Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Матвеев, Методы приближенного восстановления функций, заданных на хаотических сетках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 111–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/im89>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:57:39

УДК 517.518

О. В. Матвеев

Методы приближенного восстановления функций, заданных на хаотических сетках

В работе рассматриваются методы восстановления функций n переменных по их значениям в точках хаотической сетки, которые дают наилучшую по порядку погрешность приближения функций f и их производных порядка l в $L_q(\Omega)$ на классе функций $\mathcal{W} = \{f \in W_p^k(\Omega) : \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\}$ и классах h -сеток, а также на классе функций $\mathcal{W}$ при фиксированной сетке. Получены методы интерполирования гладкими кусочно полиномиальными функциями, обладающие указанными свойствами. Приводятся порядковые оценки вычислительной сложности для этих методов.

Библиография: 68 наименований.

Введение

Допустим, что требуется приближенно восстановить функцию $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ (где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$) по известным значениям f в произвольно расположенных точках $x_1, \dots, x_N \in \bar{\Omega}$. Задача заключается в том, чтобы найти методы восстановления функций, удовлетворяющие следующим условиям:

- 1) аппроксимативные свойства, о которых говорится ниже;
- 2) интерполяция в точках $x_1, \dots, x_N$;
- 3) конструктивность, т.е. наличие алгоритма, позволяющего найти аппроксимирующую функцию в явном виде.

Через $C(\Omega)$ будем обозначать пространство непрерывных функций $g: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ с обычной нормой. Предположим, что f принадлежит пространству Соболева $W_p^k(\Omega)$, выполняются вложения $W_p^k(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$ и область Ω удовлетворяет сильному условию конуса. Для любого непустого множества $F \subset \bar{\Omega}$ положим

$$\bar{h}(F) = \sup_{x \in \Omega} \inf_{y \in F} |x - y|, \quad \underline{h}(F) = \inf_{\substack{x, y \in F \\ x \neq y}} |x - y|$$

Работа частично финансировалась Российским фондом фундаментальных исследований (гранты № 93-011-196, 95-01-00287а).

($\underline{h}(F) = \infty$, если F состоит из одной точки). Пусть $\mathbb{S}$ – множество отображений $\Gamma: W_p^k(\Omega) \times 2^{\overline{\Omega}} \rightarrow W_q^l(\Omega)$ таких, что

$$\left(g_1, g_2 \in W_p^k(\Omega), \quad F \in 2^{\overline{\Omega}}, \quad g_1(x) = g_2(x) \quad \forall x \in F \right) \Rightarrow (\Gamma(g_1, F) = \Gamma(g_2, F)),$$

$$\mathcal{W} = \{g \in W_p^k(\Omega) : \|D^k g\|_{L_p(\Omega)} \leq 1\}, \quad h > 0,$$

$\mathcal{K}$ – множество непустых конечных множеств $F \subset \overline{\Omega}$, для которых $\bar{h}(F) = h$, $\theta = k - l + \frac{n}{q} - \frac{n}{p}$ при $p \leq q$ и $\theta = k - l$ при $p > q$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. При $h < C_0$ справедливы неравенства

$$C_1 h^\theta \leq \inf_{\Gamma \in \mathbb{S}} \sup_{\substack{g \in \mathcal{W} \\ F \in \mathcal{K}}} \|D^l(g - \Gamma(g, F))\|_{L_q(\Omega)} \leq C_2 h^\theta,$$

где $C_0 = C_0(\Omega, k)$, $C_i = C_i(\Omega, k, p, q)$ ($i = 1, 2$) – некоторые положительные константы. Этот результат останется справедливым, если заменить $\mathcal{K}$ на $\mathcal{K}_\varkappa = \{F \in \mathcal{K} : \underline{h}(F) > \varkappa h\}$ при $0 < \varkappa < C_3$, где $C_3 = C_3(\Omega) > 0$.

Обозначим множество $\{x_1, \dots, x_N\}$ через Δ и будем считать, что $\bar{h}(\Delta)$ достаточно мало, т.е. $\bar{h}(\Delta) < C$, где $C = C(\Omega, k) > 0$, и что $\underline{h}(\Delta) > \varkappa \bar{h}(\Delta)$, где $\varkappa > 0$. В соответствии с предложением 1 мы будем рассматривать методы восстановления $\Gamma \in \mathbb{S}$, для которых выполняется оценка погрешности приближения

$$\|D^l(f - \varphi)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}(\Delta)^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}, \quad (1)$$

где φ – аппроксимирующая функция $\Gamma(f, \Delta)$, C – константа, зависящая от Ω , k , p , q , а также методы восстановления $\Gamma \in \mathbb{S}$, для которых выполняется оценка (1) с константой $C = C(\Omega, k, p, q, \varkappa)^1$. Оценку погрешности приближения назовем *безусловной*, если мультипликативная константа в ней не зависит от $\varkappa$, и *условной* в противном случае. Можно, далее, ввести величину

$$\sigma(F) = \inf_{\Gamma \in \mathbb{S}} \sup_{g \in \mathcal{W}} \|D^l(g - \Gamma(g, F))\|_{L_q(\Omega)}$$

(где $F \subset \overline{\Omega}$) и искать методы восстановления $\Gamma \in \mathbb{S}$, для которых имеет место неравенство

$$\|D^l(f - \varphi)\|_{L_q(\Omega)} \leq C(\Omega, k, p, q) \sigma(\Delta) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (2)$$

По предложению 1 $\sigma(\Delta) \leq C(\Omega, k, p, q) \bar{h}(\Delta)^\theta$; аналогичная оценка снизу для $\sigma(\Delta)$, вообще говоря, неверна.

¹Условие на сетки вида $\underline{h}(\Delta) > \varkappa \bar{h}(\Delta)$ появлялось и прежде, при исследовании аппроксимативных свойств конкретных методов интерполирования. Например, известно (см. [1], [2]), что последовательность кубических сплайнов одной переменной, удовлетворяющих периодическим краевым условиям и интерполирующих непрерывную функцию f на сетках Δ_i с $\bar{h}(\Delta_i) \rightarrow 0$, может не сходиться равномерно к f , но сходимости имеет место, если $\bar{h}(\Delta_i) = O(\underline{h}(\Delta_i))$. В многомерном случае оценки вида (1) с $C = C(\Omega, k, p, q, \varkappa)$ рассматривались, например, для метода Шепарда [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $k = l$ или $p \leq q$, то для любого непустого конечного множества $F \subset \bar{\Omega}$ $\sigma(F) \geq C\bar{h}(F)^\theta$, где $C = C(\Omega, k, p, q) > 0$. Если $k > l$, $p > q$, то для любых $h_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ существует такое непустое конечное множество $F \subset \Omega$, что $\bar{h}(F) < h_0$ и $\sigma(F) < \varepsilon\bar{h}(F)^\theta$.

Доказательства предложений 1, 2 даны соответственно в § 1 и § 3.

Разнообразным методам восстановления функций посвящена обширная литература. Можно выделить такие группы методов: интерполяционные полиномы [6]; сплайны в гильбертовых пространствах, являющиеся гладкими кусочно полиномиальными функциями (в том числе кусочно полиномиальные сплайны на регулярных сетках) [6]–[16]; конечные элементы [6], [16]–[28]; конструкции, использующие разложение единицы [26], [28]–[31]; метод Шепарда и его модификации [3], [6], [28], [32], [33]; метод наименьших квадратов с переменными весами [6], [28], [34], [35]; конструкции, основанные на схеме Ньютона [36]; аффинно-инвариантные методы Нильсона [37]; линейные комбинации сдвигов некоторой функции [28], [38]–[43]; D^m -сплайны [1], [2], [4]–[7], [16], [28], [39], [44]–[55]; параметрические представления [6], [7]; разрывные кусочно полиномиальные функции [6], [56]; аппроксимация в l_1 , l_2 , l_∞ [6], [39], [57]–[60]; сглаживание [6], [39], [46] и др. (интерполяцию дают методы первых одиннадцати групп). В ряде работ получены оценки погрешности приближения вида (1). Наиболее сильные из известных результатов относятся к D^m -сплайнам. D^m -сплайны на Ω были введены М. Атья [44]. D^m -сплайном на Ω называется функция

$$\varphi = \arg \min \left\{ \int_{\Omega} \sum_{\alpha \in A_m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx : g \in W_2^m(\Omega), g(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta \right\},$$

где $m > n/2$, A_m – множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = m$ и $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Для этого метода, при подходящем m , выполняется оценка (1), безусловная при $k > n/2$, $p \geq 2$, $W_2^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$ и условная в противном случае [4], [5]. Заметим, что данный метод интерполирования является линейным и коммутирует с движениями пространства. С помощью D^m -сплайнов на Ω в [5] построены базисы в пространствах $W_p^k(\Omega)$. Однако при $n > 1$ для D^m -сплайнов на Ω неизвестны какие-либо достаточно простые представления в явном виде. Ж. Дюшон [46] предложил использовать D^m -сплайны на $\mathbb{R}^n$, иначе называемые “функции тонких пластин”:

$$\varphi = \arg \min \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\alpha \in A_m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx : g \in D^{-m}L_2, g(x) = f(x) \quad \forall x \in \Delta \right\},$$

где $D^{-m}L_2$ – множество непрерывных на $\mathbb{R}^n$ функций, у которых обобщенные производные порядка m принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Если $p = 2$ и $m = k$, то для этого

метода выполняется безусловная оценка (1), причем $\varphi(x)$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i g(x - x_i) + P(x),$$

где $g(x) = |x|^{2m-n}$ при нечетном n и $g(x) = |x|^{2m-n} \ln |x|$ при четном n , P – полином степени $< m$ (по совокупности переменных), $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^N \lambda_i P'(x_i) = 0$ для любого полинома P' степени $< m$ [46], [47]. Условия интерполяции и указанные соотношения для λ_i дают систему линейных уравнений с неособенной матрицей порядка $N + \binom{m+n-1}{n}$, из которой могут быть найдены λ_i и коэффициенты P . Добавим, что для D^m -сплайнов на $\mathbb{R}^n$, при подходящем m , справедливо неравенство

$$\|D^l(f - \varphi)\|_{L_q(\Omega')} \leq C \bar{h}(\Delta)^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)},$$

где Ω' – произвольное замкнутое подмножество Ω , $C = C(\Omega, \Omega', k, p, q)$ при $k > n/2$, $p \geq 2$, $W_2^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$ и $C = C(\Omega, \Omega', k, p, q, \varkappa)$ в противном случае (это вытекает из результатов [4]). В [3] изучался метод Шепарда; из результатов [3] следует (если учесть оценку модуля непрерывности в $C(\Omega)$ функции $f \in W_p^k(\Omega)$ [61, с. 103–106]), что для этого метода выполняется условная оценка (1) при $k = 1$, $l = 0$, $q = \infty$. Кроме того, при различных дополнительных предположениях неравенства вида (1) рассматривались для следующих конструкций: кусочно полиномиальные сплайны – в случае регулярной сетки Δ [16] (т.е. $\Delta = F_1 \times \dots \times F_n$, где $F_i \subset \mathbb{R}$); модификация метода Шепарда [3] – здесь при построении φ используются значения некоторых производных функции f в точках x_i (последнее относится и к большинству конечно-элементных конструкций).

Теперь кратко охарактеризуем результаты работы. В работе получены три новых метода восстановления функций, основанные на различных идеях. Первый из них дает оценку (1), безусловную при $l = 0$ и условную при $l > 0$, второй – оценку (1), безусловную при $k > n/2$, $p \geq 2$, $W_2^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$ и условную в противном случае, третий – оценку (2) (и, тем более, безусловную оценку (1)) во всех случаях. Для первого метода также имеет место оценка через модуль непрерывности

$$\|D^l(f - \varphi)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}(\Delta)^\theta \omega(D^k f, \bar{h}(\Delta))_{L_p(\Omega)}, \quad (3)$$

безусловная при $l = 0$ и условная при $l > 0$, а для второго метода выполняется условная оценка (3). В каждом из трех методов φ интерполирует f на Δ . Далее, аппроксимирующая функция φ определена на некотором кубе K , содержащем $\bar{\Omega}$, и является кусочно полиномиальной относительно разбиения K на меньшие кубы. При нахождении φ используются следующие операции: арифметические действия, сравнение двух чисел, а в первом и втором методах, кроме того, проверка принадлежности точки $x \in \mathbb{R}^n$ к области Ω .

По асимптотической вычислительной сложности лучшим является первый метод: он требует $\leq C \underline{h}(\Delta)^{-n} |\ln \underline{h}(\Delta)|$ операций для нахождения φ , второй метод – $\leq C \underline{h}(\Delta)^{-2n}$ операций, третий – $\leq \exp(C \underline{h}(\Delta)^{-n} |\ln \underline{h}(\Delta)|)$ операций, где $C = C(\Omega, k)$. Можно обеспечить непрерывность производных φ порядка $\leq t$, где t – любое заданное число (при этом константы в оценках будут зависеть также от t). Первый и второй методы линейны.

Отметим, что в настоящей статье существенно усилены результаты предыдущей работы автора [62], в которой также рассматривались задачи, связанные с приближенным восстановлением функций.

§ 1. Методы, основанные на локальной аппроксимации полиномами

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Мы будем использовать такие обозначения: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < r\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$; $e_i(a)$ – i -я координата точки a , $|a|_1 = \max_{1 \leq j \leq s} |e_j(a)|$, $|a|_2 = |e_1(a)| + \dots + |e_s(a)|$, $a^\alpha = e_1(a)^{e_1(\alpha)} \dots e_s(a)^{e_s(\alpha)}$, где $i, s \in \mathbb{N}$, $i \leq s$, $a \in \mathbb{R}^s$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^s$ (считаем $0^0 = 1$); $\mathcal{P}_k$ – множество полиномов от n переменных степени $\leq k$ по совокупности переменных, $\mathcal{P}'_k$ – множество полиномов от n переменных степени $\leq k$ по каждой переменной, где $k \in \mathbb{Z}_+$; $g|_F$ – сужение функции g на множество F ; $W_p^k(G)$ – пространство Соболева с нормой

$$\|g\|_{W_p^k(G)} = \max_{|\alpha|_2 \leq k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)},$$

где G – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p \leq \infty$, мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. Предположим, что Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая сильному условию конуса [63, с. 118] (или, что эквивалентно, ограниченная область с минимально гладкой границей [64, с. 224]).

Пусть $d, L, \delta \in \mathbb{R}$, $\sup_{x, y \in \Omega} |x - y| \leq d$, $L > 1$, $0 < \delta < 1$ и для любого $x \in \partial\Omega$ существуют специальная липшицева область Λ_x с константой Липшица, не превосходящей L [64, с. 215], и движение $\mathbb{O}_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\Omega \cap B(x, \delta) = \mathbb{O}_x(\Lambda_x) \cap B(x, \delta).$$

Предположим также, что выполняются вложения $W_p^k(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$, $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_q^l(\Omega)$, $f \in W_p^k(\Omega)$, $m, t, N \in \mathbb{N}$, $m < t$, $x_1, \dots, x_N$ – попарно различные точки $\overline{\Omega}$, $\bar{h}(\Delta) < h^*$, где $\Delta = \{x_1, \dots, x_N\}$,

$$h^* = h^*(n, L, \delta, m) = \frac{\delta}{80nLm^{2nm^2}},$$

и $f(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, N}$). Условия на $n, \Omega, d, L, \delta, k, l, p, q, f, m, t, N, x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$, приведенные выше, считаются выполненными на протяжении всей работы.

В работе будут рассмотрены алгоритмы для нахождения функции φ , аппроксимирующей f . Прежде всего точно определим подходящий класс алгоритмов.

Обозначим через $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_6$ следующие операции: $\mathfrak{A}_1(a, b) = a + b$, $\mathfrak{A}_2(a, b) = a - b$, $\mathfrak{A}_3(a, b) = ab$, $\mathfrak{A}_4(a, b) = a/b$ при $b \neq 0$ и $\mathfrak{A}_4(a, b) = 0$ при $b = 0$, $\mathfrak{A}_5(a, b) = 1$ при $a \leq b$ и $\mathfrak{A}_5(a, b) = 0$ при $a > b$, $\mathfrak{A}_6(a_1, \dots, a_n) = 1$ при $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega$ и $\mathfrak{A}_6(a_1, \dots, a_n) = 0$ при $(a_1, \dots, a_n) \notin \Omega$ (здесь $a, b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$).

Пусть $\mathcal{A}$ – алфавит, включающий цифры от 0 до 9, скобки (и), запятую, точку с запятой и знак равенства. Слово в алфавите $\mathcal{A}$, имеющее вид “ $(a; b_1, \dots, b_s)$ ” (при $s = 0$ просто “ (a) ”) или “ (a, b, c) ”, где $a, b_1, \dots, b_s, b, c$ – натуральные числа (в десятичной записи), $s \in \mathbb{Z}_+$, будем называть *именем переменной*. *Командой* назовем слово в алфавите $\mathcal{A}$ вида

$$“A = B(C, D); E” \quad (4)$$

или

$$“A = 6(B); E”, \quad (5)$$

где A, C, D – имена переменных, B – натуральное число, причем в (4) $B \leq 5$, E – либо натуральное число, либо имя переменной. Множество всех двойных последовательностей вида $\{u_{ij} : i \in \mathbb{Z}_+, j \in \mathbb{N}\}$, где $u_{ij} : \mathbb{N}^i \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторые функции (при $i = 0$ u_{ij} – элемент $\mathbb{R}$), обозначим через $\mathfrak{M}$. Определим функцию $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ так: $\chi(x) = x$ при $x \in \mathbb{N}$ и $\chi(x) = 1$ при $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Если A – имя переменной и $U = \{u_{ij}\} \in \mathfrak{M}$, положим $\zeta(A, U) = u_{sa}(b_1, \dots, b_s)$ в случае, когда A есть “ $(a; b_1, \dots, b_s)$ ”, и $\zeta(A, U) = u_{rb}(n_1, \dots, n_r)$, где $r = \chi(u_{0a})$, $n_i = \chi(u_{1c}(i))$ ($i = \overline{1, r}$), в случае, когда A есть “ (a, b, c) ”. Если A – имя переменной, $U \in \mathfrak{M}$ и $\xi \in \mathbb{R}$, обозначим через $\Sigma(A, U, \xi)$ двойную последовательность $\{u'_{ij}\} \in \mathfrak{M}$, полученную из $U = \{u_{ij}\}$ изменением значения только одной из функций u_{ij} в одной точке, а именно, значение $\zeta(A, U)$ заменяется на ξ .

