Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Лысенко, О функциональном уравнении $f(p(z)) = g(q(z))$, где p, q – “обобщенные” многочлены и f, g – мероморфные функции, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 89–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 15:34:48

УДК 517.5

С. А. Лысенко

О функциональном уравнении $f(p(z)) = g(q(z))$, где p, q – “обобщенные” многочлены и f, g – мероморфные функции

Находим все решения уравнения $f(p(z)) = g(q(z))$, где p, q – многочлены и f, g – трансцендентные мероморфные функции в $\mathbb{C}$. Фактически решена более общая алгебраическая задача.

Библиография: 14 наименований.

Введение

0.1. Мотивировки. Настоящая статья (как и работа [3]) возникла как развитие следующего результата Л. Флатто [1].

Пусть $p, q \in \mathbb{C}[z]$ – многочлены равных степеней. Пусть

$$f \circ p = g \circ q, \quad (1)$$

где f и g – непостоянные целые функции в $\mathbb{C}$. Тогда выполнено одно из двух свойств:

- (i) $p(z) = \lambda q(z) + a$, где $\lambda, a \in \mathbb{C}$;
- (ii) $p(z) = r(z)^2 + a$, $q(z) = br(z)^2 + cr(z) + d$, где $r(z)$ – многочлен, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$.

Л. Флатто поставил вопрос [4, вопрос 5]: существует ли аналог его теоремы в случае $\deg p \neq \deg q$? Тот же вопрос возникает в случае, когда f и g не целые, а мероморфные функции (в $\mathbb{C}$ или только в проколотой окрестности бесконечности). Частичные результаты в связи с задачей Флатто получены в [11], [2], [12], [3] (в [2] можно найти обзор большинства этих результатов). Целью данной статьи является описание всех пар p, q , для которых существуют непостоянные мероморфные функции f, g , удовлетворяющие уравнению (1), и не существует рациональных f, g с этим свойством (фактически решается более общая задача; см. п. 0.2 и § 1).

Уравнение (1) связано также со следующей задачей, которая представляется интересной: описать отношения эквивалентности R на $\mathbb{C}$ такие, что:

- 1) R как подмножество в $\mathbb{C}^2$ есть объединение последовательности алгебраических кривых;
- 2) существует непостоянная мероморфная функция в $\mathbb{C}$, постоянная на классах эквивалентности R .

Такое отношение эквивалентности можно рассматривать как обобщение дискретной группы биголоморфных автоморфизмов $\mathbb{C}$ (дискретная группа Γ задает

Автору была оказана частичная поддержка в виде гранта INTAS № 94-4720.

отношение $z \sim w$, если $z = \gamma(w)$ для некоторого $\gamma \in \Gamma$; это отношение эквивалентности удовлетворяет свойствам 1), 2)).

Пусть пара p, q дает решение уравнения (1) (с мероморфными f, g). Тогда ей соответствует отношение эквивалентности $R_{p,q}$.

Пусть

$$R_p = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid p(z) = p(u)\}, \quad R_q = \{(z, u) \in \mathbb{C}^2 \mid q(z) = q(u)\}.$$

Определим $R_{p,q}$ как отношение эквивалентности, порожденное R_p и R_q . Тогда свойства 1) и 2) для него выполнены. В некотором смысле $R_{p,q}$ происходит из действия группы Γ , порожденной $z \mapsto h_p(z) := p^{-1}(p(z))$ и $z \mapsto h_q(z) := q^{-1}(q(z))$. Отметим, что h_p и h_q голоморфны только в окрестности бесконечности, так что Γ – группа ростков конформных отображений: $(\mathbb{C}, \infty) \rightarrow (\mathbb{C}, \infty)$.

0.2. Постановка задачи. Пусть $(X, \infty_X), (Y, \infty_Y)$ – компактные римановы поверхности с отмеченными точками $\infty_X \in X, \infty_Y \in Y$. Часто мы пишем ∞ вместо ∞_X, ∞_Y . Пусть $p : (X, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ – голоморфное отображение. Назовем его *обобщенным полиномом*, если $p^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$.

Мы будем изучать уравнение (1), в котором $p : (X, \infty_X) \rightarrow (Y, \infty_Y)$ и $q : (X, \infty_X) \rightarrow (Z, \infty_Z)$ – обобщенные полиномы и f, g – мероморфные функции в проколотых окрестностях ∞_Y и ∞_Z соответственно. *Рациональной функцией на компактной римановой поверхности W* будем называть мероморфную функцию на W (это согласуется с терминологией, принятой в алгебраической геометрии). Требуется найти все пары p, q , для которых существуют непостоянные f, g , удовлетворяющие (1), и не существует рациональных f, g с этим свойством. Фактически решается более общая алгебраическая задача, сформулированная в § 1.

0.3. Основной результат. Имеется несколько стандартных решений уравнения (1).

ПРИМЕР 1. Пусть $p(z) = z^n, q(z) = (z+1)^m$, где $n, m, \text{НОК}(n, m) \in \{2, 3, 4, 6\}$. Тогда существуют непостоянные функции f, g , мероморфные в $\mathbb{C}$ и удовлетворяющие (1), и не существует рациональных f, g с этим свойством.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждая диаграмма обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccc} (X, \infty) & & (Z, \infty) \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & (Y, \infty) \end{array}$$

такая, что $\text{НОД}(\deg p, \deg q) = 1$, может быть дополнена до диаграммы обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccc} (W, \infty) & \xrightarrow{p_1} & (Z, \infty) \\ \downarrow q_1 & & \downarrow q \\ (X, \infty) & \xrightarrow{p} & (Y, \infty) \end{array}$$

в которой $\deg p_1 = \deg p$, $\deg q_1 = \deg q$, причем единственным образом с точностью до канонического изоморфизма. Фактически $W = W_0$, где W_0 – нормализация (десингуляризация) аналитической кривой $X \times_Y Z = \{(z, x) \in Z \times X \mid q(z) = p(x)\}$. (Если $\deg p$ и $\deg q$ взаимно просты, то W_0 имеет лишь одну точку над ∞_Y , поэтому W_0 связно, а значит, $W_0 \rightarrow X$ и $W_0 \rightarrow Y$ – обобщенные полиномы). Заметим, что если X, Y, Z рода 0, то, как правило, W ненулевого рода.

ПРИМЕР 2. Пусть $\tilde{p}, \tilde{q}$ – пара многочленов из примера 1, $\deg \tilde{p} = n$, $\deg \tilde{q} = m$. Пусть $h: (Y, \infty) \rightarrow (\mathbb{CP}^1, \infty)$, $r: (Z, \infty) \rightarrow (\mathbb{CP}^1, \infty)$ – обобщенные полиномы, $\deg h = \alpha$, $\deg r = \beta$. Пусть $\text{НОД}(\alpha, n) = \text{НОД}(\beta, m) = \text{НОД}(\alpha, \beta) = 1$. Используя замечание 1, получаем коммутативную диаграмму обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{h_2} & Z_1 & \xrightarrow{q_1} & Z \\ \downarrow r_2 & & \downarrow r_1 & & \downarrow r \\ Y_1 & \xrightarrow{h_1} & \mathbb{CP}^1 & \xrightarrow{\tilde{q}} & \mathbb{CP}^1 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow \tilde{p} & & \\ Y & \xrightarrow{h} & \mathbb{CP}^1 & & \end{array}$$

в которой $\deg r_1 = \deg r_2 = \beta$, $\deg h_1 = \deg h_2 = \alpha$, $\deg p_1 = n$, $\deg q_1 = m$.

Пусть $s: (X, \infty) \rightarrow (W, \infty)$ – любой обобщенный многочлен. Положим $p = p_1 \circ r_2 \circ s$, $q = q_1 \circ h_2 \circ s$. Тогда пара p, q дает решение поставленной задачи.

Так получают все решения (например, в случае $\deg p = \deg q$ это означает, что h, h_1, h_2 и r, r_1, r_2 – изоморфизмы, так что в действительности $p = \tilde{p} \circ s$, $q = \tilde{q} \circ s$).

0.4. О структуре работы. В § 1 мы заменяем исходную задачу более общей алгебраической, которая в действительности решается, и формулируем соответствующие результаты. Мы определяем неприводимые пары обобщенных многочленов и разбиваем результаты на две части. В § 3 мы сводим задачу к изучению неприводимых пар. В § 4 изучаются собственно неприводимые пары, а также формулируется основная теоретико-групповая лемма, играющая центральную роль в доказательстве основного результата. Эта лемма доказывается в § 5.

0.5. Соглашения. Все римановы поверхности предполагаются связными. Напомним, что следующие три понятия эквивалентны: компактная риманова поверхность, гладкая связная проективная алгебраическая кривая над $\mathbb{C}$, конечно порожденное поле над $\mathbb{C}$ степени трансцендентности 1. Мы отождествляем точку кривой и соответствующее нормирование поля рациональных функций на этой кривой.

0.6. Благодарности. Я глубоко благодарен В. Г. Дринфельду за ценные советы и постоянное внимание к этой работе.

