{\mathbb{Z}}^G$, а ядро изоморфно $\mathbb{Z}_Y$. Следовательно, имеем точную последовательность пучков на Y

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}} \xrightarrow{e+g^*} \tilde{\mathbb{Z}}^G \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

ЛЕММА 4.2. Гомоморфизм

$$e + g^*: H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}) \rightarrow H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Тогда $H^3(Y; \mathbb{Z}) = (\mathbb{F}_2)^2$, так как $\pi_1(Y) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Покажем сначала, что $H^4(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) = \mathbb{F}_2$. Это следует из точной последовательности когомологий, полученной из (4.1):

$$\begin{array}{ccccccc} H^4(Y; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^4(Y; \tilde{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H^4(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & 0 \\ \parallel & & \parallel & & & & \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & & & & \end{array}$$

так как гомоморфизм $H^4(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(Y; \tilde{\mathbb{Z}})$ совпадает с гомоморфизмом $f^*: H^4(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Из точной последовательности когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} H^3(Y; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & & & \\ & & \mathbb{F}_2 & & & & \end{array} \quad (4.2)$$

которая также получается из (4.1), следует, что группа $H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G)$ равна или 0, или $\mathbb{F}_2$, причем если $H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) = \mathbb{F}_2$, то лемма в этом случае доказана.

Покажем, что $H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \neq 0$. Из точной последовательности редукции

$$0 \rightarrow \tilde{\mathbb{Z}}^G \xrightarrow{\times 2} \tilde{\mathbb{Z}}^G \rightarrow \mathbb{F}_2 \rightarrow 0$$

получаем точную последовательность когомологий

$$\begin{array}{ccccccc} H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & H^3(Y; \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^4(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & (\mathbb{F}_2)^2 & & \mathbb{F}_2 & & \end{array}$$

из которой следует, что $H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \neq 0$. Итак, в случае, когда $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, лемма доказана. Пусть теперь $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Из точной последовательности (4.2), которая имеет место и в этом случае, видно, что достаточно установить обращение в нуль гомоморфизма $H^3(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}})$. Заметим, что этот гомоморфизм совпадает с гомоморфизмом

$$f^*: H^3(Y; \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}). \quad (4.3)$$

Пусть $H^3(Y; \mathbb{Z}) \neq 0$; тогда $H^3(Y; \mathbb{Z}) = H^3(Y; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$. Если ω^1, ω^3 — образующие групп $H^1(Y; \mathbb{F}_2)$, $H^3(Y; \mathbb{F}_2)$, то $f^*(\omega^1) \neq 0$, $f^*(\omega^1 \cdot \omega^3) = 0$, $\omega^1 \cdot \omega^3 \neq 0$. Следовательно, $f^*(\omega^3) = 0$, т.е. гомоморфизм

$$f^*: H^3(Y; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

нулевой. Так как $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) = H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{F}_2$, то гомоморфизм (4.3) также нулевой. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. Пусть $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность; тогда дифференциал

$$d_2^{1,1}: H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \quad (4.4)$$

из спектральной последовательности $I(\mathbb{Z}[1])$ равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – трубчатая окрестность $X(\mathbb{R})$ в $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно инволюции g , $U^* = U \setminus X(\mathbb{R})$. Покажем, что тогда гомоморфизм

$$H^3(U/G, U^*/G; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \rightarrow H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \quad (4.5)$$

равен нулю. Для этого рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\times 2} & H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) & & \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ H^3(U/G, U^*/G; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(U/G, U^*/G; \tilde{\mathbb{Z}}) & \longrightarrow & H^3(U/G, U^*/G; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ H^3(Y; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}) & \xrightarrow{\sim} & H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & & \\ & & \parallel & & & & \\ & & H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2) & & & & \end{array}$$

которая получается из точной последовательности пучков (4.1). Если теперь отождествить группу $H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G)$ с группой $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$, а группу $H^3(U/G, U^*/G; \tilde{\mathbb{Z}}^G)$ с группой $H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2)$ согласно верхней точной строке диаграммы, то из нее получаем, что гомоморфизм (4.5) совпадает с гомоморфизмом Гизина

$$H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2),$$

который равен нулю, так как ограничение образующей $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ на $X(\mathbb{R})$ равно $w_1(X(\mathbb{R})) = 0$.

Осталось рассмотреть следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) & \xlongequal{\quad} & H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \\ \downarrow d_2^{1,1} & & \downarrow d_2^{1,1} \\ H^3(U/G, U^*/G; \tilde{\mathbb{Z}}^G) & \longrightarrow & H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) \end{array}$$

Лемма доказана.