Предположим, что имеется некоторая конечная последовательность команд $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s\}$ ($s \in \mathbb{N}$) и $U \in \mathfrak{M}$. Построим по индукции последовательности $U_0, U_1, \dots \in \mathfrak{M}$ и $m_0, m_1, \dots \in \mathbb{R}$. Положим $U_0 = U$, $m_0 = 1$ и допустим, что уже определены U_r и m_r . Если $m_r \notin \{1, \dots, s\}$, полагаем $U_{r+1} = U_r$, $m_{r+1} = m_r$. Пусть $m_r \in \{1, \dots, s\}$. Если команда $\mathcal{B}_{m_r}$ имеет вид (4), берем

$$U_{r+1} = \Sigma\left(A, U_r, \mathfrak{A}_B(\zeta(C, U_r), \zeta(D, U_r))\right),$$

а если $\mathcal{B}_{m_r}$ имеет вид (5) и $U_r = \{u_{ij}\}$, полагаем

$$U_{r+1} = \Sigma\left(A, U_r, \mathfrak{A}_6(u_{1B}(1), \dots, u_{1B}(n))\right);$$

в обоих случаях $m_{r+1} = E$, если E – натуральное число, и $m_{r+1} = \zeta(E, U_r)$, если E – имя переменной. Условимся говорить, что *конечная последовательность команд* $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s\}$ *преобразует* U *в* V ($\in \mathfrak{M}$) *за время* T , если T является минимальным элементом множества $\{i \in \mathbb{N} : m_i \notin \{1, \dots, s\}\}$ и $U_T = V$.

Далее, пусть $\mathcal{M}$ – множество всех подмножеств $\{1, 2, 3, 4\}$, $\Theta \in \mathcal{M}$ и Ξ – некоторая конечная последовательность команд. Выпишем элементы Θ в порядке возрастания: $j_1, \dots, j_s$ ($0 \leq s \leq 4$). Обозначим через $\pi_1, \dots, \pi_4$ соответственно величины L, p, m, t , через X_0 – конечную последовательность

$$\{n, N, \pi_{j_1}, \dots, \pi_{j_s}, e_1(x_1), \dots, e_n(x_1), \dots, e_1(x_N), \dots, e_n(x_N), y_1, \dots, y_N\},$$

а через X – пару (X_0, Ω) . Определим $U = \{u_{ij}\} \in \mathfrak{M}$ так: $u_{01} = n$, $u_{02} = N$, $u_{0i} = \pi_{j_i-2}^{-1}$ ($i = \overline{3, s+2}$), $u_{11}(i) = y_i$ ($i = \overline{1, N}$), $u_{21}(i, j) = e_i(x_j)$ ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, N}$), а все остальные значения $u_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_i)$ возьмем равными 0. Если существуют такие $V = \{v_{ij}\} \in \mathfrak{M}$ и $T \in \mathbb{N}$, что $v_{01} = n$, $v_{02} > 0$, $v_{03}, v_{04} \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset Q$,

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : v_{11}(i) < e_i(x) < v_{11}(i) + v_{02}v_{03} \quad (i = \overline{1, n})\},$$

и Ξ преобразует U в V за время T , положим $\tau(\Xi, X) = T$. В противном случае положим $\tau(\Xi, X) = \infty$. В первом случае обозначим через $\varphi_{\Xi X}$ следующую кусочно полиномиальную функцию:

$$\varphi_{\Xi X}(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha|_1 \leq v_{04}}} v_{2n,1}(e_1(\alpha), \dots, e_n(\alpha), e_1(\beta), \dots, e_n(\beta)) x^{\alpha-\gamma} \quad \forall x \in Q_\beta$$

при $\beta \in \mathbb{N}^n$, $|\beta|_1 \leq v_{03}$, где $\gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n$ и

$$Q_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n : v_{11}(i) + v_{02}(e_i(\beta) - 1) \leq e_i(x) < v_{11}(i) + v_{02}e_i(\beta) \quad (i = \overline{1, n})\}.$$

Областью определения $\varphi_{\Xi X}$ является куб Q , содержащий Ω . Теперь заметим, что если заставить величины $n, d, L, \delta, k, l, p, q, m, t, N, x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N$, область Ω и функцию f меняться произвольным образом при соблюдении всех наложенных на них условий, то X будет пробегать некоторое множество, которое мы обозначим $\mathfrak{N}_\Theta$. Назовем конечную последовательность команд Ξ Θ -допустимой, если $\tau(\Xi, Y) < \infty$ при любом $Y \in \mathfrak{N}_\Theta$. Итак, любая пара

$$(\Theta, \Xi), \tag{6}$$

где $\Theta \in \mathcal{M}$ и Ξ – Θ -допустимая конечная последовательность команд, задает алгоритм с областью применимости $\mathfrak{N}_\Theta$, который перерабатывает X в $\varphi_{\Xi X}$.

Мы рассмотрим три алгоритма данного класса, приводящие к аппроксимирующим функциям φ_1 , φ_2 и φ_3 (в работе эти алгоритмы представлены, разумеется, не в виде последовательности команд, а в виде словесного описания, из которого нетрудно получить соответствующую последовательность команд). Будем говорить, что для нахождения φ_i ($i = 1, 2, 3$) по заданным $\pi_{j_1}, \dots, \pi_{j_s}$, $f|_{\Delta}$ требуется $\leq r$ операций $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_6$, если соответствующий алгоритм определяется парой (6), где $\Theta = \{j_1, \dots, j_s\}$ и $\tau(\Xi, X) \leq r$; если, кроме того, Ξ не содержит команды вида (5), то будем говорить "... требуется $\leq r$ операций $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_5$ ".

Сейчас установим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть даны некоторые $\xi_{a\alpha} \in \mathbb{R}$ ($a, \alpha \in \mathbb{Z}^n$). Существует единственный полином $P \in \mathcal{P}'_{2t+1}$ такой, что $D^\alpha P(a) = \xi_{a\alpha}$ ($a, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|a|_1 \leq 1$, $|\alpha|_1 \leq t$). Существует единственная функция $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям:

- а) на любом кубе $x + [0, 1]^n$, $x \in \mathbb{Z}^n$, g совпадает с некоторым полиномом из $\mathcal{P}'_{2t+1}$;
- б) производные $D^\alpha g$, $|\alpha|_1 \leq t$, непрерывны на $\mathbb{R}^n$;
- в) $D^\alpha g(a) = \xi_{a\alpha}$ ($a \in \mathbb{Z}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha|_1 \leq t$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $j = 0, t$ определим функцию $g_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ так: $g_j(x) = 0$ при $x \notin [-1, 1]$, $g_j(x) = \bar{P}(x)$ при $x \in [0, 1]$, $g_j(x) = (-1)^j \bar{P}(-x)$ при $x \in [-1, 0]$, где $\bar{P}$ – полином степени $\leq 2t + 1$ такой, что $\bar{P}^{(j)}(0) = 1$, $\bar{P}^{(i)}(0) = 0$ ($0 \leq i \leq t, i \neq j$), $\bar{P}^{(i)}(1) = 0$ ($0 \leq i \leq t$). Если $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha_0|_1 \leq t$ и $\xi_{0\alpha_0} = 1$, $\xi_{a\alpha} = 0$ при $a, \alpha \in \mathbb{Z}^n$, $(a, \alpha) \neq (0, \alpha_0)$, то функция

$$g(x) = \prod_{i=1}^n g_{e_i(\alpha_0)}(e_i(x)) \quad (x \in \mathbb{R}^n),$$

очевидно, удовлетворяет условиям а), б), в). Тем самым существование g установлено для любых $\xi_{a\alpha}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов полинома $P \in \mathcal{P}'_{2t+1}$ по произвольно заданным значениям производных $D^\alpha P(a)$ ($a, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|a|_1 \leq 1$, $|\alpha|_1 \leq t$). По уже доказанному такая система всегда имеет решение, а так как число уравнений равно числу неизвестных, это решение единственно. Лемма доказана.

Зададим порядок на множестве $\mathbb{R}^s$ (где $s \in \mathbb{N}$): $x < y$, если существует такое $j \in \mathbb{N}$, $j \leq s$, что $e_i(x) = e_i(y)$ при $1 \leq i < j$ и $e_j(x) < e_j(y)$ ($x, y \in \mathbb{R}^s$). Кубом мы будем называть множество Q вида $a + (0, r)^n$, или $a + [0, r)^n$, или $a + [0, r]^n$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$; вершинами (ребрами, центром) куба Q будем называть вершины (соответственно ребра, центр) куба $a + [0, r]^n$. Введем следующие обозначения: $\bar{h} = \bar{h}(\Delta)$, $\underline{h} = \underline{h}(\Delta)$; $c(Q)$ – центр куба Q ; $B_\lambda(a, r) = (\lambda\Omega) \cap B(a, r)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, r > 0$; $|J|$ – число элементов конечного множества J ; A^T – матрица,

транспонированная по отношению к матрице A ; $\psi_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\psi_1(x) \geq 0$ при $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi_1(x) = 1$ при $|x| \leq 1/2$, $\text{supp } \psi_1 \subset B(0, 1)$;

$$\psi_2(x) = \psi_1(x) \left(\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \psi_1\left(x - \frac{y}{n}\right) \right)^{-1};$$

v – функция g , удовлетворяющая условиям а), б) леммы 1, равная 1 на $[0, 1]^n$ и равная 0 на $\mathbb{R}^n \setminus [-1, 2]^n$; если Q – куб $a + [0, r)^n$, то $v_Q(x) = v\left(\frac{x-a}{r}\right)$;

$$\|D^k g\|_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_2=k} \|D^\alpha g\|_{L_p(G)},$$

$$\omega(D^k g, r)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_2=k} \sup_{|a|<r} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(x+a)\|_{L_p(G_a)},$$

$$\tilde{\omega}(D^k g, r)_{L_p(G)} = \max_{|\alpha|_2=k} \|D^\alpha g(x) - D^\alpha g(y)\|_{L_p(G'_r)},$$

где $g \in W_p^k(G)$, $r > 0$, $G_a = \{x \in G : x+a \in G\} \subset \mathbb{R}^n$, $G'_r = \{(x, y) : x, y \in G, |x-y| < r\} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Как нетрудно проверить,

$$\underline{h} \leq 2\bar{h}. \quad (7)$$

ЛЕММА 2. Пусть $F = \left(\frac{1}{m-1}\mathbb{Z}^n\right) \cap [0, 1]^n$ при $m > 1$ и $F = \{0\}$ при $m = 1$, G – непустое подмножество $\mathbb{R}^n$, $P \in \mathcal{P}'_{m-1}$,

$$\sup_{x \in F} \inf_{y \in G} |x - y|_1 \leq m^{-2nm^2}, \quad \sup_{x \in G} |P(x)| \leq 1.$$

Тогда модули коэффициентов полинома P не превосходят m^{2nm^2} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $m = 1$ тривиален, поэтому будем считать $m \geq 2$. Выпишем элементы множества $\mathbb{Z}^n \cap [0, m)^n \subset \mathbb{R}^n$ в порядке возрастания: $\alpha_1, \dots, \alpha_s$, где $s = m^n$. Пусть β_i – некоторый элемент множества $\text{Arg min}\{|x - \alpha_i|_1 : x \in (m-1)\bar{G}\}$ ($i = \overline{1, s}$). Положим $a_{ij} = \alpha_i^{\alpha_j}$, $b_{ij} = \beta_i^{\alpha_j}$ ($i, j = \overline{1, s}$), $c_{ij} = (i-1)^{j-1}$ ($i, j = \overline{1, m}$) и обозначим через A, B, C соответственно матрицы $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij})$. Через $\|D\|$ будем обозначать максимальную сумму модулей элементов строки матрицы D . Поскольку $A = C \otimes \dots \otimes C$ (кронекерово произведение n матриц C) и $\det C \geq (m-1)!$, имеем

$$\|A^{-1}\| = \|C^{-1}\|^n \leq (m \cdot |\det C|^{-1} \cdot (m-1)!(m-1)^{(m-1)^2})^n \leq m^{nm^2}.$$

Используя неравенство

$$|a_1 \dots a_j - b_1 \dots b_j| \leq j \max_{1 \leq i \leq j} |a_i - b_i| (\max\{|a_i|, |b_i| : i = \overline{1, j}\})^{j-1}$$

(где $j \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$), получаем

$$\|A - B\| \leq sn(m-1)(m-1)m^{-2nm^2}m^{n(m-1)-1} \leq \frac{1}{2}m^{-nm^2} \leq \frac{1}{2}\|A^{-1}\|^{-1}.$$

Отсюда следует [65, с. 207], что матрица B неособенна и

$$\|B^{-1}\| \leq 2\|A^{-1}\| \leq 2m^{nm^2}.$$

Это означает, что модули коэффициентов полинома $P(\frac{x}{m-1})$ не превосходят $2m^{nm^2}$; отсюда получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3. *Для любых $x \in \overline{\Omega}$ и $r \in (0, \delta/4]$ существует такое $y \in \mathbb{R}^n$, что $|x - y| = r$ и $B(y, \frac{r}{2L}) \subset \Omega$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : e_n(x) > L \left(\sum_{i=1}^{n-1} e_i(x)^2 \right)^{1/2} \right\}.$$

По определению L, δ для данного $x \in \overline{\Omega}$ существует такое движение $\mathbb{O}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, что $\mathbb{O}(0) = x$ и $\mathbb{O}(\Lambda) \cap B(x, \delta/2) \subset \Omega$. Можно взять $y = \mathbb{O}(z)$, где $z = (0, \dots, 0, r) \in \mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть $\lambda \geq 1$, $g \in W_p^k(\lambda\Omega)$, $a \in \mathbb{R}^n$. Существуют такие полиномы $P_1 \in \mathcal{P}_k$ и $P_2 \in \mathcal{P}_{k-1}$, что при $r \geq 1$*

$$\|g - P_1\|_{W_p^k(B_\lambda(a, r))} \leq C_1 r^{C_2} \tilde{\omega}(D^k g, C_4)_{L_p(B_\lambda(a, C_3 r))},$$

$$\|g - P_2\|_{W_p^k(B_\lambda(a, r))} \leq C_1 r^{C_2} \|D^k g\|_{L_p(B_\lambda(a, C_3 r))},$$

где $C_i = C_i(n, d, L, \delta, k)$, $i = \overline{1, 4}$ (т.е. C_i — некоторые константы, зависящие только от n, d, L, δ, k).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы установлено в [5, лемма 3] с той разницей, что предполагается $a \in \lambda\Omega$ и в левых частях неравенств вместо $B_\lambda(a, r)$ стоит компонента $B_\lambda(a, r)$, содержащая a (в формулировке леммы 3 из [5] сказано, что константы C_i зависят от Ω и k , но из доказательства ясно, что они зависят именно от n, L, δ, k). Нужно только учесть, что при наших условиях две различные точки $x, y \in \Omega$ можно соединить ломаной, содержащейся в $\Omega \cap B(x, C|x - y|)$, где $C = C(d, L, \delta)$ (в [5] допускаются неограниченные области Ω). Лемма доказана.

ЛЕММА 5. При условиях предыдущей леммы:

1) выполняется неравенство

$$\|g\|_{W_q^l(B_\lambda(a,1))} \leq C_1 \|g\|_{W_p^k(B_\lambda(a,2))};$$

2) если для любого $x \in B_\lambda(a,2)$ существует такое $y \in \lambda\bar{\Omega}$, что $|x - y| \leq \frac{\delta}{12nLk^{2nk^2}}$ и $g(y) = 0$, то

$$\|g\|_{W_p^k(B_\lambda(a,1))} \leq C_2 \|D^k g\|_{L_p(B_\lambda(a,C_3))}.$$

Здесь $C_i = C_i(n, d, L, \delta, k, p, q)$ ($i = 1, 2, 3$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу теоремы продолжения [64, с. 214] имеют место вложения $W_p^k(B(0,1)) \rightarrow W_q^l(B(0,1))$ и $W_p^k((0,1)^n) \rightarrow C((0,1)^n)$.

1) Существует линейный оператор продолжения $\Pi_\Omega: W_p^k(\Omega) \rightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n)$, норма которого не превосходит $C(n, L, \delta, k)$ [64, с. 224–227]. Норма аналогичного оператора $\Pi_{\lambda\Omega}$ для области $\lambda\Omega$ также не превосходит $C(n, L, \delta, k)$. Полагая $g_1(x) = g(x)\psi_1\left(\frac{x-a}{2}\right)$ ($x \in \lambda\Omega$) и $g_2 = \Pi_{\lambda\Omega}(g_1)$, имеем

$$\begin{aligned} \|g\|_{W_q^l(B_\lambda(a,1))} &\leq \|g_2\|_{W_q^l(B(a,1))} \leq C_1 \|g_2\|_{W_p^k(B(a,1))} \\ &\leq C_2 \|g_1\|_{W_p^k(\lambda\Omega)} \leq C_3 \|g\|_{W_p^k(B_\lambda(a,2))}, \end{aligned}$$

где $C_i = C_i(n, L, \delta, k, p, q)$.

2) Считая множество $B_\lambda(a,1)$ непустым, выберем в нем некоторую точку b . По лемме 3 для некоторого $c \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|b - c| = \frac{\delta}{4}, \quad B\left(c, \frac{\delta}{8L}\right) \subset \lambda\Omega.$$

Положим

$$Q_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|_1 < \frac{\delta}{8nL}\right\}, \quad Q_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - c|_1 < \frac{\delta}{24nL}\right\},$$

$$H = \{x \in Q_1 : g(x) = 0\}.$$

Тогда

$$Q_1 \subset B_\lambda(a,2), \tag{8}$$

$$\sup_{x \in Q_2} \inf_{y \in H} |x - y| \leq \frac{\delta}{12nL} k^{-2nk^2}. \tag{9}$$

Далее $C_i = C_i(n, d, L, \delta, k, p)$. Согласно лемме 4 существует такой полином $P \in \mathcal{P}_{k-1}$, что

$$\|g - P\|_{W_p^k(B_\lambda(a, 2))} \leq C_1 \|D^k g\|_{L_p(B_\lambda(a, C_2))}. \quad (10)$$

В силу (8), (10)

$$\sup_{x \in H} |P(x)| \leq \|g - P\|_{L_\infty(Q_1)} \leq C_3 \|g - P\|_{W_p^k(Q_1)} \leq C_4 \|D^k g\|_{L_p(B_\lambda(a, C_2))}. \quad (11)$$

Из (9), (11) по лемме 2 получаем

$$\|P\|_{W_p^k(B_\lambda(a, 1))} \leq C_5 \|D^k g\|_{L_p(B_\lambda(a, C_2))}. \quad (12)$$

Неравенства (10), (12) дают требуемую оценку. Лемма доказана.