§ 1. Формулировка результатов

Обозначим через $\mathfrak{I}$ группу (всех) ростков конформных отображений: $(\mathbb{CP}^1, \infty) \rightarrow (\mathbb{CP}^1, \infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть Γ – подгруппа в $\mathfrak{I}$. Будем говорить, что Γ *дискретна*, если существует непостоянная функция F , мероморфная в проколотой окрестности бесконечности в $\mathbb{C}$, такая, что $F(g(z)) = F(z)$ для всех $g \in \Gamma$.

В работе [3] было получено необходимое условие дискретности группы Γ с использованием результатов локальной голоморфной динамики [13]. Это условие будет основным средством доказательства наших теорем. Для $g \in \mathbb{C}((\frac{1}{z}))$ мы пишем $\text{ord}_\infty g = n$, если $g = \sum_{k=n}^\infty a_k z^{-k}$, $a_n \neq 0$. Положим

$$\mathfrak{I}_k = \{g \in \mathfrak{I} \mid \text{ord}_\infty(g(z) - z) \geq 1 - k\}, \quad k \leq 1.$$

Тогда $\mathfrak{I} \supset \mathfrak{I}_1 \supset \mathfrak{I}_0 \supset \mathfrak{I}_{-1} \supset \dots$, $\mathfrak{I}_k$ – нормальная подгруппа в $\mathfrak{I}$. Если $\Gamma \subset \mathfrak{I}$ – подгруппа, то будем писать $\Gamma_k = \Gamma \cap \mathfrak{I}_k$, $k \leq 1$.

ТЕОРЕМА 1 [3]. Пусть $\Gamma \subset \mathfrak{I}$ – дискретная подгруппа. Тогда:

- 1) среди факторгрупп Γ_k/Γ_{k-1} ($k \leq 1$) не более одной отличной от нуля;
- 2) для всех $k \leq 1$ группа $\Gamma_k/\Gamma_{k-1} \subset \mathfrak{I}_k/\mathfrak{I}_{k-1} \simeq (\mathbb{C}, +)$ является дискретной подгруппой в $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Подгруппа $\Gamma \subset \mathfrak{I}$ *формально дискретна*, если Γ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Факторгруппа Γ/Γ_1 в теореме 1 не рассматривается.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\Gamma \subset \mathfrak{I}$ – подгруппа. Если Γ неразрешима, то ее орбиты плотны в областях с бесконечностью на границе (см. [14]); поэтому из дискретности Γ следует ее разрешимость. Если Γ_1 разрешима, то она абелева (см. [13, с. 68, предложение 2.1]). Это доказывает п. 1) теоремы 1. При доказательстве п. 2) используется следующий факт из локальной динамики. Пусть $g \in \mathfrak{I}_1$. Если g не-включаемо в поток, то централизатор g в $\mathfrak{I}_1$ изоморфен $\mathbb{Z}$, а если включаемо, то он совпадает с соответствующим потоком (см. [13, с. 26, теорема 3, а также с. 23, теорема 1]).

Пусть X – риманова поверхность, ∞ – точка из X . Обозначим через $\mathfrak{I}(X, \infty)$ группу ростков конформных отображений $(X, \infty) \rightarrow (X, \infty)$. Выбор локального параметра в точке $\infty \in X$ позволяет отождествить $\mathfrak{I}(X, \infty)$ и $\mathfrak{I}$. Пусть Y – другая риманова поверхность и f голоморфно отображает проколотую окрестность бесконечности из X в Y . Тогда определим группу $T_f = \{g \in \mathfrak{I}(X, \infty) \mid f \circ g = f\}$.

Рассмотрим пару компактных римановых поверхностей X, Y с отмеченными точками $\infty \in X, \infty \in Y$. Напомним, что *обобщенный многочлен* – это голоморфное отображение $p : (X, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ такое, что $p^{-1}(\{\infty\}) = \{\infty\}$. Легко проверить, что если p – обобщенный многочлен, то T_p – циклическая группа порядка $\deg p$.

Рассмотрим диаграмму обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccc} & (X, \infty) & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ (Y, \infty) & & (Z, \infty) \end{array} \quad (2)$$

Пусть f и g – непостоянные мероморфные функции в проколотых окрестностях бесконечности в Y и Z соответственно. Предположим, что

$$f \circ p = g \circ q. \quad (3)$$

Тогда T_p и T_q порождают дискретную подгруппу в $\mathfrak{I}(X, \infty)$. Обратно, если T_p и T_q порождают дискретную группу, то найдутся функции f , g такие, как и выше, для которых выполнено (3).

Фактически в данной статье мы находим все пары обобщенных многочленов p и q , для которых T_p и T_q порождают бесконечную *формально* дискретную группу.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Обозначим через $\bar{\mathfrak{I}}$ группу всех формальных диффеоморфизмов $(\mathbb{CP}^1, \infty) \rightarrow (\mathbb{CP}^1, \infty)$, т.е. $\bar{\mathfrak{I}} = \{z \mapsto a_1 z + a_0 + a_{-1} z^{-1} + \dots \mid a_i \in \mathbb{C}, a_1 \neq 0\}$ с операцией композиции. Подгруппы $\bar{\mathfrak{I}}_k \subset \bar{\mathfrak{I}}$ определяются так же, как и $\mathfrak{I}_k \subset \mathfrak{I}$. Имеем $\mathfrak{I} \subset \bar{\mathfrak{I}}$. Если $\Gamma \subset \bar{\mathfrak{I}}$ – такая подгруппа, что $\Gamma \not\subset \mathfrak{I}$, то нельзя говорить о дискретности группы Γ , но можно говорить о формальной дискретности. В этом смысле формальная дискретность – алгебраическое свойство группы Γ .

Всюду через $\mathcal{M}(X)$ мы обозначаем поле мероморфных функций на римановой поверхности X .

Пусть $p : (X, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ – обобщенный многочлен; тогда $\mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}(X)$. Пусть F – промежуточное поле, т.е. $\mathcal{M}(Y) \subset F \subset \mathcal{M}(X)$, а W – его модель, т.е. компактная риманова поверхность такая, что F изоморфно $\mathcal{M}(W)$ над $\mathbb{C}$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & Y \\ p_1 \searrow & & \nearrow p_2 \\ & W & \end{array}$$

Положим $\infty_W = p_1(\infty_X)$; тогда $p_1 : (X, \infty) \rightarrow (W, \infty)$ и $p_2 : (W, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ будут обобщенными многочленами.

Следующую теорему можно рассматривать как описание рациональных решений функционального уравнения (3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть нам дана диаграмма (2). Тогда имеется альтернатива:

1) существует и единственна с точностью до изоморфизма коммутативная диаграмма обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccccc}
 & (X, \infty) & & & \\
 & \swarrow p & \downarrow f & \searrow q & \\
 (Y, \infty) & \xleftarrow{p_1} & (V, \infty) & \xrightarrow{q_1} & (Z, \infty) \\
 & \searrow & \downarrow g & \swarrow & \\
 & & (W, \infty) & &
 \end{array} \quad (4)$$

такая, что $\deg f = \text{НОД}(\deg p, \deg q)$, $\deg g = (\deg p_1)(\deg q_1)$; при этом группы T_p и T_q порождают группу $T_{g \circ f}$, $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathcal{M}(W)$, $\mathcal{M}(V)$ – композит полей $\mathcal{M}(Y)$ и $\mathcal{M}(Z)$;

2) T_p и T_q порождают бесконечную неабелеву подгруппу в $\mathfrak{I}(X, \infty)$; в этом случае $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathbb{C}$.

Следующие теоремы описывают пары обобщенных многочленов p, q , для которых T_p и T_q порождают бесконечную формально дискретную подгруппу в $\mathfrak{I}(X, \infty)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть нам дана диаграмма (2). Тогда среди полей F таких, что $\mathcal{M}(Z) \subset F \subset \mathcal{M}(X)$ и $F \cap \mathcal{M}(Y) \neq \mathbb{C}$, имеется наименьшее по включению. Обозначим его $F_{q,p}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. С геометрической точки зрения это означает, что существует коммутативная диаграмма обобщенных полиномов

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{q_1} & X_{q,p} & \xrightarrow{q_2} & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 Y & \longrightarrow & Y_{q,p} & &
 \end{array}$$

такая, что $q_2 \circ q_1 = q$, и выполнено следующее универсальное свойство. Для всякой коммутативной диаграммы обобщенных полиномов

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{g} & X' & \xrightarrow{h} & Z \\
 \downarrow p & & \downarrow & & \\
 Y & \longrightarrow & Y' & &
 \end{array}$$

такой, что $h \circ g = q$, существует единственное голоморфное отображение $f: X' \rightarrow X_{q,p}$ со свойством $f \circ g = q_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что пара p, q в диаграмме (2) *неприводима*, если $F_{p,q} = F_{q,p} = \mathcal{M}(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Пусть пара p, q в диаграмме (2) неприводима и $\deg p, \deg q > 1$; тогда $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathbb{C}$.

ПРИМЕР. Положим $X = \mathbb{CP}^1$, $p(z) = z^n$, $q(z) = (z+1)^m$, где n, m – натуральные числа. Тогда пара многочленов p, q неприводима.