Прежде чем сформулировать теорему о группе Брауэра поверхности Энриквеса, мы сделаем несколько замечаний о вторых спектральных последовательностях (2.6), (2.3). Если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то дифференциалы $d_k^{r,k-1}$, $d_k^{r,4}$ равны нулю для любой поверхности. Это проверяется с помощью гомоморфизмов ограничения спектральных последовательностей:

$$\Pi(X(\mathbb{C})) \rightarrow \Pi(\{x_0\}), \quad \Pi(X(\mathbb{C})) \rightarrow \Pi(\tilde{X}(\mathbb{C})),$$

где x_0 – вещественная точка, $\tilde{X}(\mathbb{C}) = X(\mathbb{C}) \setminus \{x_0\}$ (см. [9], а также доказательство леммы 3.2). Так как для поверхности Энриквеса $H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = 0$, то для нее дифференциалы $d_k^{r,k}$ также равны нулю. Если теперь применить соображения размерности, то видно, что ненулевыми могут быть только дифференциалы $d_2^{r,3}$. Из периодичности по r спектральных последовательностей с периодом 2 видно, что достаточно знать дифференциалы $d_2^{0,3}$, $d_2^{1,3}$, т.е. гомоморфизмы

$$d_2^{0,3}: H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})), \quad (4.6)$$

$$d_2^{1,3}: H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})) \rightarrow H^3(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})), \quad (4.7)$$

$$d_2^{0,3}: H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])), \quad (4.8)$$

$$d_2^{1,3}: H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) \rightarrow H^3(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])). \quad (4.9)$$

Пусть ω_1 – образующая группы

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^1(G, H^0(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) = \mathbb{F}_2;$$

тогда умножение на ω_1 отождествляет гомоморфизм (4.6) с гомоморфизмом (4.9), а гомоморфизм (4.8) с гомоморфизмом (4.7). Рассмотрим теперь отображения

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}), \quad (4.10)$$

$$\cup \omega: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}), \quad (4.11)$$

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]), \quad (4.12)$$

$$\cup \omega: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (4.13)$$

Отображения (4.10), (4.12) будут эпиморфизмами тогда и только тогда, когда равны нулю соответственно дифференциалы (4.6), (4.8). Отображения (4.11), (4.13) будут мономорфизмами тогда и только тогда, когда равны нулю соответственно дифференциалы (4.7), (4.9). Следовательно, эпиморфность отображений (4.10), (4.12) равносильна мономорфности соответственно отображений (4.13), (4.11).

ЛЕММА 4.4. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда справедливы утверждения:

- 1) если $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность и одно из множеств $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ пустое, то все дифференциалы (4.6)–(4.9) не равны нулю;
- 2) если $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность и оба множества $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ непустые, то дифференциалы (4.7), (4.8) нулевые, а дифференциалы (4.6), (4.9) не равны нулю;
- 3) если $X(\mathbb{R})$ – неориентируемая поверхность, то все дифференциалы (4.6)–(4.9) равны нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала поверхность $X(\mathbb{R})$ ориентируемая; тогда потребуются еще следующие отображения когомологий:

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}), \quad (4.14)$$

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]). \quad (4.15)$$

Они связаны с отображениями (4.11), (4.13) коммутативными диаграммами

$$\begin{array}{ccc} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\cup\omega} & H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \\ \downarrow \beta & & \cong \downarrow \beta \\ H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) & \xrightarrow[\sim]{\cup\tilde{\omega}} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) \end{array} \quad (4.16)$$

$$\begin{array}{ccc} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow{\cup\omega} & H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \\ \downarrow \beta & & \cong \downarrow \beta \\ H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) & \xrightarrow[\sim]{\cup\tilde{\omega}} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) \end{array} \quad (4.17)$$

Покажем теперь, что гомоморфизм (4.14) немономорфен тогда и только тогда, когда одно из множеств $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ пустое. Рассмотрим в связи с этим гомоморфизм ограничения спектральных последовательностей $I(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow I(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$; тогда увидим, что гомоморфизм (4.14) будет мономорфным только в том случае, если $I_{\infty}^{3,0}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = 0$. Если оба множества $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ непустые, то по лемме 4.1 $H^3(Y; \mathbb{Z}) = 0$, следовательно, $I_{\infty}^{3,0}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = 0$. Если одно из множеств $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ пустое, то $H^3(Y; \mathbb{Z}) = \mathbb{F}_2$; поэтому нужно показать, что в этом случае дифференциалы

$$d_2^{1,1}: H^1(Y; \mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z})) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{Z}), \quad (4.18)$$

$$d_3^{2,0}: H^0(Y; \mathcal{H}^2(G, \mathbb{Z})) \rightarrow I_3^{3,0}(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \quad (4.19)$$

