Общероссийский математический портал

В. И. Седенко, Классическая разрешимость начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 157–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/im90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:04:09

УДК 517.944

В. И. Седенко

Классическая разрешимость начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек

Доказываются теоремы о глобальной по времени априорной оценке решений, о классической разрешимости и о гладкости решений системы уравнений Маргерра–Власова без учета инерции продольных перемещений с краевыми условиями жесткого защемления края оболочки.

Библиография: 8 наименований.

Результаты о разрешимости в целом по времени рассматриваемой начально-краевой задачи до настоящей работы касались лишь обобщенных решений. В 1957 г. И. И. Ворович в [1] доказал существование обобщенных решений. А недавно в [2], [3] была доказана единственность обобщенных решений.

Среди результатов настоящей работы базовым фактом является наличие априорной оценки. Выводу априорной оценки посвящены § 2–8. Предлагается схема исследования, позволяющая в итоге вывести нелинейное дифференциальное неравенство, интегрирование которого и дает центральную априорную оценку. Суть схемы состоит в оценке получающихся нелинейных величин как с помощью растущих, так и с помощью убывающих по некоторому параметру слагаемых. Подходящий выбор параметра позволяет осуществить интегрирование дифференциального неравенства. По существу речь идет о преодолении трудностей, связанных с отсутствием вложения $H_2^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$ в двумерном случае. В техническом плане следует отметить использование операторов сглаживания в непривычной ситуации. Теорема 2 при наличии априорной оценки доказывается, по существу, автоматически (см. § 9). Что касается теоремы 3, то для ее доказательства также приходится получать оценку. Этот процесс не столь сложен, поскольку мы уже обладаем достаточно сильными оценками (1.18)–(1.20). Укажем также, что частным случаем полученного результата являются теоремы классической разрешимости и гладкости решений начально-краевой задачи для уравнений колебаний пластины, существование обобщенных решений которой было доказано в [4].

§ 1. Начально-краевая задача. Формулировки результатов

Предположим, что оболочка проектируется на плоскую ограниченную область Ω с границей Γ . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \rho h w_{tt} + \mathcal{D} \nabla^4 w = Z + (N_1 w_{x_1})_{x_1} + (N_{12} w_{x_1})_{x_2} \\ + (N_2 w_{x_2})_{x_2} + (N_{12} w_{x_2})_{x_1} - N_1 k_1 - N_2 k_2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1), \quad N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\varepsilon_{12}, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_1 = u_{x_1} + k_1 w + \frac{1}{2}w_{x_1}^2, \quad \varepsilon_2 = v_{x_2} + k_2 w + \frac{1}{2}w_{x_2}^2, \\ \varepsilon_{12} = u_{x_2} + v_{x_1} + w_{x_1}w_{x_2}, \quad (1.3)$$

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_1} = -\frac{2}{1-\mu}[(k_1 w)_{x_1} + w_{x_1}w_{x_1x_1} + \mu(k_2 w)_{x_1} + \mu w_{x_1}w_{x_1x_2}] \\ - w_{x_2}w_{x_1x_2} - w_{x_1}w_{x_2x_2} - X, \quad (1.4)$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu}\theta_{x_2} = -\frac{2}{1-\mu}[(k_2 w)_{x_2} + w_{x_2}w_{x_2x_2} + \mu(k_1 w)_{x_2} + \mu w_{x_1}w_{x_1x_2}] \\ - w_{x_1}w_{x_1x_2} - w_{x_2}w_{x_1x_2} - Y, \quad (1.5)$$

где $\theta = u_{x_1} + v_{x_2}$, с краевыми условиями

$$w|_{\Gamma} = \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad (1.6)$$

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0 \quad (1.7)$$

и начальными условиями

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$w_t(x, 0) = w_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.9)$$

В уравнениях (1.1)–(1.9) u, v – продольные перемещения, w – поперечное перемещение точек срединной поверхности, $\mathcal{D}$ – изгибная жесткость оболочки, E, μ – упругие постоянные, h – высота оболочки, N_1, N_2, N_{12} – продольные усилия в оболочке, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ – характеристики деформации срединной поверхности оболочки, k_1, k_2 – кривизны оболочки, которые считаем непрерывно дифференцируемыми в Ω , X, Y, Z – составляющие внешних сил, действующих на оболочку.

Предполагается, что далее массовая плотность и линейные размеры измеряются в таких единицах, что имеют место соотношения

$$\rho h = 1, \quad \frac{2\rho}{E}(1+\mu) = 1,$$

где ρ – массовая плотность оболочки.

Относительно начально-краевой задачи (1.1)–(1.9) см. [1, с. 759–761].

Мы будем искать решения w, u, v начально-краевой задачи (1.1)–(1.9) на отрезке времени $[0, t_f]$, где t_f – конечная, но никакими условиями не ограниченная величина.

Через $H_p^l(\Omega)$, $l = 0, 1, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим банахово пространство функций на Ω , являющееся пополнением множества бесконечно дифференцируемых на Ω функций по следующей норме:

$$\|u\|_{H_p^l(\Omega)} = \sum_{|r| \leq l} \|D^r u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $r = (r_1, r_2)$, $|r| = r_1 + r_2$, $D^r u$ — частная производная функции u порядка r . Далее, через $\mathring{H}_p^l(\Omega)$, $l = 0, 1, \dots$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначим банахово пространство функций на Ω , являющееся пополнением множества бесконечно дифференцируемых финитных на Ω функций по следующей норме:

$$\|u\|_{\mathring{H}_p^l(\Omega)} = \sum_{|r| = l} \|D^r u\|_{L_p(\Omega)}.$$

Далее нам придется получать сильные априорные оценки решений (1.1)–(1.9). При этом, разумеется, мы будем использовать уже известные оценки решений этой задачи. Мы приведем здесь основные из них с тем, чтобы удобнее было на них ссылаться. Дело в том, что решения (1.1)–(1.9) удовлетворяют энергетическому соотношению, в силу которого функционал Φ потенциальной энергии изгиба и растяжения оболочки существенно ограничен на отрезке времени $[0, t_f]$ в случае, когда $w_0 \in \mathring{H}_2^2(\Omega)$, $w_1 \in L_2(\Omega)$, $X, Y, Z \in L_2(\Omega \times [0, t_f])$.