Мы переходим к изложению алгоритма для нахождения функции φ_1 . Нам понадобятся такие обозначения:

$$\mu_i^- = \min_{1 \leq j \leq N} e_i(x_j), \quad \mu_i^+ = \max_{1 \leq j \leq N} e_i(x_j) \quad (i = \overline{1, n}); \quad \mu = \max_{1 \leq i \leq n} (\mu_i^+ - \mu_i^-);$$

$$I_Q = \{i \in \mathbb{N} : i \leq N, x_i \in Q\} \quad (Q \subset \mathbb{R}^n);$$

$$x_0 = (\mu_1^- - 1, \dots, \mu_n^- - 1) \in \mathbb{R}^n; \quad K = x_0 + (0, \mu + 2)^n;$$

$$\Phi_s = \left\{ x_0 + \frac{\mu + 2}{2^s} (a + [0, 1)^n) : a \in \mathbb{Z}_+^n, |a|_1 < 2^s \right\},$$

$$\Psi_s = \left(x_0 + \frac{\mu + 2}{2^s} \mathbb{Z}^n \right) \cap \overline{K} \quad (s \in \mathbb{Z}_+);$$

при $Q \in \Phi_s$ $\Phi(Q)$ – множество кубов $Q' \in \Phi_s$, имеющих общую с Q вершину; $\Psi(Q)$ – множество вершин куба Q . Сначала находим величины μ_i^-, μ_i^+ ($i = \overline{1, n}$), μ . Затем находим множества I_Q для всех $Q \in \Phi_s$ последовательно при $s = 0, 1, \dots$ следующим образом. Предположим, что при некотором s для любого $Q \in \Phi_s$ найдено множество I_Q (имеется в виду, что оно задано в виде последовательности, в которой элементы I_Q идут в порядке возрастания). Будем перебирать все кубы из Φ_s . Допустим, что мы остановились на некотором $Q \in \Phi_s$. Имеем $Q = \bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i$, где Q_i – некоторые элементы Φ_{s+1} . Для каждого $i = \overline{1, 2^n}$ мы, перебирая все точки x_j , $j \in I_Q$, проверяем, принадлежит ли x_j кубу Q_i . В результате найдем множества I_Q для всех $Q \in \Phi_{s+1}$. Сразу же после того как найдены I_Q для всех $Q \in \Phi_s$ при некотором s , проверяем выполнение двух условий:

- 1) существует такое $Q \in \Phi_s$, что $c(Q) \in \Omega$ и $I_Q = \emptyset$;
- 2) для любого $Q \in \Phi_s$ $\sum_{Q' \in \Phi(Q)} |I_{Q'}| \leq 1$.

Если оба условия выполнены, то процесс заканчивается; в противном случае переходим от s к $s+1$. Заметим, что первое условие выполняется, по крайней мере, при $\frac{\mu+2}{2^s} < \frac{1}{2n}\underline{h}$ (множество $\Omega \setminus \Delta$ содержит открытый шар радиуса $\frac{1}{2}\underline{h}$, так как Ω содержит открытый шар радиуса $\delta/(8L)$ (лемма 3), в котором должно быть не менее двух точек Δ ввиду $\bar{h} < \delta/(16L)$), а второе условие заведомо выполняется при $\frac{\mu+2}{2^s} < \frac{1}{3n}\underline{h}$. Пусть s_0 – наименьшее $s \in \mathbb{Z}_+$, при котором выполнено условие 1), $s_1 = s_0 - 1 (\geq 0)$, s_2 – наименьшее $s \in \mathbb{Z}_+$, при котором выполнены условия 1), 2).

Далее, будем перебирать все кубы из Φ_{s_1} . Допустим, что мы остановились на некотором $Q \in \Phi_{s_1}$. Возьмем минимальный элемент в каждом непустом множестве $I_{Q'}$, где $Q' \in \Phi_{s_1}$,

$$|c(Q) - c(Q')|_1 < 7nLm^{2nm^2} \frac{\mu + 2}{2^{s_1}};$$

эти элементы образуют множество G_Q . Положим

$$P_Q = \arg \min \left\{ \sum_{i \in G_Q} (P(x_i) - y_i)^2 : P \in \mathcal{P}_{m-1} \right\}, \quad (13)$$

если минимизирующий элемент в (13) единствен, и $P_Q = 0$ в противном случае. Для каждого $x \in \Psi_{s_2} \cap K \cap Q$ положим $\bar{P}_x = P_Q$. Таким образом, для любого $x \in \Psi_{s_2} \cap K$ мы определили полином $\bar{P}_x \in \mathcal{P}_{m-1}$; при $x \in \Psi_{s_2} \setminus K$ возьмем $\bar{P}_x = 0$. Для любого $Q \in \Phi_{s_2}$ найдем такой полином $S_Q \in \mathcal{P}'_{2t+1}$, что $D^\alpha S_Q(x) = D^\alpha \bar{P}_x(x)$ при $x \in \Psi(Q)$, $|\alpha|_1 \leq t$ (лемма 1).

Теперь определим функцию φ_1 на каждом кубе $Q \in \Phi_{s_2}$ так: если $\sum_{Q' \in \Phi(Q)} |I_{Q'}| = 0$, то $\varphi_1(x) = S_Q(x)$ при $x \in Q$, а если $\sum_{Q' \in \Phi(Q)} |I_{Q'}| = 1$ и Q' – куб из $\Phi(Q)$, содержащий точку $x_j \in \Delta$, то

$$\varphi_1(x) = S_Q(x) + (y_j - S_{Q'}(x_j))v_{Q'}(x)$$

при $x \in Q$. Функция φ_1 определена на кубе K , содержащем $\bar{\Omega}$ (так как $\bar{h} < 1$).

Учитывая неравенства

$$\begin{aligned} s_2 &\leq C(n, d) |\ln \underline{h}|, \\ \sum_{Q \in \Phi_s} |I_Q| &= N \leq C(n, d) \underline{h}^{-n} \quad (s \leq s_2), \end{aligned} \quad (14)$$

$$|\Phi_s| \leq C(n, d) \underline{h}^{-n} \quad (s \leq s_2),$$

$$|G_Q| \leq C(n, L, m) \quad (Q \in \Phi_{s_1}),$$

закключаем, что для нахождения φ_1 по заданным $L, m, t, f|_\Delta$ требуется $\leq C(n, d, L, t) \underline{h}^{-n} |\ln \underline{h}|$ операций $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_6$. Ясно, что φ_1 имеет непрерывные на K производные порядка $\leq t$ (лемма 1) и $\varphi_1(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, N}$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varkappa > 0$, $\underline{h} > \varkappa \bar{h}$. Выполняются неравенства

$$\|D^l(f - \varphi_1)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \quad (15)$$

при $k < m$ и

$$\|D^l(f - \varphi_1)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}$$

при $k = m$, где $C = C(n, d, L, \delta, p, q, t)$ при $l = 0$ и $C = C(n, d, L, \delta, p, q, t, \varkappa)$ при $l > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функцию φ_1 , соответствующую f , будем обозначать через $\varphi_1(f)$. Положим $\rho_i = (\mu + 2)/2^{s_i}$ ($i = 1, 2$). Очевидно, $\frac{1}{2} \frac{\mu+2}{2^{s_0}} \leq \bar{h}$. Если $\frac{\mu+2}{2^{s_2}} < \frac{1}{6n} \underline{h}$, то на основании сказанного выше условия 1), 2) выполнены при $s = s_2 - 1$, что неверно. Итак, справедливы неравенства

$$\frac{1}{6n} \underline{h} \leq \rho_2 \leq \rho_1 \leq 4\bar{h}. \quad (16)$$

Допустим, что $Q_0 \in \Phi_{s_2}$, $\bar{\Omega} \cap Q_0 \neq \emptyset$, $y \in \Psi(Q_0)$; тогда $y \in K$ (это вытекает из неравенств $\bar{h} < 1/5$ и (16)). Пусть Q – куб из Φ_{s_1} , содержащий y , и $a \in \bar{\Omega} \cap Q_0$. По лемме 3 ($r = 3nLm^{2nm^2}\rho_1 \leq 12nLm^{2nm^2}\bar{h} \leq \delta/4$) для некоторого $b \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|a - b| = 3nLm^{2nm^2}\rho_1, \quad B\left(b, \frac{3}{2}nm^{2nm^2}\rho_1\right) \subset \Omega;$$

кроме того, $|c(Q) - a| \leq 2n\rho_1$ (так как $\rho_1 \geq \rho_2$), следовательно, куб

$$Q_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x - b|_1 \leq \frac{1}{2}(m^{2nm^2} + 1)\rho_1\right\}$$

содержится в $\Omega \cap B(c(Q), 7nLm^{2nm^2}\rho_1)$. Существует замкнутый куб Q_2 с ребрами длины $m^{2nm^2}\rho_1$, параллельными осям координат, и вершинами, принадлежащими Ψ_{s_1} , такой, что

$$Q_2 \subset Q_1 \subset \Omega \cap B(c(Q), 7nLm^{2nm^2}\rho_1). \quad (17)$$

Если $Q' \in \Phi_{s_1}$, $Q' \subset Q_2$, то в силу (17) $Q' \cap \{x_i : i \in G_Q\} \neq \emptyset$, поэтому

$$\sup_{x \in Q_2} \inf_{i \in G_Q} |x - x_i|_1 \leq \rho_1. \quad (18)$$

Далее $C_i = C_i(n, d, L, \delta, p, q, t)$. Учитывая (14), (17), (18) и применяя лемму 2, получаем, что минимизирующий элемент в (13) единствен (при данном Q) и

$$\|P_Q\|_{L_\infty(Q_0)} \leq C_1 \max_{i \in G_Q} |y_i|.$$

Отсюда и из (16) следует, что для любого $y \in \Psi(Q_0)$

$$\|\bar{P}_y\|_{L_\infty(Q_0)} \leq C_1 \|f\|_{L_\infty(B_1(c(Q_0), C_2 \bar{h}))},$$

откуда

$$\|S_{Q_0}\|_{L_\infty(Q_0)} \leq C_3 \|f\|_{L_\infty(B_1(c(Q_0), C_2 \bar{h}))}.$$

Последнее неравенство установлено для любого куба $Q_0 \in \Phi_{s_2}$ такого, что либо $\Omega \cap Q_0 \neq \emptyset$, либо $\Delta \cap Q_0 \neq \emptyset$. Оно приводит к оценке

$$\|\varphi_1(f)\|_{L_\infty(Q)} \leq C_4 \|f\|_{L_\infty(B_1(c(Q), C_5 \bar{h}))} \quad (19)$$

для любого куба $Q \in \Phi_{s_2}$, имеющего непустое пересечение с Ω .

Предположим, что $k < m$. Пусть η – константа C_4 из леммы 4, $\lambda = (\eta + 1)/\bar{h} (\geq 1)$, для любой функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ $g^*(x) = g(\frac{x}{\lambda})$ при $x \in \lambda X$ (где $X \subset \mathbb{R}^n$), $H = \{x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}^n : B_\lambda(x, 1) \neq \emptyset\}$, $z \in H$, P_1 – такой полином из $\mathcal{P}_{m-1}$, что

$$\|f^* - P_1\|_{W_p^k(B_\lambda(z, r))} \leq C_6 r^{C_7} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_8 r))} \quad (20)$$

при $r \geq 1$ (лемма 4), $f_0(x) = f(x) - P_1(\lambda x)$, $J = \{\text{Int}(\lambda Q) : Q \in \Phi_{s_2}, (\lambda Q) \cap B_\lambda(z, 1) \neq \emptyset\}$. Из (16), (19), (20) и леммы 5, 1) (в которой нужно заменить W_q^l на W_∞^0) следует

$$\begin{aligned} \|D^l \varphi_1(f_0)^*\|_{L_q(B_\lambda(z, 1))} &\leq |J|^{1/q} \max_{Q \in J} \|D^l \varphi_1(f_0)^*\|_{L_q(\Omega)} \\ &\leq C_9 \left(\frac{\bar{h}}{\rho_2}\right)^{n/q} \max_{Q \in J} \left(C_{10} \left(\frac{\bar{h}}{\rho_2}\right)^{l-n/q} \|\varphi_1(f_0)^*\|_{L_\infty(Q)}\right) \\ &\leq C_{11} \left(\frac{\bar{h}}{\rho_2}\right)^l \|f_0^*\|_{L_\infty(B_\lambda(z, C_{12}))} \\ &\leq C_{13} \varkappa^{-l} \|f_0^*\|_{W_p^k(B_\lambda(z, C_{14}))} \\ &\leq C_{15} \varkappa^{-l} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_{16}))}. \end{aligned} \quad (21)$$

Применяя лемму 5, 1) и учитывая (20), получаем

$$\|D^l f_0^*\|_{L_q(B_\lambda(z, 1))} \leq C_{17} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_{18}))}. \quad (22)$$

Выше было установлено, что если $Q_0 \in \Phi_{s_2}$, $\bar{\Omega} \cap Q_0 \neq \emptyset$, то $\Psi(Q_0) \subset K$ и для любого куба $Q \in \Phi_{s_1}$, содержащего вершину Q_0 , минимизирующий элемент в (13) единствен. Отсюда следует, что данный метод сохраняет полиномы $P \in \mathcal{P}_{m-1}$,

т.е. $\varphi_1(P) = P$ на Ω для любого $P \in \mathcal{P}_{m-1}$. Кроме того, $\varphi_1(f)$ линейно зависит от f , поэтому

$$f^* - \varphi_1(f)^* = f_0^* - \varphi_1(f_0)^* \quad (23)$$

(на $\lambda\Omega$). Пусть $\iota = 0$ при $p \leq q$ и $\iota = 1$ при $p > q$. Согласно (21)–(23) и (7)

$$\begin{aligned} \|D^l(f^* - \varphi_1(f)^*)\|_{L_q(\lambda\Omega)} &\leq \left(\sum_{z \in H} \|D^l(f^* - \varphi_1(f)^*)\|_{L_q(B_\lambda(z,1))}^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq |H|^{\iota(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\sum_{z \in H} \|D^l(f^* - \varphi_1(f)^*)\|_{L_q(B_\lambda(z,1))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{19} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \kappa^{-l} \left(\sum_{z \in H} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_{20}))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{21} \kappa^{-l} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(\lambda\Omega)} \\ &\leq C_{22} \kappa^{-l} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \omega(D^k f^*, \eta)_{L_p(\lambda\Omega)} \end{aligned}$$

(здесь считается, что $p, q < \infty$, но это ограничение, очевидно, несущественно). Переходя к функциям на Ω , получим неравенство (15).

В случае $k = m$ в предыдущих рассуждениях нужно заменить полином P_1 на P_2 (когда мы применяем лемму 4 к функции f^*), ω и $\tilde{\omega}$ – на соответствующие нормы. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При $l > 0$ безусловная оценка (1) для данного метода не выполняется. Действительно, предположим, что $f(x) = \cos e_1(x)$, $l > 0$. Возьмем некоторый шар $B(a, \frac{\delta}{8L}) \subset \Omega$ (лемма 3) и точку $b \in \Delta \cap B(a, \frac{\delta}{16L})$ ($\bar{h} < \frac{\delta}{16L}$). Пусть Q_0 – куб из Φ_{s_0} , содержащий b , Q_1 – куб из Φ_{s_1} , содержащий Q_0 . Выберем замкнутый шар $B_0 \subset (\text{Int } Q_0) \cap B(a, \frac{\delta}{16L}) \setminus \Delta$ и такой замкнутый шар $B_1 \subset \text{Int } B_0$, что $f(x) \neq P_{Q_1}(x)$ для любого $x \in B_1$. Будем считать, что i – достаточно большое натуральное число. Запишем множество $B_1 \cap (\frac{1}{i}\mathbb{Z}^n)$ в виде $\{a_{i1}, \dots, a_{iN_i}\}$. Если заменить последовательность точек $\{x_1, \dots, x_N\}$ на $\{x_1, \dots, x_{N+N_i}\}$, где $x_{N+j} = a_{ij}$ ($j = \overline{1, N_i}$), то, как легко видеть, K, s_1, P_Q ($Q \in \Phi_{s_1}$) не изменяются, а s_2, S_Q ($Q \in \Phi_{s_2}$), φ_1 заменяются соответственно на s_{2i}, S_{Q_i} ($Q \in \Phi_{s_{2i}}$), φ_{1i} . Для любого куба $Q \in \Phi_{s_{2i}}$, имеющего непустое пересечение с B_0 , имеем $\Psi(Q) \subset Q_1 \cap K$ и, следовательно, $S_{Q_i} = P_{Q_1}$. Поэтому при $x \in B_0$

$$\varphi_{1i}(x) = P_{Q_1}(x) + \sum_{j=1}^{N_i} (f(a_{ij}) - P_{Q_1}(a_{ij})) v_{Q_{ij}}(x),$$

где Q_{ij} – куб из $\Phi_{s_{2i}}$, содержащий a_{ij} . Заметим, что: множества $\text{Int supp } v_{Q_{ij}}$, $j = \overline{1, N_i}$, попарно не пересекаются и содержатся в B_0 ; $\lim_{i \rightarrow \infty} l_i = 0$ и $N_i l_i^n \geq C$, где l_i – длина ребра куба Q_{ij} , $C > 0$ не зависит от i ; $|f(a_{ij}) - P_{Q_1}(a_{ij})| \geq C$, где $C > 0$ не зависит от i, j . Получаем отсюда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|D^l \varphi_{1i}\|_{L_q(\Omega)} = \infty$$

при условии, что $\varphi_{1i} \in W_q^l(\Omega)$.

Мы приведем еще четыре метода интерполирования функций, основанных на локальной аппроксимации полиномами. Как и выше, здесь используются полиномы вида

$$P_z = \arg \min \left\{ \sum_{x \in J_z} (P(x) - f(x))^2 : P \in \mathcal{P}_{m-1} \right\},$$

где $z \in \overline{\Omega}$, J_z – некоторое подмножество $\Delta \cap B(z, C_1 \bar{h})$, причем $|J_z| \leq C_2$ и

$$\|P\|_{L_\infty(B(z, \bar{h}))} \leq C_3 \max_{x \in J_z} |P(x)| \quad \forall P \in \mathcal{P}_{m-1},$$

$C_i = C_i(n, L, m)$ ($i = 1, 2, 3$). Эти методы *локальны* (в том смысле, что значение аппроксимирующей функции φ в точке $x \in \Omega$ не зависит от значений, принимаемых функцией f вне шара $B(x, C\bar{h})$, где константа C не зависит от f, Δ, x), линейны и сохраняют полиномы $P \in \mathcal{P}_{m-1}$. Для них проходят рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, так что для каждого из указанных ниже методов выполняются оценки (3) (при $k < m$) и (1) (при $k = m$), безусловные при $l = 0$ и условные при $l > 0$.

Обозначим через $\tilde{P}_z(x)$ полином, равный $P_{b_z}(x) - P_{b_z}(b_z) + f(b_z)$, где $b_z \in \text{Arg min}\{|z - x| : x \in \Delta\}$ ($z \in \mathbb{R}^n$).