По каждой паре обобщенных многочленов (2) канонически строится неприводимая пара следующим образом. Положим $F = F_{p,q} \cap F_{q,p}$, $F_1 = \mathcal{M}(Y) \cap F$, $F_2 = \mathcal{M}(Z) \cap F$. Обозначим через K композит полей $F_{p,q}$ и $F_{q,p}$. Получаем диаграмму полей

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(X) & \supset & K & \supset & F_{q,p} \supset \mathcal{M}(Z) \\ & & \cup & & \cup \\ & & F_{p,q} & \supset & F \supset F_2 \\ & & \cup & & \cup \\ \mathcal{M}(Y) & \supset & F_1 & & \end{array}$$

Ей соответствует коммутативная диаграмма обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & V & \xrightarrow{h_2} & X_{q,p} & \xrightarrow{q_1} & Z \\ & & \downarrow r_2 & & \downarrow r_1 & & \downarrow r \\ & & X_{p,q} & \xrightarrow{h_1} & W & \xrightarrow{\tilde{q}} & W_2 \\ & & \downarrow p_1 & & \downarrow \tilde{p} & & \\ & & Y & \xrightarrow{h} & W_1 & & \end{array} \quad (5)$$

Назовем диаграмму (5) *канонической диаграммой*.

Из определения $F_{p,q}$ (см. предложение 1) следует, что композит полей F и $\mathcal{M}(Y)$ совпадает с $F_{p,q}$. Аналогично, $F_{q,p}$ – это композит полей F и $\mathcal{M}(Z)$. Из теоремы 2 следует, что $\deg h = \deg h_1 = \deg h_2$, $\deg r = \deg r_1 = \deg r_2$, $\deg p_1 = \deg \tilde{p}$, $\deg q_1 = \deg \tilde{q}$, $\text{НОД}(\deg h, \deg \tilde{p}) = \text{НОД}(\deg r, \deg \tilde{q}) = \text{НОД}(\deg h, \deg r) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пара $\tilde{p}, \tilde{q}$ неприводима.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть дана диаграмма (2) такая, что $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathbb{C}$. Пусть $\tilde{p}, \tilde{q}$ – соответствующая неприводимая пара обобщенных многочленов. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) T_p и T_q порождают дискретную подгруппу в $\mathfrak{I}(X, \infty)$;
- (ii) $T_{\tilde{p}}$ и $T_{\tilde{q}}$ порождают дискретную подгруппу в $\mathfrak{I}(W, \infty)$.

Утверждение останется в силе, если заменить дискретность на формальную дискретность.

ТЕОРЕМА 3. *Рассмотрим диаграмму (2) такую, что пара p, q неприводима и $\deg p, \deg q > 1$. Пусть T_p и T_q порождают формально дискретную группу. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} (Y, \infty) & \xleftarrow{p} & (X, \infty) & \xrightarrow{q} & (Z, \infty) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{CP}^1, \infty) & \xleftarrow{p_1} & (\mathbb{CP}^1, \infty) & \xrightarrow{q_1} & (\mathbb{CP}^1, \infty) \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки – изоморфизмы, а пара p_1, q_1 – это следующая стандартная пара многочленов: $p_1(z) = z^n, q_1(z) = (z + 1)^m$, где $n, m, \text{НОК}(n, m) \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Обратно, пара p_1, q_1 неприводима, T_{p_1} и T_{q_1} порождают дискретную подгруппу в $\mathfrak{I}, \mathbb{C}(p_1) \cap \mathbb{C}(q_1) = \mathbb{C}$.

Наш основной результат, сформулированный во введении, следует из теорем 1–3 и предложений 1–3.

§ 2. Алгебраическая техника

Пусть X – компактная риманова поверхность, ∞ – точка из X . Нормирование поля $\mathcal{M}(X)$, соответствующее точке ∞ , будем обозначать тем же символом ∞ . Обозначим через $\mathcal{M}(X)_\infty$ пополнение $\mathcal{M}(X)$ в точке ∞ . Пусть $p: (X, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ – обобщенный многочлен. Ограничение ∞ на $\mathcal{M}(Y)$ обозначим той же буквой. Известно, что $\mathcal{M}(X)_\infty$ является циклическим расширением Галуа поля $\mathcal{M}(Y)_\infty$ степени $\deg p$. Каждому $g \in \mathfrak{I}(X, \infty)$ сопоставим автоморфизм поля $\mathcal{M}(X)_\infty$, заданный формулой $(gf)(x) = f(g^{-1}x), f \in \mathcal{M}(X)_\infty$. Так получается вложение $\mathfrak{I}(X, \infty)$ в группу автоморфизмов топологического поля $\mathcal{M}(X)_\infty$ над $\mathbb{C}$. Это вложение индуцирует также канонический изоморфизм между T_p и $\text{Gal}(\mathcal{M}(X)_\infty / \mathcal{M}(Y)_\infty)$. В дальнейшем эти две группы отождествляются.

ЛЕММА 1. *Пусть X и Y – компактные римановы поверхности, $f: X \rightarrow Y$ – голоморфное n -листное накрытие. Пусть $g: W \rightarrow Y$ – наименьшее накрытие Галуа, которое пропускается через X :*

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow g & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Пусть $y_0 \in Y, f^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$. Предположим, что кратность f в x_i равна $l_i, w_0 \in W, g(w_0) = y_0$.

Тогда кратность g в w_0 равна $\text{НОК}(l_1, \dots, l_k)$.

При доказательстве полезна следующая явная конструкция W . Пусть $A \subset Y$ – множество критических значений f . Положим $Y' = Y \setminus A, X' = X \setminus f^{-1}(A)$.

Обозначим через Z' множество пар (y, φ) , где $y \in Y'$ и $\varphi: f^{-1}(y) \rightarrow \{1, \dots, n\}$ – биекция. Обозначим через g отображение из Z' в Y' , переводящее (y, φ) в y . Комплексная структура на Z' вводится естественным образом. Группа S_n действует на Z' биголоморфными преобразованиями, и это действие транзитивно на слоях g . Пусть Z – гладкая компактификация Z' и W – связная компонента Z . Тогда $g: W \rightarrow Y$ будет искомым накрытием Галуа.

Оставшуюся часть доказательства мы опускаем.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p: (X, \infty) \rightarrow (Y, \infty)$ – обобщенный многочлен, пусть K – конечное расширение Галуа поля $\mathcal{M}(X)$ такое, что K не разветвлено над $\infty \in X$. Пусть L – наименьшее расширение Галуа $\mathcal{M}(Y)$, содержащее K . Тогда L тоже не разветвлено над $\infty \in X$.

Рассмотрим диаграмму (2) обобщенных многочленов. Зафиксируем алгебраическое замыкание $\overline{\mathcal{M}(X)}$. Построим башню полей $\mathbb{k}_p^m, \mathbb{k}_q^m \subset \overline{\mathcal{M}(X)}$, $m \geq 0$, следующим образом. Положим $\mathbb{k}_p^0 = \mathbb{k}_q^0 = \mathcal{M}(X)$. Пусть $\mathbb{k}_p^m$ – наименьшее расширение Галуа $\mathcal{M}(Y)$, содержащее $\mathbb{k}_q^{m-1}$, пусть $\mathbb{k}_q^m$ – наименьшее расширение Галуа $\mathcal{M}(Z)$, содержащее $\mathbb{k}_p^{m-1}$. По индукции проверяется, что $\mathbb{k}_p^m \supset \mathbb{k}_p^{m-1}$, $\mathbb{k}_q^m \supset \mathbb{k}_q^{m-1}$. Положим $E = \bigcup_m \mathbb{k}_p^m = \bigcup_m \mathbb{k}_q^m$; тогда $E \subset \overline{\mathcal{M}(X)}$ – подполе, содержащее $\mathcal{M}(X)$ и нормальное над $\mathcal{M}(Y)$ и над $\mathcal{M}(Z)$. Ясно, что $E \subset \overline{\mathcal{M}(X)}$ – наименьшее подполе с этим свойством.

ЛЕММА 2. Для каждого $m \geq 0$ поля $\mathbb{k}_p^m$ и $\mathbb{k}_q^m$ не разветвлены над $\infty \in X$. Поэтому E не разветвлено над $\infty \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применить предыдущее следствие.

Зафиксируем точку ∞' поля E над $\infty \in X$. Выбор ∞' задает вложение $E \hookrightarrow \mathcal{M}(X)_\infty = E_{\infty'} \text{ над } \mathcal{M}(X)$. Поскольку E нормально над $\mathcal{M}(X)$, образ E в $\mathcal{M}(X)_\infty$ не зависит от выбора ∞' .

Положим $G_p = \text{Gal}(E/\mathcal{M}(Y))$, $G_q = \text{Gal}(E/\mathcal{M}(Z))$, $U = \text{Gal}(E/\mathcal{M}(X))$.

Обозначим через G подгруппу в $\text{Aut } E$, порожденную G_p и G_q . Хорошо известно, что для каждого нормирования ω поля $\mathcal{M}(X)$ (тривиального на $\mathbb{C}$) действие U на множестве точек поля E над ω транзитивно.

Обозначим через S множество точек поля E над ∞ . Группы G_p и G_q действуют на S , поэтому G тоже действует на S . Действие U на S свободно, поскольку E не разветвлено над ∞ , и транзитивно, как объяснено выше.