Здесь

$$\Phi = \frac{1}{2} \|w\|_{\mathring{H}_2^2(\Omega)}^2 + \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_{\Omega} \left[\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(1-\mu)\varepsilon_{12}^2 \right] dx.$$

Таким образом, имеем

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \Phi(t) \leq B_1 \quad (1.10)$$

(см. [1, (1.36)]). Из (1.10) следует оценка

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \|w(x, t)\|_{\mathring{H}_2^2(\Omega)} \leq B_2. \quad (1.11)$$

Кроме того, имеет место оценка

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \|w_t(x, t)\|_{\mathring{H}_2^1(\Omega)} \leq B_3. \quad (1.12)$$

Она следует из [1, (1.34)]. Константы B_1 , B_2 , B_3 зависят лишь от нормы w_0 в $\mathring{H}_2^2(\Omega)$, от норм w_1 , X , Y , Z в $L_2(\Omega \times [0, t_f])$, от величин коэффициентов в (1.1)–(1.9)

и от области Ω . Оценки (1.11), (1.12) основные. Из них с помощью теорем вложения следуют такие полезные для дальнейшего оценки:

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \|w(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq B_4, \quad (1.13)$$

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \|w(x, t)\|_{\dot{H}_p^1(\Omega)} \leq B_5^p. \quad (1.14)$$

Константа B_4 зависит от тех же величин, что и константы B_i , $i = 1, 2, 3$, а B_5^p зависит еще дополнительно от p .

Теперь укажем оценки функций u и v . Поскольку дифференциальные операторы левых частей (1.4) и (1.5) составляют коэрцитивную систему, так как удовлетворяют условию теоремы 11.3 из [5, с. 159], то для всех p , $1 < p < 2$, имеют место следующие оценки:

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left[\sum_{i,j=1}^2 (\|u_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_p(\Omega)} + \|v_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_p(\Omega)}) \right] \leq B_6^p. \quad (1.15)$$

Эта оценка получается с учетом вида правых частей (1.4) и (1.5) и оценкой их с помощью (1.11) и (1.14). Константа B_6^p зависит от тех же величин, что и константа B_5^p .

Из (1.15) и (1.7) для всех p , $1 \leq p < \infty$, следует оценка

$$\operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} (\|u(x, t)\|_{H_p^1(\Omega)} + \|v(x, t)\|_{H_p^1(\Omega)}) \leq B_7^p. \quad (1.16)$$

Константа B_7^p зависит от тех же величин, что и константа B_5^p .

Теперь мы изложим основные результаты настоящей работы. Основопологающим фактом для результатов о разрешимости является наличие достаточно сильной априорной оценки. Приведем формулировку теоремы об априорной оценке.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\Gamma \in C_a$, $k_1, k_2 \in C^1(\Omega)$, $w_0, w_1 \in C^4(\Omega)$, $X, Y, Z \in C^{2,1}(\Omega \times [0, t_f])$. Кроме того, пусть для самого решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.9) w_{ttt} : $\nabla^4 w \in C(\Omega \times [0, t_f])$.

Тогда имеют место следующие оценки:

$$\max_{t \in [0, t_f]} (\|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \leq K_1, \quad (1.17)$$

$$\max_{t \in [0, t_f]} \|\nabla^4 w(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq K_2, \quad (1.18)$$

$$\max_{t \in [0, t_f]} (\|u(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)} + \|v(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)}) \leq K_3, \quad (1.19)$$

где константы K_1, K_2, K_3 зависят лишь от констант $B_i, i = 1, \dots, 7$, от величины нормы w_0 в $H_2^4(\Omega)$, от величины нормы w_1 в $L_2(\Omega)$, от величин

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, t_f]} (\|X(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} + \|X_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}), \\ & \max_{t \in [0, t_f]} (\|Y(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} + \|Y_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}), \\ & \max_{t \in [0, t_f]} (\|Z(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \end{aligned}$$

и от области Ω .

Класс C_a гладкости границы Γ области Ω будет описан по завершению доказательства теоремы 1 в § 8. Он не является сколько-нибудь оригинальным, определяясь лишь условиями, которые достаточны для выполнения некоторых неравенств коэрцитивности. Все четырежды непрерывно дифференцируемые границы заведомо входят в этот класс.

Теперь сформулируем теоремы о разрешимости.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\Gamma \in C_a$, $k_1, k_2 \in C^1(\Omega)$, $w_0 \in \mathring{H}_2^2(\Omega) \cap H_2^4(\Omega)$, $w_1 \in \mathring{H}_2^2(\Omega)$. Пусть, кроме того,

$$\begin{aligned} & \text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} (\|X(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} + \|X_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) < \infty, \\ & \text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} (\|Y(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} + \|Y_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) < \infty, \\ & \text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} (\|Z(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда существует функция $w(x, t)$ на $\Omega \times [0, t_f]$, для которой выполняются следующие оценки:

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} (\|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \leq K_1, \quad (1.20)$$

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \|\nabla^4 w(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq K_2, \quad (1.21)$$

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} (\|u(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)} + \|v(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)}) \leq K_3, \quad (1.22)$$

причем w, u, v удовлетворяют начально-краевой задаче (1.1)–(1.9) почти всюду.

Наконец, сформулируем теорему о гладкости решений начально-краевой задачи (1.1)–(1.9).

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $r \in \mathbb{Z}^+$, $\Gamma \in C_a^r$, $k_1, k_2 \in H_2^{2r-2}(\Omega)$, $w_0 \in \mathring{H}_2^2(\Omega) \cap H_2^{4r}(\Omega)$, $w_1 \in \mathring{H}_2^2(\Omega) \cap H_2^{4r-2}(\Omega)$. Пусть в условиях теоремы 2

$$\max_{p+q=r-1} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} X(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} = B_8^r < \infty,$$

$$\max_{p+q=r-1} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} Y(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} = B_9^r < \infty,$$

$$\max_{p+q=r-1} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} Z(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} = B_{10}^r < \infty,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} X(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} Y(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right. \\ \left. + \left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} Z(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) = B_{11}^r < \infty. \end{aligned}$$

Тогда существует решение $w(x, t)$ начально-краевой задачи (1.1)–(1.9), удовлетворяющее следующим оценкам:

$$\max_{p+q=r+1} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} w(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} \leq K_4^r, \quad (1.23)$$

$$\max_{p+q=r+1} \operatorname{vrai\,max}_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} v(x, t) \right\|_{H_2^{2q}(\Omega)} \right) \leq K_5^r. \quad (1.24)$$

Константы K_4^r , K_5^r зависят лишь от величин, указанных в формулировке теоремы 1.1 и от констант B_8^r , B_9^r , B_{10}^r , B_{11}^r .

Опять-таки объяснения относительно класса гладкости границы Γ области Ω мы дадим после доказательства теоремы 1.3. Укажем лишь, что все границы гладкости C^{2r+2} входят в C_a^r .