1) *Разложение единицы*. Полагаем

$$\varphi(x) = \sum_{z \in \frac{1}{2\pi} h \mathbb{Z}^n} \tilde{P}_z(x) \psi_2\left(\frac{2}{h}(x - z)\right).$$

2) *Конечные элементы*. Предположим, что $n = 2$. Пусть J – множество всех квадратов вида $\frac{1}{6}h(x + [0, 1]^2)$, $x \in \mathbb{Z}^2$, для любого $Q \in J$ U_Q – объединение квадратов из J , пересекающихся с Q , Q_i – некоторый квадрат из J , содержащий точку x_i ($i = \overline{1, N}$). Множества U_{Q_i} , $i = \overline{1, N}$, попарно не пересекаются. Соединяя каждую точку множества $(\partial U_{Q_i}) \cap (\frac{1}{6}h\mathbb{Z}^2)$ отрезком с x_i , получим разбиение квадрата U_{Q_i} на треугольники ($i = \overline{1, N}$). Каждый квадрат $Q \in J$, не содержащийся в $\bigcup_{i=1}^N U_{Q_i}$, разобьем диагональю на два треугольника. Мы получили триангуляцию плоскости, причем каждая точка Δ является вершиной некоторого треугольника и величины углов треугольников ограничены снизу положительной

абсолютной константой. Пусть T – какой-либо из получившихся треугольников, l_1, l_2, l_3 – стороны T , a_1, a_2, a_3 – вершины T , a – центр тяжести T , $a_{s1}^j, \dots, a_{ss}^j$ – точки, делящие отрезок l_j на $(s+1)$ равных частей ($j = 1, 2, 3$, $s \in \mathbb{N}$). Функция φ равна на T полиному $P \in \mathcal{P}_{4t+1}$, удовлетворяющему условиям:

$$D^\alpha P(a) = D^\alpha \tilde{P}_a(a) \quad (|\alpha|_2 \leq t-2),$$

$$D^\alpha P(a_j) = D^\alpha \tilde{P}_{a_j}(a_j) \quad (j = 1, 2, 3, \quad |\alpha|_2 \leq 2t),$$

$$\frac{\partial^s}{\partial \nu_j^s} P(a_{si}^j) = \frac{\partial^s}{\partial \nu_j^s} \tilde{P}_{a_{si}^j}(a_{si}^j) \quad (j = 1, 2, 3, \quad s = \overline{1, t}, \quad i = \overline{1, s}),$$

где ν_j – направление, ортогональное к l_j . Такой полином P существует и единствен, причем φ имеет непрерывные на $\mathbb{R}^2$ производные порядка $\leq t$ (см., например, [18]).

3) Модификация метода Шепарда. Полагаем

$$\varphi(x) = \left(\sum_{i=1}^N \tilde{P}_{x_i}(x) \psi_1\left(\frac{x-x_i}{2h}\right) |x-x_i|^{-2} \right) \left(\sum_{i=1}^N \psi_1\left(\frac{x-x_i}{2h}\right) |x-x_i|^{-2} \right)^{-1}$$

(эта функция бесконечно дифференцируема в окрестности $\overline{\Omega}$).

4) Свертка с гладкой функцией. Пусть $r = \frac{1}{2nt^2}h$, $g(x) = \tilde{P}_a(x)$ при $x \in a + [0, r]^n$ ($a \in r\mathbb{Z}^n$), χ – характеристическая функция куба $[0, 1]^n$, A – оператор свертки с функцией $r^{-n}\chi(\frac{x}{r})$, I – единичный оператор, $B = I - (I - A^{t+1})^m$. Функция φ равна $B(g)$. Она имеет непрерывные на $\mathbb{R}^n$ производные порядка $\leq t$ и является кусочно полиномиальной относительно разбиения $\mathbb{R}^n$ на кубы $a + [0, r]^n$, $a \in r\mathbb{Z}^n$. Выполнение условий интерполяции вытекает из того, что оператор B сохраняет полиномы $P \in \mathcal{P}_{m-1}$.

По используемой технике методы 1)–3) сходны с некоторыми известными ранее конструкциями (см. введение).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обозначим через s_3 наименьшее $s \in \mathbb{N}$, для которого $\frac{\mu+2}{2^s} < \frac{1}{2n}h$, через $\mathcal{V}$ – множество функций $g: \overline{K} \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что:

- 1) на каждом кубе $Q \in \Phi_{s_3}$ g совпадает с некоторым полиномом из $\mathcal{P}'_{2t+1}$;
- 2) производные $D^\alpha g$, $|\alpha|_1 \leq t$, непрерывны на $\overline{K}$.

Если $k < t$, то существует функция $g \in \mathcal{V}$, интерполирующая f на Δ , для которой

$$\|D^k g\|_{L_p(K)} \leq C(n, d, L, \delta, p, t) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Действительно, существует линейный оператор продолжения $\Pi: W_p^k(\Omega) \rightarrow W_p^k(\mathbb{R}^n)$ с нормой, не превосходящей $C(n, L, \delta, k)$ [64, с. 224–227]. Полагая $f = \Pi(f - P) + P$ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, где $P \in \mathcal{P}_{k-1}$,

$$\|f - P\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C(n, d, L, \delta, k) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}$$

(лемма 4), получим продолжение f на $\mathbb{R}^n$, причем

$$\|D^k f\|_{L_p(B(0,r))} \leq C(n, d, L, \delta, k) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}$$

для любого $r > 0$. Пусть

$$J_z = z + \frac{\mu + 2}{2^{s_3}} (\mathbb{Z}^n \cap [0, k)^n),$$

$$P_z = \arg \min \left\{ \sum_{x \in J_z} (P(x) - f(x))^2 : P \in \mathcal{P}_{k-1} \right\}$$

при $z \in \mathbb{R}^n$, g_0 – такая функция из $\mathcal{V}$, что $D^\alpha g_0(x) = D^\alpha P_x(x)$ при $x \in \Psi_{s_3}$, $|\alpha|_1 \leq t$ (лемма 1), Q_i – куб из Φ_{s_3} , содержащий точку x_i ($i = \overline{1, N}$). С помощью рассуждений, аналогичных доказательству теоремы 1, убеждаемся, что функция

$$g(x) = g_0(x) + \sum_{i=1}^N (y_i - g_0(x_i)) v_{Q_i}(x)$$

дает требуемый результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Существуют такие $\rho^* = \rho^*(\Omega) > 0$, $\varkappa^* = \varkappa^*(\Omega) > 0$, что при $0 < \rho < \rho^*$

$$\{F \in 2^\Omega : F \neq \emptyset, \bar{h}(F) = \rho, \underline{h}(F) > \varkappa^* \rho\} \neq \emptyset$$

(см. [5, замечание 3]). Будем считать, что $0 < h < \min\{\rho^*, \frac{1}{2}h^*(n, L, \delta, k)\}$, $0 < \varkappa < \varkappa^*$. Ниже $C_i = C_i(\Omega, k, p, q) > 0$. Для любого непустого конечного множества $F \subset \bar{\Omega}$ определим число $N(F) \in \mathbb{N}$ и точки $x_i(F) \in \mathbb{R}^n$ ($i = \overline{1, N(F)}$) следующим образом. Сначала представляем F в виде $\{a_1, \dots, a_s\}$. Затем полагаем: $F_1 = \{a_1\}$; при $1 \leq i < s$ $F_{i+1} = F_i \cup \{a_{i+1}\}$, если $\min_{x \in F_i} |a_{i+1} - x| > \bar{h}(F)$, и $F_{i+1} = F_i$ в противном случае. Теперь

$$F_s = \{x_1(F), \dots, x_{N(F)}(F)\}.$$

Ясно, что $\bar{h}(F_s) \leq 2\bar{h}(F)$, $\underline{h}(F_s) \geq \bar{h}(F)$. Определим метод восстановления $\Gamma_0 \in \mathbb{S}$ так. Пусть $g \in W_p^k(\Omega)$, $F \in 2^{\bar{\Omega}}$. Если F – непустое конечное множество и $\bar{h}(F) < \frac{1}{2}h^*(n, L, \delta, k)$, то $\Gamma_0(g, F)$ – функция φ_1 , получающаяся при $m = k$, $t = k + 1$, $N = N(F)$, $x_i = x_i(F)$, $y_i = g(x_i(F))$ ($i = \overline{1, N(F)}$), а в противном случае $\Gamma_0(g, F) = 0$. По теореме 1 для любых $g \in \mathcal{W}$, $F \in \mathcal{K}$

$$\|D^l(g - \Gamma_0(g, F))\|_{L_q(\Omega)} \leq C_1 h^\theta.$$

Пусть F_0 – непустое подмножество Ω , для которого $\bar{h}(F_0) = h$, $\underline{h}(F_0) > \varkappa^* h$. Существуют натуральное число $r > C_2 h^{-n}$ и точки $b_1, \dots, b_r \in \mathbb{R}^n$ такие, что шары $B(b_i, C_3 h)$ ($i = \overline{1, r}$) попарно не пересекаются и содержатся в $\Omega \setminus F_0$. Положим

$$g_1(x) = \psi_1\left(\frac{x - b_1}{C_3 h}\right), \quad g_2(x) = \sum_{i=1}^r \psi_1\left(\frac{x - b_i}{C_3 h}\right), \quad g_0(x) = \|D^k g_\iota\|_{L_p(\Omega)}^{-1} g_\iota(x),$$

где $\iota = 1$ при $p \leq q$ и $\iota = 2$ при $p > q$. Поскольку $g_0(x) = 0$ на F_0 , для любого $\Gamma \in \mathbb{S}$ имеем

$$\sup_{\substack{g \in \mathcal{W} \\ F \in \mathcal{K}_\varkappa}} \|D^l(g - \Gamma(g, F))\|_{L_q(\Omega)} \geq \max \left\{ \|D^l(g_0 - \Gamma(0, F_0))\|_{L_q(\Omega)}, \right. \\ \left. \|D^l(0 - \Gamma(0, F_0))\|_{L_q(\Omega)} \right\} \geq \frac{1}{2} \|D^l g_0\|_{L_q(\Omega)} \geq C_4 h^\theta.$$

Предложение доказано.

§ 2. D^m -сплайны в конечномерных пространствах

В этом параграфе мы будем считать, что $n < 2m$, $W_2^m(\Omega)$ вложено в $W_q^l(\Omega)$, $\varkappa > 0$, $\underline{h} > \varkappa \bar{h}$. Будут использоваться обозначения μ_i^-, μ_i^+ ($i = \overline{1, n}$), $\mu, K, s_3, \mathcal{V}$, введенные в § 1.

Положим

$$\|g\|_G = \left(\int_G \sum_{|\alpha|_2=m} \frac{m!}{\alpha!} (D^\alpha g)^2 dx \right)^{1/2}$$

при $g \in W_2^m(G)$, $\rho = (\mu + 2)/2^{s_3}$, $\Phi = \Phi_{s_3}$, $\Psi = \Psi_{s_3}$ (см. § 1).

D^m -сплайн в конечномерном пространстве $\mathcal{L} \subset W_2^m(\Omega)$ – это решение вариационной задачи вида

$$\min \{ \|g\|_\Omega : g \in \mathcal{L}, \quad g(x_i) = y_i \quad (i = \overline{1, N}) \}.$$

Известно [5], что при $\bar{h} < C_1$ D^m -сплайн

$$S(f, \Delta) = \arg \min \{ \|g\|_\Omega : g \in W_2^m(\Omega), \quad g(x_i) = y_i \quad (i = \overline{1, N}) \}$$

существует и единствен и выполняются оценки:

$$\|D^l(f - S(f, \Delta))\|_{L_q(\Omega)} \leq C_2 \bar{h}^\theta \omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \quad (24)$$

в случае $k < m$ и

$$\|D^l(f - S(f, \Delta))\|_{L_q(\Omega)} \leq C_2 \bar{h}^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} \quad (25)$$

в случае $k = m$, где $C_1 = C_1(\Omega, m) > 0$, $C_2 = C_2(\Omega, p, q, m)$ при $k = m$, $p \geq 2$ и $C_2 = C_2(\Omega, p, q, m, \kappa)$ при $k < m$ или $p < 2$.

Наша цель – показать, что выполняются те же оценки, если вместо $S(f, \Delta)$ взять функцию $\tilde{S}(f, \Delta)$, являющуюся решением задачи

$$\min\{\|g\|_{\tilde{\Omega}} : g \in \mathcal{V}, \quad g(x_i) = y_i \quad (i = \overline{1, N})\},$$

где $\tilde{\Omega}$ – некоторая близкая к Ω область, представляющая собой внутренность полиэдра, $\Omega \subset \tilde{\Omega} \subset K$. Преимущество сплайна $\tilde{S}(f, \Delta)$ заключается, очевидно, в том, что его можно найти в явном виде, решив систему линейных уравнений с разреженной матрицей.

Если $\mathcal{L}$ – подходящее пространство кусочно полиномиальных функций, относительно разбиения $\mathbb{R}^n$ на кубы $a + [0, 1)^n$, $a \in \mathbb{Z}^n$, то D^m -сплайн в $\mathcal{L}_r = \{g(\frac{x}{r})|_{\Omega} : g \in \mathcal{L}\}$ при малом $r > 0$ можно рассматривать как приближение к $S(f, \Delta)$. Тогда возникает вопрос о порядке малости r относительно $\underline{h}$, при котором в оценках (24), (25) можно заменить $S(f, \Delta)$ D^m -сплайном в $\mathcal{L}_r$; с точки зрения вычислительной сложности лучше всего было бы, естественно, взять $r \asymp \underline{h}$. Первый результат в этой области, в котором $r \asymp \underline{h}$, если $p \leq 2 \leq q$ или $q \leq 2 \leq p$, и $r \asymp \underline{h}^{6n+7}$ в противном случае, приведен в работе автора [62]. Этот результат был получен методом, основанным на исследовании гладкостных свойств сплайна $S(f, \Delta)$. Отметим, что некоторые общие соображения, касающиеся D^m -сплайнов в конечномерных пространствах, имеются в [49].

Нам понадобится следующий вариант метода Ланцоша (см. [66]).

ЛЕММА 6. Пусть $A\xi = b$ – совместная система линейных уравнений с симметрической $(s \times s)$ -матрицей A , $b \neq 0$ и $u_1 = b$,

$$u_{i+1} = Au_i - \lambda_i^{-1}(u_i, Au_i)u_i - \lambda_{i-1}^{-1}(u_{i-1}, Au_i)u_{i-1}, \quad i \geq 1$$

(при $i = 1$ последнее слагаемое отсутствует), где $\lambda_i = (u_i, u_i)$, (a_1, a_2) – скалярное произведение векторов $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^s$. Тогда при некотором $s' \leq s$ имеем $u_1, \dots, u_{s'} \neq 0$, $u_{s'+1} = 0$. Положим $r_{ij} = (u_i, Au_j)$ при $j - i = 0$ или $j - i = 1$, $r_{ij} = (u_i, u_j)$ при $j - i = -1$, $r_{ij} = 0$ при $|j - i| > 1$ ($i, j = \overline{1, s'}$) и обозначим через R, U матрицы (r_{ij}) , $(u_1, \dots, u_{s'})$ соответственно. Тогда $\det R \neq 0$ и $\xi = UR^{-1}U^T b$ есть решение системы $A\xi = b$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\text{Lin}(a_1, \dots, a_r)$ будем обозначать линейное подпространство $\mathbb{R}^s$, порожденное векторами $a_1, \dots, a_r$. Допустим, что мы получили ненулевые попарно ортогональные векторы $u_1, \dots, u_i$. Тогда вектор u_{i+1} ортогонален каждому из них. Действительно, при $1 \leq j \leq i-2$ u_j ортогонален u_i , u_{i-1} и Au_i (так как $(u_j, Au_i) = (Au_j, u_i)$, $Au_j \in \text{Lin}(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \subset \text{Lin}(u_1, \dots, u_{i-1})$; считаем $u_0 = 0$), поэтому $(u_j, u_{i+1}) = 0$, а равенства $(u_i, u_{i+1}) = (u_{i-1}, u_{i+1}) = 0$ очевидны. Следовательно, при некотором $s' \leq s$ имеем $u_1, \dots, u_{s'} \neq 0$, $u_{s'+1} = 0$, векторы $u_1, \dots, u_{s'}$ попарно ортогональны. В силу $u_{s'+1} = 0$ подпространство $\text{Lin}(u_1, \dots, u_{s'})$ инвариантно относительно оператора $\xi \rightarrow A\xi$.

Обозначим через B оператор $\xi \rightarrow A\xi$, действующий в пространстве $\text{Lin}(u_1, \dots, u_{s'})$, через $\mathcal{L}_A$ – пространство $\{A\xi : \xi \in \mathbb{R}^s\}$. Из $u_1, \dots, u_i \in \mathcal{L}_A$ ($1 \leq i \leq s'$) следует $u_{i+1} \in \mathcal{L}_A$, поэтому $\text{Lin}(u_1, \dots, u_{s'}) \subset \mathcal{L}_A$ ($u_1 \in \mathcal{L}_A$ по условию). Кроме того, поскольку A – симметрическая матрица, из $A^2\xi = 0$ ($\xi \in \mathbb{R}^s$) следует $A\xi = 0$, так что B – обратимый оператор. Пусть $d_{ij} = \lambda_i^{-1}$ при $i = j$ и $d_{ij} = 0$ при $i \neq j$ ($i, j = \overline{1, s'}$), D – матрица (d_{ij}) . Ясно, что матрица оператора B в базисе $u_1, \dots, u_{s'}$ есть DR (т.е. $AU = UDR$), поэтому $\det R \neq 0$. Ввиду $b \in \text{Lin}(u_1, \dots, u_{s'})$ существует решение системы $A\xi = b$ вида $\xi = U\xi'$, где $\xi' \in \mathbb{R}^{s'}$; тогда

$$R\xi' = U^T UDR\xi' = U^T AU\xi' = U^T A\xi = U^T b.$$

Таким образом, $\xi = UR^{-1}U^T b$ есть решение системы $A\xi = b$. Лемма доказана.