Известно, что сопоставление $\sigma \in \text{Gal}(\mathcal{M}(X)_\infty/\mathcal{M}(Y)_\infty)$ его ограничению на $E \subset E_{\infty'} = \mathcal{M}(X)_\infty$ задает изоморфизм

$$T_p = \text{Gal}(\mathcal{M}(X)_\infty/\mathcal{M}(Y)_\infty) \xrightarrow{\sim} \{g \in G_p \mid g\infty' = \infty'\}.$$

Аналогично мы имеем изоморфизм

$$T_q = \text{Gal}(\mathcal{M}(X)_\infty/\mathcal{M}(Z)_\infty) \xrightarrow{\sim} \{g \in G_q \mid g\infty' = \infty'\}.$$

Пусть Γ – подгруппа группы $\text{Aut } \mathcal{M}(X)_\infty$, порожденная T_p и T_q .

ЛЕММА 3. 1) Для каждого $g \in G_p$ (соответственно $g \in G_q$) существуют и единственны $h \in T_p$ (соответственно $h \in T_q$), $\sigma \in U$ такие, что $g = h\sigma$.
 2) Ограничение на E задает изоморфизм

$$\Gamma \xrightarrow{\sim} \{g \in G \mid g\infty' = \infty'\}.$$

3) Для каждого $g \in G$ существуют единственные $h \in \Gamma$, $\sigma \in U$ такие, что $g = h\sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) следует из того, что S отождествляется с G_p/T_p или G_q/T_q и действие U на S свободно и транзитивно.

Докажем утверждения 2) и 3). Мы имеем гомоморфизм $f: \Gamma \rightarrow \{g \in G \mid g\infty' = \infty'\}$. Он инъективен, потому что E плотно в $\mathcal{M}(X)_\infty$. Из 1) следует, что для любого $g \in G$ существуют $h \in \Gamma$, $\sigma \in U$ такие, что $g = f(h)\sigma$. Такие h , σ единственны, так как действие U на S свободно. Если $g\infty' = \infty'$, то $\sigma = 1$, так что f сюръективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Мы будем рассматривать T_p , T_q и Γ как подгруппы в G . В то же время на Γ можно смотреть как на подгруппу в $\mathfrak{I}(X, \infty)$, порожденную T_p и T_q . В силу леммы 3 мы имеем биекцию $G/U \leftrightarrow \Gamma$. Группа U действует на G/U левыми сдвигами, а значит, U действует на множестве Γ , не сохраняя групповую структуру Γ . Это действие играет решающую роль в данной статье и имеет следующий аналитический смысл. Элементы Γ можно рассматривать как ростки алгебраических функций в точке $\infty \in X$. Аналитическое продолжение вдоль замкнутых петель задает действие монодромии H на Γ , где H – это обратный предел групп $\pi_1(X \setminus S, \infty)$, $S \subset X \setminus \{\infty\}$, $\#S < \infty$. Имеется канонический гомоморфизм $f: H \rightarrow U$ с плотным образом, и действие монодромии H на Γ происходит из действия U на Γ . Итак, действие U на Γ – это алгебраическая версия действия монодромии, использованного в [3, §4].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что E – поле степени трансцендентности 1 над $\mathbb{C}$ и, вообще говоря, E не порождается над $\mathbb{C}$ конечным числом элементов. В то же время существует конечное подмножество $A \subset E$ такое, что каждое подполе E' поля E , содержащее A и инвариантное относительно $\text{Aut}_{\mathbb{C}} E$, совпадает с E (пусть A – множество образующих $\mathcal{M}(X)$ над $\mathbb{C}$; тогда E порождено $\bigcup_{g \in \Gamma} gA$ над $\mathbb{C}$). Поля с такими свойствами изучались в [5].

Рассмотрим теперь следующую абстрактную ситуацию. Пусть G – абстрактная группа, U и Γ – ее подгруппы. Пусть $G = \Gamma \cdot U$, $\Gamma \cap U = 1$ (тогда $U\Gamma = (\Gamma U)^{-1} = G$). Получаем биекцию $\Gamma \leftrightarrow G/U$. Группа G действует на G/U левыми сдвигами, поэтому G действует на Γ .

ЛЕММА 4. Пусть A и B – подмножества в Γ . Тогда:

- 1) если A инвариантно относительно действия U , то A^{-1} тоже инвариантно;
- 2) A инвариантно $\Leftrightarrow UA \subset AU \Leftrightarrow AU \subset UA \Leftrightarrow UA = AU$;
- 3) если A и B инвариантны, то AB тоже инвариантно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что A инвариантно $\Leftrightarrow UA \subset AU$ и A^{-1} инвариантно $\Leftrightarrow UA^{-1} \subset A^{-1}U \Leftrightarrow AU \subset UA$. Поэтому для доказательства 1) и 2) достаточно показать, что если $UA \subset AU$, то $AU \subset UA$. Пусть $a \in A$, $\sigma \in U$. Тогда $a\sigma = \sigma'a'$ для некоторых $\sigma' \in U$, $a' \in \Gamma$. Покажем, что $a' \in A$. В самом деле, $a' = (\sigma')^{-1}a\sigma \in UAU \subset AUU = AU$. Итак, $a' \in AU \cap \Gamma = A$.

Для доказательства 3) заметим, что если $UA \subset AU$ и $UB \subset BU$, то $UAB \subset AUB \subset ABU$.

ЛЕММА 5. Пусть $\Delta \subset \Gamma$ – подгруппа. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $U\Delta$ – подгруппа;
- 2) ΔU – подгруппа;
- 3) Δ инвариантна относительно действия U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия 1) и 2) эквивалентны, потому что $\Delta U = (U\Delta)^{-1}$. 1) означает, что $U\Delta U\Delta \subset U\Delta$ и $(U\Delta)^{-1} \subset U\Delta$. Каждое из этих включений эквивалентно такому: $\Delta U \subset U\Delta$, т.е. эквивалентно условию 3).

В §5 нам понадобится следующее определение. Пусть $A_1, \dots, A_k, B_1, \dots, B_n \subset \Gamma$ – U -инвариантные подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Соотношением вида

$$A_1 \dots A_k = B_1 \dots B_n \quad (6)$$

назовем набор из $k + n$ элементов

$$(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n) \in A_1 \times \dots \times A_k \times B_1 \times \dots \times B_n$$

такой, что $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_n$.

Мы определяем действие U на множестве соотношений вида (6) следующим образом. Пусть $\sigma \in U$ и $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n)$ – соотношение вида (6). Имеются единственные $a'_1 \in A_1$, $\sigma_1 \in U$ такие, что $\sigma a_1 = a'_1 \sigma_1$. Имеются единственные $a'_2 \in A_2$, $\sigma_2 \in U$ такие, что $\sigma_1 a_2 = a'_2 \sigma_2$, и так далее. Мы получаем $a'_1 \in A_1, \dots, a'_k \in A_k$ и $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in U$ такие, что $\sigma a_1 \dots a_k = a'_1 \dots a'_k \sigma_k$. Аналогично, мы получаем $b'_1 \in B_1, \dots, b'_n \in B_n$ и $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n \in U$ такие, что $\sigma b_1 \dots b_n = b'_1 \dots b'_n \bar{\sigma}_n$. Поскольку $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_n$, то $a'_1 \dots a'_k \sigma_k = b'_1 \dots b'_n \bar{\sigma}_n$, откуда $a'_1 \dots a'_k = b'_1 \dots b'_n$. Итак, $(a'_1, \dots, a'_k, b'_1, \dots, b'_n)$ – соотношение вида (6). По определению σ переводит набор $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n)$ в набор $(a'_1, \dots, a'_k, b'_1, \dots, b'_n)$. Это действительно действие, поскольку для любых $i \leq k$, $j \leq n$ произведение $a'_1 \dots a'_i$ – это результат действия σ на $a_1 \dots a_i \in \Gamma = G/U$ и $b'_1 \dots b'_j$ – это результат действия σ на $b_1 \dots b_j$.

§ 3. Каноническая диаграмма

Нам потребуется следующее простое обобщение теоремы Артина из теории Галуа.

ЛЕММА 6. Пусть K – расширение Галуа поля F , $U = \text{Gal}(K/F)$. Пусть G – такая подгруппа в $\text{Aut } K$, что $G \supset U$ и $[G : U] = n$. Положим $\mathbb{k} = K^G$. Тогда K – расширение Галуа поля $\mathbb{k}$, $[F : \mathbb{k}] = n_1$, $\text{Gal}(K/\mathbb{k}) = G$.

Доказательство дословно повторяет рассуждение, приведенное в [6, гл. 7, теорема 2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Диаграмма (4), в которой $\deg f = \text{НОД}(\deg p, \deg q)$, $\deg g = (\deg p_1)(\deg q_1)$, единственна, если она существует, потому что $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z)$ и $\mathcal{M}(V)$ – это композит полей $\mathcal{M}(Y)$ и $\mathcal{M}(Z)$. В самом деле, $\deg p_1 = \deg p / \text{НОД}(\deg p, \deg q)$ и $\deg q_1 = \deg q / \text{НОД}(\deg p, \deg q)$ взаимно просты; поэтому $\mathcal{M}(V)$ – это композит полей $\mathcal{M}(Y)$ и $\mathcal{M}(Z)$. Поскольку $[\mathcal{M}(Y) : \mathcal{M}(W)] = \deg g / \deg p_1 = \deg q_1$ и $[\mathcal{M}(Z) : \mathcal{M}(W)] = \deg p_1$ взаимно просты, то $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z)$.

