Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, Мультипликативная теория пересечений и комплексные тропические многообразия, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 4, 19–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:02:56

УДК 512.7+514.172

Б. Я. Казарновский

Мультипликативная теория пересечений и комплексные тропические многообразия

Построена теория пересечений подмногообразий тора, в которой общей паре многообразий дополнительных размерностей сопоставляется не только количество точек в пересечении, но и произведение этих точек как элементов объемлющего тора. В случае полного пересечения дивизоров такая теория пересечений дает как формулу Бернштейна для числа корней системы, так и формулу Хованского для их произведения. При построении этой теории естественно возникают “кусочно линейные” подмножества тора, которые мы называем комплексными тропическими многообразиями.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

1.1. Конструкция мультипликативной теории пересечений возникла при осмыслении формулы Хованского для произведения корней системы уравнений [1] в контексте работы [2].

В работе [1] (см. также [3]–[7]) вычислено произведение корней полной системы уравнений, составленной из полиномов Лорана на комплексном торе $\mathbb{T}$ (тор $\mathbb{T}$ – алгебраическая группа, изоморфная $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$). Это произведение является элементом тора. При $n = 1$ произведение корней полинома $c_0 x^k + \dots + c_m x^{m+k}$ равно $(-1)^m c_0 / c_m$. Ингредиентами многомерной формулы являются многогранники Ньютона уравнений (в одномерном случае m – длина отрезка Ньютона) и коэффициенты полиномов при мономах, отвечающих вершинам многогранников. При этом предполагается, что набор многогранников Ньютона системы является *развернутым* (см. определение 8). Свойство развернутости набора многогранников является общим.

В работе [2] описана теория пересечений алгебраических подмногообразий тора со значениями в кольце s -вееров. Многообразия M, N размерности d считаются в такой теории пересечений эквивалентными, если для любого многообразия X дополнительной размерности $n - d$ верно то, что количества точек множеств $M \cap gX$ и $N \cap gX$ одинаковы при любом $g \notin D(M, N, X)$, где $D(M, N, X)$ – некоторое собственное алгебраическое подмногообразие тора¹. Если многообразия M и N эквивалентны, то для общего X дискриминантное многообразие $D(M, N, X)$ пусто.

¹В [2] отсутствуют ссылки на работы [8] и [9], в которых теория пересечений с аналогичными свойствами построена в более общей ситуации.

Работа выполнена при поддержке грантами НШ-1972.2003.1, НШ-4719.2006.1, NWO-RFFI 047.011.2004.026.

Например, при любом $t_0 \in \mathbb{T}$ многообразия M и $t_0 M$ эквивалентны. Если X таково, что *при любом $g \in \mathbb{T}$ количество точек множества $M \cap gX$ конечно и не зависит от выбора g* (это свойство эквивалентно развернутости пары (M, X) многообразий в случае $\dim X + \dim M = \dim \mathbb{T}$; см. определение 8), то дискриминантное многообразие $D(M, t_0 M, X)$ пусто.

Основой описанной в статье конструкции является следующее простое свойство развернутой пары многообразий X, Y дополнительных размерностей. Отображение, переводящее элемент t тора $\mathbb{T}$ в произведение всех элементов конечного множества $X \cap (tY)$, является отображением вида $t \mapsto W\Psi(t)$, где $\Psi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – эндоморфизм тора, а W – произведение элементов множества $X \cap Y$. Отображение Ψ и элемент W могут быть выражены в терминах некоторых сопоставляемых многообразиям геометрических данных. Эти данные – соответственно s -вееры и w -вееры многообразий.

Алгебраическому d -мерному подмногообразию тора M сопоставляется называемый *d -мерным s -веером* евклидов геометрический объект Σ_M (схожие объекты рассматривались в работах [10] и [11]). Эквивалентным многообразиям сопоставлены одинаковые, не эквивалентным – разные s -вееры. s -веер – это, примерно, d -мерный веер рациональных конусов, лежащих в пространстве с фиксированной целочисленной решеткой (см. замечание 1), d -мерным конусам которого приписаны целочисленные кратности. Объемлющее пространство мы будем отождествлять с пространством $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, т. е. с пространством $\sqrt{-1} \operatorname{Im} \mathfrak{Z}$, где $\operatorname{Im} \mathfrak{Z}$ – касательное пространство компактного подтора тора $\mathbb{T}$, рассматриваемое как подпространство мнимых частей алгебры Ли $\mathfrak{Z}$ тора $\mathbb{T}$.

Расстановка кратностей должна удовлетворять определенным линейным условиям, называемым *аддитивными соотношениями*. s -веер гиперповерхности – это, практически, ее многогранник Ньютона (см. пример 1 ниже). s -вееры образуют коммутативную градуированную $\mathbb{Z}$ -алгебру с наглядно определяемыми операциями. Степень d -мерного s -веера равна $n-d$. Если M задано как множество совместных нулей невырожденной системы с многогранниками Ньютона, то Σ_M – произведение этих многогранников. Отображение $M \rightarrow \Sigma_M$ задает теорию пересечений алгебраических многообразий со значениями в кольце s -вееров. Это, в частности, означает, что:

- 1) $\Sigma_{M \cup N} = \Sigma_M + \Sigma_N$;
- 2) $\Sigma_{M \cap gN} = \Sigma_M \Sigma_N$ при любом $g \notin D(M, N)$, где $D(M, N)$ – собственное алгебраическое подмногообразие тора, пустое для общей пары многообразий суммарной размерности, большей или равной n ;
- 3) если $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ – s -вееры гиперповерхностей, то их произведение есть точка нуль с кратностью, равной произведению смешанного объема многогранников Ньютона этих гиперповерхностей на $n!$ (ср. с [12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Конечное множество многогранных выпуклых конусов с размерностями от нуля до d в вещественном векторном пространстве с фиксированной целочисленной решеткой называется *d -мерным веером конусов*, если:

- а) все конусы рациональны и открыты в порождаемых ими подпространствах;
- б) любая грань любого из конусов также является конусом этого веера;
- с) пересечение замыканий любых двух конусов веера является их общей гранью.

Конус веера минимальной размерности является подпространством. Веер называется *острым*, если это подпространство нульмерно. Носитель веера –

объединение конусов. Веер называется *полным*, если его носитель – все пространство.

Используя недавно возникшее понятие *тропического алгебраического многообразия*, можно определить с-веер как тропическое многообразие с единственной минимальной компонентой, которая содержит точку нуль, т.е., возможно, как “тропическую особенность”. В тропической геометрии (см. [13], [14], в обзоре [14] можно найти дальнейшие ссылки) одномерный и $(n - 1)$ -мерный с-вееры появляются как *степени* соответственно тропической кривой и тропической гиперповерхности. Конструкцию, сопоставляющую таким тропическим многообразиям их степени, можно построить и в случае произвольной размерности. Определение операций с с-веерами и результаты из [2] практически без изменений (см. § 6) распространяются на тропические многообразия и приводят к теории пересечений тропических многообразий. Если рассматривать с-вееры как тропические многообразия, то мы получим вложение колец. Сопоставление тропическому многообразию его степени также является гомоморфизмом.

Аналогично, строящиеся ниже w-вееры можно рассматривать как степени *комплексных тропических многообразий* (сами w-вееры не являются комплексными тропическими многообразиями). Мультипликативная теория пересечений также распространяется на комплексные тропические многообразия (см. § 6).

1.2. w-эквивалентность и w-вееры многообразий. Эквивалентные в смысле п. 1.1 многообразия M , N будем называть *w-эквивалентными*, если для любого многообразия X дополнительной размерности из некоторого зависящего от M и N общего семейства многообразий (точнее, для таких X , при которых пары (M, X) и (N, X) многообразий развернуты) верно, что произведения всех элементов двух конечных подмножеств тора $M \cap X$ и $N \cap X$ равны.

Алгебраическому d -мерному подмногообразию тора M сопоставляется называемый *d-мерным w-веером* геометрический объект W_M . w-эквивалентным многообразиям сопоставлены одинаковые w-вееры, не w-эквивалентным – разные.

d -мерный w-веер – это d -мерный с-веер (называемый *основой w-веера*), d -мерные конусы которого снабжены также сдвиговыми кратностями. *Сдвиговая кратность* $w(K)$ – элемент тора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$, где $\mathbb{T}_K$ – подтор, порожденный экспонентами элементов конуса K . Сдвиговые кратности удовлетворяют *мультипликативным соотношениям* (см. далее пример 3 и определение 5). Основой w-веера W_M является с-веер Σ_M .

Если M – конечное множество точек тора (т.е. нульмерное алгебраическое многообразие), то W_M – точка нуль с кратностью, равной количеству точек M , и сдвиговой кратностью, равной произведению этих точек. Если множество M состоит из m экземпляров $\mathbb{T}$, то W_M – все пространство $\text{Re } \mathbb{Z}$ с кратностью m и сдвиговой кратностью e , где e – единица (единственный элемент) нульмерного тора. В этих двух случаях множества аддитивных и мультипликативных соотношений пусты.

Многообразия M и gM не w-эквивалентны. Отображение $M \rightarrow W_M$ эквивариантно, но действие тора на w-веерах, в отличие от действия на с-веерах, не тривиально. При действии элемента $g \in \mathbb{T}$ на w-веер W_M сдвиговая кратность конуса K умножается на $g_K^{m(K)}$, где g_K – образ g в факторторе $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$, а $m(K)$ – кратность K .

Определены операция сложения w -вееров и операция перемножения конечного числа образующих развернутый набор (см. определение 8 в § 4) w -вееров. При сложении и умножении w -вееров их основы (т. е. вееры со стертыми сдвиговыми кратностями) складываются и перемножаются в кольце s -вееров. Операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны, если ассоциативность умножения понимать следующим образом: для развернутого набора трех w -вееров верно, что $W_1 W_2 W_3 = (W_1 W_2) W_3 = W_1 (W_2 W_3)$, если пары w -вееров (W_1, W_2) и (W_2, W_3) также развернуты (иначе правая часть соотношения ассоциативности, состоящая из попарных произведений, не определена). Если пары w -вееров (V, W_1) и (V, W_2) развернуты, то $V(W_1 + W_2) = VW_1 + VW_2$.

Из перечисленных в п. 1.1 свойств отображения $M \rightarrow \Sigma_M$ (при замене Σ_M на W_M), свойство 1) сохраняется, свойство 2) для пар многообразий с развернутыми w -веерами имеет вид $W_{M \cap N} = W_M W_N$, а в свойстве 3) к формуле Бернштейна для числа корней системы уравнений [12] добавляется формула Хованского для их произведения [1].

Далее в настоящем параграфе приведены примеры w -вееров, возникающих в алгебраической геометрии и геометрии выпуклых многогранников. В § 2 после определения w -вееров содержится описание сложения, а также формулировка и вывод некоторых необходимых свойств w -вееров. В § 3 описана конструкция w -веера алгебраического многообразия (изложение в этом параграфе фактически не зависит от материала, приведенного в § 2). В § 4 строится умножение w -вееров и приводятся некоторые сопутствующие факты. Корректность приведенной конструкции умножения, а также свойство ассоциативности умножения доказаны в § 5. В § 6 излагается (с краткими обоснованиями) мультипликативная теория пересечений комплексных тропических многообразий.

1.3. Примеры w -вееров. Приведем описание ключевых примеров w -вееров.

ПРИМЕР 1 (w -вееры гиперповерхностей). Для алгебраической гиперповерхности, заданной уравнением $f = 0$, ее w -веер W_f строится следующим образом.

Соответствующий веер составлен из конусов, двойственных граням ненулевой размерности многогранника Ньютона Γ полинома f . Конусы старшей размерности двойственны ребрам многогранника. Кратность $m(K)$ конуса K — целочисленная длина двойственного конусу K ребра Γ , или, иначе, число, на единицу меньшее количества точек с целочисленными координатами на этом ребре. Такой $(n - 1)$ -мерный веер конусов (снабженный набором кратностей) является s -веером и обозначается через Σ_Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2 [2]. Снабдим $(n - k)$ -мерные конусы веера Σ_Γ кратностями, равными площадям двойственных k -мерных граней многогранника Γ . Тогда $(n - k)$ -мерный остоу веера Σ_Γ , т. е. все конусы, имеющие размерность меньше $n - k + 1$, есть s -веер, равный k -й степени s -веера Σ_Γ .

Опорная функция H_Γ многогранника Γ является тропическим полиномом, а Σ_Γ — соответствующей тропической гиперповерхностью. Любой $(n - 1)$ -мерный s -веер с положительными кратностями конусов является тропической гиперповерхностью опорной функции некоторого выпуклого многогранника.

Возможность умножения s -вееров и w -вееров (теорема 4) приводит к следующим фактам о выпуклых многогранниках.

Пусть $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ — s -вееры выпуклых многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ (или, иначе, тропические гиперповерхности опорных функций этих многогранников),

$S = (s_1, \dots, s_n)$ – набор элементов пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, $\mathcal{X}(S) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} (s_i + \text{supp } \Sigma_i)$. Для общего элемента $S \in \oplus^n(\text{Re } \mathfrak{Z})$ множество $\mathcal{X}(S)$ конечно, а любая точка $x \in \mathcal{X}(S)$ является пересечением сдвинутых конусов $s_i + K_i$, где конус K_i двойствен ребру многогранника Δ_i . Припишем точке x (целочисленную) массу, равную объему образованного этими ребрами параллелепипеда. Рассматривая $\mathcal{X}(S)$ как множество материальных точек, обозначим его центр масс через $\mathcal{C}(S; \Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1) Функция $S \mapsto \mathcal{X}(S)$, сопоставляющая набору сдвигов общего положения конечное множество материальных точек пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, продолжается до непрерывной функции (т.е. точки множества $\mathcal{X}(S)$ могут сходиться и расходиться, если сумма их масс при этом сохраняется) на пространстве $\oplus^n(\text{Re } \mathfrak{Z})$.

2) Сумма масс $t(S)$ точек множества $\mathcal{X}(S)$ не зависит от выбора S . Она равна смешанному объему многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, умноженному на $n!$.

3) Отображение, действующее как $S \mapsto t(S)\mathcal{C}(S; \Delta_1, \dots, \Delta_n)$, продолжается до непрерывного кусочно линейного отображения $\oplus^n(\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$. Если набор многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ развернут, то это отображение – линейный оператор.

4) Зависимость отображения $S \mapsto t(S)\mathcal{C}(S; \Delta_1, \dots, \Delta_n)$ от набора многогранников полилинейна.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Утверждение 1 остается верным при замене опорных функций многогранников на любые тропические полиномы (см. теорему 6 в п. 6.1). При этом утверждение 1, 2) становится тропическим аналогом формулы Бернштейна для числа корней системы уравнений. Отображение из утверждения 1, 3) в случае развернутого набора тропических полиномов приобретает вид $S \mapsto \Pi + \Psi(S)$, где $\Pi \in \text{Re } \mathfrak{Z}$, а $\Psi(S): \oplus^n(\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$ – линейный оператор. Таким образом, Π является суммой точек тропического многообразия-пересечения. Эта сумма может быть получена как результат применения формулы Хованского к исходным тропическим полиномам (детали см. в § 6, комплексные тропические аналоги этих формул также см. в § 6). Все приведенные факты остаются верными в евклидовой тропической геометрии, т.е. при замене целочисленной решетки на евклидову метрику (см. замечание 7 и § 6). В частности, утверждение 1 остается верным для многогранников в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом (евклидовом) случае массы материальных точек – вещественные числа. Отметим, что в формуле Бернштейна для кратности пересечения тропических гиперповерхностей не требуется никаких условий невырожденности.

Часть f_Δ полинома f , приписанную ребру Δ (называемую также Δ -укорочением f), можно с точностью до умножения на характер рассматривать как полином на одномерном торе $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$, где K – двойственный конус ребра Δ . w -веер W_f полинома f возникает при сопоставлении конусу K сдвиговой кратности $w(K)$, равной произведению корней полинома f_Δ . Если a, b – коэффициенты при мономах, приписанных вершинам ребра, то в зависимости от выбора одного из двух возможных отождествлений $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$ с $\mathbb{C} \setminus 0$ сдвиговая кратность $w(K)$ равна $(-1)^{m(K)}a/b$ или $(-1)^{m(K)}b/a$.

Любой w -веер с основой Σ_Γ является w -веером некоторого полинома Лорана с многогранником Ньютона Γ .

Аддитивные и мультипликативные соотношения соответствуют двумерным граням многогранника (см. предложение 6); говоря неформально, они представляют собой записанные в терминах соответственно кратностей и сдвиговых кратностей условия замкнутости границ двумерных граней.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Любому полиному Лорана соответствует его комплексная тропическая гиперповерхность (см. § 6). Построенный выше w-веер – степень этой гиперповерхности.

ПРИМЕР 2 (пересечение сдвинутых подторов). Все результаты статьи можно воспринимать как перенос приведенного в этом примере вычисления со случая объединений сдвинутых подторов на случай любых алгебраических подмногообразий тора $\mathbb{T}$.

Пусть $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ – трансверсально пересекающиеся подторы n -мерного тора $\mathbb{T}$ соответственно размерностей k и $n - k - d$, а $\mathbb{P}$ – d -мерный подтор тора $\mathbb{T}$, множество элементов которого – связная компонента пересечения $\mathbb{U} \cap \mathbb{V}$.

Рассмотрим алгебраические многообразия

$$M = \bigcup_{1 \leq i \leq p} (u_i \mathbb{U}), \quad N = \bigcup_{1 \leq i \leq q} (v_i \mathbb{V}),$$

где $u_1, \dots, u_p$ и $v_1, \dots, v_q$ – элементы факторторов соответственно $\mathbb{T}/\mathbb{U}$ и $\mathbb{T}/\mathbb{V}$. Ясно, что многообразие $M \cap N$ состоит из конечного числа классов смежности тора $\mathbb{T}$ по подтору $\mathbb{P}$.

Определим в факторторах $\mathbb{T}/\mathbb{U}$ и $\mathbb{T}/\mathbb{V}$ сдвиговые кратности многообразий M и N , положив $\omega(M) = u_1 \cdots u_p$ и $\omega(N) = v_1 \cdots v_q$. Тогда:

- 1) многообразие $M \cap N$ состоит из $pq\xi(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ классов смежности $\mathbb{T}$ по $\mathbb{P}$, где $\xi(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ – количество элементов конечной группы $(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})/\mathbb{P}$;
- 2) произведение этих классов в группе $\mathbb{T}/\mathbb{P}$ равно

$$(S^q T^p)^{\xi(\mathbb{U}, \mathbb{V})} \kappa(\mathbb{U}, \mathbb{V})^{pq},$$

где S и T – любые прообразы построенных выше сдвиговых кратностей $\omega(M) \in \mathbb{T}/\mathbb{U}$ и $\omega(N) \in \mathbb{T}/\mathbb{V}$ при накрытиях $\mathbb{V}/\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{U}$ и $\mathbb{U}/\mathbb{P} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{V}$, а $\kappa(\mathbb{U}, \mathbb{V})$ – произведение элементов конечной группы $(\mathbb{U} \cap \mathbb{V})/\mathbb{P}$.

Соответствующие многообразиям M , N с-вееры Σ_M , Σ_N представляют собой подпространства $\tau_{\mathbb{U}}$, $\tau_{\mathbb{V}}$ пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ (каждый из вееров состоит из одного конуса) размерностей k и $n - k - d$, снабженные кратностями p и q . Эти подпространства – пересечения алгебр Ли подторов с пространством $\text{Re } \mathfrak{Z}$.

Приписывая конусам определенные выше сдвиговые кратности $\omega(M)$, $\omega(N)$, получаем развернутую пару w-вееров W_M , W_N . Соответственно, w-веер-произведение $W_M W_N$ – d -мерное подпространство $\tau_{\mathbb{P}} = \tau_{\mathbb{U}} \cap \tau_{\mathbb{V}}$ пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, снабженное кратностью $pq\xi(\mathbb{V}, \mathbb{U})$ и сдвиговой кратностью $(S^q T^p)^{\xi(\mathbb{U}, \mathbb{V})} \times \kappa(\mathbb{U}, \mathbb{V})^{pq}$.

ПРИМЕР 3 (w-вееры алгебраических кривых). Выберем на торе инвариантную метрику и назовем *малой окрестностью бесконечности* множество точек, лежащих вне шара большого радиуса с центром в единице тора. Известно, что алгебраическая кривая M в торе $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ вблизи бесконечности является малым возмущением конечного числа сдвинутых одномерных полуторов

$$\{\tau_{i,j} t^{v_i} : |t| > 1; v_i \in \mathbb{Z}_{\text{irr}}^n; \tau_{i,j} \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n; 1 \leq j \leq m_i\},$$

где $\mathbb{Z}_{\text{irr}}^n$ – множество примитивных векторов целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ пространства $\text{Re } \mathfrak{F}$. Кривая $\mathbb{T}_i^+ = \{t^{v_i} : |t| > 1\}$ – одномерный полутор, $\tau_{i,j} \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ – его сдвиг, а m_i – количество сдвигов полутора $\mathbb{T}_i^+$.

Соответствующий кривой M w-веер W_M состоит из:

- (i) набора лучей $\{r_i\}$, порожденных соответствующими точками $v_i \in \mathbb{Z}_{\text{irr}}^n$;
- (ii) приписанной каждому лучу r_i кратности m_i ;
- (iii) приписанной каждому лучу r_i сдвиговой кратности w_i , равной произведению $\prod_{j=1}^{m_i} \tau_{i,j}$ всех сдвигов полутора $\mathbb{T}_i^+$.

Сдвиги и их произведение – элементы фактортора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_i$, где $\mathbb{T}_i = \{t^{v_i} : t \in \mathbb{C} \setminus 0\}$.

Для кратностей выполнены равенства

$$\sum_i m_i v_i = 0, \quad (1)$$

которые ниже называются *аддитивными соотношениями*. Набор лучей $\{r_i\}$, снабженных положительными целочисленными кратностями $\{m_i\}$, – это с-веер Σ_M алгебраической кривой.

Для объяснения смысла мультипликативных соотношений выберем $(n-1)$ -мерный подтор $\mathbb{U} \subset \mathbb{T}$, пересечения которого с торами $\mathbb{T}_i$ трансверсальны. При всех $g \in \mathbb{T}$ количества точек множеств $M \cap g\mathbb{U}$ равны. Рассмотрим отображение $\mathbb{T}/\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{T}$, переводящее g в произведение элементов множества $M \cap g\mathbb{U}$. Из условия трансверсальности пересечений следует, что это отображение можно представить в виде $g \mapsto \mu_{\mathbb{U}} \Psi_{\mathbb{U}}(g)$, где $\mu_{\mathbb{U}}$ – произведение всех элементов множества $M \cap \mathbb{U}$, а $\Psi_{\mathbb{U}}$ – гомоморфизм торов $\mathbb{T}/\mathbb{U} \rightarrow \mathbb{T}$. Этот гомоморфизм восстанавливается (см. п. 2.1) по с-вееру кривой Σ_M , т.е. по набору лучей с кратностями $\{r_i, m_i\}$.