Алгоритм для нахождения аппроксимирующей функции φ_2 выглядит так. Находим величины μ_i^-, μ_i^+ ($i = \overline{1, n}$), $\mu, \underline{h}^2, s_3, \rho$. Считая $\Psi \times \mathbb{Z}_+^n$ подмножеством $\mathbb{R}^{2n}$ (если $a \in \Psi$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то паре $(a, \alpha) \in \Psi \times \mathbb{Z}_+^n$ соответствует точка $(e_1(a), \dots, e_n(a), e_1(\alpha), \dots, e_n(\alpha)) \in \mathbb{R}^{2n}$), выпишем все элементы множества $\Psi \times \{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : |\alpha|_1 \leq t\}$ в порядке возрастания: $(c_1, \gamma_1), \dots, (c_M, \gamma_M)$. Пусть w_i ($i = \overline{1, M}$) – функция из $\mathcal{V}$, для которой $D^{\gamma_i} w_i(c_i) = 1$, $D^{\gamma_j} w_i(c_j) = 0$ при $1 \leq j \leq M$, $j \neq i$ (лемма 1), F – объединение кубов $Q \in \Phi$ таких, что

$$\{x \in \Psi : |x - c(Q)|_1 \leq 4nL\rho\} \cap \Omega \neq \emptyset.$$

Находим величины

$$d_{ij} = \int_F \sum_{|\alpha|_2=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha w_i D^\alpha w_j dx$$

($i, j = \overline{1, M}$) и $e_{ij} = w_i(x_j)$ ($i = \overline{1, M}$, $j = \overline{1, N}$), учитывая, что $w_i(x) = 0$ на кубе $Q \in \Phi$, если c_i не является вершиной Q . Обозначим через D, E матрицы (d_{ij}) , (e_{ij}) соответственно, через $A = (a_{ij})$ – матрицу

$$\begin{pmatrix} D & E \\ E^T & 0 \end{pmatrix},$$

через b -вектор $(\underbrace{0, \dots, 0}_M, y_1, \dots, y_N)^T$. Находим множества $J_i = \{j \in \mathbb{N} : j \leq M + N, a_{ij} \neq 0\}$ ($i = \overline{1, M+N}$). Затем, пользуясь леммой 6, находим решение $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{M+N})^T$ системы линейных уравнений $A\xi = b$ (совместность этой системы будет установлена ниже, в ходе доказательства теоремы 2). При этом нужно учесть, что для любого вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{M+N})^T$ $A\nu = \nu'$, где $\nu' = (\nu'_1, \dots, \nu'_{M+N})^T$, $\nu'_i = \sum_{j \in J_i} a_{ij}\nu_j$ ($i = \overline{1, M+N}$). Обращение трехдиагональной матрицы R из леммы 6 осуществляется обычным методом Гаусса. Наконец, $\varphi_2 = \sum_{i=1}^M \xi_i w_i$.

Поскольку $M + N \leq C(n, d, t) \underline{h}^{-n}$, $|J_i| \leq C(n)$ ($i = \overline{1, M+N}$), $n < 2t$, для нахождения φ_2 по заданным $L, m, t, f|_{\Delta}$ требуется $\leq C(d, L, t) \underline{h}^{-2n}$ операций $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_6$ ². Как легко видеть, $\varphi_2 \in \mathcal{V}$ и $\varphi_2(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, N}$).

ТЕОРЕМА 2. *Выполняются неравенства:*

$$\|D^l(f - \varphi_2)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \omega(D^k f, \bar{h})_{L_p(\Omega)} \quad (26)$$

при $k < m$ и

$$\|D^l(f - \varphi_2)\|_{L_q(\Omega)} \leq C \bar{h}^\theta \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} \quad (27)$$

при $k = m$, где $C = C(d, L, \delta, p, q, t)$ при $k = m$, $p \geq 2$ и $C = C(d, L, \delta, p, q, t, \kappa)$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $k < M$. Функцию φ_2 , соответствующую f , будем обозначать через $\varphi_2(f)$. Ниже $C_i = C_i(d, L, \delta, p, q, t) > 0$. Пусть $G = \text{Int } F$, η – константа C_4 из леммы 4, $\lambda = (\eta + 1)/\bar{h} (\geq 1)$, $H = \{x \in (1/n)\mathbb{Z}^n : B_\lambda(x, 1) \neq \emptyset\}$, $y, z \in H$, для любой функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ $g^*(x) = g(x/\lambda)$ при $x \in \lambda X$ (где $X \subset \mathbb{R}^n$), P_1 – такой полином из $\mathcal{P}_{m-1}$, что

$$\|f^* - P_1\|_{W_p^k(B_\lambda(z, r))} \leq C_1 r^{C_2} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_3 r))} \quad (28)$$

при $r \geq 1$ (лемма 4), $f_z(x) = f(x) - P_1(\lambda x)$, $f_{yz}(x) = f_z(x)\psi_2(\lambda x - y)$. Допустим, что $Q \in \Phi$, $\bar{\Omega} \cap \bar{Q} \neq \emptyset$, и возьмем точку $a \in \bar{\Omega} \cap \bar{Q}$. По лемме 3 ($r = 2nL\rho \leq L\bar{h} \leq 2L\bar{h} \leq \delta/4$) существует $a' \in \mathbb{R}^n$, для которого $|a - a'| = 2nL\rho$, $B(a', n\rho) \subset \Omega$. Шар $B(a', n\rho)$ содержит некоторую точку $a'' \in \Psi$; поскольку $|a'' - c(Q)|_1 \leq 4nL\rho$, имеем $Q \subset F$. Следовательно,

$$\Omega \subset G \quad (29)$$

(так как $\Omega \subset K$). Ввиду $n < 2m$ $W_2^m(\Omega)$ вложено в $C(\Omega)$ (см. [63, с. 145]). Нетрудно проверить, что

$$\sup_{x \in \Omega} \inf_{x' \in \Delta \setminus B(c, \bar{h})} |x - x'| \leq 6\bar{h} \quad (30)$$

²Если условие $n < 2m$, наложенное в §2, не выполнено, то полагаем $\varphi_2 = 0$.

для любого $c \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\zeta = \frac{\delta}{72nLm^{2nm^2}\bar{h}} \quad (\geq 1),$$

$a, c \in \mathbb{R}^n$, $g \in W_2^m(\zeta\Omega)$, $g(x) = 0$, на $(\zeta\Delta) \setminus B(c, \zeta/\lambda)$, то в силу (30)

$$\sup_{x \in \zeta\Omega} \inf_{x' \in (\zeta\Delta) \setminus B(c, \zeta/\lambda)} |x - x'| \leq 6\bar{h}\zeta = \frac{\delta}{12nLm^{2nm^2}}$$

и по лемме 5, 2) (в которой нужно заменить W_p^k на W_2^m)

$$\|g\|_{W_2^m(B_\zeta(a,1))} \leq C_4 \|D^m g\|_{L_2(B_\zeta(a, C_5))}.$$

Поэтому для любых точек $a, c \in \mathbb{R}^n$ и любой функции $g \in W_2^m(\lambda\Omega)$, равной нулю на $(\lambda\Delta) \setminus B(c, 1)$, справедливо неравенство

$$\|g\|_{W_2^m(B_\lambda(a,1))} \leq C_6 \|D^m g\|_{L_2(B_\lambda(a, C_7))}. \quad (31)$$

В частности, любой полином из $\mathcal{P}_{m-1}$, равный нулю на Δ , тождественно равен нулю. Заметим, далее, что:

1) вариационная задача

$$\min \{ \|g\|_G : g \in \mathcal{V}, \quad g(x_i) = y_i \quad (i = \overline{1, N}) \} \quad (32)$$

(представляющая собой задачу минимизации полунормы на линейном многообразии конечномерного пространства, непустом по замечанию 2) имеет решение;

2) если g_1 и g_2 – два решения задачи (32), то $g_1 = g_2$ на Ω (для любого решения g_0 задачи (32) и любой функции $g \in \mathcal{V}$, равной нулю на Δ , имеем

$$\int_G \sum_{|\alpha|_2=m} \frac{m!}{\alpha!} D^\alpha g_0 D^\alpha g \, dx = 0,$$

поэтому $\|g_1 - g_2\|_G = 0$ и ввиду (29) $\|g_1 - g_2\|_\Omega = 0$, так что функция $g_1 - g_2$ совпадает на $\bar{\Omega}$ с некоторым полиномом из $\mathcal{P}_{m-1}$ и равна нулю на Δ);

3) для того чтобы функция $g \in \mathcal{V}$ была решением задачи (32), необходимо и достаточно существование таких $\nu_1, \dots, \nu_{M+N} \in \mathbb{R}$, что $g = \sum_{i=1}^M \nu_i w_i$ и $A(\nu_1, \dots, \nu_{M+N})^T = b$. Поскольку $\mathcal{V} = \{ \sum_{i=1}^M \nu_i w_i : \nu_i \in \mathbb{R} \ (i = \overline{1, M}) \}$, задача (32) сводится к задаче об условном минимуме квадратичной формы.

Отсюда следует, что система линейных уравнений $A\xi = b$ совместна, сужение $\varphi_2(f)$ на Ω линейно зависит от f , $\varphi_2(P) = P$ на Ω для любого $P \in \mathcal{P}_{m-1}$ и

$$\varphi_2(f) \in \text{Arg min}\{\|g\|_G : g \in \mathcal{V}, \quad g(x_i) = y_i \quad (i = \overline{1, N})\}. \quad (33)$$

На основании этого

$$f^* - \varphi_2(f)^* = f_z^* - \sum_{y \in H} \varphi_2(f_{yz})^* \quad (34)$$

(на $\lambda\Omega$).

Докажем неравенство

$$\|D^l \varphi_2(f_{yz})^*\|_{L_q(B_\lambda(z, 1))} \leq C_8 C_9^{|y-z|} \|D^m \varphi_2(f_{yz})^*\|_{L_2(\lambda G)}, \quad (35)$$

где $C_9 < 1$. Обозначим через a_0 некоторый элемент множества $\text{Arg min}\{|x - y|_1 : x \in \lambda\Psi\}$ и положим

$$u = \varphi_2(f_{yz})^*, \quad \mathcal{V}^* = \{g^* : g \in \mathcal{V}\},$$

$$\Phi_1^* = \{\lambda Q : Q \in \Phi\}, \quad \Phi_2^* = \{\text{Int } Q : Q \in \Phi_1^*\},$$

$$V(Q) = \{Q' \in \Phi_2^* : \overline{Q'} \cap \overline{Q} \neq \emptyset, \overline{Q'} \cap \lambda\Delta \neq \emptyset\} \quad (Q \in \Phi_2^*),$$

$$K(r) = \{x \in \lambda K : |x - a_0|_1 < r\} \quad (r > 0),$$

$$\tau = \min\{r\lambda\rho : r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 3, \quad r\lambda\rho \geq 1\}.$$

Пусть $s \geq \eta + 3$, причем $s/(\lambda\rho)$ – целое. Определим функцию $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ так: $\chi(x) = 1$ при $|x| \leq s + \lambda\rho$; $\chi(x) = P(|x|)$ при $s + \lambda\rho < |x| \leq s + \tau - \lambda\rho$, где P – такой полином степени $\leq 2t + 1$, что $P(s + \lambda\rho) = 1$, $P^{(j)}(s + \lambda\rho) = 0$ ($j = \overline{1, t}$), $P^{(j)}(s + \tau - \lambda\rho) = 0$ ($j = \overline{0, t}$); $\chi(x) = 0$ при $|x| > s + \tau - \lambda\rho$. Положим

$$\bar{v}(x) = \prod_{i=1}^n \chi(e_i(x - a_0)) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

и обозначим через u_1 функцию из $\mathcal{V}^*$, для которой $D^\alpha u_1(x) = D^\alpha(u\bar{v})(x)$ при $x \in \lambda\Psi$, $|\alpha|_1 \leq t$, через Q_i – куб из Φ_1^* , содержащий точку λx_i ($i = \overline{1, N}$), через I – множество $\{i \in \mathbb{N} : i \leq N, \lambda x_i \in K(s + \tau - \lambda\rho) \setminus \overline{K(s + \lambda\rho)}\}$. Рассмотрим функцию

$$u_2 = u_1 - \sum_{i \in I} u_1(\lambda x_i) v_{Q_i}.$$

Очевидно,

$$u_2(x) = \begin{cases} u(x) & \text{при } x \in K(s), \\ 0 & \text{при } x \in (\lambda K) \setminus K(s + \tau). \end{cases} \quad (36)$$

В силу $\rho < \frac{1}{2n}h$

$$(i, j \in \mathbb{N}, \quad i, j \leq N, \quad i \neq j) \Rightarrow (\lambda x_i \neq \text{supp } v_{Q_j}). \quad (37)$$

Поэтому при $i \in I$ $u_2(\lambda x_i) = 0$, при $x \in (\lambda \Delta) \cap K(s + \tau) \setminus K(s + \tau - \lambda \rho)$ $u_2(x) = u_1(x) = 0$, при $x \in (\lambda \Delta) \cap \overline{K(s + \lambda \rho)} \setminus K(s)$ $u_2(x) = u_1(x) = u(x)$. Имеем

$$\lambda \rho \leq \frac{\eta + 1}{2n} \underline{h} \bar{h}^{-1} \leq \frac{\eta + 1}{n}, \quad (38)$$

$|y - a_0|_1 \leq 1 + \lambda \rho \leq \eta + 2$, поэтому $f_{yz}^*(x) = 0$ на $(\lambda \bar{\Omega}) \setminus K(s)$ и $u(x) = 0$ на $(\lambda \Delta) \setminus K(s)$, в частности,

$$u(\lambda x_i) = 0 \quad \forall i \in I. \quad (39)$$

Из сказанного следует, что

$$u_2(\lambda x_i) = u(\lambda x_i) \quad (i = \overline{1, N}). \quad (40)$$

Ввиду $\tau - 2\lambda \rho \geq 1/3$

$$\|\bar{v}\|_{W_\infty^m(\mathbb{R}^n)} \leq C_{10}. \quad (41)$$

Если $P \in \mathcal{P}'_{4t+2}$, $\pi(P)$ – полином из $\mathcal{P}'_{2t+1}$ такой, что $D^\alpha \pi(P)(x) = D^\alpha P(x)$ при $x \in \{0, 1\}^n$, $|\alpha|_1 \leq t$ (лемма 1), то

$$\|D^m \pi(P)\|_{L_2((0,1)^n)} \leq C_{11} \|D^m P\|_{L_2((0,1)^n)}, \quad (42)$$

$$\|P - \pi(P)\|_{L_\infty((0,1)^n)} \leq C_{12} \|D^m P\|_{L_2((0,1)^n)}, \quad (43)$$

ибо выражения $\|D^m P\|_{L_2((0,1)^n)}$, $\|D^m \pi(P)\|_{L_2((0,1)^n)}$, $\|P - \pi(P)\|_{L_\infty((0,1)^n)}$ являются полунормами на $\mathcal{P}'_{4t+2}$ и равенство нулю первой из них влечет равенство нулю второй и третьей. Из (41)–(43) вытекают неравенства

$$\|D^m u_1\|_{L_2(Q)} \leq C_{11} \|D^m(u\bar{v})\|_{L_2(Q)} \leq C_{13} \|u\|_{W_2^m(Q)},$$

$$\|u\bar{v} - u_1\|_{L_\infty(Q)} \leq C_{12} (\lambda \rho)^{m - \frac{n}{2}} \|D^m(u\bar{v})\|_{L_2(Q)} \leq C_{14} (\lambda \rho)^{m - \frac{n}{2}} \|u\|_{W_2^m(Q)}$$

для любого $Q \in \Phi_2^*$. Отсюда и из (37), (39) получаем

$$\begin{aligned} \|D^m u_2\|_{L_2(Q)} &\leq \|D^m u_1\|_{L_2(Q)} + \sum_{i \in I} \|u\bar{v} - u_1\|_{L_\infty(Q_i)} \|D^m v_{Q_i}\|_{L_2(Q)} \\ &\leq C_{15} \left(\|u\|_{W_2^m(Q)} + \sum_{Q' \in V(Q)} \|u\|_{W_2^m(Q')} \right) \end{aligned} \quad (44)$$

при $Q \in \Phi_2^*$.

Теперь возьмем некоторый куб $Q \in \Phi_2^*$, $Q \subset \lambda G$. Пусть a – точка $\lambda(\Omega \cap \Psi)$, для которой $|a - c(Q)|_1 \leq 4nL\lambda\rho$, $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a|_1 < [4nL + 1/2]\lambda\rho\}$, r_0 – длина ребра куба Y . Имеем

$$\sup_{x \in Y} \inf_{1 \leq i \leq N} |x - \lambda x_i| \leq nr_0 + \lambda \bar{h} \leq \lambda(9n^2 L \rho + \bar{h}) \leq \lambda \left(\frac{9}{2} n L \underline{h} + \bar{h} \right) \leq 10nL\bar{h}\lambda < \lambda,$$

так что $Y \subset \lambda K$. Как легко видеть,

$$Q \subset Y \subset \lambda G. \quad (45)$$

Пусть $Y_0 = r_0^{-1}Y$, $\Phi_0 = \{r_0^{-1}Q' : Q' \in \Phi_2^*, Q' \subset Y\}$, $\mathcal{V}_0 = \{g(r_0 x)|_{Y_0} : g \in \mathcal{V}^*\}$. Для любых $g \in \mathcal{V}_0$, $Q' \in \Phi_0$, $j \leq m$

$$\|D^j g\|_{L_2(Y_0)} \leq C_{16} (\|D^j g\|_{L_2(Q')} + \|D^m g\|_{L_2(Y_0)}),$$

так как $\|D^j g\|_{L_2(Y_0)}$ и $\|D^j g\|_{L_2(Q')} + \|D^m g\|_{L_2(Y_0)}$ – полунормы на $\mathcal{V}_0$, причем равенство нулю второй из них влечет равенство нулю первой. Отсюда и из (38) следует неравенство

$$\|g\|_{W_2^m(Y)} \leq C_{17} (\|g\|_{W_2^m(Q')} + \|D^m g\|_{L_2(Y)}) \quad (46)$$

при $g \in \mathcal{V}^*$, $Q' \in \Phi_2^*$, $Q' \subset Y$. По лемме 3 ($r = 2nL\rho \leq L\underline{h} \leq 2L\bar{h} \leq \delta/4$) существует точка $a' \in \mathbb{R}^n$ такая, что $|a - a'| = 2nL\lambda\rho$, $B(a', n\lambda\rho) \subset \lambda\Omega$. Шар $B(a', n\lambda\rho)$ содержит некоторый куб $Q_0 \in \Phi_2^*$. При этом $Q_0 \subset B(a, 3nL\lambda\rho)$ и $Q_0 \subset \lambda\Omega$. Полагая в (46) $Q' = Q_0$ и учитывая (45), получаем

$$\|g\|_{W_2^m(Q)} \leq C_{17} (\|g\|_{W_2^m(B_\lambda(c(Q), C_{18}\lambda\rho))} + \|D^m g\|_{L_2(B'_\lambda(c(Q), C_{18}\lambda\rho))}) \quad (47)$$

при $g \in \mathcal{V}^*$, $Q \in \Phi_2^*$, $Q \subset \lambda G$, где обозначено $B'_\lambda(x, r) = (\lambda G) \cap B(x, r)$ ($x \in \mathbb{R}^n, r > 0$). Выше было показано, что любой куб из Φ , замыкание которого пересекается с $\bar{\Omega}$, содержится в F , поэтому на основании (44), (47) можно записать

$$\|D^m u_2\|_{L_2(Q)} \leq C_{19} (\|u\|_{W_2^m(B_\lambda(c(Q), C_{20}\lambda\rho))} + \|D^m u\|_{L_2(B'_\lambda(c(Q), C_{20}\lambda\rho))}) \quad (48)$$

при $Q \in \Phi_2^*$, $Q \subset \lambda G$.