§ 2. Начало доказательства теоремы 1.1

В условиях теоремы 1.1 в § 2–8 мы произведем оценку величины

$$\xi(t) = \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \mathcal{D} \|\Delta w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Для этого сначала продифференцируем уравнение (1.1) по t . Мы получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} w_{ttt} + \mathcal{D} \nabla^4 w_t = Z_t + \frac{\partial}{\partial x_1} (N_1 w_{x_1})_t + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{12} w_{x_1})_t + \frac{\partial}{\partial x_2} (N_2 w_{x_2})_t \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{12} w_{x_2})_t - k_1 N_{1t} - k_2 N_{2t}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выполняются следующие краевые условия:

$$w_t|_{\Gamma} = \frac{\partial w_t}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (2.2)$$

Умножим теперь (2.1) на $w_{tt}(x, t)$ скалярно в $L_2(\Omega)$. Интегрируя по частям по x , с учетом (2.2) получим неравенство

$$\xi_t(t) \leq \sigma_1 \sum_{l=1}^{14} A_l(t), \quad (2.3)$$

где константа σ_1 зависит лишь от неизменяющихся данных (коэффициентов) задачи (1.1)–(1.9). Здесь

$$A_1(t) = (Z_t(x, t), w_{tt}(x, t))_{L_2(\Omega)}, \quad (2.4)$$

$$A_2(t) = \sum_{i=1}^2 \|w_t(x, t)w_{x_i}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.5)$$

$$A_3(t) = \sum_{i=1}^2 \|w(x, t)w_{x_i t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.6)$$

$$A_4(t) = \sum_{i,j=1}^2 \|w_{x_i}(x, t)w_{x_j t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.7)$$

$$A_5(t) = \sum_{i,j=1}^2 \|w_{x_i x_j}(x, t)w_t(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.8)$$

$$A_6(t) = \sum_{i,j=1}^2 \|w_{x_i x_j t}(x, t)w(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.9)$$

$$A_7(t) = \|w_t(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.10)$$

$$A_8(t) = \sum_{i,j,r,s=1}^2 \|w_{x_i}(x, t)w_{x_j}(x, t)w_{x_r x_s}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.11)$$

$$A_9(t) = \sum_{i,j,r,s=1}^2 \|w_{x_i}(x, t)w_{x_j t}(x, t)w_{x_r x_s}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}, \quad (2.12)$$

$$A_{10}(t) = \sum_{i=1}^2 (\|u_{x_i t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} + \|v_{x_i t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
A_{11}(t) &= \sum_{i,j,r=1}^2 (\|w_{x_i t}(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
&\quad + \|w_{x_i t}(x, t) v_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}), \tag{2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{12}(t) &= \sum_{i,j,r=1}^2 (\|w_{x_i x_j t}(x, t) u_{x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
&\quad + \|w_{x_i x_j t}(x, t) v_{x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}), \tag{2.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{13}(t) &= \sum_{i,j,r=1}^2 (\|w_{x_i}(x, t) u_{x_j x_r t}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
&\quad + \|w_{x_i}(x, t) v_{x_j x_r t}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}), \tag{2.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{14}(t) &= \sum_{i,j,r=1}^2 (\|w_{x_i x_j}(x, t) u_{x_r t}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
&\quad + \|w_{x_i x_j}(x, t) v_{x_r t}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}). \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить все величины $A_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $1 \leq k \leq 14$. Часть из них оценивается просто. Эти простые оценки мы приведем здесь. Используя неравенства Шварца и Юнга, имеем

$$\begin{aligned}
A_1(t) &\leq \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \xi(t) + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Далее, используя неравенство Гёльдера и ограниченное вложение $H_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, с учетом (1.6), (1.11) получаем

$$\begin{aligned}
A_2(t) &\leq \sigma_2 \|w_t(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|w(x, t)\|_{H_2^1(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \sigma_3 \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_4 \xi(t). \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Здесь константа σ_4 зависит лишь от константы B_2 и области Ω .

Оценку величины $A_3(t)$ делаем аналогично оценке $A_2(t)$. Имеем

$$\begin{aligned}
A_3(t) &\leq \sigma_5 \|w(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
&\leq \sigma_6 \|w(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_7 \xi(t). \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Здесь константа σ_7 зависит лишь от констант B_2 и B_3 и от области Ω . Используя неравенство Гёльдера и ограниченное вложение $H_2^1(\Omega)$ в $L_4(\Omega)$, с учетом (1.6), а также (1.11) и (1.12) получаем

$$\begin{aligned} A_4(t) &\leq \sigma_8 \|w(x, t)\|_{\dot{H}_4^1(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_4^1(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sigma_9 \|w(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_{10} \xi(t). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Константа σ_{10} зависит лишь от констант B_2 и B_3 и от области Ω .

Величина $A_5(t)$ оценивается аналогично $A_2(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} A_5(t) &\leq \sigma_{11} \|w_t(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|w(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sigma_{12} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_{13} \xi(t). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Константа σ_{13} зависит лишь от константы B_2 и от области Ω .

Величина $A_6(t)$ оценивается аналогично $A_3(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} A_6(t) &\leq \sigma_{14} \|w(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \sigma_{15} \|w(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_{16} \xi(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Константа σ_{16} зависит лишь от константы B_2 и от области Ω .

Наконец, $A_7(t)$ оценивается так же, как $A_1(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} A_7(t) &\leq \|w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \xi(t) + \|w_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Для оценки остальных величин $A_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $8 \leq k \leq 14$, нужна некоторая предварительная подготовка.

§ 3. Оценки с использованием операторов сглаживания

Без ограничения общности будем считать, что $\Omega \subset D = \{x : x = (x_1, x_2), 0 < x_1 < 2\pi, 0 < x_2 < 2\pi\}$. Тогда, поскольку $\dot{H}_2^2(\Omega) \subset H_2^2$, где H_2^2 – пополнение множества тригонометрических полиномов двух переменных по норме

$$\|h\|_{H_2^2} = \|h\|_{L_2(D)} + \sum_{p,q=1}^2 \|h_{x_p x_q}\|_{L_2(D)},$$

имеем

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad \|h\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^4 |a_n|^2.$$

Для $N \in \mathbb{Z}^+$ положим

$$(T_N h)(x) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N a_n e^{inx},$$

$$(R_N h)(x) = h(x) - (T_N h)(x).$$

Очевидно, что

$$\|T_N h\|_{H_2^j}^2 + \|R_N h\|_{H_2^j}^2 = \|h\|_{\mathring{H}_2^j(\Omega)}^2, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.1)$$

$$\|R_N h\|_{L_2(\Omega)} \leq N^{-1} \|h\|_{\mathring{H}_2^1(\Omega)}, \quad (3.2)$$

$$\|R_N h\|_{\mathring{H}_2^1(\Omega)} \leq N^{-1} \|h\|_{\mathring{H}_2^2(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Оценки (3.2) и (3.3) могут быть в дальнейшем очень полезны. Однако их недостаточно, и нам придется осуществить некоторое развитие этих оценок. Положим $\Omega^* = \Omega \cup (\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Рассмотрим следующее банальное продолжение функций $h(x)$, $x \in \Omega$, до функций $h^*(x) = h(x)$, $x \in \Omega$, $h^*(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Пусть $P: H_q^p(\Omega) \rightarrow H_q^p(\mathbb{R}^2)$ – универсальный оператор продолжения (см. [6, с. 214]), который, разумеется, ограничен. Положим теперь $(Qh)(x) = (Ph^*)(x)$. Тогда для $h(x) \in \mathring{H}_2^2(\Omega) \cap H_2^k(\Omega)$, $k > 2$, имеем при $j = 0, 1, 2$

$$\begin{aligned} \|(R_N Qh)(x)\|_{H_2^j(\Omega)} &\leq \|(R_N Qh)(x)\|_{H_2^j} \leq N^{-r} \|(Qh)(x)\|_{H_2^{j+r}} \\ &\leq d_r N^{-r} \|h(x)\|_{H_2^{j+r}(\Omega)}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где константа d_r зависит лишь от r и Ω .