Значение $\mu_{\mathbb{U}}$ можно восстановить по кратностям и сдвиговым кратностям лучей $\{r_i\}$ двумя способами, рассматривая отображение $g \mapsto \mu_{\mathbb{U}} \Psi_{\mathbb{U}}(g)$ в двух бесконечно удаленных точках одномерного тора $\mathbb{T}/\mathbb{U}$. Условия равенства этих двух значений $\mu_{\mathbb{U}}$ и есть *мультипликативные соотношения*.

Такая формулировка мультипликативных соотношений для многообразий любой размерности приведена в п. 2.1. Имеется другая формулировка, не связанная с участием произвольного подтора $\mathbb{U}$ (см. п. 2.4). В случае одномерных w-вееров мультипликативные соотношения записываются в виде двух групп линейных соотношений (на мнимые и вещественные части логарифмов сдвиговых кратностей):

$$\sum_i (\text{Re } \log w_i) \wedge v_i = 0, \quad \sum_i (\sqrt{-1} \text{Im } \log w_i) \wedge v_i = \ell_1.$$

Логарифмом элемента $\mathbb{T}/\mathbb{T}_i$ здесь называется любой его прообраз при отображении $\pi_i \circ \exp$, где $\exp: \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{T}$ – экспоненциальное отображение, а $\pi_i: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{T}_i$ – отображение проекции. Вещественная и мнимая части логарифма – компоненты по подпространствам $\text{Re } \mathfrak{F}$, $\text{Im } \mathfrak{F}$. Очевидно, что 2-вектор $(\text{Re } \log w_i) \wedge v_i$ не зависит от произвола в выборе $\log w_i$, а 2-вектор $(\text{Im } \log w_i) \wedge \sqrt{-1} v_i$ определен лишь как вычет по модулю 2-векторов целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ пространства $\text{Im } \mathfrak{F}$. В правой части соотношений для мнимых частей логарифмов стоит именно такой вычет ℓ_1 (см. п. 2.4). Этот вычет строится как 2-вектор пространства $\wedge^2((\frac{1}{2}\mathbb{Z}^n)/\mathbb{Z}^n)$, являющегося n -мерным векторным пространством над полем из двух элементов. 2-вектор ℓ_1 не зависит от сдвиговых кратностей, он строится по с-вееру $\{r_i, m_i\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $n = 2$ (см. [7]) мультипликативные соотношения эквивалентны закону взаимности Вейля для комплексных алгебраических кривых. Кроме того, любой одномерный w-веер на плоскости с положительными кратностями является w-веером алгебраической кривой (аддитивные соотношения в работе [7] называются *условиями Паскаля*, а мультипликативные – *условиями Виета*). О связи формулы Хованского с многомерным законом взаимности Паршина см. [1], [5].

ПРИМЕР 4 (w-вееры на плоскости). Покажем, как распознавать одномерные c-вееры на плоскости, для которых набор единичных сдвиговых кратностей удовлетворяет мультипликативным соотношениям, а также объясним, как, назначив сдвиговые кратности, изготовить w-веер из любого одномерного c-веера на плоскости.

Пусть $\mathcal{K}$ – одномерный c-веер на плоскости, т. е. конечный набор примитивных векторов v_i целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, снабженных такими целочисленными кратностями m_i , что $m_1 v_1 + \dots + m_r v_r = 0$. Пусть каждому вектору v_i сопоставлена также сдвиговая кратность ω_i . Напомним, что сдвиговая кратность – элемент тора $\mathbb{T}^2/\mathbb{T}_i$, где $\mathbb{T}_i = \{\exp(\lambda v_i) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ – одномерный подтор тора $\mathbb{T}^2$.

Обозначим через $\bar{v}$ вычет элемента $v \in \mathbb{Z}^2$ по модулю подрешетки $(2\mathbb{Z})^2$. Если $v \in \mathbb{Z}_{\text{irr}}^2$, то $\bar{v}$ равен одному из трех ненулевых элементов $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ группы $\mathbb{Z}^2/(2\mathbb{Z})^2$.

Сопоставим c-вееру $\mathcal{K}$ три элемента из $\mathbb{Z}^2/(2\mathbb{Z})^2$ по следующему правилу:

$$\bar{\mathcal{K}}_j = \sum_{i, \bar{v}_i = \bar{z}_j} m_i \bar{v}_i.$$

Следующее утверждение нетрудно вывести из определений, введенных в п. 2.1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1) Для тройки элементов $\bar{\mathcal{K}}_1, \bar{\mathcal{K}}_2, \bar{\mathcal{K}}_3$ имеются ровно две возможности:

- (i) $\bar{\mathcal{K}}_1 = \bar{\mathcal{K}}_2 = \bar{\mathcal{K}}_3 = 0$;
- (ii) $\bar{\mathcal{K}}_1 = \bar{z}_1, \bar{\mathcal{K}}_2 = \bar{z}_2, \bar{\mathcal{K}}_3 = \bar{z}_3$.

2) c-веер $\mathcal{K}$, снабженный набором сдвиговых кратностей $\omega_i = 1$, является w-веером, если и только если $\bar{\mathcal{K}}_1 = \bar{\mathcal{K}}_2 = \bar{\mathcal{K}}_3 = 0$.

3) Пусть q_i – нетривиальный квадратный корень из единицы тора $\mathbb{T}^2/\mathbb{T}_i$. Тогда c-веер $\mathcal{K}$, снабженный сдвиговыми кратностями $\omega_i = q_i^{m_i}$, является w-веером.

Например, векторы $v_1 = (0, -1)$, $v_2 = (-1, 0)$, $v_3 = (1, 1)$, снабженные аддитивными кратностями $m_1 = m_2 = m_3 = 1$, образуют c-веер (называемый *тропической прямой на плоскости* [14]). Здесь выполняются условия $\bar{\mathcal{K}}_1 = \bar{z}_1$, $\bar{\mathcal{K}}_2 = \bar{z}_2$, $\bar{\mathcal{K}}_3 = \bar{z}_3$ из п. (ii) утверждения 2, 1). Поэтому (согласно утверждению 2, 2)) единичные сдвиговые кратности не превращают тропическую прямую в w-веер.

§ 2. w-вееры

2.1. Определение и простейшие свойства w-вееров. Мы будем рассматривать вееры конусов в пространстве $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, где $\operatorname{Re} \mathfrak{Z} = \sqrt{-1} \operatorname{Im} \mathfrak{Z}$, а $\operatorname{Im} \mathfrak{Z}$ – алгебра Ли компактного подтора тора $\mathbb{T}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный веер конусов, каждый из d -мерных конусов которого снабжен целочисленной кратностью. Будем называть такой объект d -мерным *пред-с-веером*, а объединение конусов веера $\mathcal{K}$ – *носителем* пред-с-веера, если:

- 1) любой из конусов является гранью некоторого d -мерного конуса веера $\mathcal{K}$, это свойство мы называем в дальнейшем *условием однородности*;
- 2) кратности конусов удовлетворяют формулируемым ниже *аддитивным соотношениям*.

Замыкание объединения конусов $\mathcal{K}$, снабженных ненулевыми кратностями, назовем *строгим носителем* пред-с-веера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathcal{K}^c$ – d -мерный пред-с-веер, каждому d -мерному конусу K которого приписан (называемый ниже *сдвиговой кратностью* конуса K) элемент тора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$, где $\mathbb{T}_K$ – подтор тора $\mathbb{T}$, порожденный экспонентами точек конуса K . Будем называть такой объект d -мерным *пред- w -веером* с основой $\mathcal{K}^c$, если сдвиговые кратности конусов удовлетворяют формулируемым ниже *мультипликативным соотношениям*.

Два d -мерных пред-с-веера $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ с одним и тем же строгим носителем назовем *эквивалентными*, если любым d -мерным конусам $K_1 \in \mathcal{K}_1$ и $K_2 \in \mathcal{K}_2$, имеющим d -мерное пересечение, приписаны одинаковые кратности.

Два d -мерных пред- w -веера назовем *эквивалентными*, если:

- 1) их основы эквивалентны;
- 2) носители их основ совпадают (совпадение строгих носителей основ – следствие первого условия);
- 3) любым двум имеющим d -мерное пересечение конусам приписаны одинаковые сдвиговые кратности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. d -мерным *с-веером*, или, иначе, *однородным с-веером степени $n - d$* , называется класс эквивалентности d -мерных пред-с-вееров. *с-веер* – формальная сумма однородных с-вееров разных степеней. d -мерным *w-веером*, или, иначе, *однородным w-веером степени $n - d$* , называется класс эквивалентности d -мерных пред- w -вееров. *w-веер* – формальная сумма однородных w -вееров разных степеней.

ЗАМЕЧАНИЕ 6 [2]. с-вееры образуют коммутативное градуированное кольцо. Это кольцо тесно связано с кольцами когомологий торических многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ 7 [2]. Можно определить кольцо с-вееров в абстрактном вещественном векторном пространстве E . В этом случае кратность конуса K следует рассматривать как нечетную форму объема на пространстве E/E_K , где E_K – порожденное конусом K подпространство пространства E . Выбрав в пространстве E евклидову метрику, мы можем придать кратности конуса K числовое значение, равное интегралу формы по единичному кубу пространства E/E_K (в [2] такие с-вееры названы *евклидовыми*). Кольцо евклидовых с-вееров изоморфно кольцу дифференциальных форм на пространстве $E \oplus \sqrt{-1}E$, порожденному конечными линейными комбинациями мономов вида $dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_k$, где H_i – опорные функции выпуклых многогранников в пространстве E^* , продолженные до функций на $E + \sqrt{-1}E$ тождественно по мнимым частям (т.е. как $h(x + \sqrt{-1}y) = h(x)$).

Если в пространстве E задана целочисленная решетка $\mathbb{Z}^n$, то, рассматривая комплексификацию $\mathbb{T}$ тора $E/\mathbb{Z}^n$, можно отождествить пространства E и $\operatorname{Re} \mathbb{Z}$. В этом случае кольцо определенных выше с-вееров может быть отождествлено

с подкольцом кольца евклидовых s -вееров. Приведенные в этом и других параграфах результаты о s -веерах (в том числе определение s -веера) переносятся на случай евклидовых s -вееров по следующим правилам:

- 1) не используется слово “рациональный” (т. е. не рациональные, а любые подпространство, конус и т. д.);
- 2) кратности не целые, а вещественные числа;
- 3) для измерения площадей всюду (например, в формулировке аддитивных соотношений) используется евклидова площадь; в частности, примитивный вектор целочисленной решетки на луче всюду заменяется на вектор длиной, равной единице.

Приведем формулировку аддитивных соотношений.

Обозначим через $\xi(A, B)$ функцию на парах рациональных подпространств пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, равную коэффициенту искажения площади пространства $A/(A \cap B)$ при проекции $\pi: (\text{Re } \mathfrak{Z})/(A \cap B) \rightarrow (\text{Re } \mathfrak{Z})/B$.

Это означает, что для любой области $U \subset A/(A \cap B)$ площадь $\pi(U)$ равна площади U , умноженной на $\xi(A, B)$ (площади в факторпространствах измеряются при помощи факторрешеток). Если $A \cup B$ принадлежит собственному подпространству $\text{Re } \mathfrak{Z}$, то $\xi(A, B) = 0$ (в этом случае $\dim A/(A \cap B) < \dim (\text{Re } \mathfrak{Z})/B$).

Сохраняя обозначение $\xi(A, B)$, продолжим функцию ξ на сдвиги подпространств по формуле $\xi(a + A, b + B) = \xi(A, B)$. Теперь для $(n - d)$ -мерного рационального подпространства $A \subset \text{Re } \mathfrak{Z}$ и d -мерного веера конусов $\mathcal{K}$ с приписанными конусам старшей размерности кратностями $m(K)$ определим функцию $\xi_{A, \mathcal{K}}$ на пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$:

$$\xi_{A, \mathcal{K}}(e) = \sum \xi(e + A, S_K) m(K), \quad (2)$$

где суммирование ведется по d -мерным конусам веера, пересекающимся с аффинным подпространством $e + A$, а через S_K обозначено порожденное конусом K d -мерное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть A_{reg} – открытая всюду плотная (несвязная) область векторного пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, состоящая из объединения классов смежности по подпространству A , не пересекающихся с $(d - 1)$ -мерным остовом веера $\mathcal{K}$. Будем говорить, что для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены аддитивные соотношения, если функция $\xi_{A, \mathcal{K}}$ постоянна на области A_{reg} . Будем говорить, что для $\mathcal{K}$ выполнены аддитивные соотношения, если для любого рационального $(n - d)$ -мерного подпространства A пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ аддитивные соотношения выполнены для пары $(A, \mathcal{K})$.

Например, если $\mathcal{K}$ – n -мерный веер, то выполнение аддитивных соотношений означает, что кратности всех n -мерных конусов равны (отсюда следует, что однородная компонента степени нуль кольца s -вееров изоморфна $\mathbb{Z}$). Компонента n -й степени также изоморфна $\mathbb{Z}$. Если $\mathcal{K}$ – одномерный веер, а φ – линейный функционал на пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$ с нулевой гиперплоскостью A , то аддитивные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ можно записать как $\varphi(\sum_i m_i \bar{v}_i) = 0$, где m_i и $\bar{v}_i$ – соответственно кратности одномерных конусов и примитивные целочисленные векторы на этих конусах. Поэтому аддитивные соотношения для одномерных вееров записываются в виде $\sum_i m_i \bar{v}_i = 0$.

Пусть M – d -мерное подмногообразие тора $\mathbb{T}$; $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ – подтор размерности $n - d$; $\text{Re } \mathfrak{Z}_1 = \sqrt{-1} \text{Im } \mathfrak{Z}_1$, где $\text{Im } \mathfrak{Z}_1$ – касательное пространство компактного подтора тора $\mathbb{T}_1$. Алгебро-геометрический смысл аддитивных соотношений

состоит в том (теорема 2), что количества точек пересечения $M \cap (g\mathbb{T}_1)$ при почти всех $g \in \mathbb{T}$ одинаковы и равны $\xi_{\text{Re } \mathfrak{Z}_1, \Sigma_M}$.

Приведем без доказательства несколько простых свойств функции ξ .

ЛЕММА 1. 1) Выполнено $\xi(A, B) = \xi(B, A)$.

2) Если $\dim A + \dim B = n$, то $\xi(A, B)$ равно объему параллелепипеда, составленного из фундаментальных параллелепипедов решеток этих подпространств.

3) Функция $\bar{\xi}(A, B, C) = \xi(A, B)\xi(A \cap B, C)$ не меняется при перестановках аргументов.

4) Пусть $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ – пара подторов тора $\mathbb{T}$ общего положения. Тогда их пересечение $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2$ является объединением конечного числа сдвигов подтора коразмерности, равной $\text{codim } \mathbb{T}_1 + \text{codim } \mathbb{T}_2$. Количество этих сдвигов равно $\xi(\text{Re } \mathfrak{Z}_1, \text{Re } \mathfrak{Z}_2)$.

Утверждение 3) леммы 1 является следствием леммы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Именно аддитивные соотношения позволяют дать корректные определения таких операций с с-веерами, как проекции и умножение [2]. Произведение с-веера $\mathcal{K}$ на (рассматриваемое как с-веер) подпространство дополнительной размерности A – нульмерный конус с кратностью $\xi_{A, \mathcal{K}}$.

Ассоциативность умножения с-вееров основана на свойстве 3) функции ξ из леммы 1. Само по себе это свойство является утверждением об ассоциативности умножения рассматриваемых как с-вееры подпространств.

Приведем несколько используемых ниже обозначений и простых утверждений (предполагается, что рациональные подпространства A, B пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ пересекаются трансверсально, т. е. их объединение не принадлежит никакому собственному подпространству пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$).

Для любого подмножества $P \subset \text{Re } \mathfrak{Z}$ обозначим через S_P порожденное точками P подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ и положим $\mathcal{T}_P = \exp(P + \sqrt{-1} S_P)$. Если K – конус, то $\mathcal{T}_K$ – открытая область подтора $\mathbb{T}_K$, порожденного экспонентами элементов K ; если P – рациональное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, то $\mathcal{T}_P$ – подтор.

Через $\kappa_{A, B}$ обозначим элемент тора $\mathbb{T}/\mathcal{T}_{A \cap B}$, равный произведению элементов конечной группы $(\mathcal{T}_A/\mathcal{T}_{A \cap B}) \cap (\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_{A \cap B})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Ниже во многих формулах встречается множитель $\kappa_{A, B}$. В большинстве случаев этот множитель равен единице. Пусть коммутативная конечная группа G содержит m нетривиальных квадратных корней из единицы. Тогда если $m \neq 1$, то произведение всех элементов группы равно единице, иначе это произведение равно единственному нетривиальному квадратному корню из единицы.

Через $\psi_{A, B}: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathcal{T}_B/(\mathcal{T}_{A \cap B})$ обозначим гомоморфизм торov (ниже через $\psi_{A, B}$ также обозначается композиция $\psi_{A, B}$ с вложением $\mathcal{T}_B/(\mathcal{T}_{A \cap B}) \rightarrow \mathbb{T}/(\mathcal{T}_{A \cap B})$), который при $t \in \mathcal{T}_B$ переводит класс смежности $t\mathcal{T}_A$ в класс смежности $t^{\xi(A, B)}\mathcal{T}_{A \cap B}$ (для t_1, t_2 из одного класса смежности выполнено $t_1^{\xi(A, B)} = t_2^{\xi(A, B)}$), так как $\xi(A, B)$ равно количеству элементов конечной подгруппы тора $\mathbb{T}/\mathcal{T}_{A \cap B}$, состоящей из элементов пересечения $(\mathcal{T}_A/\mathcal{T}_{A \cap B}) \cap (\mathcal{T}_B/\mathcal{T}_{A \cap B})$.

Отображение $\psi_{A, B}$ сюръективно. Если $\dim \mathcal{T}_B/(\mathcal{T}_{A \cap B}) = 1$, то отображение $\psi_{A, B}$ биективно (так как любая конечная подгруппа одномерного тора является циклической).

Пусть B – рациональное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, снабженное целочисленной кратностью $m(B)$ и сдвиговой кратностью $\omega(B)$, которая (по определению) является элементом фактортора $\mathbb{T}/T_B$. Будем называть такое подпространство *оснащенным*. Для двух оснащенных подпространств A, B построим оснащение подпространства $A \cap B$ по формулам

$$m(A \cap B) = m(A)m(B)\xi(A, B),$$

$$\omega(A \cap B) = (\kappa_{A,B})^{m(A)m(B)}(\psi_{A,B}(\omega(A)))^{m(B)}(\psi_{B,A}(\omega(B)))^{m(A)}.$$

Оснащенное таким способом пересечение оснащенных подпространств будем обозначать через AB и называть *произведением* трансверсально пересекающихся оснащенных подпространств. Если $A = d + C$, $B = e + D$ – сдвиги оснащенных подпространств, то положим $m(A \cap B) = m(C \cap D)$ и $\omega(A \cap B) = \omega(C \cap D)$.

Пространство, оснащенное единичными кратностями, будем называть *тривиально оснащенным*.

Если A – тривиально оснащенное пространство, то формулы для оснащения пересечения упрощаются:

$$m(A \cap B) = m(B)\xi(A, B),$$

$$\omega(A \cap B) = (\kappa_{A,B})^{m(B)}\psi_{B,A}(\omega(B)).$$

Пусть оснащенное $(n - d)$ -мерное подпространство A трансверсально d -мерному пред-с-вееру $\mathcal{K}$. Если d -мерным конусам из $\mathcal{K}$ приписаны сдвиговые кратности, то обозначим через $\omega_{A,\mathcal{K}}$ функцию на области A_{reg} (см. определение 4) со значениями в $\mathbb{T}$:

$$\omega_{A,\mathcal{K}}(e) = \prod_{K, (e+A) \cap K \neq \emptyset} \omega(A \cap S_K),$$

где K – d -мерный конус веера $\mathcal{K}$, а пространство S_K оснащено кратностями конуса K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный пред-с-веер, d -мерные конусы которого снабжены сдвиговыми кратностями, а A – трансверсальное пред-с-вееру $\mathcal{K}$ оснащенное $(n - d)$ -мерное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$. Будем говорить, что мультипликативные соотношения *выполнены для пары* $(A, \mathcal{K})$, если функция $\omega_{A,\mathcal{K}}$ постоянна. Будем говорить, что мультипликативные соотношения *выполнены для $\mathcal{K}$* , если для любого тривиально оснащенного пространства A мультипликативные соотношения выполнены для пары $(A, \mathcal{K})$.

Следующее вспомогательное утверждение доказано в п. 2.4 (вплоть до § 3 оно используется только в выводе иллюстрирующих определение 5 предложений 2 и 3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(n - d)$ -мерное подпространство A трансверсально d -мерному пред-с-вееру $\mathcal{K}$ (это означает, что подпространства S_K, A не пересекаются трансверсально для любого d -мерного конуса K пред-с-веера $\mathcal{K}$). Определим зависящие от параметра $a \in A_{\text{reg}}$ (область A_{reg} определена выше) гомоморфизмы $\psi_a: \mathbb{T} \rightarrow T_A$ и $\psi^a: \mathbb{T}/T_A \rightarrow \mathbb{T}$ следующим образом:

$$\psi_a(t) = \prod_{K \in \mathcal{K}, (a+A) \cap K \neq \emptyset} \psi_{S_K,A}(t^{m(K)}), \quad \psi^a(t) = \prod_{K \in \mathcal{K}, (a+A) \cap K \neq \emptyset} \psi_{A,S_K}(t^{m(K)}).$$

Тогда гомоморфизмы ψ_a, ψ^a не меняются при изменении параметра a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. При $t \in \mathbb{T}$ преобразование кратностей

$$(m(K), \omega(K)) \mapsto (m(K), t^{m(K)} \omega(K)),$$

где $m(K)$ и $\omega(K)$ – кратность и сдвиговая кратность конуса K , задает действие тора $\mathbb{T}$ на множестве w -вееров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выполнение мультипликативных соотношений для кратностей $(m(K), t^{m(K)} \omega(K))$ – следствие предложения 1 о постоянстве семейства гомоморфизмов ψ_a .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Мультипликативные соотношения выполнены для всех пар (A, K) , где A – трансверсальное w -вееру оснащенное подпространство дополнительной размерности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим подпространство A , взятое с тривиальным оснащением, через $\bar{A}$. Тогда, как вытекает из предложения 1, $\omega_{A,K}$ отличается от $\omega_{\bar{A},K}$ постоянным (торическим) множителем вида $\psi^a(\omega_A)$.

Алгебро-геометрический смысл мультипликативных соотношений состоит в следующем. Пусть W_M – w -веер равноразмерного d -мерного алгебраического многообразия M (см. § 3). Тогда произведение элементов конечного множества $g\mathcal{T}_A \cap M$ равно $\omega_{A,W_M} \Psi_{A,W_M}(g)$, где $\Psi_{A,K}$ – строящийся ниже (предложение 5), зависящий только от основы w -веера K гомоморфизм $\mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$. Таким образом, ω_{A,W_M} – произведение элементов множества $\mathcal{T}_A \cap M$.