Положим

$$\Omega(r_1, r_2) = \{x \in \lambda\Omega : r_1 < |x - a_0|_1 < r_2\},$$

$$G(r_1, r_2) = \{x \in \lambda G : r_1 < |x - a_0|_1 < r_2\},$$

$$G(r_1) = \{x \in \lambda G : |x - a_0|_1 > r_1\},$$

$$G'(r_1) = \{x \in \lambda G : |x - a_0|_1 < r_1\},$$

$$H(r_1, r_2) = \{x \in H : B(x, 1) \cap \Omega(r_1, r_2) \neq \emptyset\},$$

$$\Phi' = \{Q \in \Phi_2^* : Q \subset G(s, s + \tau)\}$$

$(r_1, r_2 \in \mathbb{R})$. Используя (29), (31), (38), (48) и учитывая, что $u(x) = 0$ на $(\lambda\Delta) \setminus B(y, 1)$, получаем

$$\begin{aligned} \|u_2\|_{G(s, s+\tau)}^2 &\leq C_{21} \sum_{Q \in \Phi'} \|D^m u_2\|_{L_2(Q)}^2 \\ &\leq C_{22} \sum_{Q \in \Phi'} (\|u\|_{W_2^m(B_\lambda(c(Q), C_{20}\lambda\rho))}^2 + \|D^m u\|_{L_2(B'_\lambda(c(Q), C_{20}\lambda\rho))}^2) \\ &\leq C_{23} (\|u\|_{W_2^m(\Omega(s-C_{24}, s+C_{24}))}^2 + \|D^m u\|_{L_2(G(s-C_{24}, s+C_{24}))}^2) \\ &\leq C_{23} \left(\sum_{a \in H(s-C_{24}, s+C_{24})} \|u\|_{W_2^m(B_\lambda(a, 1))}^2 + \|D^m u\|_{L_2(G(s-C_{24}, s+C_{24}))}^2 \right) \\ &\leq C_{25} \left(\sum_{a \in H(s-C_{24}, s+C_{24})} \|D^m u\|_{L_2(B_\lambda(a, C_7))}^2 + \|D^m u\|_{L_2(G(s-C_{24}, s+C_{24}))}^2 \right) \\ &\leq C_{26} \|D^m u\|_{L_2(G(s-C_{27}, s+C_{27}))}^2. \end{aligned} \tag{49}$$

В силу (33), (36), (40), (49)

$$\begin{aligned} \|u\|_{G(s)}^2 &= \|u\|_{\lambda G}^2 - \|u\|_{G'(s)}^2 \leq \|u_2\|_{\lambda G}^2 - \|u\|_{G'(s)}^2 \\ &= \|u_2\|_{G(s, s+\tau)}^2 \leq C_{26} \|D^m u\|_{L_2(G(s-C_{27}, s+C_{27}))}^2 \end{aligned}$$

(при любом $s \geq \eta + 3$, кратном $\lambda\rho$). Отсюда и из (38) следует, что

$$\|u\|_{G(r)}^2 \leq C_{28} \|u\|_{G(r, r+C_{29})}^2$$

для любого $r > 0$, где $C_{28} > 1$. Полагая $\zeta_j = \|u\|_{G(C_{29}j)}^2$ ($j \in \mathbb{N}$), имеем

$$\zeta_j \leq C_{28}(\zeta_j - \zeta_{j+1}), \quad \zeta_{j+1} \leq \frac{C_{28}-1}{C_{28}}\zeta_j, \quad \zeta_{j+1} \leq \left(\frac{C_{28}-1}{C_{28}}\right)^j \zeta_1,$$

поэтому при $r > 0$

$$\|D^m u\|_{L_2(G(r))} \leq C_{30} C_{31}^r \|D^m u\|_{L_2(\lambda G)}, \quad (50)$$

где $C_{31} < 1$. Согласно лемме 5, 1) и (31)

$$\|D^l u\|_{L_q(B_\lambda(z,1))} \leq C_{32} \|u\|_{W_2^m(B_\lambda(z,2))} \leq C_{33} \|D^m u\|_{L_2(B_\lambda(z,C_{34}))}. \quad (51)$$

Наконец, из (29), (50), (51) вытекает неравенство (35).

Функция

$$w = \sum_{i \in J} f_{yz}^*(\lambda x_i) v_{Q_i},$$

где $J = \{i \in \mathbb{N} : i \leq N, \lambda x_i \in B(y, 1)\}$, принадлежит $\mathcal{V}^*$ и ввиду (37) интерполирует f_{yz}^* на $\lambda\Delta$. Применяя (28), (33) и лемму 5, 1), запишем

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(f_{yz})^*\|_{\lambda G} &\leq \|w\|_{\lambda G} \leq |J| \|f_{yz}^*\|_{L_\infty(B_\lambda(y,1))} \max_{i \in J} \|v_{Q_i}\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq C_{35} (\lambda \underline{h})^{-n} (\lambda \rho)^{\frac{n}{2}-m} \|f_z^*\|_{L_\infty(B_\lambda(y,1))} \\ &\leq C_{36} \varkappa^{-2m} \|f_z^*\|_{W_p^k(B_\lambda(y,2))} \\ &\leq C_{37} \varkappa^{-2m} r_{yz}^{C_2} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_3 r_{yz}))}, \end{aligned} \quad (52)$$

где $r_{yz} = |y - z| + 2$, и

$$\|D^l f_z^*\|_{L_q(B_\lambda(z,1))} \leq C_{38} \|f_z^*\|_{W_p^k(B_\lambda(z,2))} \leq C_{39} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, 2C_3))}. \quad (53)$$

Из (34), (35), (52), (53) следует

$$\begin{aligned} \|D^l (f^* - \varphi_2(f)^*)\|_{L_q(B_\lambda(z,1))} &\leq C_{40} \varkappa^{-2m} \sum_{y \in H} C_9^{r_{yz}} r_{yz}^{C_2} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, C_3 r_{yz}))} \\ &\leq C_{41} \varkappa^{-2m} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, i))} C_{42}^i, \end{aligned} \quad (54)$$

где $C_{42} < 1$. Далее считается, что $p, q < \infty$, но рассуждения легко переносятся на случай бесконечного p или q .

Пусть $\iota = 0$ при $p \leq q$ и $\iota = 1$ при $p > q$, $H_i(x, x') = H \cap B(x, i) \cap B(x', i)$ ($i \in \mathbb{N}$, $x, x' \in \mathbb{R}^n$); очевидно, $|H_i(x, x')| \leq C_{43} i^n$. Используя неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \zeta^i \right)^p \leq (1 - \zeta)^{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} d_i^p \zeta^i,$$

где $0 < \zeta < 1$, $d_i \geq 0$, получим из (54)

$$\begin{aligned} \|D^l(f^* - \varphi_2(f)^*)\|_{L_q(\lambda\Omega)} &\leq \left(\sum_{z \in H} \|D^l(f^* - \varphi_2(f)^*)\|_{L_q(B_\lambda(z, 1))}^q \right)^{1/q} \\ &\leq |H|^{\iota(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})} \left(\sum_{z \in H} \|D^l(f^* - \varphi_2(f)^*)\|_{L_q(B_\lambda(z, 1))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{44} \varkappa^{-2m} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \left(\sum_{z \in H} \sum_{i=1}^{\infty} C_{42}^i \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(B_\lambda(z, i))}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{44} \varkappa^{-2m} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \left(\sum_{z \in H} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|_2=k} C_{42}^i \iint_{\substack{x, x' \in B_\lambda(z, i) \\ |x-x'| < \eta}} |D^\alpha f^*(x) - D^\alpha f^*(x')|^p dx dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C_{44} \varkappa^{-2m} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \left(\sum_{|\alpha|_2=k} \iint_{\substack{x, x' \in \lambda\Omega \\ |x-x'| < \eta}} |D^\alpha f^*(x) - D^\alpha f^*(x')|^p \left(\sum_{i=1}^{\infty} C_{42}^i |H_i(x, x')| \right) dx dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C_{45} \varkappa^{-2m} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \tilde{\omega}(D^k f^*, \eta)_{L_p(\lambda\Omega)} \\ &\leq C_{46} \varkappa^{-2m} \bar{h}^{\iota(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})} \omega(D^k f^*, \eta)_{L_p(\lambda\Omega)}, \end{aligned}$$

откуда следует (26).

Предположим, что $k = m$. В этом случае в приведенных выше рассуждениях нужно заменить полином P_1 на P_2 (лемма 4, применяемая к функции f^*), ω и $\tilde{\omega}$ — на соответствующие нормы. Таким образом получим условную оценку (27).

Заметим, что выше величина $\varkappa$ появилась только в силу неравенств (52). Поэтому для того, чтобы получить безусловную оценку (27) при $p \geq 2$, нам достаточно установить подходящую оценку для $\|\varphi_2(f_{yz})^*\|_{\lambda G}$, не содержащую $\varkappa$.

Итак, пусть $p \geq 2$. Согласно замечанию 2 (в котором нужно заменить W_p^k на W_2^m) существует функция $w \in \mathcal{V}^*$, интерполирующая f_{yz}^* на $\lambda\Delta$, для которой

$$\|D^m w\|_{L_2(\lambda K)} \leq C_{47} \|D^m f_{yz}^*\|_{L_2(\lambda\Omega)}.$$

В силу (33)

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(f_{yz})^*\|_{\lambda G} &\leq \|w\|_{\lambda G} \leq C_{48} \|D^m f_{yz}^*\|_{L_2(\lambda\Omega)} \\ &\leq C_{49} \|f_z^*\|_{W_p^k(B_\lambda(y,1))} \leq C_{50} r_{yz}^{C_{51}} \|D^k f^*\|_{L_p(B_\lambda(z, C_{52} r_{yz}))}, \end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как мы показали, для выполнения безусловной оценки (27) достаточно, чтобы $k = m$, $p \geq 2$. В связи с этим приведем одно необходимое условие, касающееся оценок (25) для D^m -сплайнов $S(f, \Delta)$. А именно, если $0 < h < C$, где $C = C(\Omega, m) > 0$, и

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \|D^l(g - S(g, F))\|_{L_q(\Omega)} : g \in W_p^k(\Omega), \|D^k g\|_{L_p(\Omega)} \leq 1; \right. \\ \left. F \in 2^{\overline{\Omega}}, F \neq \emptyset, \bar{h}(F) = h, \underline{h}(F) > 0 \right\} < \infty, \end{aligned}$$

то либо $k = m$, $p \geq 2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]^{-1}$, либо $k = m - 1$, $p = \infty$ (см. [4]).

§ 3. Метод дискретной оптимизации и некоторые другие методы

Мы будем использовать обозначения μ, μ_i^-, μ_i^+ ($i = \overline{1, n}$), K, Φ_s, Ψ_s ($s \in \mathbb{Z}_+$), $s_3, \mathcal{V}, \rho, w_i$ ($i = \overline{1, M}$), введенные в § 1, 2.

При $F \subset \overline{\Omega}$ положим

$$\sigma'(F) = \sup \left\{ \|D^l g\|_{L_q(\Omega)} : g \in W_p^k(\Omega), \|D^k g\|_{L_p(\Omega)} \leq 1, g(x) = 0 \quad \forall x \in F \right\}.$$

Приведем алгоритм для нахождения функции φ_3 . Сначала находим величины μ_i^-, μ_i^+ ($i = \overline{1, n}$), $\mu, \underline{h}^2, s_3, \rho$,

$$T = \left(\frac{(\mu + 2)t}{\rho} \right)^{50n(t+2)^2}, \quad s_4 = \min \left\{ s \in \mathbb{N} : 2^s > \frac{T}{\rho} \right\}.$$

Положим

$$H_{sz} = \begin{cases} z + \frac{\mu+2}{2^s(m-1)}(\mathbb{Z}^n \cap [0, m)^n) & \text{при } m > 1, \\ \{z\} & \text{при } m = 1 \end{cases}$$

($s \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{R}^n$). Проверяя выполнение неравенства

$$\min_{z \in \Psi_s} \max_{x \in H_{sz}} \min_{1 \leq i \leq N} |x - x_i|_1 \leq \frac{\mu + 2}{2^s m^{2nm^2}} \quad (55)$$

для $s = 0, 1, \dots$, найдем наименьшее значение $s \in \mathbb{Z}_+$, при котором имеет место (55). Обозначим это значение через s_5 . Заметим, что неравенство (55) выполняется при $s = s_6$, где

$$s_6 = \min \left\{ s \in \mathbb{N} : \frac{\mu + 2}{2^s} < \frac{\delta}{8nL} \right\},$$

так как $H_{s_6 z} \subset \Omega$ для некоторого $z \in \Psi_{s_6}$ (это следует из того, что Ω содержит открытый шар радиуса $\delta/(8L)$ согласно лемме 3) и

$$\frac{\mu + 2}{2^{s_6} m^{2nm^2}} \geq \frac{\delta}{16nLm^{2nm^2}} \geq \bar{h}.$$

Затем находим минимальный элемент множества

$$\left\{ z \in \Psi_{s_5} : \max_{x \in H_z} \min_{1 \leq i \leq N} |x - x_i|_1 \leq \frac{\mu + 2}{2^{s_5} m^{2nm^2}} \right\} (\subset \mathbb{R}^n),$$

где $H_z = H_{s_5 z}$; обозначим этот элемент через z_0 . Пусть $H = H_{z_0}$, при $z \in H$

$$i_z = \min \left\{ i \in \mathbb{N} : i \leq N, \quad |z - x_i|_1 \leq \frac{\mu + 2}{2^{s_5} m^{2nm^2}} \right\},$$

$$P_0 = \arg \min \left\{ \sum_{z \in H} (P(x_{i_z}) - y_{i_z})^2 : P \in \mathcal{P}_{m-1} \right\}$$

(в силу леммы 2 минимизирующий элемент здесь единствен), $\zeta = \max_{1 \leq i \leq N} |y_i - P_0(x_i)|$, Q_i — куб из Φ_{s_3} , содержащий точку x_i ($i = \overline{1, N}$), при $\beta \in \mathbb{Z}^M$

$$u_\beta = \sum_{i=1}^M e_i(\beta) \zeta \rho^m w_i + \sum_{j=1}^N \left(y_j - P_0(x_j) - \sum_{i=1}^M e_i(\beta) \zeta \rho^m w_i(x_j) \right) v_{Q_j} + P_0.$$

Для любой функции g , имеющей непрерывные на K производные порядка $\leq m$, положим

$$\mathcal{R}(g) = \begin{cases} \max_{|\alpha|_2=m} \sum_{x \in J_\alpha} \sum_{j=0}^{[T^2]} \frac{p(p+1)\dots(p+j-1)}{j!} \left(1 - \frac{\zeta}{|D^\alpha g(x)|}\right)^j & \text{при } p < \infty, \\ \max_{|\alpha|_2=m} \max_{x \in J} |D^\alpha g(x)| & \text{при } p = \infty, \end{cases}$$

где $J = \{c(Q) : Q \in \Phi_{s_4}\}$, $J_\alpha = \{x \in J : |D^\alpha g(x)| > \zeta\}$. Вычисляем значения $\mathcal{R}(u_\beta)$ при $\beta \in \mathbb{Z}^M$, $|\beta|_1 < T$ и находим минимальный элемент множества

$$\text{Arg min}\{\mathcal{R}(u_\beta) : \beta \in \mathbb{Z}^M, |\beta|_1 < T\} (\subset \mathbb{R}^M);$$

пусть этот элемент будет β_0 . Функция φ_3 равна u_{β_0} .

Ввиду неравенств

$$\max\{M, N\} \leq C(n, d, t) \underline{h}^{-n},$$

$$\sum_{s=0}^{s_5} |\Psi_s| \leq C(n) 2^{ns_5} \leq C(n) 2^{ns_6} \leq C(n) \left(\frac{16nL(\mu+2)}{\delta} \right)^n \quad (56)$$

$$\leq C(n) \left(\frac{\mu+2}{2\underline{h}} \right)^n \leq C(n) \left(\frac{\mu+2}{\underline{h}} \right)^n \leq C(n, d) \underline{h}^{-n},$$

$$T \leq C(n, d, t) \underline{h}^{-50n(t+2)^2}, \quad |J| \leq C(n, d, t) \underline{h}^{-51n^2(t+2)^2}$$

для нахождения φ_3 по заданным $p, m, t, f|_\Delta$ требуется $\leq \exp(C(n, d, t) \underline{h}^{-n} |\ln \underline{h}|)$ операций $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_5$. Очевидно, функция φ_3 принадлежит $\mathcal{V}$ и интерполирует f на Δ .

ТЕОРЕМА 3. При $k = m$

$$\|D^l(f - \varphi_3)\|_{L_q(\Omega)} \leq C\sigma(\Delta) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}^3,$$

где $C = C(n, d, L, \delta, p, t)$.

Предварительно докажем следующую лемму.

ЛЕММА 7. Пусть F — непустое подмножество $\overline{\Omega}$.

- 1) Справедливы неравенства $\sigma'(F) \leq \sigma(F) \leq 2\sigma'(F)$.
- 2) Если $\bar{h}(F) < C_1$, то $\sigma'(F) \leq C_2 \bar{h}(F)^\theta$; здесь $C_i = C_i(\Omega, k, p, q) > 0$ ($i = 1, 2$).

³ $\sigma(\Delta) < \infty$ в силу теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Возьмем число $\varepsilon > 0$ и для любой функции $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}$ ($G \in \overline{\Omega}$) такой, что $\{g \in W_p^k(\Omega) : g(x) = \psi(x) \ \forall x \in G\} \neq \emptyset$, выберем некоторую функцию $\Pi(\psi) \in W_p^k(\Omega)$, удовлетворяющую условиям: $\Pi(\psi)(x) = \psi(x) \ \forall x \in G$,

$$\|D^k \Pi(\psi)\|_{L_p(\Omega)} \leq (1 + \varepsilon) \inf \{\|D^k g\|_{L_p(\Omega)} : g \in W_p^k(\Omega), g(x) = \psi(x) \ \forall x \in G\} \quad (57)$$

(с помощью леммы 4 нетрудно установить, что если инфимум в правой части (57) равен нулю, то $\psi(x) = P(x) \ \forall x \in G$ при некотором $P \in \mathcal{P}_{k-1}$). Определим метод восстановления $\Gamma_\varepsilon \in \mathbb{S}$ так: $\Gamma_\varepsilon(g, G) = \Pi(g|_G) \ (g \in W_p^k(\Omega), G \in 2^{\overline{\Omega}})$. Имеем

$$\sigma(F) \leq \sup_{g \in \mathcal{W}} \|D^l(g - \Gamma_\varepsilon(g, F))\|_{L_q(\Omega)} \leq (2 + \varepsilon) \sigma'(F).$$

Если $g \in \mathcal{W}$, $g(x) = 0$ на F и $\Gamma \in \mathbb{S}$, то

$$\begin{aligned} \|D^l g\|_{L_q(\Omega)} &\leq \frac{1}{2} \left(\|D^l(g - \Gamma(0, F))\|_{L_q(\Omega)} + \|D^l(-g - \Gamma(0, F))\|_{L_q(\Omega)} \right) \\ &\leq \sup_{u \in \mathcal{W}} \|D^l(u - \Gamma(u, F))\|_{L_q(\Omega)}, \end{aligned}$$

поэтому $\sigma'(F) \leq \sigma(F)$.