Далее нам понадобится оценка, описанная в следующей лемме.

ЛЕММА 3.1. *Для $h \in \mathring{H}_2^1(\Omega)$ и $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:*

$$\max_{x \in \Omega} |(T_N h)(x)| \leq B_{12} (\ln N)^{1/2} \|h\|_{\mathring{H}_2^1(\Omega)}, \quad (3.5)$$

где константа B_{12} не зависит от N и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} |(T_N h)(x)| &\leq \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N |a_n| = |a_0| + \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N |n| |a_n| |n|^{-1} \\ &\leq |a_0| + \left(\sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N |n|^2 |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N |n|^{-2} \right)^{1/2} \\ &\leq |a_0| + C \|(T_N h)(x)\|_{H_2^1} (\ln N)^{1/2}. \end{aligned}$$

Кроме того, учтем, что

$$|a_0| = \left| \int_D h(x) dx \right| \leq 2\pi \|h\|_{L_2(\Omega)} \leq 2\pi \|h\|_{\dot{H}_2^1(\Omega)}.$$

Тем самым получаем (3.5). Лемма доказана.

Нам придется также использовать еще одну оценку, которую мы излагаем в следующей лемме.

ЛЕММА 3.2. *Для $h \in H_2^2$ и $N \in \mathbb{Z}^+$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:*

$$\max_{x \in D} |(R_N h)(x)| \leq B_{13} N^{-1/2} \|h\|_{H_2^2}, \quad (3.6)$$

где константа B_{13} не зависит от N и h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем для $h(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}$

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} |(R_N h)(x)| &\leq \sum_{|n| > N} |a_n| = \sum_{|n| > N} |n|^{3/2} |a_n| |n|^{-3/2} \\ &\leq \left(\sum_{|n| > N} |n|^3 |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|n| > N} |n|^{-3} \right)^{1/2} \leq B_{13} N^{-1/2} \|h\|_{H_2^2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Оценки $A_8(t)$ и $A_9(t)$

Сначала получим несколько вспомогательных оценок, которые будут полезны далее.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для всех $t \in [0, t_f]$ имеют место следующие оценки:*

$$\|w(x, t)\|_{H_p^4(\Omega)} \leq \sigma_{17}^p (\xi(t) + \eta)^{1/2}, \quad 1 < p < 2, \quad (4.1)$$

$$\|w(x, t)\|_{H_2^3(\Omega)} \leq \sigma_{18} (\xi(t) + \eta)^{1/2}, \quad (4.2)$$

$$\|w(x, t)\|_{H_\infty^2(\Omega)} \leq \sigma_{19} (\xi(t) + \eta)^{1/2}, \quad (4.3)$$

где константа σ_{17}^p зависит лишь от p и Ω , константы σ_{18} и σ_{19} зависят лишь от Ω , константа $\eta \geq 1$ зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разумеется, (4.2) и (4.3) непосредственно следуют из (4.1) и из соответствующих теорем вложения. В свою очередь (4.1) мы получим, используя уравнение (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\|\nabla^4 w(x, t)\|_{L_p(\Omega)} &\leq \|w_{tt}(x, t)\|_{L_p(\Omega)} + \|Z(x, t)\|_{L_p(\Omega)} \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (N_1(x, t)w_{x_1}(x, t)) \right\|_{L_p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} (N_{12}(x, t)w_{x_1}(x, t)) \right\|_{L_p(\Omega)} \\ &+ \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} (N_2(x, t)w_{x_2}(x, t)) \right\|_{L_p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} (N_{12}(x, t)w_{x_2}(x, t)) \right\|_{L_p(\Omega)} \\ &+ \|k_1(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \|N_1(x, t)\|_{L_p(\Omega)} + \|k_2(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \|N_2(x, t)\|_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теперь правую часть полученного неравенства оценим с использованием неравенства Гёльдера и с учетом (1.11)–(1.16). Тем самым мы получим оценку

$$\|\nabla^4 w(x, t)\|_{L_p(\Omega)} \leq C_1 (\sqrt{\xi(t)} + \sqrt{\eta}),$$

где константа C_1 зависит лишь от Ω и p . Далее, учитывая краевые условия (1.6) для w , имеем

$$\|w_{x_i x_j x_r x_s}(x, t)\|_{L_p(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla^4 w(x, t)\|_{L_p(\Omega)}, \quad (4.4)$$

где константа C_2 зависит лишь от Ω и p . Тем самым предложение 4.1 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для всех $t \in [0, t_f]$, $i, j, r, s = 1, 2$, имеют место оценки

$$\|w_{x_i x_j t}(x, t)w_{x_r}(x, t)w_{x_s}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq \mu_1^1 \ln N (\xi(t))^{1/2} + \mu_2^1 N^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^{3/2} \quad (4.5)$$

для всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, где μ_1^1, μ_2^1 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} &\|w_{x_i x_j t}(x, t)w_{x_r}(x, t)w_{x_s}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \|w_{x_i x_j t}(x, t)(T_N Q w_{x_r})(x, t)(T_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \|w_{x_i x_j t}(x, t)(T_N Q w_{x_r})(x, t)(R_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \|w_{x_i x_j t}(x, t)(R_N Q w_{x_r})(x, t)(T_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \|w_{x_i x_j t}(x, t)(R_N Q w_{x_r})(x, t)(R_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя (3.5) и учитывая (1.11), оценим первое слагаемое (4.6). Имеем

$$\begin{aligned} &\|w_{x_i x_j t}(x, t)(T_N Q w_{x_r})(x, t)(T_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_r})(x, t)| \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_s})(x, t)| \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \ln N \|(Q w_{x_r})(x, t)\|_{H_2^1} \|(Q w_{x_s})(x, t)\|_{H_2^1} \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq C_2 \ln N \|w(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)}^2 (\xi(t))^{1/2} \leq C_3 \ln N (\xi(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь константа C_3 зависит лишь от констант B_2 и B_{12} и от области Ω .