Пусть A_1, A_2 – трансверсально пересекающиеся оснащенные подпространства пространства $\text{Re } \mathbb{Z}$. При $i = 1, 2$ рассмотрим многообразия M_i , составленные из объединения $m(A_i)$ классов смежности по подтору $\mathcal{T}_{A_i}$. Предположим, что эти классы смежности выбраны так, что их произведение в фактормножестве $\mathbb{T}/\mathcal{T}_{A_i}$ равно сдвиговой кратности $\omega(A_i)$. Тогда операция умножения оснащенных подпространств A_1, A_2 появляется при рассмотрении пересечения (см. пример 2) многообразий M_1 и M_2 следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть $A = A_1 \cap A_2$. Тогда:

- 1) многообразие $M_1 \cap M_2$ составлено из сдвигов тора $\mathcal{T}_{A_1 \cap A_2}$;
- 2) количество этих сдвигов равно $m(A_1 \cap A_2)$;
- 3) произведение этих сдвигов в фактормножестве $\mathbb{T}/(\mathcal{T}_{A_1 \cap A_2})$ равно $\omega(A_1 \cap A_2)$.

Из ассоциативности операции пересечения многообразий вида M_i вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть A_1, A_2, A_3 – оснащенные подпространства. Тогда если выполнены необходимые для определения попарных произведений условия трансверсальности, то $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$.

2.2. Реализации и мультипликативные соотношения. Теперь приведем еще одно определение w -веера, построенное по образцу примера 2. Теорема 1 – утверждение об эквивалентности определений.

Пусть K – d -мерный веер конусов. Предположим, что для каждого d -мерного конуса $K \in \mathcal{K}$ выбрано конечное множество (не обязательно разных) сдвигов подтора $\mathbb{T}_K$. Назовем такой объект *реализацией веера K* . Имея реализацию веера, мы можем оснастить его наборами кратностей и сдвиговых кратностей, положив $m(K)$ равным количеству сдвигов подтора $\mathbb{T}_K$ и $\omega(K)$ – равным произведению соответствующих этим сдвигам элементов фактормножества $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$. Если

реализация и кратности веера связаны подобным образом, то такую реализацию будем называть *реализацией оснащенного веера*.

Пусть $\mathcal{R}$ – реализация оснащенного d -мерного веера $\mathcal{K}$, $K \in \mathcal{K}$ – d -мерный конус и A – подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$ размерности $n - d$, трансверсальное подпространству S_K . При $t \in \mathbb{T}/\mathcal{T}_A$ обозначим через $p_{A,K}(t)$ произведение всех точек пересечения сдвинутого подтора $t\mathcal{T}_A$ со всеми выбранными в реализации $\mathcal{R}$ сдвигами подтора $\mathbb{T}_K$.

Для любого $t \in \mathbb{T}/\mathcal{T}_A$ такого, что $\operatorname{Re} \log t \in A_{\text{reg}}$, положим

$$\mathcal{R}_{A,\mathcal{K}}(t) = \prod_{\substack{K \in \mathcal{K}, \dim K = d \\ K \cap (\operatorname{Re} \log t + A) \neq \emptyset}} p_{A,K}(t).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{K}$ – пред-с-веер, оснащенный также сдвиговыми кратностями, $\mathcal{R}$ – его реализация и A – $(n - d)$ -мерное пространство, трансверсальное вееру $\mathcal{K}$. Тогда мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены, если и только если отображение $\mathcal{R}_{A,\mathcal{K}}$ продолжается до отображения $\mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$ вида $\omega \Psi_{A,\mathcal{K}}$, где $\Psi_{A,\mathcal{K}}: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$ – гомоморфизм торов, а $\omega \in \mathcal{T}_A$. Если такое продолжение существует (т.е. мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены), то ω совпадает с $\omega_{A,\mathcal{K}}$ из приведенной выше формулировки мультипликативных соотношений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы – простая проверка с использованием приведенной ниже конструкции гомоморфизма $\Psi_{A,\mathcal{K}}: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$ (предложение 5). Этот гомоморфизм не зависит от выбора сдвиговых кратностей, он строится по с-вееру $\mathcal{K}$.

Для $(n - d)$ -мерного пространства $A \subset \operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, трансверсального d -мерному пред-с-вееру $\mathcal{K}$, при $e \in A_{\text{reg}}$ положим

$$\Xi_{A,\mathcal{K}}(e) = \sum_{K, p \in (e+A) \cap K} \xi(A, S_K) m(K) p, \quad (3)$$

где суммирование ведется по d -мерным конусам веера $\mathcal{K}$, пересекающимся с аффинным подпространством $e + A$ в одной точке, которая обозначена через p , а $m(K)$ – кратность конуса K .

Следующее предложение – частный случай утверждения теоремы 4. Его доказательство приведено в конце п. 2.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Отображение $\Xi_{A,\mathcal{K}}$ непрерывно продолжается до линейного оператора $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/A \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, переводящего целочисленную решетку факторпространства $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/A$ в целочисленную решетку пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Без предположения о трансверсальности (т.е. для любого подпространства A) отображение $\Xi_{A,\mathcal{K}}$ продолжается до непрерывного кусочно линейного отображения $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/A \rightarrow \operatorname{Re} \mathfrak{Z}$ (предложение 12).

Таким образом, каждому $(n - d)$ -мерному рациональному подпространству $A \subset \operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, трансверсальному d -мерному пред-с-вееру $\mathcal{K}$, можно сопоставить гомоморфизм торов $\Psi_{A,\mathcal{K}}: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$. Этот гомоморфизм определяется тем условием, что его производная совпадает с $\Xi_{A,\mathcal{K}}$ при ограничении на $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. При $\operatorname{Re} \log g \in A_{\text{reg}}$ выполнено

$$\Psi_{A,\mathcal{K}}(g) = \prod_{\substack{K \in \mathcal{K}, \dim K = d \\ \mathcal{T}_K \cap (g\mathcal{T}_A) \neq \emptyset}} \psi_{\mathcal{T}_A, \mathbb{T}_K}^{m(K)}(g).$$

Доказательство проводим прямым вычислением производной правой части равенства.

2.3. Сложение с-вееров и w-вееров. Пусть $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ – d -мерные пред-с-вееры. Объединение их носителей распадается в объединение попарно непесекающихся подмножеств трех видов:

$$\{K \cap L: K \in \mathcal{K}, L \in \mathcal{L}\}, \quad \{K \setminus \text{supp } \mathcal{L}: K \in \mathcal{K}\}, \quad \{L \setminus \text{supp } \mathcal{K}: L \in \mathcal{L}\}. \quad (4)$$

Подмножества первого вида – конусы, второго и третьего – открытые области конусов. Припишем d -мерным областям указанных в (4) видов следующие кратности: $m(K) + m(L)$, $m(K)$, $m(L)$.

Пусть $\mathcal{P}$ – веер конусов, носитель которого есть объединение носителей $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$, такой, что каждое из указанных выше подмножеств составлено из конусов веера $\mathcal{P}$ (очевидно, что такие вееры существуют). Припишем d -мерным конусам веера $\mathcal{P}$ кратности содержащих их подмножеств. Тогда, как нетрудно проверить, мы получаем пред-с-веер $\tilde{\mathcal{P}}$. Если взять другой веер $\mathcal{Q}$ с теми же свойствами, то пред-с-вееры $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ эквивалентны. Кроме того, если заменить пред-с-вееры $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ на эквивалентные, то класс эквивалентности $\tilde{\mathcal{P}}$ останется прежним.

Таким образом, мы определили сложение однородных с-вееров с одинаковой степенью. Ясно, что эта операция преобразует множество однородных с-вееров в абелеву группу.

Если пред-с-вееры $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ оснащены также сдвиговыми кратностями, то припишем d -мерным областям вида (4) следующие сдвиговые кратности: $\omega(K)\omega(L)$, $\omega(K)$, $\omega(L)$. Теперь пред-с-веер $\mathcal{K} + \mathcal{L}$ снабжен сдвиговыми кратностями. Ясно, что таким образом построена операция сложения w-вееров.

Сложение с-вееров и w-вееров разных размерностей (или, иначе, разных степеней однородности) определено формально.

2.4. Непараметрическая формулировка аддитивного и мультипликативного соотношений. Алгебро-геометрический механизм появления аддитивного и мультипликативного соотношений в приведенной выше формулировке описан в §3. В этой формулировке присутствует параметр в виде произвольного подпространства $A \subset \text{Re } \mathfrak{F}$. Здесь мы приведем формулировки аддитивных и мультипликативных соотношений, свободные от присутствия произвольного $(n - d)$ -мерного подпространства $A \subset \text{Re } \mathfrak{F}$, а также некоторые следствия таких формулировок.

Сначала напомним (см., например, [15]), что если вектор φ принадлежит замыканию конуса K , то φ -локализацией K называется конус $K^\varphi = \{k + \mu\varphi: k \in K, \mu \in \mathbb{R}\}$. Если φ не принадлежит замыканию K , то положим $K^\varphi = \emptyset$. φ -локализация веера $\mathcal{K}$ – это по определению образующее веер множество конусов вида $\{K^\varphi: K \in \mathcal{K}\}$. Если φ принадлежит m -мерному конусу веера $\mathcal{K}$, то минимальный конус веера-локализации m -мерен.

Если конусам веера $\mathcal{K}$ приписаны кратности, то припишем конусу K^φ кратность и сдвиговую кратность, равные соответственно кратности и сдвиговой кратности конуса K . Нетрудно убедиться в том, что φ -локализация пред-с-веера или пред-w-веера остается соответственно пред-с-веером или пред-w-веером. Кроме того, локализация сохраняет отношения эквивалентности пред-с-вееров и пред-w-вееров. Таким образом, мы получаем корректно определенные операции φ -локализации с-вееров и w-вееров.

Пусть H – минимальный конус веера $\mathcal{K}$ и L – рациональное подпространство конуса H . Проекцию веера $\mathcal{K}$ на пространство $(\operatorname{Re} \mathfrak{F})/L$ с унаследованными кратностями будем называть L -факторизацией веера $\mathcal{K}$. L -факторизация d -мерного веера – $(d - \dim L)$ -мерный веер в пространстве $(\operatorname{Re} \mathfrak{F})/L$. При переходе к L -факторизации аддитивные и мультипликативные соотношения сохраняются.

Пусть φ принадлежит $(d - 1)$ -мерному конусу d -мерного веера $\mathcal{K}$. Тогда локализация $\mathcal{K}^\varphi$ является веером типа d -мерная книга, т.е. состоит из d -мерных полупространств $K_1, \dots, K_N$, пересекающихся по общему $(d - 1)$ -мерному подпространству конуса H . Будем называть пространство H переплетом, а H -факторизацию такого веера факторизацией d -мерной книги. Факторизация d -мерной книги – одномерный веер конусов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный веер с кратностями и A – $(n - d)$ -мерное рациональное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{F}$. Тогда аддитивные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены, если и только если они выполнены для всех пар вида $(A, \mathcal{K}^\varphi)$, где $\mathcal{K}^\varphi$ – веер вида d -мерная книга, являющийся локализацией веера $\mathcal{K}$.

2) Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный веер с кратностями типа d -мерная книга и A – $(n - d)$ -мерное рациональное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{F}$, пересекающееся с переплетом книги только в точке нуль. Тогда аддитивные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены, если и только если они выполнены для пары $(\bar{A}, \bar{\mathcal{K}})$, где $\bar{A}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ – факторизации соответственно пространства A и d -мерной книги $\mathcal{K}$. Если пересечение A с переплетом книги не тривиально, то аддитивные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены при любом наборе кратностей.

3) Если конусам пред-с-веера приписаны также сдвиговые кратности, то мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены для всех пар вида $(A, \mathcal{K}^\varphi)$, где $\mathcal{K}^\varphi$ – веер вида d -мерная книга, являющийся локализацией веера $\mathcal{K}$.

4) Для d -мерной книги со сдвиговыми кратностями мультипликативные соотношения эквивалентны мультипликативным соотношениям для факторизации d -мерной книги.

5) Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерная книга со сдвиговыми кратностями, $(d - 1)$ -мерное пространство H – переплет d -мерной книги и A – такое трансверсальное вееру $\mathcal{K}$ $(n - d)$ -мерное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{F}$, что $1_{\mathbb{T}}$ (единица тора $\mathbb{T}$) – единственный элемент множества $T_A \cap T_H$. Тогда мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ эквивалентны мультипликативным соотношениям для пары $(\bar{A}, \bar{\mathcal{K}})$, где $\bar{A}$ и $\bar{\mathcal{K}}$ – факторизации соответственно пространства A и веера $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая кратностей и аддитивных соотношений доказательство имеется в работе [2]. Приведем аналогичное доказательство для сдвиговых кратностей. Пусть A – $(n - d)$ -мерное рациональное подпространство пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{F}$, трансверсальное вееру $\mathcal{K}$.

(i) Обозначим через A_{reg}^1 множество таких точек $e \in \operatorname{Re} \mathfrak{F}$, что пересечение аффинного пространства $e + A$ с $(d - 2)$ -мерным остовом веера $\mathcal{K}$ пусто. Ясно, что A_{reg}^1 – связная всюду плотная область пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{F}$.

(ii) Если K – $(d - 1)$ -мерный конус веера $\mathcal{K}$ и $\varphi \in (e + A) \cap K$, то постоянство значений функции $\omega_{A, \mathcal{K}}$ в окрестности точки φ эквивалентно выполнению мультипликативных соотношений для соответствующей конусу K d -мерной книги $\mathcal{K}^\varphi$.

Отсюда вытекает, что мультипликативные соотношения для $\mathcal{K}$ эквивалентны набору мультипликативных соотношений для локализаций $\mathcal{K}$. Утверждение 3) доказано.

Теперь докажем утверждение 5). Обозначим через π_H гомоморфизм проекции торов $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathcal{T}_H$. Величины $\kappa(\mathcal{T}_A, \mathbb{T}_K)$, $\psi_{\mathbb{T}_K, \mathcal{T}_A}(w(K))$, участвующие в мультипликативных соотношениях, являются элементами тора $\mathcal{T}_A$. Для веера-факторизации аналогичные величины – элементы образа тора $\mathcal{T}_A$ при отображении π_H . Если $1_{\mathbb{T}}$ – единственный элемент множества $\mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_H$, то ограничение гомоморфизма π_H на подтор $\mathcal{T}_A$ – биекция, сохраняющая эти величины. Утверждение 5) доказано.

Пусть количество элементов множества $\mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_H$ равно ν . Теперь остается доказать, что мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ вытекают из мультипликативных соотношений для факторизации $\mathcal{K}$. Выберем такое $(n - d)$ -мерное подпространство $B \subset \text{Re } \mathfrak{Z}$, лежащее в $(n - 1)$ -мерном подпространстве, порожденном подпространствами A и H , что $\mathcal{T}_B \cap \mathcal{T}_H = 1_{\mathbb{T}}$. При $b \in \mathcal{T}_B$, $a \in \mathcal{T}_A$, $ab^{-1} \in \mathcal{T}_H$ положим $\alpha(b) = a^\nu$. Таким образом мы определили гомоморфизм торов $\alpha: \mathcal{T}_B \rightarrow \mathcal{T}_A$ (так как для любого $c \in \mathcal{T}_A \cap \mathcal{T}_H$ выполнено $c^\nu = 1_{\mathbb{T}}$). Выведем мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ из доказанных выше мультипликативных соотношений для пары $(B, \mathcal{K})$. В следующем простом утверждении (его доказательство опущено) приведены нужные для этого вывода технические факты.

ЛЕММА 4. Пусть K – d -мерный конус веера $\mathcal{K}$. Тогда

$$\psi_{S_K, A} = \alpha(\psi_{S_K, B}), \quad \kappa_{S_K, A} = \alpha(\kappa_{S_K, B})\kappa_{A, H}^{\xi(B, S_K)}.$$

Теперь по определению функции $\omega_{A, \mathcal{K}}(e)$ получаем, что

$$\omega_{A, \mathcal{K}}(e) = \alpha(\omega_{B, \mathcal{K}}(e))\kappa_{A, H}^{\sigma(e)},$$

где

$$\sigma(e) = \sum_{\substack{K \in \mathcal{K}, \dim K = d \\ (e+B) \cap S_K \neq \emptyset}} \xi(B, S_K)m(K).$$

Функция $\omega_{B, \mathcal{K}}(g)$ постоянна (это формулировка доказанных выше мультипликативных соотношений в случае $\mathcal{T}_B \cap \mathcal{T}_H = 1_{\mathbb{T}}$). Функция $\sigma(e)$ также постоянна вследствие аддитивных соотношений, применяемых к паре $(B, \mathcal{K})$. Поэтому функция $\omega_{A, \mathcal{K}}(e)$ постоянна, т.е. мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ выполнены. Предложение доказано.

Из утверждений 1), 2) предложения 6 вытекает, что проверка аддитивных соотношений сводится к рассмотрению случая одномерных s -вееров.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [2]. Пусть $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_N$ – примитивные целочисленные векторы на лучах одномерного веера конусов с кратностями $m_1, \dots, m_N$. Тогда аддитивные соотношения эквивалентны равенству

$$m_1\bar{v}_1 + \dots + m_N\bar{v}_N = 0. \quad (5)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Одномерные s -вееры с положительными кратностями – конечные наборы попарно не сонаправленных векторов целочисленной решетки, имеющих нулевую сумму.

Для формулировки следующего предложения (сдвигового аналога предложения 7) напомним обозначения, введенные в примере 3.

Пусть $\mathbb{T}$ – n -мерный тор, $\mathcal{K}$ – одномерный s -веер, состоящий из набора лучей $\{r\}$ в пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$ с приписанной каждому лучу r кратностью $m(r)$ и сдвиговой кратностью $w(r) \in \mathbb{T}/\mathbb{T}_r$. Логарифм элемента фактортора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_r$ – его прообраз при отображении $\pi_r \circ \exp$, где $\exp: \mathfrak{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ – экспоненциальное отображение, а $\pi_r: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{T}_r$ – отображение проекции. Вещественная и мнимая части логарифма – компоненты по подпространствам $\text{Re } \mathfrak{Z}$ и $\text{Im } \mathfrak{Z}$. Ниже используются 2-векторы $\text{Re } \log w(r) \wedge \bar{v}(r)$ и $\text{Im } \log w(r) \wedge \sqrt{-1} \bar{v}(r)$, где $\bar{v}(r)$ – примитивный вектор целочисленной решетки на луче r . Первый из них не зависит от произвольного выбора $\log w(r)$, а второй определен только как вычет по модулю 2-векторов целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ пространства $\text{Im } \mathfrak{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Мультипликативные соотношения для оснащенного сдвиговыми кратностями одномерного s -веера $\mathcal{K}$ можно записать в виде двух равенств:*

$$\sum_r \text{Re } \log w(r) \wedge \bar{v}(r) = 0, \quad (6)$$

$$\sum_r (\sqrt{-1} \text{Im } \log w(r)) \wedge \bar{v}(r) = \ell_1, \quad (7)$$

где $\bar{v}(r)$ – примитивный целочисленный вектор на луче r , а ℓ_1 – строящийся ниже 2-вектор пространства $\wedge^2((\mathbb{Z}/2)^n/\mathbb{Z}^n)$. 2-вектор ℓ_1 не зависит от сдвиговых кратностей, он строится по s -вееру $\mathcal{K}$.

Аналогичное утверждение для любой d -мерной книги имеет следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть $\mathcal{K}$ – оснащенный сдвиговыми кратностями s -веер вида d -мерная книга с d -мерными конусами $K_1, \dots, K_N$ и переплетом H , m_i и ω_i – соответственно кратности и сдвиговые кратности конусов K_i . Выберем базис $e_1, \dots, e_{d-1}$ целочисленной решетки пространства H и элементы $\bar{k}_i \in K_i$ такие, что векторы $e_1, \dots, e_{d-1}, \bar{k}_i$ при любом i образуют базис целочисленной решетки порожденного конусом K_i d -мерного подпространства, и положим $\varrho = e_1 \wedge \dots \wedge e_{d-1}$.*

Мультипликативные соотношения для оснащенного s -веера $\mathcal{K}$ можно записать в виде двух равенств:

$$\sum_i \text{Re } \log w_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i = 0, \quad (8)$$

$$\sum_i (\sqrt{-1} \text{Im } \log w_i) \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i = \ell_d, \quad (9)$$

где ℓ_d – строящийся ниже элемент пространства $\wedge^{d+1}((\mathbb{Z}/2)^n/\mathbb{Z}^n)$, $(d+1)$ -вектор ℓ_d не зависит от сдвиговых кратностей, он строится по s -вееру $\mathcal{K}$.

Ниже мы приведем (без вывода) два факта о поливекторах (предложения 10 и 11), необходимые для конструкции поливектора ℓ_d и использующиеся в помещенных ниже доказательствах предложений 1, 4 и 9.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть в n -мерном векторном пространстве $\mathcal{E}$ над произвольным полем задана форма объема $\det$. При $1 \leq k \leq n$ сопоставим k -вектору

$a = a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$ пространства $\mathcal{E}$ $(n - k + 1)$ -ковектор $\bar{*}a$ со значениями в $\mathcal{E}$ (т. е. элемент пространства $\text{Hom}(\wedge^{n-k+1}\mathcal{E}, \mathcal{E})$) по следующему правилу:

$$\bar{*}a: e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-k+1} \mapsto \sum_{1 \leq i \leq k} (-1)^{i-1} \det(a_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{a_i} \wedge \cdots \wedge a_k \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{n-k+1}) a_i.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть α принадлежит подпространству, порожденному векторами $e_1, \dots, e_d$. Тогда

$$\bar{*}(\alpha \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-d}): e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \mapsto \det(a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-d} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) \alpha.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Отображение $\bar{*}$ – изоморфизм пространства k -векторов на подпространство $\mathcal{H} \subset \text{Hom}(\wedge^{n-k+1}\mathcal{E}, \mathcal{E})$, состоящее из таких h , которые переводят любой разложимый $(n - k + 1)$ -вектор в точку порожденного этим поливектором $(n - k + 1)$ -мерного подпространства.

Каждому k -мерному подпространству A векторного пространства можно сопоставить разложимый поли- k -вектор $a_1 \wedge \cdots \wedge a_k$, где векторы a_i образуют базис подпространства A . В случае векторного пространства над полем из двух элементов это соответствие, в отличие от случая пространств над любым другим полем, является биективным отображением множества k -мерных подпространств на множество ненулевых разложимых поли- k -векторов. Поэтому в векторном пространстве над полем из двух элементов мы можем рассматривать конечные наборы k -мерных подпространств с нулевой суммой. Следующее утверждение относится к векторному пространству $\mathcal{E}$ над полем $\mathbb{Z}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\dim \mathcal{E} = n$ и $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ – набор k -мерных подпространств пространства $\mathcal{E}$ с нулевой суммой. Сопоставим ненулевому $(n - k)$ -вектору $\varrho = a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-k}$ элемент $\bar{\ell}_k(\varrho)$ пространства $\mathcal{E}$ по следующему правилу (ср. с замечанием 9):

$$\bar{\ell}_k(\varrho) = \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{\chi \in (\mathcal{H}_i \cap \mathcal{A})} \chi,$$

где $\mathcal{A}$ – подпространство пространства $\mathcal{E}$ с базисом $a_1, \dots, a_{n-k}$. Тогда $\bar{\ell}_k$ продолжается до отображения $\wedge^{n-k}\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ и является корректно определенным элементом пространства $\text{Hom}(\wedge^{n-k}\mathcal{E}, \mathcal{E})$.