В оставшейся части доказательства используются обозначения § 2. Если Γ бесконечна, то она неабелева (если T_p и T_q коммутируют, то Γ конечна). Очевидно, в этом случае $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathbb{C}$.

Если Γ конечна, то Γ_1 тривиальна, так как $\mathfrak{J}_1$ без кручения. Поэтому $\Gamma = \Gamma/\Gamma_1$ – циклическая порядка $d = \text{НОК}(\deg p, \deg q)$. В силу леммы 3 $[G : U] = d$. Положим $F = E^G$. Используя лемму 6, получаем $[\mathcal{M}(X) : F] = d$. Ясно, что $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = F$. Обозначим через W модель поля F . Имеем диаграмму

Положим $\infty_W = r(\infty_X)$. Переходя к пополнениям, получаем

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{M}(X)_\infty & \supset & \mathcal{M}(Z)_\infty \\
 \cup & & \cup \\
 \mathcal{M}(Y)_\infty & \supset & F_\infty
 \end{array}$$

Поскольку $\deg r = d$, то $[\mathcal{M}(X)_\infty : F_\infty] \leq d$. С другой стороны, $[\mathcal{M}(X)_\infty : \mathcal{M}(Y)_\infty]$ и $[\mathcal{M}(X)_\infty : \mathcal{M}(Z)_\infty]$ делят $[\mathcal{M}(X)_\infty : F_\infty]$, значит, d делит $[\mathcal{M}(X)_\infty : F_\infty]$. Поэтому $d = [\mathcal{M}(X)_\infty : F_\infty]$, т.е. $r : (X, \infty) \rightarrow (W, \infty)$ – обобщенный многочлен, p_0 и q_0 – тоже обобщенные многочлены. Кроме того, T_p и T_q порождают подгруппу в T_r порядка d , т.е. группу T_r .

Заметим, что $\deg p_0 = \text{НОК}(\deg p, \deg q) / \deg p$ и $\deg q_0 = \text{НОК}(\deg p, \deg q) / \deg q$ взаимно просты. Применяя замечание 1 из введения к диаграмме $(Y, \infty) \rightarrow (W, \infty) \leftarrow (Z, \infty)$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & (V, \infty) & & & \\
 & \swarrow p_1 & & \searrow q_1 & \\
 (Y, \infty) & & (V, \infty) & & (Z, \infty) \\
 & \searrow p_0 & \downarrow g & \swarrow q_0 & \\
 & & (W, \infty) & &
 \end{array} \quad (8)$$

в которой V – это нормализация $Y \times_W Z$, $\deg p_1 = \deg q_0$, $\deg q_1 = \deg p_0$. Из определения $Y \times_W Z$ следует, что диаграммы (7) и (8) могут быть включены в диаграмму вида (4).

ЗАМЕЧАНИЕ. На X имеются два отношения эквивалентности:

$$\begin{aligned}
 R_p &= \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid p(x_1) = p(x_2)\}, \\
 R_q &= \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid q(x_1) = q(x_2)\}.
 \end{aligned}$$

Обозначим через R отношение эквивалентности, которое они порождают. Если Γ конечна, то легко показать, что R будет алгебраической кривой на $X \times X$. Существенная часть доказательства теоремы 2 состоит в построении римановой поверхности X/R . Это было сделано с использованием леммы 6 (в действительности мы построили поле $\mathcal{M}(X/R)$). Риманову поверхность X/R можно построить и непосредственно, используя результаты Грауэрта [7]. Кроме того, можно построить алгебраическую кривую X/R в рамках алгебраической геометрии, используя теорему 4.1 из [8, с. 262].

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $p_i: (X, \infty) \rightarrow (Y_i, \infty)$ – обобщенные многочлены, $i \in \{1, 2, 3\}$. Имеем диаграмму полей

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{M}(Y_1) \subset \mathcal{M}(X) \supset \mathcal{M}(Y_3) \\
 \cup \\
 \mathcal{M}(Y_2)
 \end{array}$$

Пусть $\mathcal{M}(Y_i) \cap \mathcal{M}(Y_j) \neq \mathbb{C}$ для любых i, j . Тогда $\mathcal{M}(Y_1) \cap \mathcal{M}(Y_2) \cap \mathcal{M}(Y_3) \neq \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2 элементы T_{p_i} и T_{p_j} коммутируют, и мы имеем диаграмму обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccccc}
 & X & & & \\
 & \swarrow p_1 & & \searrow p_2 & \\
 Y_1 & & X & & Y_2 \\
 & \searrow & \downarrow r & \swarrow & \\
 & & W & &
 \end{array}$$

такую, что $\mathcal{M}(W) = \mathcal{M}(Y_1) \cap \mathcal{M}(Y_2)$, T_{p_1} и T_{p_2} порождают T_r . Элементы групп T_r и T_{p_3} коммутируют. Применяя теорему 2 к паре r, p_3 , получаем $\mathcal{M}(Y_1) \cap \mathcal{M}(Y_2) \cap \mathcal{M}(Y_3) \neq \mathbb{C}$.

Предложение 1 непосредственно выводится из предыдущего следствия. Предложение 1 также доказано.

Рассмотрим коммутативную диаграмму обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h_1} & Y \\ & \searrow h_2 & \swarrow \\ & Z & \end{array}$$

T_{h_1} – это подгруппа в T_{h_2} . Правый фактор h_1 отображения h_2 восстанавливается по группе T_{h_1} так: $\mathcal{M}(Y) = \mathcal{M}(X) \cap \mathcal{M}(X)^{T_{h_1}}$. Таким образом, некоторые подгруппы в T_{h_2} соответствуют правым факторам h_2 (не обязательно все подгруппы).

Вернемся к диаграмме (2). В § 1 было введено промежуточное поле $\mathcal{M}(Z) \subset F_{q,p} \subset \mathcal{M}(X)$. Следующая теорема указывает подгруппу в T_q , соответствующую этому полю. Существует коммутативная диаграмма обобщенных многочленов

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{q_1} & X_{q,p} & \xrightarrow{q_2} & Z \\ \downarrow p & & \downarrow & & \\ Y & \longrightarrow & Y_{q,p} & & \end{array}$$

такая, что $q_2 \circ q_1 = q$, $\mathcal{M}(X_{q,p}) = F_{q,p}$, $\mathcal{M}(Y_{q,p}) = F_{q,p} \cap \mathcal{M}(Y)$. Положим $H_{q,p} = \{\sigma \in T_q \mid \tau\sigma = \sigma\tau \text{ для всех } \tau \in T_p\}$.

ТЕОРЕМА 4. $T_{q_1} = H_{q,p}$.

Для доказательства нам понадобятся две леммы.

ЛЕММА 7. Пусть $H \subset \mathfrak{J}$ – конечная подгруппа. Тогда H циклическа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathfrak{J}_1$ без кручения, имеем $H \cap \mathfrak{J}_1 = 1$. Поэтому $H \simeq H/H_1 \hookrightarrow \mathfrak{J}/\mathfrak{J}_1 \simeq \mathbb{C}^*$. Конечная подгруппа в $\mathbb{C}^*$ циклическа.

Мы используем конструкции и обозначения из § 2.

ЛЕММА 8. Пусть $L \subset \Gamma$ – подмножество, инвариантное относительно действия U , т.е. $uLU = LU$ для всех $u \in U$. Положим

$$N_L = \{\sigma \in T_q \mid L\sigma = L\}.$$

Тогда N_L – подгруппа в T_q , инвариантная относительно действия U .

ЗАМЕЧАНИЕ. Подгруппы T_p и T_q группы Γ инвариантны относительно U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что N_L – подгруппа в T_q . В соответствии с леммой 4 остается доказать, что $UN_L \subset N_L U$.

Пусть $\sigma \in N_L$, $\gamma \in U$, $\gamma\sigma = \sigma'\gamma'$, где $\sigma' \in T_q$, $\gamma' \in U$. Покажем, что $L\sigma' = L$. Используя лемму 4, имеем $LU \subset UL$, откуда $LUN_L \subset ULN_L \subset UL \subset LU$. Поэтому $L\sigma' = L\gamma\sigma(\gamma')^{-1} \subset LU$. С другой стороны, $L\sigma' \subset \Gamma$ и $\Gamma \cap LU = L$, значит, $L\sigma' \subset L$. Поскольку σ конечного порядка, то $L\sigma' = L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $L = T_q T_p$. В силу п. 3) леммы 4 L U -инвариантно. По лемме 8 получаем подгруппу N_L ($= N$) группы T_q , инвариантную относительно действия U . По лемме 5 NU будет подгруппой в G , $[NU : U] = \#N$. Далее, $\mathcal{M}(Z) \subset E^{NU} \subset \mathcal{M}(X)$, $[\mathcal{M}(X) : E^{NU}] = \#N$. Это означает, что N соответствует правому фактору q . Очевидно, что $H_{q,p} \subset N$. Покажем, что $H_{q,p} = N$. Имеем $T_p N \subset T_q T_p$. Пусть $\tau\sigma = \sigma'\tau'$, где $\tau, \tau' \in T_p$, $\sigma \in N$, $\sigma' \in T_q$. Тогда

$$T_q T_p \sigma' = T_q T_p \sigma (\tau')^{-1} = T_q T_p (\tau')^{-1} = T_q T_p.$$

Итак, $\sigma' \in N$. Мы показали, что $T_p N \subset NT_p$, а значит, NT_p является подгруппой в Γ . По лемме 7 NT_p абелева. Поэтому $N \subset H_{q,p}$.