Теперь, используя (3.5) и (3.6) и учитывая (1.11) и (4.2), оценим второе и третье слагаемые (4.6). Имеем

$$\begin{aligned}
 & \|w_{x_i x_j t}(x, t)(T_N Q w_{x_r})(x, t)(R_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_r})(x, t)| \max_{x \in D} |(R_N Q w_{x_s})(x, t)| \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_4 N^{-1/2} (\ln N)^{1/2} \|(Q w_{x_r})(x, t)\|_{H_2^1} \|(Q w_{x_s})(x, t)\|_{H_2^3} \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_5 N^{-1/2} (\ln N)^{1/2} \|w(x, t)\|_{\overset{\circ}{H}_2^2(\Omega)} \|w(x, t)\|_{H_2^3(\Omega)} \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_6 N^{-1/2} (\ln N)^{1/2} \xi(t).
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Аналогично получаем

$$\|w_{x_i x_j t}(x, t)(R_N Q w_{x_r})(x, t)(T_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_6 N^{-1/2} (\ln N)^{1/2} \xi(t). \tag{4.9}$$

Здесь константа C_6 зависит лишь от констант B_{12} , B_{13} , B_2 и от области Ω .

Сходным образом оценим последнее слагаемое (4.6). Имеем

$$\begin{aligned}
 & \|w_{x_i x_j t}(x, t)(R_N Q w_{x_r})(x, t)(R_N Q w_{x_s})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq \max_{x \in D} |(R_N Q w_{x_r})(x, t)| \max_{x \in D} |(R_N Q w_{x_s})(x, t)| \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_7 N^{-1} \|w(x, t)\|_{H_2^3(\Omega)}^2 \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_8 N^{-1} (\xi(t))^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Константа C_8 зависит лишь от константы B_9 и от области Ω . Оценки (4.6)–(4.10) дают (4.5). Предложение доказано.

Теперь мы можем оценить $A_8(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:*

$$A_8(t) \leq \mu_1^1 \ln N \xi(t) + \mu_2^1 N^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^2. \tag{4.11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из оценки (4.5). Действительно, применив неравенство Шварца, получаем

$$A_8(t) \leq \|w_{x_i x_j t}(x, t)w_{x_r}(x, t)w_{x_s t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{4.12}$$

Из (4.12) и (4.5) следует (4.11). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Для всех $t \in [0, t_f]$, $i, j, r, s = 1, 2$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r}(x, t) w_{x_s t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \mu_1^2 \ln N (\xi(t))^{1/2} + \mu_2^2 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta)^{3/2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

для всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, где μ_1^2, μ_2^2 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично (4.6) имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r}(x, t) w_{x_s t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t) (T_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \quad + \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t) (R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \quad + \|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t) (T_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \quad + \|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t) (R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Действуя так же, как и при получении оценки (4.7), получаем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t) (T_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_r})(x, t)| \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_s t})(x, t)| \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_1 \ln N \|w(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)}^2 \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \leq C_2 \ln N (\xi(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь константа C_2 зависит лишь от констант B_{12} и B_{13} и от области Ω .

Теперь, используя (3.5), (4.3), (3.4), с учетом (1.11) получаем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t) (R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_r})(x, t)| \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|(R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_3 (\ln N)^{1/2} N^{-1} (\xi(t) + \eta). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь константа C_3 зависит лишь от констант B_{12} , B_{13} и B_2 и от области Ω .

Используя (4.3), (3.5), (3.4), имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t) (T_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_s t})(x, t)| \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|(R_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_4 (\ln N)^{1/2} N^{-1} (\xi(t) + \eta). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Здесь константа C_4 зависит лишь от констант B_{12} и σ_{19} и от области Ω .

Теперь, используя (4.3), (3.6), (3.4), получаем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t)(R_N Q w_{x_r})(x, t)(R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(R_N Q w_{x_r})(x, t)| \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|(R_N Q w_{x_s t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_5 N^{-3/2} (\xi(t) + \eta)^{3/2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь константа C_5 зависит лишь от констант B_{13} и B_2 и от области Ω . Оценки (4.15)–(4.18) дают (4.13). Предложение доказано.

Оценим $A_9(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Для всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:*

$$A_9(t) \leq \mu_1^2 \ln N \xi(t) + \mu_2^2 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta)^2. \quad (4.19)$$

Доказательство полностью аналогично доказательству предложения 4.3.

§ 5. Оценка $A_{10}(t)$

Рассмотрим однородную краевую задачу для эллиптической системы уравнений

$$\Delta u + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1} = f_1, \quad (5.1)$$

$$\Delta v + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2} = f_2, \quad (5.2)$$

$$u|_\Gamma = v|_\Gamma = 0 \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Обобщенное решение u, v задачи (5.1)–(5.3), удовлетворяющее интегральному соотношению

$$\int_\Omega \left[\left(-\Delta u - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1} \right) u_0 + \left(-\Delta v - \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2} \right) v_0 + f_1 u_0 + f_2 v_0 \right] dx = 0 \quad (5.4)$$

для любых $u_0, v_0 \in \overset{\circ}{H}_2^1(\Omega)$, существует и имеет следующую оценку:

$$\sum_{i=1}^2 (\|u_{x_i}\|_{L_q(\Omega)} + \|v_{x_i}\|_{L_q(\Omega)}) \leq C (\|f_1\|_{L_p(\Omega)} + \|f_2\|_{L_p(\Omega)}), \quad q < \frac{2p}{2-p}, \quad (5.5)$$

где константа C не зависит от u, v (см. [1, с. 765, 766]).

Обозначив через F_1, F_2 соответственно правые части (1.4), (1.5), отметим, что u_t, v_t являются решением (5.1)–(5.3) при $f_1 = F_{1t}, f_2 = F_{2t}$.

Теперь оценим F_{1t}, F_{2t} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:

$$\|F_1(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|F_2(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq \sigma_{20}(\xi(t) + \eta)^{1/2}, \quad (5.6)$$

где константа σ_{20} зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая вид правых частей (1.4) и (1.5), легко получим

$$\begin{aligned} & \|F_{1t}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} + \|F_{2t}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \leq C_1(\xi(t) + \eta)^{1/2} \\ & + C_2 \left[\sum_{i,j,r=1}^2 (\|w_{x_i x_j t}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \right. \\ & \left. + \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r t}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)}) \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

где константы C_1 и C_2 зависят лишь от коэффициентов μ , k_1 , k_2 из (1.4), (1.5). Используя неравенство Гёльдера и (1.14), получаем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j t}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \\ & \leq \|w_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{x_r}(x, t)\|_{L_6(\Omega)} \leq C_3(\xi(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Далее, используя неравенство Гёльдера, ограниченное вложение $H_2^1(\Omega)$ в $L_6(\Omega)$ и (1.11), имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r t}(x, t)\|_{L_{\frac{3}{2}}(\Omega)} \\ & \leq \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{x_r t}(x, t)\|_{L_6(\Omega)} \leq C_4(\xi(t))^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Здесь C_3 и C_4 зависят только от констант B_5^6 и B_2 . Из (5.7)–(5.9) следует (5.6). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:

$$\sum_{i=1}^2 (\|u_{x_i t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_i t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \leq \sigma_{21}(\xi(t) + \eta)^{1/2}, \quad (5.10)$$

где константа σ_{21} зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

Доказательство непосредственно следует из (5.5) и (5.6).