Теперь $(d + 1)$ -вектор ℓ_d , использующийся в формулировке предложения 9, строится так. Рассмотрим $\mathbb{Z}^n / (2\mathbb{Z}^n)$ как векторное пространство над полем $\mathbb{Z}_2$. Обозначим через $\mathcal{H}_i$ d -мерное подпространство пространства $\mathbb{Z}^n / (2\mathbb{Z}^n)$, образованное вычетами целочисленных точек подпространства S_{K_i} . Из аддитивных соотношений вытекает, что элементы множества $\{\mathcal{H}_i: m_i \neq 0 \pmod{2}\}$ образуют набор подпространств с нулевой суммой.

Применив предложение 11, получим элемент $\bar{\ell}_d$ пространства $\text{Hom}(\wedge^{n-d}\mathcal{E}, \mathcal{E})$. Используя предложение 10, положим $\ell_d = (\bar{*})^{-1}(\bar{\ell}_d)$. Теперь $(d + 1)$ -вектор ℓ_d из условия предложения 9 определен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4. Из определения функции ξ (в п. 2.1) вытекает, что для целочисленного сдвига α каждое из слагаемых в формуле (3) является вектором целочисленной решетки. Отсюда следует утверждение о сохранении целочисленных решеток.

Доказательство утверждения о линейности отображения $\Xi_{A,K}$ сводится с помощью локализации к рассмотрению случая s -веера вида d -мерная книга. Действительно, вблизи любого сдвига $\alpha \in A_{\text{reg}}$ отображение $\Xi_{A,K}$, очевидно, линейно. С другой стороны, множество, состоящее из $\alpha \in \text{Re } \mathfrak{Z}$ таких, что $\alpha + A$ не пересекается с $(d-2)$ -мерным остовом веера K , связно, так как его дополнение имеет коразмерность, равную двум. Поэтому достаточно доказать линейность отображения $\Xi_{A,K}$ в окрестности любой точки α , принадлежащей любому $(d-1)$ -мерному конусу веера K . В этом случае утверждение о линейности эквивалентно соответствующему утверждению для пары (A, K^α) , где K^α – α -локализация веера K .

Теперь предположим, что пред- s -веер K является d -мерной книгой, и зафиксируем следующие обозначения.

Веер K состоит из d -мерных полупространств $K_0, \dots, K_N$, пересекающихся по общему $(d-1)$ -мерному пространству H и снабженных кратностями $m_0, \dots, m_N$. Пусть $e_1, \dots, e_{d-1}$ – базис целочисленной решетки пространства H . Дополним его до базисов решеток пространств S_{K_i} векторами $\bar{k}_i \in K_i$ и положим $\varrho = e_1 \wedge \dots \wedge e_{d-1}$. Положим также $\bar{a} = a_1 \wedge \dots \wedge a_{n-d}$, где $a_1, \dots, a_{n-d}$ – базис целочисленной решетки подпространства A .

Из аддитивных соотношений (предложение 6) следует, что $\varrho \wedge (\sum_i m_i \bar{k}_i) = 0$. Отсюда

$$\sum_{0 \leq i \leq N} m_i \bar{*}(\alpha \wedge \bar{a})(\varrho \wedge \bar{k}_i) = 0, \quad (10)$$

где $\bar{*}(\alpha \wedge \bar{a})$ – введенный выше (см. определение 6) линейный оператор.

Пусть $\bar{p}_i(\alpha)$ – точка пересечения $S_{K_i} \cap (\alpha + A)$. Тогда (это вытекает из утверждения 2) леммы 1) свойство линейности отображения $\Xi_{A,K}$ эквивалентно равенству

$$\sum_{0 \leq i \leq N} m_i \det(\bar{a} \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) \bar{p}_i(\alpha) = 0. \quad (11)$$

Равенство (11) вытекает из равенства (10). Действительно, $\alpha \wedge \bar{a} = \bar{p}_i(\alpha) \wedge \bar{a}$. Поэтому, применяя следствие 2, получаем

$$\bar{*}(\alpha \wedge \bar{a})(\varrho \wedge \bar{k}_i) = \det(\bar{a} \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) \bar{p}_i(\alpha),$$

т. е. равенство (10) преобразуется в равенство (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 9. Пусть L_i – порожденные конусами K_i d -мерные подпространства, m_i и ω_i – соответственно кратности и сдвиговые кратности конусов K_i , $\tilde{\alpha}_i = \text{Re } \log \omega_i$ и $\tilde{\beta}_i = \sqrt{-1} \text{Im } \log \omega_i$ (здесь $\tilde{\alpha}_i$ определено с точностью до сдвига на элемент подпространства L_i , а $\tilde{\beta}_i$, кроме того, с точностью до сдвига на вектор целочисленной решетки). Мы используем обозначения, введенные в доказательстве предложения 4.

Рассмотрим аффинные подпространства $\tilde{\alpha}_i + L_i$ и $\tilde{\beta}_i + L_i$. Первое из них определено однозначно, а второе – с точностью до сдвига на вектор целочисленной решетки. Если A – $(n-d)$ -мерное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$, трансверсально пересекающее каждое из подпространств L_i , то выберем $\alpha_i = A \cap (\tilde{\alpha}_i + L_i)$ и $\beta_i = A \cap (\tilde{\beta}_i + L_i)$.

Как нетрудно проверить, логарифмирование мультипликативных соотношений приводит к следующему утверждению.

ЛЕММА 5. *Мультипликативные соотношения для пары $(A, \mathcal{K})$ эквивалентны следующим равенствам:*

$$\begin{aligned} \sum_i \det(\bar{a} \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) \alpha_i &= 0, \\ \sum_i \det(\bar{a} \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) \beta_i &= \sum_i m_i \sqrt{-1} \log \kappa_{A, L_i} \pmod{\mathbb{Z}^n}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из следствия 2 вытекает, что

$$\bar{*}(\alpha_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) : \bar{a} \mapsto (-1)^{d(n-d)} \det(\bar{a} \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i) \alpha_i.$$

Отсюда имеем

$$\bar{*} \left(\sum_i \alpha_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i \right) : \bar{a} \mapsto 0.$$

Поэтому, поскольку отображение $\bar{*}$ невырождено (предложение 10), получаем $\sum_i \alpha_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i = 0$.

Аналогично, левая часть равенства (12) по модулю $\mathbb{Z}^n \wedge \mathbb{Z}^n$ преобразуется к виду

$$\bar{*} \left(\sum_i \beta_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i \right) \bar{a}.$$

Пусть $\mathcal{L}_i$ – подпространство пространства $(\frac{1}{2}\mathbb{Z}^n)/\mathbb{Z}^n$, состоящее из вычетов полуцелых точек подпространства L_i . Из аддитивных соотношений вытекает, что $\{\mathcal{L}_i : 1 \leq i \leq N\}$ – набор подпространств с нулевой суммой. Применяя к этому набору подпространств предложение 11, получаем, что правая часть равенства (12) приводится к виду $\ell_d(\bar{a})$.

Согласно приведенному выше определению $(d+1)$ -вектора ℓ_d ($\ell_d = (\bar{*})^{-1} \bar{\ell}_d$) получаем, что равенство (12) приводится к виду

$$\bar{*} \left(\ell_d + \sum_i \beta_i \wedge \varrho \wedge \bar{k}_i \right) : \bar{a} \mapsto 0.$$

Доказательство предложения заканчивается ссылкой на невырожденность отображения $\bar{*}$ (предложение 10).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Мы докажем, что при всех значениях параметра дифференциалы гомоморфизмов семейства ψ_a (а также семейства ψ^a) совпадают на пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$.

Как обычно, доказательство сводится к рассмотрению случая с-веера $\mathcal{K}$ вида d -мерная книга. В этом случае утверждения о совпадении дифференциалов эквивалентны равенствам

$$\sum_{\substack{i, K_i \in \mathcal{K} \\ \dim K_i = d}} m_i d\psi_{S_{K_i}, A}(x) = 0, \quad \sum_{\substack{i, K_i \in \mathcal{K} \\ \dim K_i = d}} m_i d\psi_{A, S_{K_i}}(x) = 0.$$

Эти равенства вытекают из аддитивных соотношений, так как они могут быть записаны в виде

$$\bar{*} \left(x \wedge \sum_i m_i \varrho \wedge \bar{k}_i \right) : \bar{a} \mapsto 0, \quad \bar{*}(x \wedge \bar{a}) : \left(\sum_i m_i \varrho \wedge \bar{k}_i \right) \mapsto 0.$$

2.5. Нетрансверсальные пересечения. Содержание настоящего пункта используется только в п. 5.2, где доказываются основные теоремы. Здесь мы рассматриваем отображение $\Xi_{A,K}$ и мультипликативные соотношения для вырожденных пар (A, K) общего положения.

Пусть K – пред-с-веер вида d -мерная книга. Предположим, что $(n - d)$ -мерное рациональное подпространство A пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ пересекается с носителем $\text{supp } K$ по одномерному вееру конусов, лучи которого принадлежат d -мерным конусам пред-с-веера K . Если $A \cap K$ является таким лучом, то обозначим через $\bar{v}_K$ лежащий на этом луче примитивный целочисленный вектор.

Введем также следующие обозначения: $\bar{a} = a_1 \wedge \cdots \wedge a_{n-d}$, где $\{a_i\}$ – базис целочисленной решетки пространства A ; $\varrho = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{d-1}$, где $\{e_i\}$ – базис целочисленной решетки переплета d -мерной книги K ; элемент $\bar{k}_K$ выбран в d -мерном конусе K так, что $e_1, \dots, e_{d-1}, \bar{k}_K$ является базисом целочисленной решетки пространства S_K ; $\theta(x) = \det(x \wedge \bar{a} \wedge \varrho)$ – линейный функционал на пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$; Π^+, Π^- – пара соответствующих функционалу θ открытых полупространств, упорядоченная так, что функционал θ положителен на Π^+ (при изменении выбранных выше базисов подрешеток функционал θ может умножиться на -1 , при этом полупространства Π^+, Π^- поменяются местами).

При $\alpha \in A_{\text{reg}} \cap \Pi^\pm$ (напомним, что область $A_{\text{reg}} \subset \text{Re } \mathfrak{Z}$ состоит из таких точек α , что аффинное подпространство $\alpha + A$ не пересекает $(d - 1)$ -мерного остова веера K) положим

$$\Xi_{A,K}^\pm(\alpha) = \sum_{\substack{K \in \mathcal{K}, \dim K = d \\ p_K(\alpha) \in (\alpha + A) \cap K}} \xi(A, S_K) m(K) p_K(\alpha).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Отображения $\Xi_{A,K}^\pm: A_{\text{reg}} \cap \Pi^\pm \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$ продолжаются до линейных операторов $\Xi_{A,K}^\pm: \text{Re } \mathfrak{Z} \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$, переводящих целочисленную решетку пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ в себя. При этом*

$$\Xi_{A,K}^+(\alpha) - \Xi_{A,K}^-(\alpha) = (-1)^{n-1} \sum_{K \in \mathcal{K}, \dim(A \cap K) > 0} \Xi_K(\alpha),$$

где

$$\Xi_K(\alpha) = \frac{m_K}{\bar{v}_K} \theta(\alpha) \bar{v}_K,$$

а $\bar{v}_K$ – коэффициент разложения $\bar{v}_K = \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_{d-1} e_{d-1} + \bar{v}_K \bar{k}_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения о линейности отображений $\Xi_{A,K}^+, \Xi_{A,K}^-$ и о сохранении целочисленной решетки очевидны.

Будем, как в приведенном выше доказательстве предложения 4, исходить из равенства (10). Применяя описанные в этом доказательстве преобразования, получаем

$$\Xi_{A,K}^+(\alpha) - \Xi_{A,K}^-(\alpha) + \sum_{K \in \mathcal{K}, \dim(A \cap K) > 0} m_K \bar{*}(\alpha \wedge \bar{a})(\varrho \wedge \bar{k}_K) = 0.$$

Преобразуя слагаемые $\bar{*}(\alpha \wedge \bar{a})(\varrho \wedge \bar{k}_K)$ согласно определению оператора $\bar{*}$ (определение 6), получаем нужное равенство.

Сформулируем теперь аналог предложения 12 для случая, когда d -мерная книга K является w -веером со сдвигowymi кратностями ω_K . Здесь и далее

(в формулировке и доказательстве) используются обозначения из условия и доказательства предложения 12.

Равенство левой и правой частей следующей ниже формулы (13) рассматривается по модулю сдвигов на элементы решетки $\sqrt{-1}\mathbb{Z}^n$, расположенной в пространстве $\text{Im } \mathfrak{Z}$. Правая часть формулы определена, так как значения логарифмов сдвиговых кратностей однозначно (с точностью до сдвига на элементы решетки $\sqrt{-1}\mathbb{Z}^n$) определены по модулю нулевой гиперплоскости функционала $\theta^{\mathbb{C}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Пусть A – оснащенное $(n-d)$ -мерное подпространство с кратностью m_A и сдвиговой кратностью ω_A . Тогда:

- 1) функция $\omega_{A,K}$ является постоянной на области Π^+ и на области Π^- ;
- 2) при $e^{\pm} \in \Pi^{\pm}$ имеем

$$\log \frac{\omega_{A,K}(e^+)}{\omega_{A,K}(e^-)} = (-1)^n \sum_{K \in \mathcal{K}, \dim(A \cap K) > 0} \Omega_K, \quad (13)$$

$$\Omega_K = \theta^{\mathbb{C}}(m_A \log \omega_K + m_K \log \omega_A) \frac{\bar{v}_K}{\tilde{v}_K} + m_A m_K \log \tilde{\kappa}_{A,K},$$

где $\theta^{\mathbb{C}}$ – комплексно-линейный функционал на комплексном векторном пространстве $\mathfrak{Z}$, совпадающий с функционалом θ на вещественном подпространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$, а $\tilde{\kappa}_{A,K}$ – произведение элементов второго порядка группы $\mathcal{T}_A \cap \mathbb{T}_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) является очевидным.

Переходя к доказательству утверждения 2), предположим, что пространство A является тривиально оснащённым.

Применим оператор $\bar{*}$ к левым частям формул (8) и (9). Рассматривая значение полученного поликовектора на поливекторе $\bar{a}$, а также используя определение $(d+1)$ -вектора ℓ , получаем

$$\begin{aligned} (-1)^{d(n-d)} \log \frac{\omega_{A,K}(e^+)}{\omega_{A,K}(e^-)} + \sum (\bar{*}(\text{Re } \log \omega_K \wedge \varrho \wedge \bar{k}_K)(\bar{a}) \\ + \bar{*}(\text{Im } \log \omega_K \wedge \varrho \wedge \bar{k}_K)(\bar{a}) + m_K \log \tilde{\kappa}_{A,K}) = 0, \end{aligned}$$

где суммирование идет по d -мерным конусам K таким, что $\dim(A \cap K) > 0$, а $\tilde{\kappa}_{A,K}$ – произведение элементов второго порядка группы $\mathcal{T}_A \cap \mathbb{T}_K$.

Как вытекает из определения оператора $\bar{*}$, при любом $x \in \text{Re } \mathfrak{Z}$ имеем

$$\bar{*}(x \wedge \varrho \wedge \bar{k}_K): \bar{a} \mapsto (-1)^{d(n-d)+n} \theta(x) \frac{\bar{v}_K}{\tilde{v}_K}.$$

Отсюда получаем нужную формулу в случае тривиально оснащённого подпространства A :

$$\log \frac{\omega_{A,K}(e^+)}{\omega_{A,K}(e^-)} = (-1)^n \sum_{K \in \mathcal{K}, \dim(A \cap K) > 0} \left(\theta^{\mathbb{C}}(\log \omega_K) \frac{\bar{v}_K}{\tilde{v}_K} + m_K \log \tilde{\kappa}_{A,K} \right).$$

Для вычисления поправок, зависящих от оснащения A , выпишем тождество

$$\bar{*}(x \wedge \bar{a}): \left(\sum_{K \in \mathcal{K}, \dim K = d} m_K \varrho \wedge \bar{k}_K \right) \mapsto 0.$$

Нужные поправки получаются при подстановках $x = \text{Re } \log \omega_A$ и $x = \sqrt{-1} \times \text{Im } \log \omega_A$.

Пусть (рис. 1) K – d -мерный конус d -мерного пред- w -веера $\mathcal{K}$; P, Q – его $(d-1)$ -мерные грани; $\mathcal{P} = \mathcal{K}^\varphi$, $\mathcal{Q} = \mathcal{K}^\psi$, где $\varphi \in P$, $\psi \in Q$. Предположим, что $(n-d)$ -мерное оснащенное подпространство A пересекается с подпространством S_K по прямой и расположено так, что $A \cap K = \emptyset$.

Рис. 1

Следующее (очевидное) утверждение означает, что вклады, соответствующие конусам K , в нелинейности отображений $\Xi_{A,Q}$ и $\Xi_{A,P}$ (предложение 12) и в скачки величин $\omega_{A,Q}$ и $\omega_{A,P}$ (предложение 13) взаимно обратны.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для вееров $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ полупространства Π^+ могут быть выбраны совпадающими. Пусть L и R – локализации конуса K в веерах $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Тогда (обозначения Ξ_L и Ω_L введены выше): 1) $\Xi_L = -\Xi_R$; 2) $\Omega_L = \Omega_R^{-1}$.

При доказательстве основных теорем используется еще одно утверждение подобного типа. Пусть (рис. 2) P_1 и P_2 являются конусами старших размерностей вееров типа книга $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ соответственно, а A – оснащенное подпространство. Предположим, что:

- (i) пары подпространств (A, S_{P_1}) и (A, S_{P_2}) трансверсальны;
- (ii) $\text{codim } P_1 + \text{codim } P_2 + \text{codim } A = n$;
- (iii) $\dim(S_{P_1} \cap S_{P_2} \cap A) = 1$.

Рис. 2

Положим

$$\mathcal{D} = \{(\tau_1, \tau_2, \tau_3) : \tau_i \in \text{Re } \mathfrak{Z}, \dim((\tau_1 + S_{P_1}) \cap (\tau_2 + S_{P_2}) \cap (\tau_3 + A)) = 1\}.$$

Ясно, что $\mathcal{D}$ – подпространство пространства $(\text{Re } \mathfrak{Z})^3$ коразмерности 1. Выбрав соответствующие открытые полупространства, обозначим их через $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$. Рассмотрим отображения

$$\pi_1 : (\text{Re } \mathfrak{Z})^3 \rightarrow (\text{Re } \mathfrak{Z}) / (A \cap S_{P_2}), \quad \pi_2 : (\text{Re } \mathfrak{Z})^3 \rightarrow (\text{Re } \mathfrak{Z}) / (A \cap S_{P_1}),$$

действующие следующим образом:

$$\begin{aligned}\pi_1: (\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\mapsto (\tau_3 - \tau_1 + A) \cap (\tau_2 - \tau_1 + S_{P_2}), \\ \pi_2: (\tau_1, \tau_2, \tau_3) &\mapsto (\tau_3 - \tau_2 + A) \cap (\tau_1 - \tau_2 + S_{P_1}).\end{aligned}$$

Легко видеть, что в ситуации предложений 12 и 13 для пар $(P_1, A \cap S_{P_2})$ и $(P_2, A \cap S_{P_1})$ в качестве полупространств Π^+ , Π^- можно выбрать полупространства $\pi_1(\mathcal{D}^+)$, $\pi_1(\mathcal{D}^-)$ и $\pi_2(\mathcal{D}^+)$, $\pi_2(\mathcal{D}^-)$. Пусть Ξ_{P_1} , Ω_{P_1} и Ξ_{P_2} , Ω_{P_2} – определенные выше для этих пар величины. Обозначим через Ξ_1 , Ω_1 и Ξ_2 , Ω_2 их прообразы при отображениях π_1 и π_2 .

СЛЕДСТВИЕ 4. При описанном выше выборе полупространств Π^+ , Π^- имеем: 1) $\Xi_1 = -\Xi_2$; 2) $\Omega_1 = \Omega_2^{-1}$.

§ 3. w-вееры алгебраических многообразий

Построение w-веера, сопоставленного идеалу I кольца полиномов Лорана (т.е. кольца регулярных функций на торе), практически повторяет (см. [2], а также [16]) построение c-веера идеала. Приведем это построение (без обоснования) с необходимыми пояснениями.

Множество характеров, входящих в полином Лорана f с ненулевыми коэффициентами, называется *носителем полинома*. При $\varphi \in \operatorname{Re} \mathfrak{S}$ определим φ -степень полинома как максимальное значение φ на носителе f (характеры тора образуют целочисленную решетку в пространстве, сопряженном $\operatorname{Re} \mathfrak{S}$). Старшая φ -однородная компонента f называется φ -укорочением и обозначается через f_φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. φ -укорочением идеала I кольца полиномов Лорана называется идеал I_φ , порожденный полиномами $\{f_\varphi, f \in I\}$. Если M – многообразие нулей идеала I , то многообразие нулей идеала-укорочения I_φ обозначается M_φ и называется φ -укорочением многообразия M .

В определении 7 (и всюду в настоящем параграфе) предполагается, что соответствие между идеалами и многообразиями учитывает кратности компонент.

Обозначим через $\mathfrak{R}_I$ или $\mathfrak{R}_M$ подмножество точек $\varphi \in \operatorname{Re} \mathfrak{S}$, для которых идеал I_φ является собственным. Зададим в $\mathfrak{R}_I$ соотношение эквивалентности: $\varphi \sim \psi \iff I_\varphi = I_\psi$. Связные компоненты классов этой эквивалентности называются *камерами укорочений* идеала (или многообразия).

Множество камер укорочения конечно, а их объединение замкнуто. Каждая камера является открытым коническим подмножеством некоторого рационального подпространства $\operatorname{Re} \mathfrak{S}$. Обозначим через $\mathbb{T}_K$ подтор тора $\mathbb{T}$, порожденный экспонентами принадлежащих камере K точек. При $\varphi \in K$ многообразие-укорочение M_φ составлено из целых классов смежности $t\mathbb{T}_K$. Все многообразие-укорочения равноразмерного многообразия равноразмерны. Их размерности равны размерности исходного многообразия.

Если K – камера укорочения максимальной размерности (максимальная размерность камеры укорочения равна $\dim M$), то соответствующее многообразие-укорочение является объединением конечного числа сдвигов подтора $\mathbb{T}_K$ размерности $\dim M$. Припишем камере K максимальной размерности кратность, равную количеству сдвигов тора $\mathbb{T}_K$, содержащихся в многообразии-укорочении, и сдвиговую кратность, равную произведению этих сдвигов в факторе $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. При $\dim M = 1$, $n - 1$ камеры укорочений являются конусами и образуют веер конусов. Это остается верным для *неприводимых* двумерных многообразий [16].