равны нулю. Так как $\mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$, то для дифференциала (4.18) это очевидно. Из равенства $\mathcal{H}^2(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{F}_2|_{X(\mathbb{R})}$ получаем, что дифференциал (4.19) задает отображение

$$d_3^{2,0}: H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{Z}). \quad (4.20)$$

Чтобы убедиться в обращении его в нуль, рассмотрим гомоморфизм редукции спектральных последовательностей $I(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow I(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$. Для спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ гомоморфизм $d_2^{1,1}$ совпадает с гомоморфизмом Гизина (см. [6])

$$j^*: H^1(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y; \mathbb{F}_2),$$

который равен нулю, так как ограничение образующей $\theta \in H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ на $X(\mathbb{R})$ равно $w_1(X(\mathbb{R})) = 0$. Другой дифференциал

$$d_3^{2,0}: H^0(X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow I_3^{3,0}(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$$

всегда равен нулю. Из этих фактов и равенства $H^3(Y, \mathbb{Z}) = H^3(Y; \mathbb{F}_2)$ получаем, что и дифференциал (4.20) равен нулю.

Итак, утверждение о гомоморфизме (4.14) доказано. Из диаграммы (4.16) получаем аналогичное утверждение о гомоморфизме (4.11), а оно означает, что для ориентируемой поверхности дифференциалы (4.7), (4.8) устроены так, как говорится в лемме.

Теперь покажем, что для ориентируемой поверхности дифференциалы (4.6), (4.9) всегда равны нулю. Для этого рассмотрим гомоморфизм (4.15) и с помощью лемм 4.2, 4.3 убедимся в том, что он неоморфен. Из диаграммы (4.17) вытекает аналогичное утверждение для гомоморфизма (4.13), из которого следует, что дифференциалы (4.6), (4.9) не равны нулю. Итак, случай ориентируемой поверхности полностью разобран.

Для неориентируемой поверхности мы покажем, что гомоморфизмы (4.10), (4.12) эпиморфны; этого будет достаточно для окончания доказательства леммы. Чтобы установить этот факт, возьмем кривую Γ на $X(\mathbb{R})$, которая задает класс гомотопий $[\Gamma]$ в $H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$, имеющий второй порядок. Этой кривой мы сопоставим два эквивариантных класса когомологий:

$$[\Gamma, g]^* \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}), \quad \{\Gamma, g\}^* \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

таких, что $\alpha([\Gamma, g]^*)$, $\alpha(\{\Gamma, g\}^*)$ — образующие групп $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$, $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])$; поэтому получим эпиморфность гомоморфизмов (4.10), (4.12). Класс $[\Gamma, g]^*$ определяется следующим образом. Кривая Γ определяет класс когомологий $[\Gamma]_0^* \in H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus \Gamma; \mathbb{Z})$.

Гомоморфизм

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus \Gamma; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus \Gamma; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом. Это следует из рассмотрения второй спектральной последовательности. Поэтому определен класс когомологий

$$[\Gamma, g]_0^* = \alpha^{-1}([\Gamma]_0^*) \in H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus \Gamma; G, \mathbb{Z}).$$

Образ его при гомоморфизме

$$H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus \Gamma; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$$

дает требуемый класс $[\Gamma, g]^*$. Действительно, по построению имеем равенство $\alpha([\Gamma, g]^*) = [\Gamma]^*$, а класс когомологий $[\Gamma]^* \in H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$ не равен нулю, так как если θ — образующая $H^1(X(\mathbb{C}); \mathbb{F}_2)$, то $\theta(\Gamma) = w_1(X(\mathbb{R}))(\Gamma) \neq 0$ в силу выбора кривой Γ .

Перейдем к построению второго эквивариантного класса когомологий. Так как класс гомотопий $[\Gamma] \in H_1(X(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$ имеет второй порядок, то соответствующий класс когомологий

$$\{\Gamma\}_0^* \in H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R}); \mathbb{Z})$$

также имеет второй порядок. Следовательно, он принадлежит группе $H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}[1])^G$. Гомоморфизм

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R}); \mathbb{Z}[1])^G$$

эпиморфен. Это следует из рассмотрения второй спектральной последовательности. Возьмем один из прообразов $\{\Gamma\}_0^*$ при отображении α и обозначим его через $\{\Gamma, g\}_0^*$. Образ $\{\Gamma, g\}_0^*$ при гомоморфизме

$$H^3(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{C}) \setminus X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$$

дает требуемый класс $\{\Gamma, g\}^*$. Это проверяется так же, как для класса $[\Gamma, g]^*$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть X – вещественная поверхность Энриквеса; тогда справедливы утверждения:

- 1) если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то $\text{Br}'(X) = \mathbb{Z}_2$;
- 2) если $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность и одно из множеств $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ пустое, то $\text{Br}'(X) = (\mathbb{Z}_2)^{2s}$;
- 3) если $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность и оба множества $X(\mathbb{R})'$, $X(\mathbb{R})''$ непустые, то $\text{Br}'(X) = (\mathbb{Z}_2)^{2s-2} \oplus \mathbb{Z}_4$;
- 4) если $X(\mathbb{R})$ – неориентируемая поверхность, то $\text{Br}'(X) = (\mathbb{Z}_2)^{2s-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что

$$\text{Br}'(X) = H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]),$$

так как $\rho_0(X) = 0$ и группа $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z})$ конечная. Если $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, то из первой спектральной последовательности выводится равенство

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G).$$

Применим лемму 4.2; тогда получим равенства

$$H^3(Y; \tilde{\mathbb{Z}}^G) = H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2.$$

Итак, первое утверждение доказано. Пусть теперь $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда рассмотрим эпиморфизм из § 3:

$$\cup \omega: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^{2s-1}, \quad (4.21)$$

а также дифференциалы

$$\begin{aligned} d_2^{0,3}: H^0(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) &\rightarrow H^2(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])), \\ d_2^{1,3}: H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])) &\rightarrow H^3(G, H^2(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])). \end{aligned}$$

В условиях второго утверждения оба эти дифференциала ненулевые в силу леммы 4.4. Из того, что дифференциал $d_2^{0,3}$ не равен нулю, получаем равенство

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = F^2 H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]).$$

Следовательно, группа $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1])$ состоит из элементов второго порядка. Из того, что дифференциал $d_2^{1,3}$ не равен нулю, следует, что ядро эпиморфизма (4.21) равно $\mathbb{Z}_2$. В итоге получаем равенство

$$\text{Br}'(X) = (\mathbb{Z}_2)^{2s}.$$

Итак, второе утверждение доказано. В условиях третьего утверждения дифференциал $d_2^{0,3}$ равен нулю, а дифференциал $d_2^{1,3}$ не равен нулю. Отсюда следует, что возможны два случая:

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}[1]) = (\mathbb{Z}_2)^{2s}, \quad (\mathbb{Z}_2)^{2s-2} \oplus \mathbb{Z}_4.$$

Но первый случай невозможен согласно лемме 3.5. Следовательно, третье утверждение доказано. В условиях четвертого утверждения оба дифференциала равны нулю. Из того, что $d_2^{1,3} = 0$, получаем мономорфность эпиморфизма (4.21), поэтому

$$\text{Br}'(X) = (\mathbb{Z}_2)^{2s-1}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Рассмотрим отображение

$$\alpha: \mathrm{Br}'(X) \rightarrow \mathrm{Br}'(\overline{X}). \quad (4.22)$$

Группа $\mathrm{Br}'(\overline{X})$ равна $H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1])$, т.е. $\mathbb{Z}_2$. Это устанавливается так же, как соответствующее равенство для группы $\mathrm{Br}'(X)$. В условиях первого утверждения теоремы 4.5 гомоморфизм (4.22) равен нулю, так как согласно лемме 4.2 он совпадает с гомоморфизмом

$$e + g^*: H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); \mathbb{Z}[1]).$$

В условиях второго утверждения теоремы гомоморфизм (4.22) также равен нулю, так как дифференциал $d_2^{0,3}$ ненулевой. В условиях третьего утверждения теоремы гомоморфизм (4.22) эпиморфен, причем образующая подгруппы $\mathbb{Z}_4$ переходит в образующие группы $\mathrm{Br}'(\overline{X})$, так как ядро гомоморфизма α состоит из элементов второго порядка. В условиях четвертого утверждения теоремы гомоморфизм α также эпиморфен.

Список литературы

1. *Grothendick A.* Le groupe de Brauer // Dix Exposes sur la Cohomologie des Schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
2. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
3. *Colliot-Thélène J.-L., Parimala R.* Real components of algebraic varieties and etale cohomology // Invent. math. 1990. V. 101. P. 81–99.
4. *Nikulin V. V., Sujatha R.* On Brauer group of real Enriques surfaces // J. reine angew. Math. 1993. V. 444. P. 115–154.
5. *Nikulin V. V.* On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic geometry and its applications. Yaroslavl', 1992. P. 114–136.
6. *Краснов В. А.* Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №3. С. 36–52.
7. *Бальдассарри М.* Алгебраические многообразия. М.: ИЛ, 1961.
8. *Краснов В. А.* Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 82. №3. С. 365–374.
9. *Краснов В. А.* Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. №2. С. 268–297.
10. *Краснов В. А.* Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №4. С. 716–746.
11. *Гротендик А.* О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.

Поступило в редакцию
11.IV.1995