Теперь мы уже можем оценить $A_{10}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:

$$A_{10}(t) \leq \sigma_{22}(\xi(t) + \eta), \quad (5.11)$$

где константа σ_{22} зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

Доказательство (после применения к каждому слагаемому (2.13) неравенства Шварца) следует теперь из оценки (5.10).

§ 6. Оценки $A_{11}(t)$ и $A_{12}(t)$

Сначала придется указать более продвинутые оценки решений краевой задачи (5.1)–(5.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $f_1, f_2 \in H_p^r(\Omega) \cap L_2(\Omega)$, $r = 0, 1, 2$, $p > 1$.

Тогда существует единственное решение краевой задачи (5.1)–(5.3) такое, что $u, v \in H_p^{r+2}(\Omega) \cap \mathring{H}_2^1(\Omega)$, причем имеет место оценка:

$$\|u\|_{H_p^{r+2}(\Omega)} + \|v\|_{H_p^{r+2}(\Omega)} \leq C(\|f_1\|_{H_p^r(\Omega)} + \|f_2\|_{H_p^r(\Omega)}), \quad (6.1)$$

где константа C зависит лишь от r, p, Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $\varepsilon \in [0, 1]$ рассмотрим краевую задачу:

$$\Delta u^\varepsilon + \varepsilon \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1}^\varepsilon = f_1, \quad (6.2)$$

$$\Delta v^\varepsilon + \varepsilon \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2}^\varepsilon = f_2, \quad (6.3)$$

$$u^\varepsilon|_\Gamma = v^\varepsilon|_\Gamma = 0. \quad (6.4)$$

Дифференциальные операторы из левых частей (6.2) и (6.3) составляют коэрцитивную систему, поскольку удовлетворяют очевидным образом условиям теоремы 11.3 из [5, с. 159]. Более того, константа в неравенстве коэрцитивности может быть выбрана не зависящей от ε , как это следует, например, из доказательства теоремы 11.3. Теперь мы можем завершить доказательство предложения 6.1, применив метод продолжения по параметру ε так, как это, например, было сделано в [7, с. 149–150]. Предложение доказано.

Перед тем как оценить $A_{11}(t)$, оценим вторые производные u и v .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 (\|u_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \\ & \leq \mu_1^3 (\ln N)^{1/2} + \mu_2^3 N^{-1/2} (\xi(t))^{1/2} \end{aligned} \quad (6.5)$$

при $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, где μ_1^3, μ_2^3 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся оценкой (6.1) с учетом вида правых частей (1.4) и (1.6) и априорной оценки (1.14). Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 (\|u_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \\ & \leq C_1 + C_2 \sum_{i,j,r=1}^2 \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где константы C_1 и C_2 зависят лишь от коэффициентов (1.4), (1.5), величины норм X и Y в $L_2(\Omega \times [0, t_f])$, константы B_5^2 .

Далее, аналогично (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} & \leq \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & + \|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Теперь аналогично (4.7) получаем

$$\|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_3 (\ln N)^{1/2}. \quad (6.8)$$

Аналогично (4.11) имеем

$$\|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_4 N^{-1/2} (\xi(t))^{1/2}. \quad (6.9)$$

Константы C_3 и C_4 зависят лишь от констант B_{12} , B_{13} , B_2 и от области Ω . Оценки (6.6)–(6.9) дают (6.5). Предложение доказано.

Теперь оценим $A_{11}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, имеет место оценка

$$A_{11}(t) \leq \mu_1^4 \ln N \xi(t) + \mu_2^4 N^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^2, \quad (6.10)$$

где μ_1^4 , μ_2^4 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так же, как и ранее, имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i t}(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \leq \|(T_N Q w_{x_i t})(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & + \|(R_N Q w_{x_i t})(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Теперь, используя (3.5), неравенство Шварца, оценку (6.5), получаем

$$\begin{aligned}
 & \| (T_N Q w_{x_i t})(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t) \|_{L_1(\Omega)} \\
 & \leq \max_{x \in D} | (T_N Q w_{x_i t})(x, t) | \| u_{x_j x_r}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \| w_{tt}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_1 \ln N \xi(t) + C_2 (\ln N)^{1/2} N^{-1/2} (\xi(t))^{3/2}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Константы C_1 и C_2 зависят лишь от констант B_{12}, μ_1^3, μ_2^3 и от области Ω . Из теоремы вложения, оценки (6.1), вида правых частей (1.4), (1.5), неравенства Гёльдера, опять из теорем вложения, оценок (4.1) и (4.3) имеем

$$\begin{aligned}
 & \| u_{x_j x_r}(x, t) \|_{L_\infty(\Omega)} + \| v_{x_j x_r}(x, t) \|_{L_\infty(\Omega)} \\
 & \leq C_3 (\| u(x, t) \|_{H_2^4(\Omega)} + \| v(x, t) \|_{H_2^4(\Omega)}) \\
 & \leq C_4 (\xi(t) + \eta)^{1/2} + C_5 \sum_{i,j,k,r,s=1}^2 (\| w_{x_i x_j x_k x_r}(x, t) w_{x_s}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \\
 & \quad + \| w_{x_i x_j x_k}(x, t) w_{x_r x_s}(x, t) \|_{L_2(\Omega)}) \\
 & \leq C_4 (\xi(t) + \eta)^{1/2} + C_5 \sum_{i,j,k,r,s=1}^2 (\| w_{x_s}(x, t) \|_{L_\infty(\Omega)} \| w_{x_i x_j x_k x_r}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \\
 & \quad + \| w_{x_r x_s}(x, t) \|_{L_\infty(\Omega)} \| w_{x_i x_j x_k}(x, t) \|_{L_2(\Omega)}) \\
 & \leq C_4 (\xi(t) + \eta)^{1/2} + C_6 (\xi(t) + \eta) \leq C_7 (\xi(t) + \eta).
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Константа C_7 зависит лишь от коэффициентов уравнений (1.1)–(1.5) и от области Ω .