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Камеры укорочений не всегда выпуклы. Например, если M – объединение двух двумерных подторов четырехмерного тора, то имеются три камеры: точка нуль и две двумерные плоскости без точки нуль.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Множество $\mathfrak{R}_M$ можно описать в терминах торических многообразий [15] следующим образом. Назовем острый веер *достаточным* для M , если замыкание многообразия M в соответствующем торическом многообразии компактно. Веер достаточен для M , если и только если его носитель содержит определенное выше множество $\mathfrak{R}_M$.

Существуют d -мерные ($d = \dim M$) вееры конусов с носителем $\mathfrak{R}_M$. Такие вееры строятся по некоторым специальным системам образующих идеала I , существование которых – основной технический результат, полученный в работе [16]. Кроме того, верно, что любой конус любого веера с носителем $\mathfrak{R}_M$ принадлежит одной из камер укорочения [16]. Поэтому d -мерные конусы любого такого веера можно снабдить наследуемыми от содержащих их камер кратностями и сдвиговыми кратностями. Если M равноразмерно, то любая камера укорочения принадлежит замыканию одной из камер максимальной размерности [16], что гарантирует для таких вееров выполнение условия однородности (определение 1). Все такие вееры конусов, снабженные наборами кратностей, являются эквивалентными пред-с-веерами и образуют с-веер Σ_M . Снабженный набором определенных выше сдвиговых кратностей с-веер Σ_M является w-веером (теорема 2) и обозначается W_M .

ПРИМЕР 5. Пусть многообразие нулей M идеала I нульмерно. Тогда w-веер W_M – точка нуль, снабженная кратностью m , равной количеству элементов M , и сдвиговой кратностью w , равной произведению этих точек как элементов тора. Эти кратности могут быть построены по идеалу I следующим образом. Положим $\mathbb{C}[M] = \mathbb{C}[\mathbb{T}]/I$. Кольцо $\mathbb{C}[M]$ является m -мерным векторным пространством. При этом для любого характера тора χ определитель оператора умножения на χ в кольце $\mathbb{C}[M]$ равен $\chi(w)$.

Ниже при доказательстве теоремы 2 понадобится одно свойство аппроксимации многообразия многообразиями-укорочениями (см. [16]). Для $t \in \mathbb{T}$ обозначим через $\rho_K(t)$ расстояние от точки $\text{Relog } t$ до камеры укорочения K , а через $\rho_k(t)$ – расстояние от точки $\text{Relog } t$ до объединения камер укорочения размерности, не превышающей k . Пусть $\mathbb{T}_K^C = \{t \in \mathbb{T} : \rho_K(t) < C\}$, $\mathbb{T}_k^C = \{t \in \mathbb{T} : \rho_k(t) < C\}$ и M_K – многообразие-укорочение, соответствующее камере K .

ЛЕММА 6 [16]. Пусть многообразие M равноразмерно и d -мерно. Тогда:

- 1) $M \subset \mathbb{T}_d^C$, если C достаточно велико;
- 2) для любых $\varepsilon > 0$, C и любой камеры укорочения K найдется такое D , что алгебраические многообразия M и M_K ε -близки в области $\mathbb{T}_K^C \setminus \mathbb{T}_{k-1}^D$, где $k = \dim K$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть многообразие M равноразмерно и d -мерно. Тогда:

- 1) W_M – d -мерный w-веер с носителем Σ_M ;
- 2) w-веер многообразия-укорочения M_φ – локализация w-веера исходного многообразия, т. е. $W_{M_\varphi} = W_M^\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K – веер с носителем $\mathfrak{R}_M$, снабженный построенными выше наборами кратностей и сдвиговых кратностей, и $A \subset \text{Re } \mathfrak{Z}$ – рациональное подпространство размерности $n - d$. Выберем такое $t \in \mathbb{T}$, что аффинное подпространство $\text{Re } \log t + A$ лежит на большом расстоянии от объединения камер укорочения размерности, меньшей d . Тогда, заменяя M на M_K при $\dim K = d$ и используя лемму 6 (при $k = d$), легко вычислить количество точек множества $t\mathcal{T}_A \cap M$. Оно равно $\xi_{A,K}(\text{Re } \log t)$ (см. определение 4).

Теперь, поскольку количество элементов $t\mathcal{T}_A \cap M$ при почти всех $t \in \mathbb{T}$ одно и то же, функция $\xi_{A,K}(e)$ постоянна, т. е. аддитивные соотношения выполнены.

Пусть пересечение пространства A с веером K трансверсально. Тогда произведение элементов множества $t\mathcal{T}_A \cap M$ задает голоморфное отображение $\Phi: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$. Нетрудно показать, что $\Phi = \omega\Psi$, где ω – элемент подтора $\mathcal{T}_A$, а $\Psi: \mathbb{T}/\mathcal{T}_A \rightarrow \mathbb{T}$ – гомоморфизм торов.

Теперь, используя лемму 6 (во втором утверждении $k = d$), нетрудно показать, что (предложение 5) $\Phi_{A,K} = \Phi$. Отсюда вытекают мультипликативные соотношения (теорема 1).

Утверждение 2) теоремы также легко вывести из утверждения 2) леммы 6 (детали вывода см. в [16]).

Непосредственно из определений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Имеет место равенство $W_{M \cup N} = W_M + W_N$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Если многообразия M и N развернуты, то $W_{M \cap N} = W_M W_N$.*

Использующееся в предложении 15 произведение $W_M W_N$ определено в § 4. Это предложение является следствием определений и утверждения 2) теоремы 2. Для многообразий дополнительных размерностей (в этом случае w-веер-произведение – точка нуль, снабженная аддитивной и сдвиговой кратностями) его вывод можно предварительно пояснить следующим образом.

Отображение, переводящее элемент t тора $\mathbb{T}$ в произведение всех элементов конечного множества $M \cap (tN)$, является отображением вида $t \mapsto W\Psi(t)$, где $\Psi: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – эндоморфизм тора, а W – произведение элементов множества $M \cap N$. Рассмотрим такой сдвиг $T \in \mathbb{T}$, что:

- 1) множество $\mathfrak{R}_M \cap (\text{Re } \log T + \mathfrak{R}_N)$ конечно и состоит из точек попарного пересечения камер укорочений максимальной размерности;
- 2) расстояние точек этого множества до камер укорочений не максимальной размерности велико.

Для близких к T сдвигов $t \in \mathbb{T}$ мы можем приближенно восстановить значения W и $\Psi(t)$. Действительно, конечное множество точек пересечения $M \cap (tN)$ приближенно имеет вид $\Upsilon_T(t) = \cup(M_\varphi \cap (tN_\psi))$, где M_φ , N_ψ – многообразия укорочения, соответствующие камерам укорочений максимальных размерностей. Как отмечено выше, каждое из таких многообразий – объединение конечного множества сдвигов некоторого (зависящего от максимальной камеры) подтора тора $\mathbb{T}$. Поэтому, зная комбинаторику попарных пересечений камер (одинаковую для близких к T сдвигов), мы можем (используя вычисление, проведенное в примере 2) восстановить произведение элементов множества $\Upsilon_T(t)$ в виде $W_T \Psi_T(t)$. Оказывается, что такое приближенное вычисление является

точным, т. е. элемент W_T и эндоморфизм тора Ψ_T не зависят от выбора T . Независимость результата от задаваемой сдвигом T комбинаторики попарных пересечений камер – следствие аддитивных и мультипликативных соотношений.

§ 4. Умножение w-вееров

4.1. Устойчивое пересечение вееров конусов и свойство развернутости. Если $\mathcal{K}, \mathcal{N}$ – вееры конусов, то их пересечение $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ можно определить как веер, образованный конусами $\{\mathcal{K} \cap \mathcal{N} : K \in \mathcal{K}, N \in \mathcal{N}\}$. Операция умножения является переносом на w-вееры (и c-вееры) операции с веерами конусов, которую мы назовем *устойчивым пересечением вееров*. Устойчивое пересечение вееров – подвеер веера-пересечения.

Если $A_1, \dots, A_k$ – подмножества векторного пространства E , то точку a их пересечения назовем *устойчивой*, если любая ее окрестность при достаточно малых $e_i \in E$ пересекается с $\bigcap_{1 \leq i \leq k} (A_i + e_i)$. Множество устойчивых точек пересечения обозначим через $\bigcap_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} A_i$. Например, если A_i – подпространства пространства E , то множество $\bigcap_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} A_i$ или совпадает с $\bigcap_{1 \leq i \leq k} A_i$ (если пересечение трансверсально), или пусто.

Теперь мы можем дать определение развернутого набора многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Конечный набор вееров называется *развернутым*, если пересечение и устойчивое пересечение их носителей совпадают. Соответственно:

- (i) набор c-вееров с положительными кратностями развернут, если развернут набор их носителей;
- (ii) набор алгебраических многообразий $M_1, \dots, M_k$ развернут, если развернут набор c-вееров $\Sigma_{M_1}, \dots, \Sigma_{M_k}$;
- (iii) набор выпуклых многогранников $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ развернут, если развернут набор c-вееров $\Sigma_{\Delta_1}, \dots, \Sigma_{\Delta_k}$;
- (iv) набор w-вееров развернут, если развернут набор их основ (т. е. c-вееров, возникающих при стирании сдвиговых кратностей).

Например, набор многоугольников на плоскости не является развернутым тогда и только тогда, когда многоугольники содержат стороны с общей внешней нормалью. Наоборот, два многогранника в $\mathbb{R}^3$, содержащие двумерные грани с общей внешней нормалью, могут образовывать развернутый набор многогранников.

Определим устойчивое пересечение k вееров $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_k$ следующим образом. Для набора конусов $K_i \in \mathcal{K}_i$ положим

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} K_i = K_1 \cap \dots \cap K_k \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} \text{supp } \mathcal{K}_i \right).$$

Множество $\bigwedge_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} K_i$ или пусто, или совпадает с $\bigcap_{1 \leq i \leq k} K_i$, т. е. является конусом веера-пересечения $\bigcap_{1 \leq i \leq k} \mathcal{K}_i$. Устойчивое пересечение замкнутых множеств замкнуто, поэтому объединение конусов вида $\bigwedge_{1 \leq i \leq k}^{\text{st}} K_i$ замкнуто и, значит, образует веер конусов. Носитель этого веера равен устойчивому пересечению носителей вееров $\mathcal{K}_i$. Обозначим такой веер через $\mathcal{K}_1 \cap^{\text{st}} \dots \cap^{\text{st}} \mathcal{K}_k$ и назовем *устойчивым пересечением вееров $\mathcal{K}_i$* .

ПРИМЕР 6. Операция устойчивого пересечения вееров *не ассоциативна*. Например², пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ – вееры в пространстве $\mathbb{R}^2$ с носителями

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} \mathcal{A} &= \{(x, y) : x = 0\}, & \operatorname{supp} \mathcal{B} &= \{(x, y) : y = 0\}, \\ \operatorname{supp} \mathcal{C} &= \{(x, y) : |x| \geq |y|\}\end{aligned}$$

соответственно. Тогда

$$\mathcal{A} \cap^{\operatorname{st}} \mathcal{B} \cap^{\operatorname{st}} \mathcal{C} = (\mathcal{A} \cap^{\operatorname{st}} \mathcal{B}) \cap^{\operatorname{st}} \mathcal{C} \neq \mathcal{A} \cap^{\operatorname{st}} (\mathcal{B} \cap^{\operatorname{st}} \mathcal{C}).$$

Действительно, два левых тройных пересечения пусты, а правое – точка нуль.

В следующей ниже лемме перечислено (без доказательства) несколько простых используемых далее свойств устойчивых пересечений вееров.

ЛЕММА 7. Пусть K_i – конусы вееров $\mathcal{K}_{1 \leq i \leq k}$. Тогда:

1) операция устойчивого пересечения вееров перестановочна с локализацией, т. е. если $\bigcap_{1 \leq i \leq k} K_i$ содержит ненулевой вектор φ , то

$$\bigcap_{1 \leq i \leq k}^{\operatorname{st}} K_i^\varphi = \left(\bigcap_{1 \leq i \leq k}^{\operatorname{st}} K_i \right)^\varphi$$

и, кроме того,

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq k}^{\operatorname{st}} K_i = K_1 \cap \dots \cap K_k \cap \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k}^{\operatorname{st}} K_i^\varphi \right);$$

2) операция устойчивого пересечения перестановочна с факторизацией, т. е. если L – подпространство, принадлежащее устойчивому пересечению минимальных конусов вееров K_i , то L -факторизация устойчивого пересечения вееров совпадает с устойчивым пересечением их L -факторизаций;

3) если сумма коразмерностей вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ равна с и $s \geq 0$, то коразмерность их устойчивого пересечения больше или равна s ;

4) свойство развернутости набора вееров сохраняется при переходе к локализациям и факторизациям и коразмерность устойчивого пересечения образующих развернутый набор вееров равна сумме их коразмерностей.

4.2. Умножение с-вееров. Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – k -мерный и l -мерный пред-с-вееры. Назовем точку $e \in \operatorname{Re} \mathfrak{S}$ допустимой для пары $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$, если множество $D(e) = \operatorname{supp} \mathcal{P} \cap (e + \operatorname{supp} \mathcal{Q})$ состоит только из трансверсальных пересечений конусов.

Умножение с-вееров определяется следующим образом.

1. При $k + l < n$ положим $\mathcal{P}\mathcal{Q} = 0$.

2. При $k + l = n$ произведение $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ – это нульмерный с-веер, т. е. точка нуль, снабженная целочисленной кратностью $m(0)$.

В случае 2 кратность $m(0)$ назначается по правилу

$$m(0) = \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, \dim P = k \\ Q \in \mathcal{Q}, \dim Q = l \\ P \cap (Q + e) \neq \emptyset}} \xi(S_P, S_Q) m(P) m(Q)$$

²Настоящий пример принадлежит А. Я. Гордону.

для некоторой допустимой точки $e \in \operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, где $m(P)$, $m(Q)$ – кратности конусов P , Q , а функция ξ определена в п. 2.1. Независимость $m(0)$ от выбора допустимой точки e – следствие аддитивных соотношений (см. [2]).

3. При $k + l = n + d$, $d > 0$, конструкция умножения пред-с-вееров состоит в назначении аддитивных кратностей d -мерных конусов веера $\mathcal{P} \cap^{\text{st}} \mathcal{Q}$ (это определенное выше устойчивое пересечение вееров). Назначение кратностей сводится к случаю $k + l = n$ при помощи операций локализации и факторизации.

Пусть K – d -мерный конус пред-с-веера $\mathcal{P} \cap^{\text{st}} \mathcal{Q}$, $\varphi \in K$ и $\mathcal{P}^\varphi$, $\mathcal{Q}^\varphi$ – локализации вееров $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$. Минимальные конусы этих вееров содержат подпространство S_K . Обозначим через $\mathcal{P}^K$, $\mathcal{Q}^K$ результат S_K -факторизации вееров-локализаций $\mathcal{P}^\varphi$, $\mathcal{Q}^\varphi$. Как объяснено в п. 2.3, факторизации $\mathcal{P}^K$, $\mathcal{Q}^K$, рассматриваемые как вееры с наследуемыми кратностями, являются пред-с-веерами в пространстве $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/S_K$. Сумма размерностей вееров $\mathcal{P}^K$, $\mathcal{Q}^K$ равна размерности пространства $(\operatorname{Re} \mathfrak{Z})/S_K$. Выше для подобного случая построена кратность $m(0)$. Эту кратность и припишем конусу K .

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть E_1, E_2 – рациональные подпространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$, рассматриваемые как с-вееры и состоящие из одного конуса с кратностью, равной единице. Если подпространства пересекаются трансверсально, то произведение с-вееров – подпространство $E_1 \cap E_2$ с кратностью $\xi(E_1, E_2)$, иначе произведение с-вееров равно нулю.

Проверка аддитивных соотношений для произведения пред-с-вееров имеется в [2]. Нетрудно убедиться в том, что при замене исходных пред-с-вееров на эквивалентные результат остается в своем классе эквивалентности пред-с-вееров.

с-вееры образуют коммутативную градуированную $\mathbb{Z}$ -алгебру. Ее однородная составляющая степени n изоморфна $\mathbb{Z}$, однородные составляющие более высоких степеней отсутствуют. Непосредственная проверка ассоциативности умножения в этом кольце не тривиальна.

ТЕОРЕМА 3 [2]. 1) Кольцо с-вееров порождено элементами первой степени.

2) При любом k умножение с-вееров задает невырожденное спаривание между однородными составляющими кольца с-вееров степеней k , $n - k$.

Для доказательства ассоциативности умножения w-вееров (в п. 5.1) понадобится следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. 1) Пусть A – тривиально оснащенное $(n - d)$ -мерное пространство, а K – d -мерный пред-с-веер, кратности конусов которого положительны. Тогда трансверсальность пространства A пред-с-вееру K эквивалентна развернутости набора пред-с-вееров (A, K) .

2) Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – развернутый набор пред-с-вееров. Тогда развернутость набора $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ эквивалентна развернутости набора двух пред-с-вееров $(\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) – прямое следствие определений. Утверждение 2) состоит в эквивалентности двух условий:

(i) носители пересечения и устойчивого пересечения двух вееров набора $(\mathcal{P}_1 \cdots \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ совпадают;

(ii) носители пересечения и устойчивого пересечения $k + 1$ вееров набора $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k, \mathcal{Q})$ совпадают.

Из ассоциативности умножения в кольце с-вееров вытекает, что устойчивые пересечения двух и $k + 1$ вееров совпадают. Обозначим носитель этих совпадающих вееров через $\mathcal{A}$. Кроме того, из развернутости набора $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ следует, что совпадают пересечение и устойчивое пересечение этих k вееров. Обозначим носитель этих совпадающих вееров через $\mathcal{B}$. Теперь видим, что оба условия означают, что выполнено равенство $\mathcal{A} = \mathcal{B} \cap \text{supp } \mathcal{Q}$.

4.3. Умножение w-вееров. Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор вееров конусов. При $\text{Sh} = \{(\text{sh}_1, \dots, \text{sh}_k) : \text{sh}_i \in \text{Re } \mathfrak{S}\}$ положим $\mathcal{X}(\text{Sh}) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} (\text{sh}_i + \text{supp } \mathcal{P}_i)$. Назовем набор Sh *допустимым набором сдвигов* вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$, если множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ состоит только из точек трансверсального пересечения сдвигов $\text{sh}_i + \mathcal{P}_i$ конусов $\mathcal{P}_i$ вееров $\mathcal{P}_i$.

Если конусы старших размерностей вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ снабжены кратностями, то, фиксируя некоторый допустимый набор сдвигов Sh , мы построим набор кратностей их устойчивого пересечения $\mathcal{P}_1 \cap^{\text{st}} \dots \cap^{\text{st}} \mathcal{P}_k$. Для набора пред-с-вееров результатом построения является произведение пред-с-вееров, описанное ранее в п. 4.2. Если пред-с-вееры $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ оснащены также наборами сдвиговых кратностей, то будет построен набор сдвиговых кратностей их произведения. Такой оснащенный веер мы будем называть *Sh-произведением* и обозначать $\mathcal{P}^{\text{Sh}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор пред-w-вееров. Тогда:

- 1) для их Sh-произведения выполнены мультипликативные соотношения, т.е. $\mathcal{P}^{\text{Sh}}$ является пред-w-веером;
- 2) если набор пред-w-вееров развернут, то пред-w-веер $\mathcal{P}^{\text{Sh}}$ не зависит от выбора допустимого набора сдвигов Sh .

Если набор пред-w-вееров не является развернутым, то утверждение 2) предложения 17 неверно. Мультипликативные соотношения для Sh-произведения w-вееров доказаны ниже в настоящем пункте, а независимость оснащения веера $\mathcal{P}_1 \cap^{\text{st}} \dots \cap^{\text{st}} \mathcal{P}_k$ от выбора допустимого набора Sh – в § 5, где также содержится вывод свойства ассоциативности умножения w-вееров.

Построение сдвиговых кратностей таково, что при замене исходных пред-w-вееров на эквивалентные получим эквивалентный пред-w-веер-произведение. Таким образом мы определим операцию умножения w-вееров, образующих развернутый набор.

Сначала (так же, как при определении умножения с-вееров) рассмотрим случай $\text{codim } \mathcal{P}_1 + \dots + \text{codim } \mathcal{P}_k = n$. Тогда для допустимого набора сдвигов Sh множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ конечно и любая точка $x \in \mathcal{X}(\text{Sh})$ является трансверсальным пересечением сдвигов $\text{sh}_i + \mathcal{P}_i$ конусов старшей размерности $\mathcal{P}_i$ вееров $\mathcal{P}_i$. Оснастим порожденные этими конусами подпространства $S_{\mathcal{P}_i}$ кратностями $m(\mathcal{P}_i)$ и сдвиговыми кратностями $\omega(\mathcal{P}_i)$. Произведение этих оснащенных пространств (определенное в п. 2.1) – точка нуль, снабженная кратностью и сдвиговой кратностью, которые мы обозначим соответственно через $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Припишем нулю кратность $m(0) = \sum_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} \alpha(x)$ и сдвиговую кратность $\omega(0) = \prod_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} \beta(x)$.

Если $\mathcal{P}_i$ – пред-с-вееры, то кратность $m(0)$ не зависит от допустимого набора сдвигов Sh , так как точка нуль с кратностью $m(0)$ (см. п. 4.2) – произведение пред-с-вееров.

В случае $\text{codim } \mathcal{P}_1 + \dots + \text{codim } \mathcal{P}_k = n - d$, $d > 0$, произведение $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_k$ пред-с-вееров d -мерно. Назначение кратностей (так же, как при определении

умножения с-вееров) сводится к случаю $d = 0$ при помощи операций локализации и факторизации.

Пусть K – d -мерный конус веера $\mathcal{P}_1 \cap^{\text{st}} \dots \cap^{\text{st}} \mathcal{P}_k$, $\varphi \in K$ и $\mathcal{P}_i^\varphi$ – локализации вееров $\mathcal{P}_i$. Минимальные конусы вееров $\mathcal{P}_i^\varphi$ содержат порожденное конусом K подпространство S_K . Обозначим через $\mathcal{P}_i^K$ результат S_K -факторизации веера-локализации $\mathcal{P}_i^\varphi$. Таким образом получаем набор пред-с-вееров в $(n-d)$ -мерном пространстве $(\text{Re } \mathfrak{S})/S_K$ суммарной коразмерности $n-d$. Припишем конусам старшей размерности веера $\mathcal{P}_i^K$ сдвиговые кратности соответствующих конусов веера $\mathcal{P}_i$. Свойство развернутости, а также выполнение мультипликативных соотношений при операциях локализации и факторизации наследуются.

Пусть сумма коразмерностей вееров $\mathcal{P}_i^K$ равна размерности пространства $(\text{Re } \mathfrak{S})/S_K$. Выше построены кратности $m(0)$ и $\omega(0)$, эти кратности и припишем конусу K .