2) Для любого $\varepsilon > 0$ существует непустое конечное множество $F_\varepsilon \subset F$ такое, что $\bar{h}(F_\varepsilon) < \bar{h}(F) + \varepsilon$, поэтому можно ограничиться случаем конечного множества F . Если F конечно и $\bar{h}(F) < C_1$, то $\sigma'(F) \leq \sigma(F) \leq C_2 \bar{h}(F)^\theta$ по предложению 1, где $C_i = C_i(\Omega, k, p, q) > 0$ ($i = 1, 2$). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Здесь $C_i = C_i(n, d, L, \delta, p, t)$. Предположим, что $k = m$. Полином P_0 , соответствующий функции f , будем обозначать через $P_0(f)$. Пусть

$$\tilde{K} = \frac{2^{s_5}}{\mu + 2}(-z_0 + K), \quad \tilde{P}_0(x) = P_0(f) \left(\frac{\mu + 2}{2^{s_5}} x + z_0 \right),$$

A – максимальный модуль коэффициента полинома $\tilde{P}_0$. Согласно определению $P_0(f)$ и (56)

$$\max_{z \in H} |P_0(f)(x_{i_z}) - y_{i_z}| \leq |H| \max_{z \in H} |y_{i_z}|, \quad (58)$$

$$\sup_{x \in \tilde{K}} |x|_1 \leq 2^{s_5} \leq \frac{16nL(\mu + 2)}{\delta} \leq \frac{\mu + 2}{\underline{h}} \leq \frac{\mu + 2}{\rho}. \quad (59)$$

Из (58), (59) и леммы 2 следует

$$\|P_0(f)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L_\infty(\Omega)}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \|P_0(f)\|_{L_\infty(K)} &= \|\tilde{P}_0\|_{L_\infty(\tilde{K})} \leq m^n \left(\frac{\mu+2}{\rho}\right)^m A \leq m^n \left(\frac{\mu+2}{\rho}\right)^m \\ &\quad \times m^{2nm^2} \max_{z \in H} |P_0(f)(x_{i_z})| \\ &\leq m^n \left(\frac{\mu+2}{\rho}\right)^m m^{2nm^2} (m^n + 1) \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{\mu+2}{\rho}\right)^t t^{4nt^2} \|f\|_{L_\infty(\Omega)}. \end{aligned} \quad (61)$$

Для любого полинома $P \in \mathcal{P}'_{2t+1}$ и любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ из леммы 2 вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|D^\alpha P\|_{L_\infty([0,1]^n)} &\leq (2t+2)^n ((2t+1)!)^n (2t+2)^{2n(2t+2)^2} \|P\|_{L_\infty([0,1]^n)} \\ &\leq (2t+2)^{10n(t+1)^2} \|P\|_{L_\infty([0,1]^n)}. \end{aligned} \quad (62)$$

Если $P \in \mathcal{P}'_{2t+1}$, то, полагая

$$\begin{aligned} F_x &= \{y \in [0,1]^n : e_i(y) \leq e_i(x) \quad (i = \overline{1, n})\}, \\ \bar{P}(x) &= \int_{F_x} P(y) dy \quad (x \in [0,1]^n), \quad \gamma = (1, \dots, 1) \in \mathbb{N}^n, \end{aligned}$$

имеем в силу (62)

$$\begin{aligned} \|P\|_{L_\infty([0,1]^n)} &= \|D^\gamma \bar{P}\|_{L_\infty([0,1]^n)} \leq (2t+4)^{10n(t+2)^2} \\ &\quad \times \|\bar{P}\|_{L_\infty([0,1]^n)} \leq (4t)^{10n(t+2)^2} \|P\|_{L_1([0,1]^n)}. \end{aligned} \quad (63)$$

Заметим, что если P – полином от одной переменной степени $\leq 2t+1$, для которого $P(0) = 1$, $P^{(j)}(0) = 0$ ($j = \overline{1, t}$), $P^{(j)}(1) = 0$ ($j = \overline{0, t}$), то $P'(x)$ пропорционально $x^t(x-1)^t$, так что $P(x)$ убывает на $[0, 1]$. Отсюда следует, что

$$\|v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} = 1. \quad (64)$$

Ввиду $\rho < \frac{1}{2n} \underline{h}$

$$(i, j \in \mathbb{N}, \quad i, j \leq N, \quad i \neq j) \Rightarrow (\bar{Q}_i \cap \bar{Q}_j = \emptyset), \quad (65)$$

поэтому

$$N \leq \left(\frac{\mu + 2}{\rho} \right)^n \quad (66)$$

и функция

$$g_1 = \sum_{i=1}^N (y_i - P_0(f)(x_i)) v_{Q_i} + P_0(f)$$

интерполирует f на Δ . По замечанию 2 существует функция $g_2 \in \mathcal{V}$, также интерполирующая f на Δ , для которой

$$\|D^k g_2\|_{L_p(K)} \leq C_2 \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Пусть $\iota = 1$, если $\|D^k g_1\|_{L_p(K)} \leq \|D^k g_2\|_{L_p(K)}$, и $\iota = 2$ в противном случае, $T_1 = (4t)^{10n(t+2)^2}$, $T_2 = \frac{\mu+2}{\rho} (\geq 4)$, $K^* = \rho^{-1}K$, для любой функции $g: K \rightarrow \mathbb{R}$ $g^*(x) = g(\rho x)$ при $x \in K^*$,

$$S(x) = \sum_{|\alpha|_2 \leq k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g_\iota(x_1) (x - x_1)^\alpha \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Используя (61)–(64), (66), получаем

$$\begin{aligned} \max_{|\alpha|_1 \leq t} \|D^\alpha (g_\iota - P_0(f))\|_{L_\infty(K)} &\leq \rho^{-nt} \max_{|\alpha|_1 \leq t} \|D^\alpha (g_\iota^* - P_0(f)^*)\|_{L_\infty(K^*)} \\ &\leq \rho^{-nt} T_1 \|g_\iota - P_0(f)\|_{L_\infty(K)} = \rho^{-nt} T_1 \|g_\iota - P_0(g_\iota)\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq \rho^{-nt} T_1 \left(\|g_\iota - S\|_{L_\infty(K)} + \|P_0(g_\iota - S)\|_{L_\infty(K)} \right) \\ &\leq \rho^{-nt} T_1 (1 + T_2^t t^{4nt^2}) \|g_\iota - S\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq 2T_1 T_2^t t^{4nt^2} \rho^{-nt} \sup_{x, y \in K} \left| \sum_{|\alpha|_2 = k} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha g_\iota(y) (x - x_1)^\alpha \right| \\ &\leq 2T_1 T_2^t t^{4nt^2} \rho^{-nt} (k+1)^n (\mu+2)^k \|D^k g_\iota\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq T_1^2 T_2^{nt+t} \|D^k g_\iota\|_{L_\infty(K)} = T_1^2 T_2^{nt+t} \rho^{-k} \|D^k g_\iota^*\|_{L_\infty(K^*)} \\ &\leq T_1^3 T_2^{nt+t} \rho^{-k} \|D^k g_\iota^*\|_{L_p(K^*)} \leq T_1^3 T_2^{nt+t} \rho^{-k} \|D^k g_1^*\|_{L_p(K^*)} \\ &\leq T_1^3 T_2^{nt+t} \rho^{-k} N \zeta 3^n \|D^k v\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq T_1^4 T_2^{nt+n+t} \rho^{-k} \zeta 3^n \\ &\leq (T-1) \zeta \rho^k. \end{aligned}$$

Поэтому $g_\iota - P_0(f) = \sum_{i=1}^M d_i w_i$ на K , где $d_i \in \mathbb{R}$, $|d_i| \leq (T-1)\zeta\rho^k$. Обозначим через β_1 точку $(d'_1, \dots, d'_M) \in \mathbb{Z}^M$, где $d'_i = \left[\frac{d_i}{\zeta\rho^k}\right]$ при $\zeta \neq 0$ и $d'_i = 0$ при $\zeta = 0$ ($i = \overline{1, M}$), через w – функцию $\sum_{i=1}^M e_i(\beta_1)\zeta\rho^k w_i$. Учитывая (65) и неравенство

$$\|w_i\|_{L_\infty(K)} \leq C_3 \quad (i = \overline{1, M}), \quad (67)$$

имеем

$$\begin{aligned} \|g_\iota - u_{\beta_1}\|_{L_\infty(K)} &\leq \|g_\iota - P_0(f) - w\|_{L_\infty(K)} \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^N (g_\iota(x_j) - P_0(f)(x_j) - w(x_j)) v_{Q_j} \right\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq C_4 \|g_\iota - P_0(f) - w\|_{L_\infty(K)} \leq C_5 \zeta \rho^k, \\ \|D^k u_{\beta_1}\|_{L_p(K)} &\leq \|D^k g_\iota\|_{L_p(K)} + C_6 \|D^k (g_\iota - u_{\beta_1})\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq \|D^k g_2\|_{L_p(K)} + C_7 \rho^{-k} \|g_\iota - u_{\beta_1}\|_{L_\infty(K)} \\ &\leq C_8 (\|D^k f\|_{L_p(\Omega)} + \zeta). \end{aligned} \quad (68)$$

Пусть R – такой полином из $\mathcal{P}_{k-1}$, что

$$\|f - R\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_9 \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}$$

(лемма 4). На основании (60) и леммы 5, 1) (в которой нужно заменить W_q^l на W_∞^0)

$$\begin{aligned} \zeta &\leq \|f - P_0(f)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|f - R\|_{L_\infty(\Omega)} + \|P_0(f - R)\|_{L_\infty(\Omega)} \\ &\leq (C_1 + 1) \|f - R\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C_{10} \|f - R\|_{W_p^k(\Omega)} \leq C_{11} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (69)$$

Положим $U = \{u_\beta : \beta \in \mathbb{Z}^M, |\beta|_1 < T\}$. Поскольку $|\beta|_1 < T$, из (68), (69) получаем

$$\min_{u \in U} \|D^k u\|_{L_p(K)} \leq C_{12} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}. \quad (70)$$

В силу (65), (67)

$$\max_{u \in U} \|u - P_0\|_{L_\infty(K)} \leq C_{13} T \zeta \rho^k,$$

откуда

$$\max_{u \in U} \|D^k u\|_{L_\infty(K)} \leq C_{14} T \zeta, \quad (71)$$

$$\max_{u \in U} \|D^{k+1} u\|_{L_\infty(K)} \leq C_{15} T \zeta \rho^{-1}. \quad (72)$$

Если $p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $\xi > 1$ то, записывая остаточный член в форме Коши, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \xi - \left(\sum_{j=0}^s \frac{p(p+1) \dots (p+j-1)}{j!} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^j \right)^{1/p} \right| \\ & \leq \left| \left(\frac{1}{\xi}\right)^{-p} - \sum_{j=0}^s \frac{(-p)(-p-1) \dots (-p-j+1)}{j!} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^j \right| \\ & = \frac{p(p+1) \dots (p+s)}{s!} \left(1 + \lambda \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\right)^{-p-s-1} (1-\lambda)^s \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{s+1} \\ & \leq C_{16} s^p \xi^{p+1} e^{-s/\xi} = C_{16} \left(\frac{\xi^2}{s}\right)^{2p+1} \left(\left(\frac{s}{\xi}\right)^{3p+1} e^{-s/\xi}\right) \\ & \leq C_{17} \left(\frac{\xi^2}{s}\right)^{2p+1}, \end{aligned} \quad (73)$$

где $0 < \lambda < 1$. Возьмем какую-либо функцию $u \in U$. Для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha|_2 = k$, определим функцию $u^{(\alpha)}: K \rightarrow \mathbb{R}$ так: если $p < \infty$, то $u^{(\alpha)}(x) = r_{c(Q)} \forall x \in Q$ при $Q \in \Phi_{s_4}$,

$$r_a = \begin{cases} \zeta \left(\sum_{j=0}^{[T^2]} \frac{p(p+1) \dots (p+j-1)}{j!} \left(1 - \frac{\zeta}{|D^\alpha u(a)|}\right)^j \right)^{1/p} & \text{при } |D^\alpha u(a)| > \zeta, \\ 0 & \text{при } |D^\alpha u(a)| \leq \zeta \end{cases}$$

($a \in K$), а если $p = \infty$, то $u^{(\alpha)}(x) = |D^\alpha u(c(Q))| \forall x \in Q$ при $Q \in \Phi_{s_4}$. Положим $\mathcal{R}'(u) = \zeta \left(\frac{\mu+2}{2^{s_4}}\right)^{n/p} \mathcal{R}(u)^{1/p}$ при $p < \infty$ и $\mathcal{R}'(u) = \mathcal{R}(u)$ при $p = \infty$. Из (71)–(73) следует, что

$$\begin{aligned} & \left| \|D^k u\|_{L_p(K)} - \mathcal{R}'(u) \right| = \left| \max_{|\alpha|_2=k} \|D^\alpha u\|_{L_p(K)} - \max_{|\alpha|_2=k} \|u^{(\alpha)}\|_{L_p(K)} \right| \\ & \leq C_{18} \max_{|\alpha|_2=k} \| |D^\alpha u| - u^{(\alpha)} \|_{L_\infty(K)} \leq C_{18} \max_{|\alpha|_2=k} \left(\sup_{\substack{x, y \in K \\ |x-y| \leq C_{19}\rho/T}} \left| |D^\alpha u(x)| \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - |D^\alpha u(y)| \right| + \max_{x \in J} \left| |D^\alpha u(x)| - u^{(\alpha)}(x) \right| \right) \leq C_{20} \zeta. \end{aligned} \quad (74)$$

Учитывая (69), (70), (74), получаем

$$\begin{aligned} \|D^k \varphi_3\|_{L_p(K)} &\leq C_{21} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}, \\ \|D^l(f - \varphi_3)\|_{L_q(\Omega)} &\leq (C_{21} + 1) \|D^k f\|_{L_p(\Omega)} \sigma'(\Delta). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства остается сослаться на лемму 7, 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если заменить l на s и q на r (при $W_p^k(\Omega) \rightarrow W_r^s(\Omega)$), то $\mathbb{S}$, $\sigma(F)$ изменятся соответственно на $\mathbb{S}_{sr}$, $\sigma_{sr}(F)$. Допустим, что $\Gamma \in \mathbb{S}_{kp}$, $\mathcal{H} \subset 2^{\bar{\Omega}}$ и $\Gamma(g, F)(x) = g(x)$ при $x \in F$ для любых $g \in W_p^k(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}$. Тогда следующие два условия эквивалентны:

1) при произвольных s , r таких, что $W_p^k(\Omega)$ вложено в $W_r^s(\Omega)$, для любых $g \in W_p^k(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}$ выполняется оценка⁴

$$\|D^s(g - \Gamma(g, F))\|_{L_r(\Omega)} \leq C \sigma_{sr}(F) \|D^k g\|_{L_p(\Omega)}, \quad (75)$$

где константа C не зависит от g , F ;

2) для любых $g \in W_p^k(\Omega)$, $F \in \mathcal{H}$

$$\|D^k \Gamma(g, F)\|_{L_p(\Omega)} \leq C \inf \{ \|D^k u\|_{L_p(\Omega)} : u \in W_p^k(\Omega), u(x) = g(x) \ \forall x \in F \},$$

где константа C не зависит от g , F (импликация 1) $\Rightarrow$ 2) получится, если взять $s = k$, $r = p$, а импликация 2) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 7, 1).

Выше был предложен алгоритм (метод дискретной оптимизации), позволяющий найти функцию $\varphi \in W_p^k(\Omega)$ такую, что $\varphi(x_i) = y_i$ ($i = \overline{1, N}$) и

$$\|D^k \varphi\|_{L_p(\Omega)} \leq C(\Omega, k, p) \inf \{ \|D^k g\|_{L_p(\Omega)} : g \in W_p^k(\Omega), g(x_i) = y_i \ (i = \overline{1, N}) \}.$$

Кроме того, мы покажем, что при $1 < p < \infty$ для аппроксимирующих функций вида

$$V(f, F) = \arg \min \left\{ \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_2=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha g|^p dx : g \in W_p^k(\Omega), g(x) = f(x) \ \forall x \in F \right\} \quad (76)$$

(которые являются обобщением D^m -сплайнов) имеет место сходимость в $W_p^k(\Omega)$. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех множеств $F \subset \bar{\Omega}$, для которых $(P \in \mathcal{P}_{k-1}, P(x) = 0 \ \forall x \in F) \Rightarrow (P(x) \equiv 0)$.

⁴В случае $\sigma_{sr}(F) = \infty$ правую часть (75) считаем равной ∞ .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $1 < p < \infty$. Если $F \in \mathcal{T}$, то минимизирующий элемент в (76) существует и единствен. Если $F_i \in \mathcal{T}$ ($i \in \mathbb{N}$) и $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{h}(F_i) = 0$, то $V(f, F_i) \rightarrow f$ в $W_p^k(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из рефлексивности $L_p(\Omega)$ вытекает рефлексивность $W_p^k(\Omega)$ (банахово пространство $W_p^k(\Omega)$ изоморфно подпространству банахова пространства $\prod_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n \\ |\alpha|_2 \leq k}} L_p(\Omega)$, состоящему из элементов вида $\{D^\alpha g : |\alpha|_2 \leq k\}$, где $g \in W_p^k(\Omega)$). Топология факторпространства $W_p^k(\Omega)/\mathcal{P}_{k-1}$ порождается нормой

$$\|g + \mathcal{P}_{k-1}\|_{W_p^k(\Omega)/\mathcal{P}_{k-1}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|_2=k} \frac{k!}{\alpha!} |D^\alpha g|^p dx \right)^{1/p},$$

где $g \in W_p^k(\Omega)$ (лемма 4). В силу рефлексивности пространства $W_p^k(\Omega)/\mathcal{P}_{k-1}$ в любом замкнутом линейном многообразии этого пространства найдется элемент с наименьшей нормой, поэтому минимизирующий элемент в (76) существует при любом $F \in \bar{\Omega}$. Если g_1 и g_2 – два минимизирующих элемента в (76), то $D^\alpha g_1 = D^\alpha g_2$ при $|\alpha|_2 = k$, так как $L_p(\mathbb{R}^n)$ – строго нормированное пространство, откуда $g_1 - g_2 \in \mathcal{P}_{k-1}$ и в случае $F \in \mathcal{T}$ $g_1 = g_2$.