Теперь, учитывая (6.13) и (3.3), с использованием неравенства Шварца получаем

$$\begin{aligned}
 & \| (R_N Q w_{x_i t})(x, t) u_{x_j x_r}(x, t) w_{tt}(x, t) \|_{L_1(\Omega)} \\
 & \leq \| u_{x_j x_r}(x, t) \|_{L_\infty(\Omega)} \| (R_N Q w_{x_i t})(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \| w_{tt}(x, t) \|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_8 N^{-1} (\xi(t) + \eta)^2.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Константа C_8 зависит от области Ω . Из (6.11)–(6.14) следует (6.10). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $N \in \mathbb{Z}, N \geq 2$, имеет место следующая оценка:

$$A_{12}(t) \leq \mu_1^5 \ln N \xi(t) + \mu_2^5 N^{-1/3} (\xi(t) + \eta)^{3/2}, \tag{6.15}$$

где μ_1^5, μ_2^5 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим привычный прием. Имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j t}(x, t) u_{x_r}(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \leq \|w_{x_i x_j t}(x, t) (T_N Q u_{x_r})(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \quad + \|w_{x_i x_j t}(x, t) (R_N Q u_{x_r})(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Далее, учитывая (3.5) и (6.5), с использованием неравенства Шварца получаем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j t}(x, t) (T_N Q u_{x_r})(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(T_N Q u_{x_r})| \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_1 (\ln N)^{1/2} \|u_{x_r}(x, t)\|_{H_2^1(\Omega)} \xi(t) \\ & \leq C_2 \ln N \xi(t) + C_3 (\ln N)^{1/2} N^{-1/2} (\xi(t))^{3/2}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Здесь константы C_2 и C_3 зависят лишь от констант B_{12} , B_3 , μ_1^3 , μ_2^3 и от области Ω .

Теперь с учетом (3.4) и (6.13) оценим второе слагаемое правой части (6.16). Используя вложение $H_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, имеем

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j t}(x, t) (R_N Q u_{x_r})(x, t) w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in D} |(R_N Q u_{x_r})| \|w_t(x, t)\|_{\dot{H}_2^2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_4 \|(R_N Q u_{x_r})(x, t)\|_{H_2^2(\Omega)} \xi(t) \\ & \leq C_5 N^{-1} \|u(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)} \leq C_6 N^{-1} (\xi(t) + \eta). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Константа C_6 зависит лишь от коэффициентов уравнений (1.1)–(1.5) и от области Ω . Из (6.16)–(6.18) следует (6.15). Предложение доказано.

§ 7. Оценка $A_{13}(t)$ и $A_{14}(t)$

Предварительно нам придется доказать следующую вспомогательную оценку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Для всех $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^2 (\|u_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \\ & \leq \mu_1^6 (\ln N)^{1/2} (\xi(t) + \eta)^{1/2} + \mu_2^6 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta), \end{aligned} \quad (7.1)$$

где константы μ_1^6 , μ_2^6 зависят лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки (6.1) и вида правых частей уравнений (1.4) и (1.5) аналогично (5.7) имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j=1}^2 (\|u_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|v_{x_i x_j t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \\
 & \leq C_1 (\|F_{1t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|F_{2t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)}) \\
 & \leq C_2 (\xi(t) + \eta)^{1/2} + C_3 \left(\sum_{i,j,r=1}^2 \|w_{x_i x_j t}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \right. \\
 & \quad \left. + \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \right), \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

где константы C_2 и C_3 зависят лишь от коэффициентов уравнений (1.4) и (1.5).

Теперь оценим оставшиеся не оцененными величины из правой части (7.2). Делается это уже привычным образом. Учитывая (3.3), (3.5), (3.6), (1.11) и (4.2), (4.3), имеем

$$\begin{aligned}
 & \|w_{x_i x_j t}(x, t) w_{x_r}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq \|w_{x_i x_j t}(x, t) (T_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|w_{x_i x_j t}(x, t) (R_N Q w_{x_r})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_4 (\ln N)^{1/2} (\xi(t))^{1/2} + C_5 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta), \tag{7.3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \|w_{x_i x_j}(x, t) w_{x_r t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq \|w_{x_i x_j}(x, t) (T_N Q w_{x_r t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} + \|w_{x_i x_j}(x, t) (R_N Q w_{x_r t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_6 (\ln N)^{1/2} (\xi(t))^{1/2} + C_7 \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|(R_N Q w_{x_r t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
 & \leq C_6 (\ln N)^{1/2} (\xi(t))^{1/2} + C_8 N^{-1} (\xi(t) + \eta). \tag{7.4}
 \end{aligned}$$

Константы C_4 , C_5 , C_6 , C_8 зависят лишь от констант B_{12} , B_{13} , B_2 и от области Ω . Из (7.2)–(7.4) следует (7.1). Предложение доказано.

Оценим $A_{13}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:

$$A_{13}(t) \leq \mu_1^7 \ln N (\xi(t) + \eta) + \mu_2^7 N^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^2, \tag{7.5}$$

где μ_1^7 , μ_2^7 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. УЧИТЫВАЯ (3.3), (3.6), (1.11), (7.1), (4.2), получаем

$$\begin{aligned}
& \|w_{x_i}(x, t)u_{x_j x_r t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \leq \|(T_N Q w_{x_i})(x, t)u_{x_j x_r t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \quad + \|(R_N Q w_{x_i})(x, t)u_{x_j x_r t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \leq \left(\max_{x \in D} |(T_N Q w_{x_i})(x, t)| \right. \\
& \quad \left. + \max_{x \in D} |(R_N Q w_{x_i})(x, t)| \right) \|w_{x_j x_r t}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
& \leq C_1 (\ln N)^{1/2} + C_2 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta)^{1/2} (\mu_1^6 (\ln N)^{1/2} (\xi(t) + \eta)^{1/2} \\
& \quad + \mu_2^6 N^{-1/2} (\xi(t) + \eta)) (\xi(t))^{1/2}. \tag{7.6}
\end{aligned}$$

В (7.6) константы C_1 и C_2 зависят лишь от констант B_{12} , B_{13} и от области Ω . Оценку (7.5) непосредственно следует из (7.6). Предложение доказано.

Наконец, оценим $A_{14}(t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. *Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq 2$, имеет место следующая оценка:*

$$A_{14}(t) \leq \mu_1^8 \ln N (\xi(t) + \eta) + \mu_2^8 N^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^2, \tag{7.7}$$

где μ_1^8 , μ_2^8 – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned}
& \|w_{x_i x_j}(x, t)u_{x_r t}(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \leq \|w_{x_i x_j}(x, t)(T_N Q u_{x_r t})(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \quad + \|w_{x_i x_j}(x, t)(R_N Q u_{x_r t})(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)}. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& \|w_{x_i x_j}(x, t)(T_N Q u_{x_r t})(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\
& \leq \max_{x \in D} |(T_N Q u_{x_r t})(x, t)| \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\
& \leq C_1 (\ln N)^{1/2} \|u_{x_r t}(x, t)\|_{H_2^1(\Omega)} (\xi(t))^{1/2} \\
& \leq C_2 \ln N (\xi(t) + \eta) + C_3 (\ln N)^{1/2} N^{-1/2} (\xi(t) + \eta)^{3/2}. \tag{7.9}
\end{aligned}$$

Здесь мы использовали неравенство Шварца, (3.5), (1.11), (7.1). Константы C_2 и C_3 зависят лишь от констант B_{12}, μ_1^6, μ_2^6 и от области Ω . Кроме того, имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \|w_{x_i x_j}(x, t)(R_N Q u_{x_r t})(x, t)w_{tt}(x, t)\|_{L_1(\Omega)} \\ & \leq \|w_{x_i x_j}(x, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \|(R_N Q u_{x_r t})(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \|w_{tt}(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \\ & \leq C_4 (\ln N)^{1/2} N^{-1} (\xi(t) + \eta)^{3/2} + C_5 N^{-3/2} (\xi(t) + \eta)^2. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь мы использовали неравенство Шварца, (4.3), (3.4), (7.1). Константы C_4 и C_5 зависят лишь от констант μ_1^6, μ_2^6 и от области Ω .