Построенные выше целочисленные кратности $m(K)$ – это именно те кратности, которые строились в п. 4.2 при определении умножения с-вееров. Аддитивные соотношения для этих кратностей выполнены, а значения кратностей не зависят от выбора допустимого набора сдвигов (без требования развернутости набора вееров).

Для вывода необходимых свойств построенного набора сдвиговых кратностей рассмотрим подробнее структуру множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$.

Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор вееров суммарной коразмерности $n-d$, и пусть $d \geq 0$. Предположим, что для каждого веера $\mathcal{P}_i$ выполнено условие однородности (см. определение 1 в п. 2.1). Если набор сдвигов Sh допустим, то множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ является d -мерным полиэдральным разбиением. Это означает, что оно составлено из попарно непересекающихся выпуклых многогранников (компактных и некомпактных) вида $\bigcap_{1 \leq i \leq k} (\text{sh}_i + P_i)$, где P_i – конусы вееров $\mathcal{P}_i$, и локально (т.е. в окрестности любой своей точки) устроено как однородный d -мерный веер конусов. Ниже мы называем эти многогранники *клетками*. Если вееры $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ оснащены наборами кратностей и сдвиговых кратностей, то сопоставим подобные кратности d -мерным клеткам $\mathcal{X}(\text{Sh})$ следующим образом.

Любая d -мерная клетка Δ разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ является трансверсальным пересечением сдвигов $\text{sh}_i + P_i^\Delta$ конусов старшей размерности P_i^Δ вееров $\mathcal{P}_i$. Оснастим порожденные этими конусами пространства $S_{P_i^\Delta}$ кратностями $m(P_i^\Delta)$ и сдвиговыми кратностями $\omega(P_i^\Delta)$. Произведение этих оснащенных пространств (определенное в п. 2.1) оснащено кратностью и сдвиговой кратностью, которые мы и припишем клетке Δ .

Локально, т.е. в окрестности любой своей точки x , разбиение $\mathcal{X}(\text{Sh})$ устроено как d -мерный веер конусов с вершиной в точке x . Такой веер (с точкой x , помещенной в нуль) обозначим через $\mathcal{X}^x(\text{Sh})$ и назовем *x -локализацией* разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$. Оснастим веер-локализацию кратностями, унаследованными от d -мерных клеток разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. *Если для наборов кратностей конусов вееров $\mathcal{P}_{1 \leq i \leq k}$ выполнены аддитивные или (кроме того) мультипликативные соотношения, то они выполнены для любой локализации разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}^x(\text{Sh})$ – x -локализация разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$, K – $(d-1)$ -мерный конус веера $\mathcal{X}^x(\text{Sh})$, $\varphi \in K$. Аддитивные и мультипликативные соотношения достаточно проверить для веера-локализации $(\mathcal{X}^x(\text{Sh}))^\varphi$ (см. предложение 6).

Веер $(\mathcal{X}^x(\text{Sh}))^\varphi$ совпадает с y -локализацией $\mathcal{X}^y(\text{Sh})$ разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ при $y \in \Delta$, где Δ – некоторая $(d-1)$ -мерная клетка разбиения (при $d=0$ аддитивные и мультипликативные соотношения выполнены). Эта клетка – пересечение сдвинутых конусов $\text{sh}_i + P_i^\Delta$. Все конусы P_i^Δ , кроме одного, являются конусами максимальной размерности в веерах $\mathcal{P}_i$. Будем считать, что P_1^Δ – конус не максимальной размерности.

Пусть $\mathcal{K}$ – ψ -локализация веера $\mathcal{P}_1$ при $\psi \in P_1^\Delta$ (это веер вида p -мерная книга, где $p = \dim \mathcal{P}_1$) и $E = S_{P_2^\Delta} \cap \dots \cap S_{P_k^\Delta}$. Снабдим веер $\mathcal{K}$ кратностями веера $\mathcal{P}_1$ (см. п. 2.3), а E – кратностями произведения $S_{P_2^\Delta} \dots S_{P_k^\Delta}$ оснащенных пространств. Теперь заменим исходный набор $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ вееров набором $(\mathcal{K}, E)$ двух вееров. Тогда доказываемое утверждение сведется к частному случаю, в котором $k=2$, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{K}$ и $\mathcal{P}_2 = E$. Развернутость такого набора эквивалентна трансверсальности пересечения пространства E с любым конусом веера $\mathcal{K}$ (в подобной ситуации любой набор сдвигов является допустимым, а его изменение приводит к параллельному переносу разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$). Сформулируем теперь нужное утверждение в этом частном случае.

Пусть $\mathcal{K}$ – веер конусов вида p -мерная книга и E – трансверсальное вееру $(n-p+d)$ -мерное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$. Веер-пересечение $E \cap \mathcal{K}$ является веером вида d -мерная книга. Предположим, что веер $\mathcal{K}$ и подпространство E оснащены кратностями и сдвигowymi кратностями. Оснастим конусы веера $E \cap \mathcal{K}$ кратностями пересечений оснащенных пространств (см. п. 2.1), т.е. для p -мерного конуса $K \in \mathcal{K}$ положим

$$m(K \cap E) = m(K)m(E)\xi(E, S_K),$$

$$\omega(K \cap E) = (\kappa_{E, S_K})^{m(K)m(E)}(\psi_{E, S_K}(\omega(E)))^{m(K)}(\psi_{S_K, E}(\omega(S_K)))^{m(E)}.$$

ЛЕММА 8. Пусть для веера $\mathcal{K}$ выполнены аддитивные или (кроме того) мультипликативные соотношения. Тогда тот же набор соотношений выполнен для веера $E \cap \mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(n-d)$ -мерное подпространство A пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ трансверсально подпространству E , то аддитивные соотношения для пары $(A, E \cap \mathcal{K})$ эквивалентны аддитивным соотношениям для пары $(A \cap E, \mathcal{K})$. Если пространство A , кроме того, трансверсально вееру $\mathcal{K}$, то мультипликативные соотношения для пары $(A \cap E, \mathcal{K})$ эквивалентны мультипликативным соотношениям для пары $(A \cap E, \mathcal{K})$, где подпространству $A \cap E$ приписаны кратности произведения оснащенного подпространства E на тривиально оснащенное подпространство A (см. п. 2.1). Таким образом, лемма 8 и предложение 18 доказаны.

Пусть A – $(n-d)$ -мерное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$. Если сдвинутое подпространство $e + A$ не пересекается с $(d-1)$ -мерным остовом разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$, то положим

$$\xi_{A, \mathcal{X}(\text{Sh})}(e) = \sum \xi(e + A, S_\Delta)m(\Delta),$$

где суммирование проводится по d -мерным клеткам разбиения, пересекающим с аффинным подпространством $e + A$, а через S_Δ обозначено порожденное клеткой Δ d -мерное аффинное подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$.

Если пространство A трансверсально всем d -мерным подпространствам, порожденным d -мерными клетками разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$, то на той же области определения построим еще одну функцию

$$\omega_{A, \mathcal{X}(\text{Sh})}(e) = \prod_{\Delta, (e+A) \cap \Delta \neq \emptyset} \omega(A \cap S_{\Delta}),$$

где произведение проводится по d -мерным клеткам разбиения, пересекающимся с аффинным подпространством $e + A$, пространство A рассматривается как тривиально оснащенное, а пространство S_{Δ} оснащено кратностью и сдвиговой кратностью клетки Δ .

Аналогичные аддитивные и мультипликативные соотношения для разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ формулируются следующим образом.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Функции $\xi_{A, \mathcal{X}(\text{Sh})}$ и $\omega_{A, \mathcal{X}(\text{Sh})}$ постоянны.*

ЗАМЕЧАНИЕ 14. Если P_i – пред-с-вееры, то $\mathcal{X}(\text{Sh})$ (взятое с числовыми кратностями клеток) является d -мерным тропическим алгебраическим предмногообразием (см. далее определение 9). В частности, при $d = 1$ мы получаем тропические кривые (в терминологии из [14]).

Докажем утверждение 1) предложения 17. Пусть сумма коразмерностей w -вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ равна $n - d$. При $d = 0$ множество мультипликативных соотношений пусто. Теперь рассмотрим случай $d = 1$. В этом случае утверждение 1) вытекает из доказанных выше мультипликативных соотношений для разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$.

Действительно, при $d = 1$ разбиение $\mathcal{X}(\text{Sh})$ одномерно, т.е. является ломаной линией (возможно, несвязной) с рационально наклоненными звеньями и ветвлением в вершинах. Каждому отрезку L ломаной сопоставлены целочисленная кратность $m(L)$ и сдвиговая кратность $\omega(L)$. Сдвиговая кратность – элемент фактортора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_L$, где $\mathbb{T}_L$ – подтор тора $\mathbb{T}$, порожденный экспонентами разностей точек L . В каждой вершине x ломаная устроена как одномерный веер конусов $\mathcal{K}_x$ (x -локализация $\mathcal{X}^x(\text{Sh})$). Если оснастить одномерные конусы веера $\mathcal{K}_x$ кратностями и сдвиговыми кратностями соответствующих отрезков ломаной, то для такого веера выполнены аддитивные (и в этом случае кривая называется *тропической* [14]) и мультипликативные соотношения.

В каждой вершине ломаной выпишем аддитивные и мультипликативные соотношения для веера-локализации соответственно в виде (5) и (6), (7) (см. п. 2.4). Суммируя эти равенства по всем вершинам ломаной, получаем аддитивные и мультипликативные соотношения для оснащенного веера $\mathcal{P}^{\text{Sh}}$.

При $d > 1$ утверждение 1) сводится (как обычно) к разобранному случаю $d = 1$ при помощи операций локализации и факторизации. Действительно, пусть K – $(d - 1)$ -мерный конус веера $\mathcal{P}^{\text{Sh}}$. Тогда при $\varphi \in K$ φ -локализация $(\mathcal{P}^{\text{Sh}})^{\varphi}$ совпадает (как оснащенный веер) с Sh -произведением φ -локализаций вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$. Далее, факторизация оснащенного веера $(\mathcal{P}^{\text{Sh}})^{\varphi}$ совпадает с Sh -произведением факторизаций вееров $\mathcal{P}_1^{\varphi}, \dots, \mathcal{P}_k^{\varphi}$, суммарная коразмерность которых равна $n - d + 1$.

§ 5. Умножение w -вееров и пересечение реализаций

5.1. Формулировка теорем и вывод свойства ассоциативности. Для окончания построения операции умножения w -вееров осталось доказать два утверждения.

1) Построенные выше сдвиговые кратности устойчивого пересечения w -вееров развернутого набора не зависят от выбора допустимого набора сдвигов (это утверждение 2) предложения 17).

2) Построенное умножение w -вееров ассоциативно, т. е. если наборы w -вееров

$$(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3), \quad (\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2), \quad (\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$$

развернуты, то пары $(\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ и $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2\mathcal{P}_3)$ также развернуты и

$$\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 = (\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2)\mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1(\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3).$$

В выводе этих утверждений используются теоремы 4 и 5, доказательства которых приведены далее, в п. 5.2.

Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор пред-с-вееров, сумма коразмерностей которых равна n . В этом случае множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ конечно, если Sh – допустимый набор сдвигов. Рассмотрим отображение множества всех допустимых наборов сдвигов в пространство $\text{Re } \mathfrak{Z}$:

$$\Xi: \text{Sh} \mapsto \sum_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} m(x)x,$$

где $m(x)$ – кратность точки x . Следующее утверждение является прямым обобщением предложения 4.

ТЕОРЕМА 4. 1) В окрестности любого допустимого набора сдвигов отображение Ξ совпадает с некоторым линейным оператором, действующим из k -й декартовой степени пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ в $\text{Re } \mathfrak{Z}$. Эти линейные операторы могут быть разными в разных связных компонентах области допустимых наборов сдвигов. Каждый из этих операторов переводит целочисленную решетку пространства $\oplus^k(\text{Re } \mathfrak{Z})$ в целочисленную решетку пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$.

2) Отображение Ξ непрерывно продолжается до отображения $\oplus^k(\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$.

3) Если исходный набор пред-с-вееров развернут, то все операторы из утверждения 1) совпадают. Таким образом, отображение Ξ продолжается до линейного оператора $\oplus^k(\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если набор $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ пред-с-вееров развернут, то существует гомоморфизм торов $\Psi: \oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, дифференциал которого на пространстве $\text{Re } \mathfrak{Z}$ совпадает с линейным оператором Ξ .

Набор $\bar{\tau} = (t_1, \dots, t_k)$ элементов тора $\mathbb{T}$ назовем *допустимым*, если набор точек $\text{Re } \log \bar{\tau} = (\text{Re } \log t_1, \dots, \text{Re } \log t_k)$ пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$ является допустимым набором сдвигов.

Напомним (см. п. 2.2), что реализация оснащенного веера $\mathcal{K}$ – это сопоставление каждому конусу $K \in \mathcal{K}$ старшей размерности такого конечного множества классов смежности по подгруппе $\mathbb{T}_K$, что их количество равно $m(K)$, а произведение этих классов в факторторе $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$ равно $\omega(K)$ (здесь $m(K)$ и $\omega(K)$ – кратность и сдвиговая кратность конуса K). Тор $\mathbb{T}$ действует на множестве реализаций сдвигами на однородных пространствах $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$. Это действие тора согласовано с действием на оснащениях веера $\mathcal{K}$.

Пусть $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор пред- w -вееров суммарной коразмерности n , $\mathcal{R}^i$ – некоторая реализация пред- w -веера $\mathcal{P}_i$, $\bar{\tau} = (t_1, \dots, t_k)$ – допустимый набор

элементов тора $\mathbb{T}$ и $\text{Sh} = \text{Re log } \bar{\tau}$ – допустимый набор сдвигов. По этим данным оснастим точки конечного множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ кратностями и сдвиговыми кратностями.

Каждой точке x из конечного множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ соответствует набор конусов старших размерностей $P_i^x \in \mathcal{P}_i$ (напомним: $x = \bigcap_{1 \leq i \leq k} (\text{sh}_i + P_i^x)$). Обозначим через $M_i(x)$ объединение всех выбранных в реализации $t_i \mathcal{R}^i$ сдвигов подтора $\mathbb{T}_{P_i^x}$. Рассмотрим множество $M_1 \cap \dots \cap M_k$. Это множество, очевидно, конечно. Положим $m(x)$ равным количеству элементов этого множества, а $\omega(x)$ равным их произведению в торе $\mathbb{T}$ (ср. пример 2).

ЗАМЕЧАНИЕ 15. Точку нуль с кратностью $\sum_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} m(x)$ и сдвиговой кратностью $\prod_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} \omega(x)$ можно назвать $\bar{\tau}$ -произведением пред- w -вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ суммарной коразмерности n . Ниже в настоящем пункте строится реализация $\bar{\tau}$ -произведения k w -вееров суммарной коразмерности $n - d$.

ЗАМЕЧАНИЕ 16. $\bar{\tau}$ -произведение пред- w -вееров $\mathcal{P}_i$ совпадает с Sh -произведением пред- w -вееров $t_i \mathcal{P}_i$ (действие тора на w -веерах определено в п. 2.1, числовые кратности при действии тора сохраняются).

ТЕОРЕМА 5. 1) В окрестности любого допустимого набора элементов тора $\bar{\tau}$ отображение $\mathcal{R}: \bar{\tau} \mapsto \prod_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} \omega(x)$ имеет вид $\bar{\tau} \mapsto W(\bar{\tau})\Psi(\bar{\tau})$, где $\Psi: \oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – гомоморфизм торов, а $W(\bar{\tau})$ – локально постоянная функция со значениями в $\mathbb{T}$.

2) Предположим, что набор $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ пред- w -вееров развернут. Тогда отображение $\mathcal{R}: \bar{\tau} \mapsto \prod_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} \omega(x)$ продолжается до непрерывного отображения $\mathcal{R}: \oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Это продолжение является отображением вида $\bar{\tau} \mapsto W\Psi(\bar{\tau})$, где W – фиксированный элемент тора $\mathbb{T}$, а $\Psi: \oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – гомоморфизм торов из утверждения следствия 7.

Докажем теперь (используя теорему 5), что Sh -произведение w -вееров не зависит от выбора допустимого набора сдвигов Sh (утверждение 1) в начале пункта).

Как вытекает из способа построения сдвиговых кратностей, доказательство их независимости от выбора допустимого набора сдвигов сводится к рассмотрению случая, когда суммарная коразмерность пред- w -вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$ равна n . В этом случае необходимое утверждение – следствие теоремы 5. Действительно, нетрудно проверить, что сдвиговая кратность точки нуль Sh -произведения пред- w -вееров $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k$, построенная по любому допустимому набору сдвигов Sh , равна элементу тора W из утверждения 2) теоремы 5.

Теперь переходим к выводу ассоциативности умножения w -вееров. Он построен по образцу доказательства ассоциативности умножения оснащенных пространств (см. лемму 3). Для его проведения потребуется конструкция пересечения реализаций w -вееров.

Пусть $\mathcal{P}_{1 \leq i \leq k}$ – набор пред- w -вееров, сумма коразмерностей которых равна $n - d$, $\mathcal{R}^i$ – реализации пред- w -вееров $\mathcal{P}_i$, $\bar{\tau} = (t_1, \dots, t_k)$ – допустимый набор элементов тора $\mathbb{T}$ и $\text{Sh} = \text{Re log } \bar{\tau}$ – допустимый набор сдвигов. Ниже строится $\bar{\tau}$ -пересечение реализаций $\mathcal{R}^i$, которое обозначается через $\mathcal{R}^{\bar{\tau}}(\mathcal{R}^1, \dots, \mathcal{R}^k)$ и является реализацией (теперь корректно определенного) пред- w -веера $(t_1 \mathcal{P}_1) \dots (t_k \mathcal{P}_k)$.

Пусть K – d -мерный конус w -веера-произведения $\mathcal{P}_1 \dots \mathcal{P}_k$, $\varphi \in K$. Рассмотрим φ -локализации $\mathcal{P}_i^\varphi$ w -вееров $\mathcal{P}_i$. Пересечение сдвинутых носителей этих

локализаций $(\text{sh}_1 + \text{supp } \mathcal{P}_1^\varphi) \cap \cdots \cap (\text{sh}_k + \text{supp } \mathcal{P}_k^\varphi)$ состоит из конечного множества аффинных подпространств $e_j + S_K$, где S_K – подпространство, порожденное конусом K . Каждое из этих подпространств однозначно представляется в виде

$$e_j + S_K = (\text{sh}_1^j + S_{K_1^j}) \cap \cdots \cap (\text{sh}_k^j + S_{K_k^j}),$$

где $S_{K_i^j}$ – подпространство пространства $\text{Re } \mathfrak{S}$, порожденное некоторым конусом K_i^j старшей размерности пред- w -веера $\mathcal{P}_i$. Пусть M_i^j – набор сдвигов подтора $\mathbb{T}_{K_i^j}$, сопоставленных конусу K_i^j в реализации $t_i \mathcal{R}_i$. Тогда множество $\bigcup_j \bigcap_{1 \leq i \leq k} M_i^j$ состоит из конечного числа сдвигов d -мерного подтора $\mathbb{T}_K$ (см. пример 2). Таким образом мы сопоставили каждому d -мерному конусу K w -веера-произведения конечный набор сдвигов тора $\mathbb{T}_K$, т.е. построили реализацию некоторого оснащенного веера конусов. Сравнивая построение с определением Sh -произведения, видим, что этот оснащенный веер равен Sh -произведению пред- w -вееров $t_1 \mathcal{P}_1, \dots, t_k \mathcal{P}_k$. Поэтому верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Если набор $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ пред- w -вееров развернут, то $\bar{\tau}$ -пересечение реализаций $\mathcal{R}^1, \dots, \mathcal{R}^k$ является реализацией произведения $(t_1 \mathcal{P}_1) \cdots (t_k \mathcal{P}_k)$ w -вееров.*

Теперь закончим вывод свойства ассоциативности.

Развернутость пар $(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ и $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)$ является следствием утверждения 2) предложения 16.

Далее, при выводе свойства ассоциативности можно считать, что $\text{codim } \mathcal{P}_1 + \text{codim } \mathcal{P}_2 + \text{codim } \mathcal{P}_3 = n$. Действительно, умножение s -вееров ассоциативно. Поэтому основы w -вееров $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3$, $(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_1 (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)$ одинаковы. Пусть K – конус старшей размерности этой общей основы, $\varphi \in K$. Как обычно, используя операции локализации и факторизации, сводим доказательство к рассмотрению случая суммарной коразмерности n . Детали мы опускаем (такой способ понижения размерности в настоящей работе используется не первый раз).

Выберем реализации $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3$ w -вееров $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$. Кроме того, выберем такой допустимый набор $\bar{\tau} = (t_1, t_2, t_3)$ элементов тора, что набор $\bar{\tau}_{1,2} = (t_1, t_2)$ допустим для пары $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$, набор $\bar{\tau}_{2,3} = (t_2, t_3)$ – для пары $(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, набор $\bar{\tau}_{12,3} = (1_{\mathbb{T}}, t_3)$ – для пары $(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$, а набор $\bar{\tau}_{1,23} = (t_1, 1_{\mathbb{T}})$ – для пары $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)$.

Из ассоциативности операции пересечения множеств вытекает, что

$$\mathcal{R}^{\bar{\tau}}(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3) = \mathcal{R}^{\bar{\tau}_{12,3}}(\mathcal{R}^{\bar{\tau}_{1,2}}(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2), \mathcal{R}^3) = \mathcal{R}^{\bar{\tau}_{1,23}}(\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^{\bar{\tau}_{2,3}}(\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^3)).$$

Отсюда (предложение 19)

$$(t_1 \mathcal{P}_1)(t_2 \mathcal{P}_2)(t_3 \mathcal{P}_3) = ((t_1 \mathcal{P}_1)(t_2 \mathcal{P}_2))(t_3 \mathcal{P}_3) = (t_1 \mathcal{P}_1)((t_2 \mathcal{P}_2)(t_3 \mathcal{P}_3)).$$

Теперь из утверждения 2) теоремы 5 (существенна только непрерывность отображения $\mathcal{R}$) вытекает, что при $t_{1 \leq i \leq 3} \rightarrow 1_{\mathbb{T}}$ мы получаем равенство сдвиговых кратностей w -вееров $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_1 (\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_3)$, $(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) \mathcal{P}_3$.