Мы доказали, что $H_{q,p}$ соответствует правому фактору q . Используя теорему 2, легко видеть, что $H_{q,p}$ соответствует $F_{q,p}$.

По определению пара p, q в (2) неприводима, если $F_{q,p} = F_{p,q} = \mathcal{M}(X)$. В силу теоремы 4 это эквивалентно свойству $H_{p,q} = H_{q,p} = 1$.

ПРИМЕР. Рассмотрим пару многочленов $p(z) = z^n$, $q(z) = (z+1)^m$. Имеем $T_p = \{z \mapsto \varepsilon z \mid \varepsilon^n = 1\}$, $T_q = \{z \mapsto \delta z + (\delta - 1) \mid \delta^m = 1\}$. Теперь легко проверить, что $H_{p,q} = H_{q,p} = 1$, т.е. пара p, q неприводима.

ЛЕММА 9. Рассмотрим диаграмму (2), в которой $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) \neq \mathbb{C}$. Пусть K – промежуточное поле: $(\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z)) \subset K \subset \mathcal{M}(Y)$. Обозначим через $\tilde{K}$ композит K и $\mathcal{M}(Z)$. Тогда $\tilde{K} \cap \mathcal{M}(Y) = K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F = \mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z)$. Соответствующая диаграмма полей имеет вид

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(X) & \supset & \tilde{K} & \supset & \mathcal{M}(Z) \\ & & \cup & & \cup \\ \mathcal{M}(Y) & \supset & K & \supset & F \end{array}$$

По теореме 2 $[\mathcal{M}(Y) : F]$ и $[\mathcal{M}(Z) : F]$ взаимно просты. Поэтому $[K : F]$ и $[\mathcal{M}(Z) : F]$ тоже взаимно просты, а значит, $[\tilde{K} : K] = [\mathcal{M}(Z) : F]$. Отсюда следует, что $[\mathcal{M}(Y) : K]$ и $[\tilde{K} : K]$ взаимно просты, откуда $K = \tilde{K} \cap \mathcal{M}(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Оно непосредственно следует из леммы 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Утверждение нетривиально в случае формальной дискретности. Учитывая теорему 2, достаточно доказать следующий результат.

ЛЕММА 10. *Рассмотрим диаграмму обобщенных многочленов*

Пусть Γ – группа, порожденная T_p и T_q , Γ' – группа, порожденная $T_{p \circ r}$ и $T_{q \circ r}$. Γ формально дискретна тогда и только тогда, когда Γ' формально дискретна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathfrak{I}(X, Y, \infty) = \{(g_X, g_Y) \mid g_X \in \mathfrak{I}(X, \infty), g_Y \in \mathfrak{I}(Y, \infty), g_Y \circ r = r \circ g_X\}$. Тогда $\mathfrak{I}(X, Y, \infty)$ – подгруппа в $\mathfrak{I}(X, \infty) \times \mathfrak{I}(Y, \infty)$. Рассмотрим проекции $\pi: \mathfrak{I}(X, Y, \infty) \rightarrow \mathfrak{I}(Y, \infty)$, $j: \mathfrak{I}(X, Y, \infty) \rightarrow \mathfrak{I}(X, \infty)$. Легко проверить, что π сюръективно, $\text{Ker } \pi = T_r$, j инъективно, $T_{p \circ r} = j(\pi^{-1}(T_p))$, $T_{q \circ r} = j(\pi^{-1}(T_q))$. Поэтому $\Gamma' = j(\pi^{-1}(\Gamma))$.

Выберем мероморфную функцию z в окрестности $\infty \in Y$ с полюсом первого порядка в точке ∞ (так что z^{-1} – локальная координата в ∞). Выберем аналогичную функцию ζ в окрестности $\infty \in X$ так, чтобы $r^*(z) = \zeta^n$, $n = \deg r$ (т.е. в терминах z и ζ отображение r записывается как $z = \zeta^n$). Тогда элементы $g_X \in \mathfrak{I}(X, \infty)$, $g_Y \in \mathfrak{I}(Y, \infty)$ могут быть записаны в виде

$$g_X(\zeta) = \sum_{j=-1}^{\infty} a_j \zeta^{-j}, \quad g_Y(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} b_k z^{-k}, \quad a_{-1} \neq 0, \quad b_{-1} \neq 0.$$

Далее, соотношение $g_Y \circ r = r \circ g_X$ приобретает вид

$$\left(\sum_{j=-1}^{\infty} a_j \zeta^{-j} \right)^n = \sum_{k=-1}^{\infty} b_k \zeta^{-kn},$$

т.е.

$$\sum_{j=-1}^{\infty} a_j \zeta^{-j} = \zeta (b_{-1} + b_0 \zeta^{-n} + b_1 \zeta^{-2n} + \dots)^{1/n}.$$

Теперь понятно, что подгруппа $\Gamma \subset \mathfrak{I}(Y, \infty)$ формально дискретна, если и только если $j(\pi^{-1}(\Gamma))$ формально дискретна.

Предложение 3 также доказано.

§ 4. Неприводимые пары обобщенных многочленов

ТЕОРЕМА 5. *Рассмотрим диаграмму (2), в которой пара p, q неприводима и $\deg p > 1$, $\deg q > 1$. Обозначим через Γ группу, порожденную T_p и T_q . Пусть Γ_1 абелева. Положим $n = \deg p$, $m = \deg q$, $\tilde{p}(z) = z^n$, $\tilde{q}(z) = (z+1)^m$; $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{C}[z]$. Пусть $\tilde{\Gamma}$ – группа, порожденная $T_{\tilde{p}}$ и $T_{\tilde{q}}$.*

Тогда существует изоморфизм $\varphi: \Gamma \xrightarrow{\sim} \tilde{\Gamma}$ такой, что $\varphi|_{T_p}: T_p \xrightarrow{\sim} T_{\tilde{p}}$, $\varphi|_{T_q}: T_q \xrightarrow{\sim} T_{\tilde{q}}$ и $\varphi|_{\Gamma_1}: \Gamma_1 \xrightarrow{\sim} \tilde{\Gamma}_1$ тоже являются изоморфизмами. Кроме того, Γ формально дискретна тогда и только тогда, когда $\tilde{\Gamma}$ формально дискретна.

Для доказательства нам потребуется следующий факт. Пусть k – натуральное число. Обозначим через $g_{z^{k+1}}^t$ преобразование за время t для потока голоморфного векторного поля $z^{k+1} \frac{d}{dz}$. Это росток конформного отображения: $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. Множество ростков $G(k) = \{\lambda g_{z^{k+1}}^t \mid \lambda \in \mathbb{C}^*, t \in \mathbb{C}\}$ образуют группу с операцией композиции. Обозначим для краткости $\lambda g_{z^{k+1}}^t$ через (λ, t) . Тогда таблица умножения для $G(k)$ имеет следующий вид:

$$(\lambda, t) \times (\mu, s) = (\lambda\mu, t\mu^k + s). \quad (9)$$

Подгруппа $C(k) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda^k = 1\}$ является центром группы $G(k)$. Положим $G_d(k) = \{\lambda g_{z^{k+1}}^t \in G(k) \mid \lambda^d = 1\}$. Тогда $G_d(k)$ – подгруппа в $G(k)$. Легко проверить, что если $h \in G_k(k)$ является элементом конечного порядка, то $h \in C(k)$.

ТЕОРЕМА А. [9, теорема 2.2, с. 66]. *Конечно порожденная неабелева разрешимая группа ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ формально эквивалентна конечно порожденной подгруппе в $G(k)$ для некоторого k .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Положим $d = \text{НОК}(n, m)$. Выберем локальный параметр z в точке $\infty \in X$ и отождествим $\mathcal{I}(X, \infty)$ с группой ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$. В силу замечания 5 из §1 $\mathcal{M}(Y) \cap \mathcal{M}(Z) = \mathbb{C}$. По теореме 2 Γ неабелева. С другой стороны, Γ_1 абелева, поэтому Γ разрешима. По теореме А Γ формально эквивалентна подгруппе в $G_d(k)$ для некоторого k . Мы имеем $T_p \cap G_k(k) \subset C(k)$, $T_q \cap G_k(k) \subset C(k)$. По теореме 4 $H_{p,q} = H_{q,p} = 1$, поэтому $T_p \cap G_k(k) = T_q \cap G_k(k) = 1$. Отсюда $\text{НОД}(n, k) = \text{НОД}(m, k) = 1$, а значит, $\text{НОД}(d, k) = 1$. Определим отображение $f: G_d(k) \rightarrow G_d(1)$ формулой $\lambda g_{z^{k+1}}^t \mapsto \lambda^k g_{z^2}^t$. Из условия $\text{НОД}(d, k) = 1$ следует биективность f . Таблица умножения (9) показывает, что f – изоморфизм.