Теперь предположим, что $F_i \in \mathcal{T}$ ($i \in \mathbb{N}$), $\lim_{i \rightarrow \infty} \bar{h}(F_i) = 0$. Из леммы 7,2) (в которой нужно заменить W_q^l на W_p^s , $s = 0, k-1$) следует, что $V(f, F_i) \rightarrow f$ в $W_p^{k-1}(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$. Поскольку $V(f, F_i) \rightarrow f$ в $L_1(\Omega)$, имеем

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|D^\alpha V(f, F_i)\|_{L_p(\Omega)} \geq \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}$$

при $|\alpha|_2 = k$. Отсюда и из неравенства

$$\sum_{|\alpha|_2=k} \frac{k!}{\alpha!} \|D^\alpha V(f, F_i)\|_{L_p(\Omega)}^p \leq \sum_{|\alpha|_2=k} \frac{k!}{\alpha!} \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)}^p \quad (i \in \mathbb{N})$$

вытекает

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|D^\alpha V(f, F_i)\|_{L_p(\Omega)} = \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \quad (|\alpha|_2 = k). \quad (77)$$

Ввиду ограниченности последовательности $\{V(f, F_i) : i \in \mathbb{N}\}$ в $W_p^k(\Omega)$ из нее можно выделить подпоследовательность $\{V(f, F_{i_j}) : j \in \mathbb{N}\}$, слабо сходящуюся к некоторому $\tilde{f}$ в $W_p^k(\Omega)$. Тогда $V(f, F_{i_j}) \rightarrow \tilde{f}$ слабо в $W_p^{k-1}(\Omega)$, так что $\tilde{f} = f$. Из (77) и слабой сходимости $D^\alpha V(f, F_{i_j}) \rightarrow D^\alpha f$ в $L_p(\Omega)$ ($|\alpha|_2 = k$) следует сильная сходимость $D^\alpha V(f, F_{i_j}) \rightarrow D^\alpha f$ в $L_p(\Omega)$ ($|\alpha|_2 = k$) [65, с. 288]. Итак, $V(f, F_{i_j}) \rightarrow f$ в $W_p^k(\Omega)$. Любая подпоследовательность из $\{V(f, F_i) : i \in \mathbb{N}\}$ также должна содержать подпоследовательность, сходящуюся к f в $W_p^k(\Omega)$, поэтому $V(f, F_i) \rightarrow f$ в $W_p^k(\Omega)$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $p = 2$ результаты, аналогичные теореме 4, были получены Ж. Дюшоном [46] и А. Ю. Бежаевым [52].

Метод дискретной оптимизации и метод (76) являются глобальными в отличие от локальных методов, которые рассматривались в § 1. Согласно предложению 2 локальные методы из § 1 дают оценку (2) при $l = 0$, $p \leq q$. Существует ли локальный метод восстановления функций, для которого имеет место оценка вида (2), в общей ситуации? Сейчас мы укажем такую конструкцию.

Пусть F – непустое подмножество $\bar{\Omega}$, $0 < \bar{h}(F) < \frac{\delta}{13nLk^{2nk^2}}$, Γ_ε ($\varepsilon > 0$) – метод восстановления, определенный в доказательстве леммы 7, и $\lambda = \frac{\delta}{13nLk^{2nk^2}\bar{h}(F)}$. Заметим, что в силу лемм 7, 1) и 5, 2) $\sigma(F) \leq 2\sigma'(F) < \infty$. Функция

$$V_{\text{loc}}(f, F)(x) = \sum_{z \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}^n} \psi_2(\lambda x - z) \Gamma_1(f, F \cap (\lambda^{-1}B(z, 3)))(x)$$

принадлежит $W_p^k(\Omega)$ и интерполирует f на F .

ТЕОРЕМА 5. *Выполняется неравенство*

$$\|D^l(f - V_{\text{loc}}(f, F))\|_{L_q(\Omega)} \leq C\sigma(F)\|D^k f\|_{L_p(\Omega)},$$

где $C = C(n, d, L, \delta, k, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь $C_i = C_i(n, d, L, \delta, k, p)$. Пусть $f^*(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ ($x \in \lambda\Omega$), $z \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}^n$, P – такой полином из $\mathcal{P}_{k-1}$, что

$$\|f^* - P\|_{W_p^k(B_\lambda(z, r))} \leq C_1 r^{C_2} \|D^k f^*\|_{L_p(B_\lambda(z, C_3 r))}$$

при $r \geq 1$ (лемма 4, $\lambda \geq 1$), при $x \in \lambda\Omega$

$$g_1(x) = \Gamma_1(f, F \cap (\lambda^{-1}B(z, 3)))\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

$$g_2(x) = \psi_1 \frac{x - z}{6} (f^*(x) - P(x)) + P(x),$$

$$\nu_z(x) = \psi_2(x - z) (f^*(x) - g_1(x)).$$

По определению Γ_1

$$\begin{aligned} \|D^k g_1\|_{L_p(\lambda\Omega)} &\leq 2\|D^k g_2\|_{L_p(\lambda\Omega)} \leq C_4 \|f^* - P\|_{W_p^k(B_\lambda(z, 6))} \\ &\leq C_5 \|D^k f^*\|_{L_p(B_\lambda(z, C_6))}. \end{aligned} \tag{78}$$

Применяя лемму 5, 2) ($f^* - g_1 = 0$ на $(\lambda F) \cap B(z, 3)$) и учитывая (78), получаем

$$\begin{aligned} \|D^k \nu_z\|_{L_p(B_\lambda(z, 1))} &\leq C_7 \|f^* - g_1\|_{W_p^k(B_\lambda(z, 1))} \\ &\leq C_8 \|D^k(f^* - g_1)\|_{L_p(B_\lambda(z, C_9))} \leq C_{10} \|D^k f^*\|_{L_p(B_\lambda(z, C_{11}))}. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| D^k \left(\sum_{z \in \frac{1}{n} \mathbb{Z}^n} \nu_z \right) \right\|_{L_p(B_\lambda(y, 1))} \leq C_{12} \|D^k f^*\|_{L_p(B_\lambda(y, C_{13}))},$$

откуда

$$\left\| D^k \left(\sum_{z \in \frac{1}{n} \mathbb{Z}^n} \nu_z \right) \right\|_{L_p(\lambda \Omega)} \leq C_{14} \|D^k f^*\|_{L_p(\lambda \Omega)},$$

или, что то же самое,

$$\|D^k(f - V_{\text{loc}}(f, F))\|_{L_p(\Omega)} \leq C_{14} \|D^k f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Отсюда и из леммы 7, 1) следует утверждение теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2. Ниже $C_i = C_i(\Omega, k, p, q) > 0$. В силу леммы 7, 1) достаточно установить соответствующие факты для $\sigma'(F)$. Пусть F – непустое конечное подмножество $\overline{\Omega}$. Выберем точки $a, b \in \overline{\Omega}$ так, чтобы $F \cap B(a, \bar{h}(F)) = \emptyset$ и $B(b, C_1 \bar{h}(F)) \subset \Omega \cap B(a, \bar{h}(F))$ (лемма 3). Существуют числа $r > 0$, $s \in \mathbb{N}$ и точки $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{R}^n$ такие, что $sr^n > C_2$, шары $B(a_i, r)$ ($i = \overline{1, s}$) попарно не пересекаются и содержатся в $\Omega \setminus F$. Полагая

$$g_1(x) = \psi_1\left(\frac{x - b}{C_1 \bar{h}(F)}\right), \quad g_2(x) = \sum_{i=1}^s \psi_1\left(\frac{x - a_i}{r}\right), \quad g_0(x) = \|D^k g_\iota\|_{L_p(\Omega)}^{-1} g_\iota(x),$$

где $\iota = 1$ при $p \leq q$ и $\iota = 2$ при $p > q$, имеем

$$\sigma'(F) \geq \|D^l g_0\|_{L_q(\Omega)} \geq C_3 \bar{h}(F)^\theta$$

в случае, когда $k = l$ или $p \leq q$.

Предположим, что $k > l$ и $p > q$. Если $u \in W_p^k(B(0, 1))$ и для любого $x \in B(0, 1)$ существует такое $y \in B(0, 1)$, что $|x - y| \leq C_4$, $u(y) = 0$, то

$$\|D^l u\|_{L_q(B(0, 1))} \leq C_5 \|D^k u\|_{L_p(B(0, 1))} \quad (79)$$

(лемма 5, 2)); здесь $C_4 < 1$. Возьмем некоторую точку $c \in \Omega$ и обозначим через $F_{\xi\eta}$ множество $(\eta\mathbb{Z}^n) \cap \Omega \setminus B(c, \frac{1}{2}C_4\xi)$ ($\xi, \eta > 0$). Зафиксируем ξ так, чтобы

$$\overline{B(c, \xi)} \subset \Omega, \quad (80)$$

и будем считать, что η достаточно мало. Тогда $F_{\xi\eta}$ – непустое конечное подмножество Ω ,

$$\frac{1}{2}C_4\xi \leq \bar{h}(F_{\xi\eta}) \leq C_4\xi, \quad (81)$$

$$\sup_{x \in B(c, \xi)} \inf_{y \in F_{\xi\eta} \cap B(c, \xi)} |x - y| \leq C_4\xi, \quad (82)$$

$$\sup_{x \in \Omega \setminus \overline{B(c, \xi)}} \inf_{y \in F_{\xi\eta} \setminus \overline{B(c, \xi)}} |x - y| \leq C_6\eta. \quad (83)$$

Допустим, что $g \in W_p^k(\Omega)$, $\|D^k g\|_{L_p(\Omega)} \leq 1$, $g(x) = 0$ на $F_{\xi\eta}$. Из (79), (80), (82), (83) и леммы 7, 2) (в которой нужно заменить Ω на $\Omega \setminus \overline{B(c, \xi)}$) следует

$$\begin{aligned} \|D^l g\|_{L_q(\Omega)} &\leq \|D^l g\|_{L_q(B(c, \xi))} + \|D^l g\|_{L_q(\Omega \setminus \overline{B(c, \xi)})} \\ &\leq C_5 \xi^{k-l+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} + C(\Omega, k, p, q, c, \xi) \eta^{k-l}, \end{aligned}$$

ввиду чего

$$\overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \sigma'(F_{\xi\eta}) \leq C_5 \xi^{k-l+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}}.$$

Учитывая (81), получаем

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \bar{h}(F_{\xi\eta}) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\eta \rightarrow 0} \sigma'(F_{\xi\eta}) \bar{h}(F_{\xi\eta})^{-\theta} = 0.$$

Предложение доказано.

Список литературы

1. *Sharma A., Meir A.* Degree of approximation of spline interpolation // J. Math. Mech. 1966. V. 15. № 5. P. 759–767.
2. *Nord S.* Approximation properties of the spline fit // BIT. 1967. V. 7. № 2. P. 132–144.
3. *Farwig R.* Rate of convergence of Shepard's global interpolation formula // Math. Comput. 1986. V. 46. № 174. P. 577–590.
4. *Матвеев О. В.* Аппроксимативные свойства интерполяционных D^m -сплайнов // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 1. С. 14–18.
5. *Матвеев О. В.* Сплайн-интерполяция функций нескольких переменных и базисы в пространствах Соболева // Тр. МИРАН. 1992. Т. 198. С. 125–152.
6. *Schumaker L. L.* Fitting surfaces to scattered data // Approximation theory. II. N. Y.: Acad. Press, 1976. P. 203–268.
7. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолли Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.

8. *Mansfield L. E.* On the optimal approximation of linear functionals in spaces of bivariate functions // SIAM J. Numer. Anal. 1971. V. 8. № 1. P. 115–126.
9. *Mansfield L. E.* On the variational characterization and convergence of bivariate splines // Numer. Math. 1972. V. 20. № 2. P. 99–114.
10. *Mansfield L. E.* Optimal approximation and error bounds in spaces of bivariate functions // J. Appr. Theory. 1972. V. 5. № 1. P. 77–96.
11. *Лоран П.-Ж.* Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.
12. *Nelson G. M.* Bivariate spline functions and the approximation of linear functionals // Numer. Math. 1973. V. 21. № 2. P. 138–160.
13. *Nelson G. M.* Multivariate smoothing and interpolating splines // SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11. № 2. P. 435–446.
14. *Mansfield L. E.* On the variational approach to defining splines on L -shaped regions // J. Appr. Theory. 1974. V. 12. № 2. P. 99–112.
15. *Mansfield L. E.* Error bounds for spline interpolation over rectangular polygons // J. Appr. Theory. 1974. V. 12. № 2. P. 113–126.
16. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
17. *Birkhoff G., Schultz M. H., Varga R. S.* Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations // Numer. Math. 1968. V. 11. № 3. P. 232–256.
18. *Bramble J. H., Zlámal M.* Triangular elements in the finite element method // Math. Comput. 1970. V. 24. № 112. P. 809–820.
19. *Zlámal M.* A finite element procedure of the second order of accuracy // Numer. Math. 1970. V. 14. № 4. P. 394–402.
20. *Gordon W. J.* Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation // SIAM J. Numer. Anal. 1971. V. 8. № 1. P. 158–177.
21. *Nicolaides R. S.* On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation // SIAM J. Numer. Anal. 1972. V. 9. № 3. P. 435–445.
22. *Nicolaides R. A.* On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation. II // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. № 1. P. 182–189.
23. *Zlámal M.* Curved elements in the finite element method. I // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. № 1. P. 229–240.
24. *Barnhill R. E., Birkhoff G., Gordon W. J.* Smooth interpolation in triangles // J. Appr. Theory. 1973. V. 8. № 2. P. 114–128.
25. *Barnhill R. E., Gregory J. A.* Compatible smooth interpolation in triangles // J. Appr. Theory. 1975. V. 15. № 3. P. 214–225.
26. *McLain D. H.* Two dimensional interpolation from random data // Comput. J. 1976. V. 19. № 2. P. 178–181; Errata // Ibid. 1976. V. 19. № 4. P. 384.
27. *Nelson G.* Minimum norm interpolation in triangles // SIAM J. Numer. Anal. 1980. V. 17. № 1. P. 44–62.
28. *Franke R.* Scattered data interpolation: tests of some methods // Math. Comput. 1982. V. 38. № 157. P. 181–200.
29. *Maude A. D.* Interpolation – mainly for graph plotters // Comput. J. 1973. V. 16. № 1. P. 64, 65.
30. *Franke R.* Locally determined smooth interpolation at irregularly spaced points in several variables // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 19. № 4. P. 471–482.
31. *Franke R.* Smooth interpolation of scattered data by local thin plate splines // Comput. Math. 1982. V. 8. № 4. P. 273–281.

32. *Shepard D.* A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data // Proc. 23rd ACM Nat. Conf. Princeton, N. Y. – London, 1968. P. 517–524.
33. *Gordon W. J., Wixom J. A.* Shepard's method of "metric interpolation" to bivariate and multivariate interpolation // Math. Comput. 1978. V. 32. № 141. P. 253–264.
34. *McLain D. H.* Drawing contours from arbitrary data points // Comput. J. 1974. V. 17. № 4. P. 318–324.
35. *Lancaster P.* Moving weighted least-squares methods // Polynomial and spline approximation. Dordrecht: Reidel, 1979. P. 103–120.
36. *Foley T. A.* Full Hermite interpolation to multivariate scattered data // Approximation theory. IV. N. Y.: Acad. Press, 1983. P. 465–470.
37. *Nielson G. M.* Coordinate free scattered data interpolation // Topics in multivariate approximation. N. Y.: Acad. Press, 1987. P. 175–184.
38. *Duchon J.* Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces // Lect. Notes Math. 1977. V. 571. P. 85–100.
39. *Franke R.* Recent advances in the approximation of surfaces from scattered data // Topics in multivariate approximation. N. Y.: Acad. Press, 1987. P. 79–98.
40. *Madych W. R., Nelson S. A.* Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions // Appr. Theory Appl. 1988. V. 4. № 4. P. 77–89.
41. *Dyn N., Light W. A., Cheney E. W.* Interpolation by piecewise-linear radial basis functions // J. Appr. Theory. 1989. V. 59. № 2. P. 202–223.
42. *Light W. A., Cheney E. W.* Interpolation by piecewise-linear radial basis functions. II // J. Appr. Theory. 1991. V. 64. № 1. P. 38–54.
43. *Narcowich F. J., Ward J. D.* Norms of inverses and condition numbers for matrices associated with scattered data // J. Appr. Theory. 1991. V. 64. № 1. P. 69–94.
44. *Atteia M.* Existence et détermination des fonctions "spline" à plusieurs variables // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. A. 1966. V. 262. № 10. P. 575–578.
45. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
46. *Duchon J.* Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces // RAIRO. Anal. Numér. 1976. V. 10. № 12. P. 5–12.
47. *Duchon J.* Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m -splines // RAIRO. Anal. Numér. 1978. V. 12. № 4. P. 325–334.
48. *Meinguet J.* An intrinsic approach to multivariate spline interpolation at arbitrary points // Polynomial and spline approximation. Dordrecht: Reidel, 1979. P. 163–190.
49. *Василенко В. А.* Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск: Наука, 1983.
50. *Goodman T. N. T., Lee S. L.* Cardinal interpolation by D^m -splines // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1983. V. 94A. № 1,2. P. 149–161.
51. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984.
52. *Безжаев А. Ю.* D^m -сплайны в задачах приближения функций на хаотических сетках. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.
53. *Шадрин А. Ю.* О приближении функций интерполяционными сплайнами, заданными на неравномерных сетках // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 9. С. 1236–1255.
54. *Madych W. R., Nelson S. A.* Polyharmonic cardinal splines // J. Appr. Theory. 1990. V. 60. № 2. P. 141–156.
55. *Madych W. R., Nelson S. A.* Polyharmonic cardinal splines: a minimization property // J. Appr. Theory. 1990. V. 63. № 3. P. 303–320.
56. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. М.: Физматгиз, 1959.

- 57. *Rosen J. B.* Minimum error bounds for multidimensional spline approximation // J. Comput. Syst. Sci. 1971. V. 5. № 4. P. 430–452.
- 58. *Zwart P. B.* Multivariate splines with nondegenerate partitions // SIAM J. Numer. Anal. 1973. V. 10. № 4. P. 665–673.
- 59. *Hayes J. G., Halliday J.* The least-squares fitting of cubic spline surfaces to general data sets // J. Inst. Math. Appl. 1974. V. 14. № 1. P. 89–103.
- 60. *Kaufman E. H., Taylor G. D.* Uniform rational approximation of functions of several variables // Int. J. Numer. Math. Eng. 1975. V. 9. № 2. P. 297–323.
- 61. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- 62. *Матвеев О. В.* О некоторых методах восстановления функций n переменных, заданных на хаотических сетках // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 4. С. 605–609.
- 63. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
- 64. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- 65. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- 66. *Икрамов Х. Д.* Итерационные методы // Матем. энциклопедия. Т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979. С. 686–689.
- 67. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.
- 68. *Субботин Ю. Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно-полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик триангуляции // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 117–137.

Екатеринбург

Поступило в редакцию
14.VI.1994