5.2. Доказательство теорем 4 и 5. Напомним, что если $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k)$ – набор пред- s -вееров, то:

(i) $\mathcal{X}(\text{Sh}) = \bigcap_{1 \leq i \leq k} (\text{sh}_i + \text{supp}(\mathcal{P}_i))$, где $\text{Sh} = \{\text{sh}_i : \text{sh}_i \in \text{Re } \mathfrak{S}, 1 \leq i \leq k\}$ – набор сдвигов пред- s -вееров $\mathcal{P}_i$;

(ii) любая точка $x \in \mathcal{X}(\text{Sh})$ принадлежит однозначно определенному выпуклому многограннику $\Delta_x = \bigcap_{1 \leq i \leq k} (\text{sh}_i + P_i^x)$, где P_i^x – конусы вееров $\mathcal{P}_i$, многогранники Δ_x называются клетками разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$, через $\mathcal{P}_i^x$ обозначена $(x - \text{sh}_i)$ -локализация веера $\mathcal{P}_i$;

(iii) набор сдвигов называется допустимым для набора пред-с-вееров $\mathcal{P}_i$, если множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ состоит только из точек трансверсального пересечения сдвигов $\text{sh}_i + P_i$ конусов P_i вееров $\mathcal{P}_i$; если сумма коразмерностей пред-с-вееров $\mathcal{P}_i$ равна $n - d$, то любая клетка максимальной размерности Δ_x разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ d -мерна, а пространства $S_{P_{1 \leq i \leq k}^x}$ пересекаются трансверсально; припишем такой клетке кратность $m(\Delta_x)$, равную кратности пересечения подпространств $S_{P_i^x}$, оснащенных кратностями конусов P_i^x ; при $d = 0$ (как в условиях теорем 4, 5) множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ конечно, $\Delta_x = x$.

Допустимые наборы сдвигов образуют открытую всюду плотную область пространства $\oplus^k (\text{Re } \mathfrak{Z})$. Ясно, что в каждой компоненте связности этой области отображение Ξ линейно (это утверждение 1) теоремы 4). Утверждение 1) теоремы 5 также очевидно. Область допустимых наборов сдвигов, вообще говоря, несвязна.

Пусть сумма коразмерностей вееров набора $\mathcal{P}_i$ равна n . Набор сдвигов Sh назовем *удобным*, если выполнены следующие условия:

- 1) любая клетка Δ_x разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ нульмерна или одномерна;
- 2) для любого $x \in \mathcal{X}(\text{Sh})$ существует j такое, что набор $k - 1$ сдвигов $\text{Sh}^j = (\text{sh}_1, \dots, \text{sh}_{j-1}, \text{sh}_{j+1}, \dots, \text{sh}_k)$ допустим для набора $k - 1$ пред-с-вееров-локализаций $\mathcal{P}_1^x, \dots, \mathcal{P}_{j-1}^x, \mathcal{P}_{j+1}^x, \dots, \mathcal{P}_k^x$;
- 3) если клетка Δ_x нульмерна, то $\dim P_i^x = \dim \mathcal{P}_i$ при $i \neq j$ и $\dim P_j^x \geq \dim \mathcal{P}_j - 1$;
- 4) если клетка Δ_x одномерна, то конусы $P_{1 \leq i \leq k}^x$ являются конусами максимальных размерностей вееров $\mathcal{P}_{1 \leq i \leq k}$.

Нетрудно проверить, что удобные наборы сдвигов образуют область с дополнением коразмерности, равной двум. Значит, утверждения 2) и 3) теоремы 4 достаточно проверить в окрестности удобного набора сдвигов Sh . Аналогично, утверждение 2) теоремы 5 также достаточно проверить в окрестности такого набора $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ элементов тора, для которого набор сдвигов $\text{Re } \log \tau$ является удобным.

На рис. 3, *a, b* изображены треугольники A и B со своими с-веерами Σ_A и Σ_B , на рис. 3, *c* – допустимый сдвиг Sh , при котором множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ состоит из двух точек, и на рис. 3, *d* – удобный сдвиг Sh , при котором множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ является отрезком. На рис. 3 пара треугольников развернута, область допустимых пар сдвигов состоит из трех компонент связности, а не удобными являются только диагональные сдвиги $\text{Sh} = (\text{sh}, \text{sh})$.

Рис. 3

Использование при выводе теорем 4, 5 свойства развернутости основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 9. Пусть набор пред-с-вееров суммарной коразмерности n развернут, а Sh^0 – удобный набор сдвигов. Тогда все одномерные клетки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ – ограниченные интервалы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\{x + tv : x \in \text{Re } \mathfrak{S}, \nu \in \text{Re } \mathfrak{S}, 0 < t < \infty\}$ – луч, который содержится в пересечении $(\text{sh}_1 + P_1^x) \cap \dots \cap (\text{sh}_k + P_k^x)$ сдвинутых конусов. Тогда пересечение самих конусов содержит луч $\{tv\}$. Точки этого луча (поскольку сумма коразмерностей вееров $\mathcal{P}_i$ равна n) неустойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть Sh^0 – удобный набор сдвигов и $x_1, \dots, x_N$ – все нульмерные клетки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ (концы отрезка $\mathcal{X}(\text{Sh})$ на рис. 3, d). Точки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$ при любом близком к Sh^0 допустимом наборе сдвигов Sh можно разбить на N групп $\{y_i^{1 \leq j \leq N_i}, 1 \leq i \leq N\}$ так, что все точки группы $\{y_i^{1 \leq j \leq N_i}\}$ расположены в малой окрестности точки x_i (на рис. 3 выбраны значения $N = 2, N_1 = N_2 = 1$). Тогда

$$\Xi(\text{Sh}) = \Xi_1(\text{Sh}) + \dots + \Xi_N(\text{Sh}),$$

где $\Xi_i(\text{Sh}) = m(y_i^1)y_i^1 + \dots + m(y_i^{N_i})y_i^{N_i}$ (числа N_i могут быть разными для разных близких наборов сдвигов).

Для вывода утверждения 2) теоремы рассмотрим отображение Ξ_i , определенное в малой окрестности удобного набора сдвигов Sh^0 . Пусть $x = x_i$ – одна из нульмерных клеток разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh})$. Если точка x является пересечением сдвигов конусов $P_{1 \leq j \leq k}^x$ старших размерностей, то x – изолированная нульмерная клетка разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ (это следствие определения удобного набора сдвигов). В таком случае $N_i = 1$ в некоторой окрестности набора Sh^0 и отображение Ξ_i , очевидно, является линейным.

Предположим, что $\dim P_1^x = d - 1$, где $d = \dim \mathcal{P}_1$ (как в левой точке отрезка на $\mathcal{X}(\text{Sh})$; см. рис. 3, d). Тогда в окрестности точки x пред-с-веер $\mathcal{P}_1$ устроен как d -мерная книга $\mathcal{P}_1^x$. Пересечение остальных вееров в окрестности точки x является (по определению удобного набора сдвигов) $(n - d)$ -мерным аффинным подпространством. Обозначим его через $A(x)$. В таком случае x может оказаться как изолированной, так и не изолированной точкой разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$.

Пусть сначала точка x изолирована. Тогда, как нетрудно заметить, подпространство $A(x)$ трансверсально всем d -мерным конусам веера $\mathcal{P}_1^x$, т.е. для пары $(\mathcal{P}_1^x, A(x))$ выполнено условие предложения 4 (его доказательство помещено в конце п. 2.4). Теперь остается заметить, что применяемые в условии теоремы кратности точек $m(y_i^{1 \leq j \leq N_i(\text{Sh})})$ отличаются от кратностей, применяемых в условии предложения 4, одним и тем же постоянным множителем. Поэтому отображение Ξ_i в окрестности набора сдвигов Sh^0 является линейным.

Предположим теперь, что точка x не изолирована. Тогда (по определению удобного набора) она лежит на границе одномерной клетки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$. В этом случае, как нетрудно заметить, для пары $(\mathcal{P}_1^x, A(x))$ выполнено условие предложения 12. Поэтому отображение Ξ_i в окрестности набора сдвигов Sh^0 является непрерывным и кусочно линейным. Утверждение 2) теоремы доказано.

Пусть набор пред-с-вееров развернут. Докажем, что отображение Ξ вблизи удобного набора Sh^0 линейно.

Одномерная компонента разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ является конечнозвенной ломаной линией. Ее вершины $x_1, \dots, x_N$ – нульмерные, а звенья – одномерные клетки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$. Как объяснено выше, вблизи удобного набора Sh^0 отображение Ξ отличается от линейного отображением $\Xi_1 + \dots + \Xi_N$, где кусочно линейное отображение Ξ_i отвечает вершине x_i ломаной. Из предложения 12 следует, что нелинейность отображения Ξ_i представляется в виде суммы линейных отображений, соответствующих содержащим вершину x_i отрезкам ломаной $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$. Причина погашения нелинейностей при суммировании отображений Ξ_i состоит в том, что сумма вкладов отрезка ломаной $[x_i, x_j]$ в нелинейности отображений Ξ_i и Ξ_j равна нулю. Таким образом, если все одномерные клетки разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ ограничены (для развернутого набора это утверждение леммы 9), то отображение $\mathcal{X}$ локально линейно.

По определению удобного набора сдвигов, для любой вершины $x = x_i$ ломаной существует $j(x)$ такое, что

- (i) $\dim P_{j(x)}^x = \dim \mathcal{P}_{j(x)} - 1$;
- (ii) при $i \neq j(x)$ размерность конуса P_i^x в веере $\mathcal{P}_i$ максимальна;
- (iii) $\bigcap_{i \neq j(x)} (\text{sh}_i + P_i^x)$ в окрестности точки x совпадает со сдвигом $(n - \dim \mathcal{P}_{j(x)})$ -мерного (снабженного кратностью) пространства $A(x)$.

Для пары $(\dim P_{j(x)}^x, A(x))$ выполнены условия предложения 12. Таким образом, мы получаем формулу для нелинейности отображения Ξ_i .

Для отрезка $[x, y]$ одномерной компоненты разбиения $\mathcal{X}(\text{Sh}^0)$ положим $p = j(x)$, $q = j(y)$.

В случае $p = q$ утверждение о взаимном сокращении вкладов отрезка $[x, y]$ в нелинейности отображений, соответствующих вершинам x и y , вытекает непосредственно из следствия 3.

При $p \neq q$ утверждение о взаимном сокращении вкладов вытекает из следствия 4 при следующем наборе данных (детали вывода мы не приводим):

- (i) $P_1 = P_p^x$, $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_p^x$;
- (ii) $P_2 = P_q^y$, $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_q^y$;
- (iii) $A = \bigcap_{0 < i \leq k, i \neq p, i \neq q} S_i$, где S_i – оснащенное пространство, порожденное конусом P_i^x .

Вывод теоремы 5 – повторение приведенного доказательства теоремы 4 с использованием следующего словаря замен:

- набор сдвигов $\text{Sh} \implies$ набор элементов тора $\bar{\tau}$;
- кусочно линейное отображение $\Xi(\text{Sh}) \implies$ кусочно постоянное отображение $W(\bar{\tau})$;
- ссылка на предложение 4 $\implies$ ссылка на предложение 3;
- ссылка на предложение 12 $\implies$ ссылка на предложение 13;
- ссылка на следствие 3, 1) $\implies$ ссылка на следствие 3, 2);
- ссылка на следствие 4, 1) $\implies$ ссылка на следствие 4, 2).

§ 6. Пересечения тропических многообразий

Здесь объясняется, как приведенные выше результаты переформулируются при переходе от с-вееров и w-вееров к соответственно тропическим и комплексным тропическим многообразиям. Такие переформулировки представляют собой теорию пересечений тропических многообразий и мультипликативную теорию пересечений комплексных тропических многообразий. Язык тропических

многообразий, в частности, удобен тем, что используемое в определении произведения с-вееров пересечение $\mathcal{P} \cap (e + \mathcal{Q})$ не является с-веером, но является тропическим многообразием.

6.1. Тропические многообразия. Иногда тропическими многообразиями называют конечные объединения пересечений тропических гиперповерхностей. Такое определение не согласуется с определением тропических кривых [14]. Рассматриваемые ниже тропические многообразия – это (см. ниже утверждение 3) объединения *устойчивых пересечений* тропических гиперповерхностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\mathcal{T}$ – конечное множество выпуклых многогранников, открытых в порождаемых ими аффинных подпространствах пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$ (многогранники не предполагаются ограниченными). Множество $\mathcal{T}$ называют *равноразмерным d -мерным тропическим предмногообразием*, а многогранники – его *клетками*, если:

- 1) размерности многогранников не превосходят d ;
- 2) порожденное многогранником аффинное подпространство – сдвиг рационального подпространства пространства $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$;
- 3) с каждым многогранником множество $\mathcal{T}$ содержит каждую его грань;
- 4) замыкания любых двух многогранников множества пересекаются по общей (возможно, *пустой*) грани;
- 5) каждый многогранник – грань некоторого d -мерного многогранника множества $\mathcal{T}$;
- 6) каждый d -мерный многогранник снабжен целочисленной кратностью;
- 7) для набора таких кратностей выполнены аддитивные соотношения (см. ниже).

Формулировка аддитивных соотношений для тропических предмногообразий получится, если в формулировке аддитивных соотношений из п. 2.1 слово “конус” заменить словом “многогранник”; d -мерный пред-с-веер является равноразмерным d -мерным тропическим предмногообразием.

Условие 5) определения 9 является аналогом свойства равноразмерности алгебраического многообразия и называется *условием однородности*.

Носитель тропического предмногообразия – замыкание объединения снабженных *ненулевыми* кратностями d -мерных клеток.

Два тропических предмногообразия с общим носителем назовем *эквивалентными*, если кратности пересекающихся клеток старшей размерности равны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. *Равноразмерное d -мерное тропическое многообразие* – это класс эквивалентности тропических предмногообразий. *Тропическое многообразие* – это формальная сумма равноразмерных тропических многообразий разных размерностей.

Эквивалентные предмногообразия можно представлять как разные полиэдральные разбиения тропического многообразия. Нульмерные тропические многообразия – конечные множества снабженных кратностями точек. Полноразмерное тропическое многообразие можно представлять как целочисленную кратность, приписанную пространству $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$. Тропическую гиперповерхность можно рассматривать как *угловое множество* (corner locus) кусочно линейной функции на пространстве $\operatorname{Re} \mathfrak{Z}$ [14]. Эти кусочно линейные функции – рациональные функции, а выпуклые кусочно линейные функции – многочлены

“тропической математики”. В дальнейшем мы будем множество многогранников, удовлетворяющее условиям 1)–5) определения 9, называть d -мерным полиэдральным разбиением или d -мерным полиэдральным разбиением с кратностями, если выполнено условие 6).

Пусть δ – точка одной из клеток d -мерного полиэдрального разбиения $\mathcal{T}$ с кратностями. Сдвинем $\mathcal{T}$, поместив точку δ в нуль. Тогда в окрестности нуля полиэдральное разбиение $\mathcal{T}$ совпадает с веером конусов, d -мерные конусы которого снабжены наследуемыми от d -мерных клеток $\mathcal{T}$ кратностями. Из аддитивных соотношений для $\mathcal{T}$ вытекают аддитивные соотношения для этих кратностей. Будем называть такой веер δ -веером или δ -локализацией разбиения $\mathcal{T}$. δ -веер является веером типа d -мерная книга, если δ – точка $(d-1)$ -мерной клетки.

Следующее утверждение является переформулировкой утверждения 1) предложения 6 для тропических многообразий. Доказательство при этом не меняется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 20. Для d -мерного полиэдрального разбиения с кратностями аддитивные соотношения выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены для всех δ -вееров типа d -мерная книга.

Пусть $\mathcal{T}$ – d -мерное полиэдральное разбиение. Рассмотрим семейство полиэдральных разбиений $g_t\mathcal{T}$, где $0 < t \in \mathbb{R}$, а $g_t: e \mapsto e/t$ – отображение пространства $\text{Re } \mathbb{Z}$ на себя. Обозначим через $\mathcal{T}^\infty$ множество предельных точек семейства полиэдральных разбиений $g_t\mathcal{T}$ при $t \rightarrow \infty$.

При $0 \neq \tau \in \mathcal{T}^\infty$ обозначим через $\bar{\Delta}(\tau)$ набор всех клеток $\Delta_1, \dots, \Delta_N$ разбиения $\mathcal{T}$ таких, что для любого i , $1 \leq i \leq N$, точка τ является предельной точкой семейства $g_t\Delta_i$ при $t \rightarrow \infty$. Точки $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}^\infty$ назовем эквивалентными, если $\bar{\Delta}(\tau_1) = \bar{\Delta}(\tau_2)$. Приведем (без доказательства) несколько простых свойств такого отношения эквивалентности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 21. 1) Если $\mathcal{T}^\infty \neq 0$, то классы эквивалентности являются конусами и задают на множестве $\mathcal{T}^\infty$ структуру однородного d -мерного веера конусов.

2) Размерность содержащего точку τ конуса равна минимальной размерности клеток набора $\bar{\Delta}(\tau)$.

3) Пусть $\mathcal{T}$ – тропическое предмногообразие. Определим кратность содержащего точку τ d -мерного конуса веера $\mathcal{T}^\infty$ как сумму кратностей клеток набора $\bar{\Delta}(\tau)$. Тогда для веера $\mathcal{T}^\infty$ с кратностями выполнены аддитивные соотношения, т. е. $\mathcal{T}^\infty$ является пред-с-веером.

4) Если тропические предмногообразия $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ эквивалентны, то пред-с-вееры $\mathcal{T}_1^\infty$ и $\mathcal{T}_2^\infty$ также эквивалентны.

Таким образом, тропическому (пред)многообразию $\mathcal{T}$ сопоставлен (пред)-с-веер $\mathcal{T}^\infty$, который мы называем степенью тропического (пред)многообразия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Набор тропических (пред)многообразий называется развернутым, если развернут набор их степеней.

Полиному Лорана f на торе $\mathbb{T}$ можно сопоставить [13] его “тропическую гиперповерхность” $\mathcal{T}_f$. При этом $\mathcal{T}_f^\infty = \Sigma_\Gamma$, где Γ – многогранник Ньютона полинома f , а с-веер Σ_Γ определен в примере 1.

Пусть $f(z)$ – полином Лорана, т. е. функция вида $\sum_{\chi \in M} c_\chi \chi(z)$, где M – конечное множество характеров тора $\mathbb{T}$, а $c_\chi \in \mathbb{C}$. Напомним определение тропической гиперповерхности (называемой еще угловым множеством) кусочно

линейной функции $\varphi(x) = \max_{\mu \in M} (c_\mu + \mu(x))$, где M – конечное подмножество целочисленной решетки пространства $(\operatorname{Re} \mathfrak{S})^*$, а $c_\mu \in \mathbb{R}$. Тропическая гиперповерхность $\mathcal{T}_f$ полинома f – это угловое множество кусочно линейной функции $f_{\text{трор}}(x) = \max_{\chi \in M} (\log |c_\chi| + \chi(x))$, где характеры рассматриваются как элементы пространства $(\operatorname{Re} \mathfrak{S})^*$.

При $e \in \operatorname{Re} \mathfrak{S}$ положим

$$M_e = \{\mu \in M : c_\mu + \mu(e) \geq c_\chi + \chi(e) \forall \chi \in M\}.$$

Если множество M_e содержит более одного элемента, то ему соответствует клетка $\{x \in \operatorname{Re} \mathfrak{S} : M_x = M_e\}$ гиперповерхности $\mathcal{T}_f$ (это определение клеток).

Если e – точка клетки Δ , то для множества M_e ниже используется обозначение M_Δ . Если $\dim M_\Delta$ – размерность порожденного множеством M_Δ аффинного подпространства пространства $(\operatorname{Re} \mathfrak{S})^*$, то $\dim \Delta = n - \dim M_\Delta$, а выпуклую оболочку множества M_Δ мы называем *двойственным клетке многогранником*.

Можно определить структуру тропической гиперповерхности на угловом множестве *любой кусочно линейной функции*. Кратности клеток углового множества назначаются следующим образом. Пусть Δ – $(n - 1)$ -мерная клетка углового множества функции g . Локально клетка Δ делит пространство $\operatorname{Re} \mathfrak{S}$ на полупространства Δ^+ и Δ^- . Тогда функция g вблизи клетки Δ совпадает с $\alpha^+ + \langle \delta^+, x \rangle$ и с $\alpha^- + \langle \delta^-, x \rangle$ на полупространствах Δ^+ и Δ^- соответственно. Кратность клетки – длина вектора $\delta^+ - \delta^-$ сопряженного пространства, снабженная знаком $+/-$, если функционал $\delta^+ - \delta^-$ положителен/отрицателен на полупространстве Δ^+ . Обычно в тропической математике рассматриваются функционалы с целочисленными коэффициентами, в этом случае длина измеряется при помощи сопряженной целочисленной решетки. В евклидовом случае (см. ниже) берется евклидова длина вектора.

Нетрудно проверить, что положительность всех кратностей эквивалентна выпуклости функции g .

Отметим, что (поскольку кратности не предполагаются положительными) тропическое многообразие может быть компактным. Компактные тропические многообразия имеют нулевую степень. На рис. 4 изображена компактная тропическая кривая на плоскости. Она является угловым множеством кусочно линейной функции f , значения которой показаны на этом рисунке. Стороны квадрата (см. рис. 4) имеют единичные кратности, а кратности диагоналей квадрата равны -1 .

Рис. 4

Практически все приведенные выше результаты о c -веерах остаются верными при замене c -вееров на произвольные тропические многообразия. Для их вывода следует применять соответствующие результаты о c -веерах ко всем локализациям тропического многообразия. Перечислим (без вывода) некоторые из таких результатов.

1. Определена операция сложения тропических многообразий. Объединение клеток двух тропических предмногообразий разбивается на клетки, и эти клетки снабжаются кратностями так же, как в случае c -вееров (см. п. 2.3).

2. Определена операция умножения тропических многообразий. *Произведение тропических многообразий* – это устойчивое пересечение носителей многообразий, разбитое на клетки, снабженные кратностями так же, как в случае c -вееров (см. пп. 4.1, 4.2). Любой δ -веер произведения – произведение δ -вееров сомножителей.

3. Операции из пп. 1, 2 задают на множестве тропических многообразий структуру коммутативного градуированного кольца (степень тропического многообразия $\mathcal{T}$ в этом кольце равна $n - \dim \mathcal{T}$).

4. Кольцо c -вееров является подкольцом кольца тропических многообразий.

5. Сопоставление тропическому многообразию его степени – гомоморфизм градуированных колец.

6. Может быть определено (см. замечание 7) кольцо тропических многообразий в вещественном векторном пространстве E , снабженном евклидовой метрикой (а также в абстрактном вещественном векторном пространстве). В евклидовом случае кратности клеток – вещественные числа.

7. Из следующего утверждения вытекает, что любое тропическое многообразие является конечным объединением устойчивых пересечений тропических гиперповерхностей.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Кольцо евклидовых тропических многообразий изоморфно кольцу дифференциальных форм с обобщенными коэффициентами (т.е. потоков) на пространстве $E \oplus \sqrt{-1}E$, порожденному конечными линейными комбинациями мономов вида*

$$dd^c H_1(x + e_1) \wedge \cdots \wedge dd^c H_k(x + e_k),$$

где H_i – опорные функции выпуклых многогранников в пространстве E^* , продолженные до функций на $E + \sqrt{-1}E$ тождественно по мнимым частям (т.е. как $h(x + \sqrt{-1}y) = h(x)$), а e_i – элементы пространства E . Носитель тропического многообразия, соответствующего дифференциальной форме, совпадает с носителем соответствующего потока.

Приведем “тропический вариант” теоремы 4.