Пусть h_p (соответственно h_q) – образующая T_p (соответственно T_q). Пусть $\varepsilon g_{z^2}^{t_1}$, $\delta g_{z^2}^{t_2}$ – элементы $G_d(1)$, соответствующие h_p и h_q ; тогда ε (соответственно δ) – первообразный корень n -й (соответственно m -й) степени из 1. Используя сопряжение в $G_d(1)$, можно считать, что $t_1 = 0$. Тогда $t_2 \neq 0$. Заметим, что отображение $\lambda g_{z^2}^t \mapsto \lambda g_{z^2}^{ct}$ ($c \in \mathbb{C}^*$) является автоморфизмом $G_d(1)$. Окончательно пара образующих принимает вид ε , $\delta g_{z^2}^1$. Ясно, что Γ' формально дискретна, если и только если Γ формально дискретна.

ЛЕММА 11. Положим $p(z) = z^n$, $q(z) = (z + 1)^m$; $n, m \geq 2$. Пусть Γ – группа, порожденная T_p и T_q . Группа Γ формально дискретна, если и только если $\text{НОК}(n, m) \in \{2, 3, 4, 6\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε (соответственно δ) – первообразный корень степени n (соответственно m) из единицы. Имеем $\varepsilon\Gamma_1 = \Gamma_1$, $\delta\Gamma_1 = \Gamma_1$ (здесь Γ_1 рассматривается как подгруппа в $\mathbb{C}$). Поэтому $e^{2\pi i/d}\Gamma_1 \subset \Gamma_1$, где $d = \text{НОК}(n, m)$. Значит, из дискретности Γ следует, что $d \in \{2, 3, 4, 6\}$. С другой стороны, $\Gamma_1 \subset \mathbb{Z}[e^{2\pi i/d}]$, и если $d \in \{2, 3, 4, 6\}$, то Γ_1 дискретна, а Γ формально дискретна.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях теоремы 5 группа Γ формально дискретна тогда и только тогда, когда $\text{НОК}(n, m) \in \{2, 3, 4, 6\}$.

ЛЕММА 12 (основная теоретико-групповая лемма). Положим $p(z) = z^n$, $q(z) = (z + 1)^m$; $n, m \geq 2$. Пусть Γ – группа, порожденная T_p и T_q . Пусть G – абстрактная группа, а U – ее подгруппа. Пусть Γ вложена в G в качестве подгруппы, причем $\Gamma U = G$, $\Gamma \cap U = 1$. Предположим, что $T_p U$ и $T_q U$ – подгруппы в G . Пусть $(n, m) \in P_1 \cup P_2 \cup P_3$, где $P_1 = \{(n, m) \mid n = m\}$, $P_2 = \{(n, m) \mid n = 2 \text{ или } m = 2\}$, а P_3 состоит из $(3, 6)$ и $(6, 3)$.

Тогда существует подгруппа U' в U такая, что $[U : U'] < \infty$ и U' – нормальная подгруппа в G .

Эта лемма будет доказана в следующем параграфе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $\text{НОК}(n, m) \in \{2, 3, 4, 6\}$ и $n, m \geq 2$, то $(n, m) \in P_1 \cup P_2 \cup P_3$.

ТЕОРЕМА 6. Рассмотрим диаграмму (2), в которой пара p, q неприводима и $\deg p > 1$, $\deg q > 1$. Пусть Γ – группа, порожденная T_p и T_q . Предположим, что Γ_1 абелева. Положим $n = \deg p$, $m = \deg q$, $\tilde{p}(z) = z^n$, $\tilde{q}(z) = (z + 1)^m$. Если $(n, m) \in P_1 \cup P_2 \cup P_3$, то существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} (Y, \infty) & \xleftarrow{p} & (X, \infty) & \xrightarrow{q} & (Z, \infty) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\mathbb{CP}^1, \infty) & \xleftarrow{\tilde{p}} & (\mathbb{CP}^1, \infty) & \xrightarrow{\tilde{q}} & (\mathbb{CP}^1, \infty) \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки – изоморфизмы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем обозначения из §2. В силу теоремы 5 мы можем применить теоретико-групповую лемму. Получаем подгруппу U' в U такую, что $[U : U'] < \infty$ и U' нормальна в G . Поле $E^{U'}$ нормально и над $\mathcal{M}(Y)$, и над $\mathcal{M}(Z)$, поэтому $E^{U'} = E$, т.е. $U' = 1$. Таким образом, $\#U < \infty$, и мы получим

диаграмму

в которой W – компактная риманова поверхность, $\mathcal{M}(W) = E$, r – непостоянное голоморфное отображение, $p \circ r$ и $q \circ r$ – накрытия Галуа. Поскольку $G \subset \text{Aut } W$, то $\# \text{Aut } W = \infty$, а значит, род W равен нулю либо единице. G действует на конечном множестве $S = r^{-1}(\infty) \subset W$. Если род W равен 1, то для каждой точки $w \in W$ группа $\{g \in \text{Aut } W \mid gw = w\}$ конечна. Поэтому группа $\{g \in \text{Aut } W \mid gS = S\}$ тоже конечна. Итак, род W равен нулю.

Положим $G_0 = \{g \in G \mid g(s) = s \text{ для каждой } s \in S\}$. Тогда $[G : G_0] < \infty$, отсюда $\#G_0 = \infty$. Это означает, что $\#S \leq 2$. По лемме 2 r не разветвлено над $\infty \in X$. Пусть $\#S = 2$. В силу п. 2) леммы 3 $\Gamma = G_0$. Можно считать, что $W = \mathbb{CP}^1$, $S = \{0, \infty\}$. Тогда $\Gamma \subset \{g \in \text{Aut } \mathbb{CP}^1 \mid g(0) = 0, g(\infty) = \infty\} \simeq \mathbb{C}^*$, а значит, Γ абелева. Противоречие. Таким образом, $\#S = 1$, т.е. r является изоморфизмом, а p и q – накрытия Галуа. Это завершает доказательство.

Теорема 3 – это частный случай теоремы 6.

§ 5. Доказательство основной теоретико-групповой леммы

Теоретико-групповая лемма была сформулирована в § 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Идея доказательства состоит в изучении действия U на множестве соотношений некоторого вида в Γ (это действие было определено в конце § 2). Положим $A = T_p \setminus \{\text{id}\}$, $B = T_q \setminus \{\text{id}\}$. Мы используем соотношения вида

$$B \cdot A = A \cdot B, \quad (10)$$

а также вида

$$A \cdot B \cdot A = B \cdot A \cdot B. \quad (11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Основная теоретико-групповая лемма выполняется в случае $n = m$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G_p = T_p U$, $G_q = T_q U$, $U_p = \{\sigma \in U \mid \sigma \tau U = \tau U \text{ для всех } \tau \in T_p\}$, $U_q = \{\sigma \in U \mid \sigma \tau U = \tau U \text{ для всех } \tau \in T_q\}$. Группа U_p – это ядро действия G_p на G_p/U . Поэтому U_p нормальна в G_p и $[U : U_p] < \infty$. Поскольку U_q нормальна в G_q , достаточно доказать, что $U_p = U_q$ (тогда U_p будет нормальной подгруппой в G).

Положим $h_p(z) = \varepsilon z$, $h_q(z) = \varepsilon z + (\varepsilon - 1)$. Здесь $h_p \in T_p$, $h_q \in T_q$, ε – первообразный корень n -й степени из 1. Рассмотрим два случая.

Случай 1: n четно.

(а) Если $n = 2$, то $U = U_p = U_q$, и доказывать нечего.

(б) Пусть $n \geq 4$. Рассмотрим множество соотношений вида (10). Если $h_q^{l_1} h_p^{l_2} = h_p^{k_1} h_q^{k_2}$, то $\varepsilon^{l_1+l_2} = \varepsilon^{k_1+k_2}$ и $\varepsilon^{l_1} - 1 = \varepsilon^{k_1}(\varepsilon^{k_2} - 1)$.

Теперь легко проверить, что соотношения вида (10) в точности следующие:

$$h_q^l h_p^{-l+\frac{n}{2}} = h_p^{l+\frac{n}{2}} h_q^{-l}, \quad (12)$$

где $2l \not\equiv 0 \pmod n$. Заметим, что в правой части соотношений (12) появляются все h_p^s ($s \not\equiv 0 \pmod{\frac{n}{2}}$). Покажем, что $U_p = U_q$. Пусть $\sigma \in U_q$; тогда σ сохраняет каждое соотношение (12), поэтому σ сохраняет h_p^i для каждого $i \not\equiv 0 \pmod{\frac{n}{2}}$. Поскольку σ сохраняет T_p и id , σ сохраняет $h_p^{n/2}$. Итак, $\sigma \in U_p$. Аналогично, $U_p \subset U_q$.

Случай 2: n нечетно.