Пусть $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ – набор тропических предмногообразий суммарной коразмерности, не превосходящей n . Набор точек $\text{Sh} = (\text{sh}_1, \dots, \text{sh}_k)$ пространства $\text{Re } \mathbb{Z}$ назовем *допустимым набором сдвигов*, если для любого набора клеток $\Delta_1 \in \mathcal{T}_1, \dots, \Delta_k \in \mathcal{T}_k$ сдвинутые клетки $\text{sh}_1 + \Delta_1, \dots, \text{sh}_k + \Delta_k$ пересекаются трансверсально.

Для допустимого набора сдвигов $\text{Sh} = (\text{sh}_1, \dots, \text{sh}_k)$ и любых клеток $\Delta_i \in \mathcal{T}_i$ пересечение сдвинутых клеток $(\text{sh}_1 + \Delta_1) \cap \cdots \cap (\text{sh}_k + \Delta_k)$ является выпуклым многогранником. Множество подобных многогранников удовлетворяет условиям 1)–5) определения 9 тропического предмногообразия. Ниже мы припишем многогранникам старшей размерности этого множества кратности и покажем,

что аддитивные соотношения выполнены. Таким образом, для допустимого набора сдвигов определено пересечение тропических предмногообразий, которое будем называть их *Sh-произведением*.

Пусть $\Delta = (\text{sh}_1 + \Delta_1) \cap \dots \cap (\text{sh}_k + \Delta_k)$, где Δ_i – клетка старшей размерности многообразия $\mathcal{T}_i$. Обозначим через S_i рациональное подпространство $\text{Re } \mathfrak{Z}$, порожденное сдвинутой в точку нуль клеткой Δ_i и снабженное наследуемой от этой клетки целочисленной кратностью. Рассмотрим произведение с-вееров $S = S_1 \cdots S_k$. Такой с-веер состоит из единственного конуса $S_1 \cap \dots \cap S_k$, снабженного кратностью, которую обозначим через $m(S)$. Припишем клетке Δ кратность $m(S)$.

Аддитивные соотношения проверяются следующим образом. Пусть размерность клетки Δ пересечения $(\text{sh}_1 + \mathcal{T}_1) \cap \dots \cap (\text{sh}_k + \mathcal{T}_k)$ равна $n - 1 - \sum_{i=1}^k \text{codim } \mathcal{T}_i$ и $\varphi \in \Delta$; φ -локализации тропических предмногообразий $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ являются с-веерами. Из определения допустимости набора Sh следует, что один из этих с-вееров (обозначим его через $\mathcal{K}$) является с-веером типа книга, а остальные (обозначим их $S_1, \dots, S_{k-1}$) – “подпространствами с кратностями”. Необходимо проверить, что для пересечения таких вееров (это пересечение также является веером типа книга) выполняются аддитивные соотношения для назначенных выше кратностей. Но по описанному выше правилу эти кратности назначаются так же, как кратности для произведения двух с-вееров: $\mathcal{K}$ и с-веера, состоящего из подпространства $S_1 \cap \dots \cap S_{k-1}$ с соответствующей кратностью. Аддитивные соотношения доказаны.

Нетрудно проверить, что если тропические предмногообразия $\mathcal{T}_i$ и $\mathcal{S}_i$ эквивалентны, а набор сдвигов допустим также для набора предмногообразий $\{\mathcal{S}_i\}$, то соответствующие Sh-произведения также являются эквивалентными тропическими предмногообразиями. Таким образом, мы получаем Sh-произведение тропических многообразий.

ЗАМЕЧАНИЕ 17. Говоря неформально, произведение тропических многообразий $\mathcal{T}_i$ – это (так же, как в случае с-вееров) предел их Sh-произведения при $\text{Sh} \rightarrow 0$.

Пусть $\mathcal{T}_{1 \leq i \leq k}$ – набор тропических многообразий суммарной коразмерности n . Каждому допустимому набору сдвигов Sh сопоставим Sh-произведение этих тропических многообразий. Такое произведение является нульмерным тропическим многообразием, или, иначе, конечным множеством точек $\mathcal{X}(\text{Sh})$, снабженных целочисленными массами. Рассмотрим отображение множества всех допустимых наборов сдвигов в пространство $\text{Re } \mathfrak{Z}$:

$$\Xi_{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k} : \text{Sh} \mapsto \sum_{x \in \mathcal{X}(\text{Sh})} m(x)x,$$

где $m(x)$ – кратность (или, иначе, масса) точки x . Следующее утверждение является прямым обобщением теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. 1) *Отображение $\text{Sh} \rightarrow \mathcal{X}(\text{Sh})$ продолжается до непрерывного отображения, сопоставляющего любому элементу Sh пространства $\oplus^k(\text{Re } \mathfrak{Z})$ конечное множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ материальных точек пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$.*

2) *Масса множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ не зависит от набора сдвигов Sh.*

3) *Если $\mathcal{T}_i = \Sigma_{\Gamma_i}$, то масса множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ равна смешанному объему многогранников $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$.*

4) *При замене многообразий $\mathcal{T}_i$ на их степени $\mathcal{T}_i^\infty$ масса множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ остается прежней.*

5) *Отображение $\Xi_{T_1, \dots, T_k} : \oplus^k (\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$ непрерывно продолжается до аффинного кусочно линейного отображения, т.е. до отображения вида $W_{T_1, \dots, T_k} + \Xi_{T_1, \dots, T_k}^l$, где $W_{T_1, \dots, T_k} \in \text{Re } \mathfrak{Z}$ (здесь $W_{T_1, \dots, T_k}$ – сумма точек пересечения исходных тропических многообразий), а $\Xi_{T_1, \dots, T_k}^l : \oplus^k (\text{Re } \mathfrak{Z}) \rightarrow \text{Re } \mathfrak{Z}$ – непрерывное кусочно линейное отображение. Отображение $\Xi_{T_1, \dots, T_k}^l$ переводит целочисленную решетку пространства $\oplus^k (\text{Re } \mathfrak{Z})$ в целочисленную решетку пространства $\text{Re } \mathfrak{Z}$.*

6) Пусть $T_{1 \leq i \leq k}^\infty$ – степени многообразий $T_{1 \leq i \leq k}$. Тогда

$$W_{T_1^\infty, \dots, T_k^\infty} = 0, \quad \Xi_{T_1^\infty, \dots, T_k^\infty}^l = \Xi_{T_1^\infty, \dots, T_k^\infty}.$$

7) Если набор многообразий $\{T_i\}$ развернут, то отображение $\Xi_{T_1, \dots, T_k}^l$ – линейный оператор.

ЗАМЕЧАНИЕ 18. Теорема 6 верна также для евклидовых тропических предмногообразий. В евклидовом случае утверждение 2) теоремы 6 не вытекает из утверждения 1).

СЛЕДСТВИЕ 8. Если $T_{1 \leq i \leq n}$ – тропические гиперповерхности полиномов Лорана, то масса множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ равна смешанному объему многогранников Ньютона этих полиномов. Если, кроме того, эти полиномы образуют развернутую систему уравнений, то элемент $W_{T_1, \dots, T_k}$ (из утверждения 5) теоремы 6) равен вещественной части суммы логарифмов корней системы этих уравнений и может быть вычислен по формуле Хованского.

ПРИМЕР 7. Пусть $f_{\text{тр}}(x) = \max_{0 \leq i \leq k, d_0 \leq \dots \leq d_k} (\alpha_i + d_i x)$ – тропический полином одной переменной x . Положим $m(u) = d_b - d_a$, где слева и справа от своей угловой точки u функция $f_{\text{тр}}$ равна соответственно $\alpha_a + d_a x$ и $\alpha_b + d_b x$. Тогда $\sum_u m(u) = d_k - d_0$, а $\sum_u m(u)u = \alpha_0 - \alpha_k$. Если $f = \sum c_i x^{d_i}$, где $\log |c_i| = \alpha_i$, то $d_k - d_0$ и $\log |c_0| - \log |c_k|$ – это соответственно количество корней и логарифм модуля произведения корней полинома Лорана f .

Доказательство утверждений 1) и 2) теоремы 6 – практически дословное повторение доказательства аналогичных утверждений о с-веерах [2]. Утверждение 3) – следствие формулы Бернштейна (оно доказано в [2]). Утверждение 4) можно получить, рассматривая такой набор сдвигов Sh , что множество $\mathcal{X}(\text{Sh})$ состоит из точек пересечения некомпактных клеток многообразий (достаточно, чтобы разности любых двух сдвигов набора были велики).

Наличие компактных клеток многообразий не увеличивает рассмотренного в п. 2.5 списка ситуаций, возникающих при общем вырождении удобного набора сдвигов. Поэтому доказательство утверждений 5)–7) – практически дословное повторение доказательств аналогичных утверждений о с-веерах (см. п. 5.2).

6.2. Комплексные тропические многообразия. Здесь предполагается, что кратности клеток тропических предмногообразий *положительны*.

Пусть Δ – d -мерная клетка d -мерного тропического предмногообразия $\mathcal{T}$. Через T_Δ обозначим подтор тора $\mathbb{T}$, порожденный экспонентами разностей принадлежащих Δ точек, и через τ_Δ – максимальный компактный подтор тора T_Δ .

Будем говорить, что задана *реализация тропического предмногообразия $\mathcal{T}$* , если каждой его d -мерной клетке сопоставлено m_Δ элементов $\delta_1, \dots, \delta_{m_\Delta}$ фактотора τ/τ_Δ , называемых *сдвигами клетки*, где m_Δ – кратность клетки Δ ,

а τ – максимальный компактный подтор тора $\mathbb{T}$. Положим $\omega_\Delta \in \tau/\tau_\Delta$ равным произведению элементов δ_i . Будем называть ω_Δ *сдвиговой кратностью клетки Δ* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. 1) Реализация $\mathcal{R}$ d -мерного тропического предмногообразия $\mathcal{T}$ называется *комплексным тропическим предмногообразием*, если для сдвиговых кратностей клеток выполнены (см. ниже) мультипликативные соотношения.

2) Реализации эквивалентных тропических предмногообразий $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ эквивалентны, если любым двум пересекающимся d -мерным клеткам $\Delta_1 \in \mathcal{T}_1, \Delta_2 \in \mathcal{T}_2$ сопоставлены одинаковые наборы элементов $\delta_1, \dots, \delta_m$ фактортора τ/τ_{Δ_1} (для эквивалентных тропических предмногообразий $m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2}$ и $\tau_{\Delta_1} = \tau_{\Delta_2}$).

3) *Комплексное тропическое многообразие* – класс эквивалентных комплексных тропических предмногообразий.

Пусть Λ – клетка тропического предмногообразия $\mathcal{T}$ с реализацией $\mathcal{R}$ и $\lambda \in \Lambda$. Снабдим λ -веер $\mathcal{T}^\lambda$ сдвиговыми кратностями, наследуемыми от d -мерных клеток предмногообразия $\mathcal{T}$. Будем говорить, что для реализации $\mathcal{R}$ выполнены мультипликативные соотношения, если мультипликативные соотношения выполнены для любого λ -веера $\mathcal{T}^\lambda$, рассматриваемого как пред-с-веер со сдвиговыми кратностями.

Следующее утверждение – следствие предложения 6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 22. *Мультипликативные соотношения для реализации $\mathcal{R}$ выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены для всех δ -вееров вида d -мерная книга.*

Сумма d -мерных комплексных тропических многообразий $\mathcal{T}_c^1 + \mathcal{T}_c^2$ – это реализация тропического многообразия $\mathcal{T}^1 + \mathcal{T}^2$, в которой каждая d -мерная клетка Δ снабжена набором сдвигов, состоящих из объединения наборов сдвигов содержащих Δ клеток многообразий $\mathcal{T}^1, \mathcal{T}^2$.

На множестве комплексных тропических многообразий определено действие тора. Элемент $t \in \mathbb{T}$ сдвигает клетки многообразия на вектор $\log |t|$ и умножает сдвиги клеток на $t/|t|$. Действие тора сохраняет операцию сложения.

Пусть комплексное тропическое предмногообразие $\mathcal{T}_c$ является реализацией d -мерного тропического предмногообразия $\mathcal{T}$ степени $\mathcal{T}^\infty$. Определим w -веер $\mathcal{T}_c^\infty$, называемый *степенью комплексного тропического предмногообразия $\mathcal{T}_c$* , сопоставляя d -мерным конусам пред-с-веера $\mathcal{T}^\infty$ сдвиговые кратности по следующим правилам.

Пусть y – точка d -мерного конуса $K \in \mathcal{T}^\infty$. Рассмотрим набор $\bar{\Delta}(y) = (\Delta_1, \dots, \Delta_N)$ некомпактных d -мерных клеток предмногообразия $\mathcal{T}$, сопоставленный точке y (этот набор клеток определен в начале п. 6.1 при построении кратностей конусов веера $\mathcal{T}^\infty$, все эти клетки расположены на d -мерных плоскостях, параллельных конусу K). Выберем точки $\delta_i \in \Delta_i$ и положим

$$\omega(K) = \prod_{1 \leq i \leq N} \omega_i \exp(m_i \delta_i),$$

где m_i и ω_i – соответственно кратность и сдвиговая кратность клетки Δ_i . Напомним (см. п. 2.1), что мы рассматриваем $\omega(K)$ как элемент фактортора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_K$. Этот элемент не зависит от выбора точек δ_i . Сопоставляя определения мультипликативных соотношений для w -веера и аддитивных соотношений

для тропического предмногообразия с определением степени T_c^∞ комплексного тропического многообразия, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23. *Степень комплексного тропического предмногообразия является пред-w-веером.*

Степени эквивалентных предмногообразий – эквивалентные пред-w-вееры. Таким образом, комплексному тропическому многообразию T_c сопоставлен w-веер T_c^∞ , который мы называем его степенью.

Пусть $f = \sum_{\chi \in M} c_\chi \chi(z)$ – полином Лорана и T – его тропическая гиперповерхность (см. п. 6.1). Сопоставив каждой $(n-1)$ -мерной клетке Δ гиперповерхности T набор сдвигов, мы определим *комплексную тропическую гиперповерхность T_c полинома Лорана*.

Двойственный клетке Δ многогранник M_Δ является отрезком длины m_Δ , концы которого принадлежат целочисленной решетке характеров. Обозначим концы отрезка через α и β . Множество решений уравнения $c_\alpha \alpha(z) + c_\beta \beta(z) = 0$ есть объединение m_Δ сдвигов подтора T_Δ . При любом $\delta \in \Delta$ эти сдвинутые торы можно представить в виде

$$\exp(\delta)\gamma_1 T_\Delta, \dots, \exp(\delta)\gamma_{m_\Delta} T_\Delta,$$

где $\gamma_i \in \tau$. Классы смежности $\gamma_1, \dots, \gamma_{m_\Delta}$ в факторторе τ/τ_Δ назовем сдвигами клетки Δ . Нетрудно проверить, что мультипликативные соотношения для T_c выполнены, т.е. T_c является комплексной тропической гиперповерхностью (как вытекает из предложения 6, проверка сводится к рассмотрению случая двух переменных). Степень T_c^∞ этой гиперповерхности равна определенному в примере 3 w-вееру W_f .

ПРИМЕР 8. *Комплексная тропическая прямая* есть комплексное тропическое многообразие полинома Лорана $a + bx + cy$. Соответствующая тропическая кривая (тропическая прямая) состоит из трех лучей с направляющими векторами $(0, -1)$, $(-1, 0)$ и $(1, 1)$, выходящими из точки $(\log|\frac{a}{b}|, \log|\frac{a}{c}|)$. Кратности лучей равны 1, а сдвиги – это вычеты элементов $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ компактного подтора тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^2$ по одномерным подторам $x = 1$, $y = 1$, $x = y$ соответственно.

Далее мы будем рассматривать комплексные тропические предмногообразия как подмножества тора T . Для d -мерной клетки Δ d -мерного тропического комплексного предмногообразия T_c положим

$$T(\Delta) = \bigcup_{\delta \in \Delta, 1 \leq i \leq m_\Delta} \exp(\delta)\delta_i \tau_\Delta,$$

где m_Δ – кратность, а $\delta_1, \dots, \delta_{m_\Delta}$ – сдвиги клетки Δ . Объединение замыканий множеств $T(\Delta)$ обозначим через $\mathcal{R}(T_c)$ и назовем *реализацией T_c* . Легко убедиться в том, что реализации эквивалентных предмногообразий одинаковы. Поэтому мы получаем определение *реализации комплексного тропического многообразия*.

Отождествим $(\operatorname{Re} \mathbb{Z}) \oplus \tau$ с тором $\mathbb{T}$ при помощи отображения $(\operatorname{Re} \mathbb{Z}) \oplus \tau \rightarrow \mathbb{T}$, действующего как $x \oplus t \mapsto t \exp(x)$. Удобно представлять $\mathcal{R}(T_c)$ как замыкание пространства расслоения над объединением d -мерных клеток. Слой над клеткой старшей размерности Δ – это объединение m_Δ сдвинутых компактных подторов $\delta_i \tau_\Delta$.

Нетрудно убедиться в том, что сложению комплексных тропических многообразий соответствует объединение их реализаций.

Пусть $\mathcal{T}^{1 \leq i \leq k}$ – тропические многообразия, $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$ – комплексные тропические многообразия, являющиеся реализациями многообразий $\mathcal{T}^{1 \leq i \leq k}$. Набор элементов $\bar{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ тора $\mathbb{T}$ назовем *допустимым набором сдвигов многообразий* $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$, если набор $\text{Sh} = (\text{Re log } \sigma_1, \dots, \text{Re log } \sigma_k)$ является допустимым набором сдвигов тропических многообразий $\mathcal{T}^{1 \leq i \leq k}$ (см. п. 6.1). Следующее утверждение является прямым следствием приведенных определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 24. Если $\bar{\sigma}$ – допустимый набор сдвигов многообразий $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$, то пересечение σ_i -сдвигов их реализаций $\bigcap_{1 \leq i \leq k} \sigma_i \mathcal{R}(\mathcal{T}_c^i)$ является реализацией некоторого комплексного тропического многообразия.

Такое многообразие мы называем σ -произведением многообразий $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$. Следующее очевидное предложение является аналогом формулы Бернштейна для комплексных тропических многообразий.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 25. Пусть сумма коразмерностей многообразий $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$ равна n (т.е. размерности тора $\mathbb{T}$). Тогда количество точек реализации σ -произведения этих многообразий равно массе множества $\mathcal{X}(\text{Sh})$ в обозначениях теоремы 6.

Приведем теперь “тропический вариант” теоремы 5. Предположим, что набор многообразий $\mathcal{T}^{1 \leq i \leq k}$ развернут (сумма коразмерностей по-прежнему равна n).

ТЕОРЕМА 7. Отображение, переводящее $\bar{\sigma}$ в произведение точек реализации σ -произведения комплексных тропических многообразий $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq k}$, продолжается до отображения $\oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$. Это продолжение является отображением вида $\bar{\tau} \mapsto W\Psi(\bar{\tau})$, где W – фиксированный элемент тора $\mathbb{T}$, а $\Psi: \oplus^k \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ – гомоморфизм торов, производная которого совпадает с отображением $\Xi_{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k}^l$ из утверждения 7) теоремы 6.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если $\mathcal{T}_c^{1 \leq i \leq n}$ – комплексные тропические гиперповерхности полиномов Лорана, то W равен произведению корней системы и может быть вычислен по формуле Хованского.

Доказательство теоремы 7 так же, как доказательство теоремы 5, полностью основано на аргументах, использованных в п. 5.2.

Список литературы

1. A. G. Khovanskii, “Newton polyhedra, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations”, *The Arnoldfest* (Toronto, Canada, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, 325–364.
2. Б. Я. Казарновский, “с-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67:3** (2003), 23–44; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “с-fans and Newton polyhedra of algebraic varieties”, *Izv. Math.*, **67:3** (2003), 439–460.
3. О. А. Гельфонд, А. Г. Хованский, “Toric geometry and Grothendieck residues”, *Mosc. Math. J.*, **2:1** (2002), 99–112.
4. О. А. Гельфонд, “Комбинаторные коэффициенты и смешанный объем многогранников”, *Функц. анализ и его прилож.*, **30:3** (1996), 77–79; англ. пер.: O. A. Gel'fond, “Combinatorial coefficients and the mixed volume of polytopes”, *Funct. Anal. Appl.*, **30:3** (1996), 207–208.

5. I. Soprounov, “Residues and tame symbols on toroidal varieties”, *Compos. Math.*, **140**:6 (2004), 1593–1613; [arXiv: math.AG/0203114](#).
6. I. Soprounov, “On combinatorial coefficients and the Gelfond–Khovanskii residue formula”, *Topics in algebraic geometry and geometric modeling* (Vilnius, Lithuania, 2002), *Contemp. Math.*, **334**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, 343–349; [arXiv: math.AG/0310168](#).
7. А. Г. Хованский, “Многоугольники Ньютона, кривые на торических поверхностях и обращение теоремы Вейля”, *УМН*, **52**:6 (1997), 113–143; англ. пер.: A. G. Khovanskii, “Newton polygons, curves on torus surfaces, and the converse Weil theorem”, *Russian Math. Surveys*, **52**:6 (1997), 1251–1279.
8. C. De Concini, C. Procesi, “Complete symmetric varieties. II: Intersection theory”, *Algebraic groups and related topics* (Kyoto, Nagoya, 1983), *Adv. Stud. Pure Math.*, **6**, North-Holland, Amsterdam, 1985, 481–513.
9. C. De Concini, “Equivariant embeddings of homogeneous spaces”, *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Berkeley, USA, 1986), **1**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 369–377.
10. G. M. Bergman, “The logarithmic limit-set of an algebraic variety”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **157** (1971), 459–469.
11. W. Fulton, B. Sturmfels, “Intersection theory on toric varieties”, *Topology*, **36**:2 (1997), 335–353; [arXiv: alg-geom/9403002](#).
12. Д. Н. Бернштейн, “Число корней системы уравнений”, *Функц. анализ и его прилож.*, **9**:3 (1975), 1–4; англ. пер.: D. N. Bernshtein, “The number of roots of a system of equations”, *Funct. Anal. Appl.*, **9**:3 (1975), 183–185.
13. J. Richter-Gebert, B. Sturmfels, T. Theobald, “First steps in tropical geometry”, *Idempotent mathematics and mathematical physics* (Vienna, Austria, 2003), *Contemp. Math.*, **337**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005, 289–317; [arXiv: math.AG/0306366](#).
14. G. Mikhalkin, “Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry”, *Different faces of geometry*, *Int. Math. Ser. (N. Y.)*, **3**, Kluwer, Plenum, New York, 2004, 257–300; [arXiv: math.AG/0403015](#).
15. В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.
16. Б. Я. Казарновский, “Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:3 (1999), 119–132; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “Truncation of systems of polynomial equations, ideals and varieties”, *Izv. Math.*, **63**:3 (1999), 535–547; Б. Я. Казарновский, “Письмо в редакцию”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **64**:1 (2000), 224; англ. пер.: B. Ya. Kazarnovskii, “Letter to the editors”, *Izv. Math.*, **64**:1 (2000), 221.

Б. Я. КАЗАРНОВСКИЙ (В. YA. KAZARNOVSKII)
 НТЦ “Информрегистр”
 E-mail: kabori@rambler.ru

Поступило в редакцию
 05.08.2004