Поскольку Γ_1 абелева, $h_q^{-l} h_p^l$ и $h_q^{-s} h_p^s$ коммутируют. Это дает соотношения

$$h_p^{l_1} h_q^{l_2} h_p^{l_3} = h_q^{-l_3} h_p^{-l_2} h_q^{-l_1}, \quad (13)$$

где $l_i \not\equiv 0 \pmod n$, $l_1 + l_2 + l_3 \equiv 0 \pmod n$. Соотношения вида (11) содержат соотношения (13). Мы не найдем все соотношения вида (11), но докажем следующую лемму.

ЛЕММА 13. *Предположим, что*

$$h_p^{l_1} h_q^{l_2} h_p^{l_3} = h_q^{k_1} h_p^{k_2} h_q^{k_3}; \quad l_i, k_i \not\equiv 0 \pmod n. \quad (14)$$

Тогда $l_1 \not\equiv k_1 \pmod n$ (напомним, что n нечетно).

Вывод случая 2 из леммы 13. Из формул (13) видно, что для любых $l_1 \not\equiv 0 \pmod n$, $k_1 \not\equiv 0 \pmod n$, $k_1 \not\equiv l_1 \pmod n$ существует соотношение вида (14) с данными l_1, k_1 . Пусть $\sigma \in U$, $\sigma h_p^s U = h_p^t U$ для некоторых s, t . Тогда σ переводит множество соотношений вида (14) таких, что $h_p^{l_1} = h_p^s$, во множество тех соотношений, у которых $h_p^{l_1} = h_p^t$. Поэтому σ переводит множество $\{h_q^j \mid j \not\equiv s \pmod n\}$ во множество $\{h_q^j \mid j \not\equiv t \pmod n\}$, а значит, $\sigma h_q^s U = h_q^t U$. Итак, для $\sigma \in U$ имеем $\sigma h_q^s U = h_q^t U \Leftrightarrow \sigma h_p^s U = h_p^t U$. Поэтому $U_p = U_q$.

Остается доказать лемму 13.

Положим $\alpha_l = h_q^l h_p^{-l}$. Тогда $\alpha_l(z) = z + (\varepsilon^l - 1)$. Пусть $h_p^{l_1} h_q^{l_2} h_p^{l_3} = h_q^{k_1} h_p^{k_2} h_q^{k_3}$; $l_i, k_i \not\equiv 0 \pmod n$. Тогда $k_2 + k_3 = l_2 + l_3$. Значит,

$$(h_q^{-l_1} h_p^{l_1})(h_q^{l_2} h_p^{-l_2}) = (h_p^{k_2} h_q^{-k_2})(h_q^{k_2+k_3} h_p^{-k_2-k_3}),$$

т.е. $(\varepsilon^{-l_1} - 1) + (\varepsilon^{l_2} - 1) = (\varepsilon^{k_2+k_3} - 1) - (\varepsilon^{k_2} - 1)$. Поэтому достаточно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 14. Пусть n нечетно, ε – первообразный корень степени n из 1.

Тогда уравнение

$$\varepsilon^{\gamma_1} + \varepsilon^{\gamma_2} + \varepsilon^{\gamma_3} = \varepsilon^\mu + 2 \quad (15)$$

не имеет решений таких, что $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \not\equiv 0 \pmod n$, (здесь $\gamma_i, \mu_i \in \mathbb{Z}$ – неизвестные).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu \equiv 0 \pmod n$, то $\varepsilon^{\gamma_1} = \varepsilon^{\gamma_2} = \varepsilon^{\gamma_3} = 1$, поэтому $\mu \not\equiv 0 \pmod n$. Идея состоит в том, чтобы усреднить по действию $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon)/\mathbb{Q})$.

Положим $K = \bigcup_m \mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ определим $\mathbb{Q}$ -линейный функционал $T_m: \mathbb{Q}(\sqrt[m]{1}) \rightarrow \mathbb{Q}$ формулой

$$T_m(z) = \frac{1}{\#H} \sum_{h \in H} h(z),$$

где $H = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})/\mathbb{Q})$.

Если $m' \mid m$, то $T_m|_{\mathbb{Q}(\sqrt[m']{1})} = T_{m'}$. Поэтому формула $T|_{\mathbb{Q}(\sqrt[m]{1})} = T_m$ корректно задает $\mathbb{Q}$ -линейный функционал $T: K \rightarrow \mathbb{Q}$.

Напомним, что если δ – первообразный корень из 1 степени m , то $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{Q}(\delta)}(\delta) = \mu(m)$, где μ – функция Мёбиуса. Поэтому $T\delta = \frac{\mu(m)}{\varphi(m)}$. Имеем

$$\varphi(1) = 1 = \varphi(2), \quad \varphi(3) = \varphi(4) = \varphi(6) = 2,$$

$\varphi(m) > 2$ для $m \neq 1, 2, 3, 4, 6$. Поэтому для нечетного $m > 1$ имеем $-1/2 \leq T\delta < 1/2$. Применяя T к (15), получим

$$\frac{3}{2} \leq 2 + T(\varepsilon^\mu) = T(\varepsilon^{\gamma_1}) + T(\varepsilon^{\gamma_2}) + T(\varepsilon^{\gamma_3}) < \frac{3}{2}.$$

Противоречие.

Предложение 4 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Основная теоретико-групповая лемма выполняется для $n = 3$, $m = 6$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – первообразный корень 6-й степени из 1. Положим $h_p(z) = \omega^2 z$, $h_q(z) = \omega z + (\omega - 1)$. Легко показать, что в этом случае соотношений вида (10) ровно два:

$$h_q h_p = h_p^2 h_q^5, \quad h_q^5 h_p^2 = h_p h_q. \quad (16)$$

Группа U действует на множестве из этих двух соотношений. Поэтому множество $A = \{h_q, h_q^5\}$ U -инвариантно. В силу п. 3) леммы 4 $A \cdot A = \{h_q^2, h_q^4, h_q^6 = \text{id}\}$ тоже U -инвариантно. Обозначим через Γ' подгруппу в Γ , порожденную T_p и $\{\text{id}, h_q^2, h_q^4\}$. Тогда Γ' инвариантна относительно U , поэтому $G' = \Gamma'U$ будет подгруппой в G . Далее, $[G : G'] = [\Gamma : \Gamma'] < \infty$. В соответствии с предложением 4 теоретико-групповая лемма выполнена для G' (в этом случае $n = m = 3$). Мы получаем подгруппу U' в U такую, что $[U : U'] < \infty$ и U' нормальна в G' . Теперь $\bigcap_{g \in G/G'} gU'g^{-1}$ будет искомой подгруппой в U .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Основная теоретико-групповая лемма выполняется для $n = 2$ и произвольного m .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma \in T_p$, $\sigma \neq 1$. Тогда группа U сохраняет σ , поэтому $\sigma T_q \sigma$ U -инвариантно. Обозначим через Γ' подгруппу в Γ , порожденную T_q и $\sigma T_q \sigma$. Тогда $G' = \Gamma' U$ – подгруппа в G , причем $[G : G'] = [\Gamma : \Gamma'] < \infty$. В силу предложения 4 теоретико-групповая лемма выполнена для G' , и искомая подгруппа в U строится так же, как в предложении 5.

Список литературы

1. Flatto L. A Theorem on Level Curves of Harmonic Functions // J. London Math. Soc. 1969. V. 1. P. 470–472.
2. Hansen L. J., Shapiro H. S. Graphs and functional equations // Ann. Acad. Sci. Fennic. Ser. A. I. Math. 1993. V. 18. P. 125–146.
3. Лысенко С. А. О функциональном уравнении $f(p(z)) = g(q(z))$, где f и g – мероморфные функции, а p и q – полиномы // Мат. физика, анализ, геометрия. 1995. Т. 2. № 1. С. 68–86.
4. Gross F. Factorization of meromorphic functions and some open problems // Lect. Notes in Math. 1977. V. 599. P. 51–67.
5. Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р. Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. № 3. С. 671–704.
6. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
7. Grauert H. On meromorphic equivalence relations // Contributions to Several Complex Variables, Aspects of Math. 1986. V. E9. P. 115–145.
8. Demazure M., Grothendieck A. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA3). Schémas en Groupes I // Lect. Notes in Math. V. 151. Springer-Verlag, 1970.
9. Elizarov P. H., Il'yashenko Yu. S., Shcherbakov A. A., Voronin S. M. Finitely generated groups of germs of one-dimensional conformal mappings and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane // Adv. Sov. Math. 1993. V. 14. P. 57–105.
10. Ritt J. F. Prime and composite polynomials // Trans. Amer. Math. Soc. 1922. P. 51–66.
11. Fuchs W. H. J., Gross F. Generalization of a theorem of A. and C. Rényi on periodic functions // Acta. Sci. Math. 1971.
12. Shapiro H. S. The functional equation $f(p(z)) = g(q(z))$ and a problem of A. and C. Rényi // Studia Sci. Math. Hungar. 1966. V. 1. P. 255–259.
13. Il'yashenko Yu. S. Nonlinear Stokes Phenomena // Adv. Sov. Math. 1993. V. 14. P. 1–55.
14. Щербаков А. А. О плотности орбиты псевдогруппы конформных отображений и обобщении теоремы Худай-Веренова // Вест. МГУ. Сер. 1. Матем. и мех. 1982. № 4. С. 10–15.

Харьков, ФТИНТ

Поступило в редакцию
8.II.1996