Из (7.8)–(7.10) следует (7.7). Предложение доказано.

§ 8. Завершение доказательства теоремы 1.1

ЛЕММА 8.1. *Для всех $t \in [0, t_f]$ и всех $r \geq 2$ имеет место следующее неравенство:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\xi(t) + \eta) & \leq \mu_1 \ln r (\xi(t) + \eta) \\ & + \mu_2 r^{-1/4} (\xi(t) + \eta)^2 + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где константы μ_1, μ_2 зависят лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (по существу, оно уже проведено). Действительно, рассмотрим неравенство (2.3). Мы оценили все величины (2.4)–(2.17) из правой части (2.3). Эти оценки содержатся соответственно в формулах (2.18)–(2.24), (4.12), (4.20), (5.11), (6.10), (6.15), (7.5), (7.7). Учитывая эти оценки, мы и получим (8.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. *Для всех $t_0, t \in [0, t_f]$ имеет место следующее неравенство:*

$$\xi(t) + \eta \leq \xi(t_0) + \eta + \mu \int_{t_0}^t (\xi(\tau) + \eta) \ln(\xi(\tau) + \eta) d\tau + \lambda, \quad (8.2)$$

где μ и λ – константы, зависящие лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в (8.1) $r = (\xi(t) + \eta)^8$, $\mu = 8\mu_1$. Проинтегрируем (8.1) по t от t_0 до t и положим $\lambda = \mu_2 t_f + \|Z_t(x, t)\|_{L_2(\Omega \times [0, t_f])}$, после чего получим неравенство (8.2). Лемма доказана.

Теперь покажем, что решение интегрального неравенства вида (8.1) имеет оценку.

ЛЕММА 8.3. Пусть $\theta(t) \in C([0, a])$ и $\theta(t) \geq 1$ при $t \in [0, a]$. Пусть функция $\theta(t)$ для всех $t_0, t \in [0, a]$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\theta(t) \leq \theta(t_0) + \varkappa \int_{t_0}^t \theta(\tau) \ln \theta(\tau) d\tau + \chi, \quad (8.3)$$

где $\varkappa \geq 1$ и χ – константы.

Тогда для всех $t \in [0, a]$

$$\theta(t) \leq K(\varkappa, \chi, a), \quad (8.4)$$

где $K(\varkappa, \chi, a)$ – константа, зависящая лишь от $\varkappa, \chi, a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая (8.3) как неравенство Гронуола, мы получаем следующее неравенство для решения неравенства Гронуола (8.3) (см. [8, с. 27]):

$$\theta(t) \leq (\chi + \theta(t_0)) \exp\left(\varkappa \int_{t_0}^t \ln \theta(\tau) d\tau\right) \quad (8.5)$$

для всех $t \in [t_0, a]$.

Теперь несколько преобразуем правую часть (8.5), получив более удобную для нас оценку. Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} \theta(t) &\leq (\chi + \theta(t_0)) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa^n}{n!} \left(\int_{t_0}^t \ln \theta(\tau) d\tau \right)^n \right] \\ &\leq (\chi + \theta(t_0)) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varkappa^n (t - t_0)^{n-1}}{n!} \int_{t_0}^t (\ln \theta(\tau))^n d\tau \right]. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Считая, что $t - t_0 \leq \varkappa^{-1}$, из (8.5) получаем

$$\begin{aligned} \theta(t) &\leq (\chi + \theta(t_0)) \left[1 + \varkappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (\ln \theta(\tau))^n d\tau \right] \\ &\leq \varkappa(\chi + \theta(t_0)) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t (\ln \theta(\tau))^n d\tau \right] \\ &\leq \varkappa(\chi + \theta(t_0)) \left[1 + \int_{t_0}^t \exp(\ln \theta(\tau)) d\tau \right] \\ &= \varkappa(\chi + \theta(t_0)) \left(1 + \int_{t_0}^t \theta(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (8.7)$$

Опять применяя оценку решения неравенства Гронуола – теперь уже к (8.7), получаем для $t \in [t_0, t_0 + \varkappa^{-1}]$

$$\theta(t) \leq \varkappa(\chi + \theta(t_0)) e^{\chi + \theta(t_0)}. \quad (8.8)$$

Введем функцию $\gamma_{\varkappa, \chi}(s) = \varkappa(\chi + s)e^{\chi+s}$, $s \in [0, +\infty)$, и число $k_{\varkappa, a}$, на единицу большее целой части числа $\varkappa a$. Тогда, используя оценку (8.8), получим для всех $t \in [0, a]$ следующую оценку:

$$\theta(t) \leq \gamma_{\varkappa, \chi}^{(k_{\varkappa, a})}(\theta(0)). \quad (8.9)$$

В правой части (8.9) стоит $k_{\varkappa, a}$ -кратная итерация функции $\gamma_{\varkappa, \chi}(s)$ от значения $\theta(0)$. Лемма доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.1. Оценка (1.18) является непосредственным следствием лемм 8.2 и 8.3, а (1.19) следует из (4.4) при $p = 2$ с учетом (4.1)–(4.3) и (1.18). Оценка (1.20) следует из (6.13) с учетом (1.18). Теорема доказана.

Коснемся теперь вопроса о классе C_a гладкости границы Γ . Граница должна быть такой, чтобы выполнялись неравенства (4.4) и (6.1) (мы неявно использовали аналогичное неравенство для оператора Лапласа). Для этого достаточно, чтобы граница была трижды непрерывно дифференцируема и имела ограниченные производные четвертого порядка.

§ 9. Доказательство теоремы 2

Пусть $\chi_l(x)$, $l = 1, 2, \dots$, – система собственных функций однородной краевой задачи для оператора ∇^4 :

$$\nabla^4 \chi_l(x) = \lambda_l \chi_l(x), \quad x \in \Omega, \quad \chi_l|_{\Gamma} = \frac{\partial \chi_l}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0.$$

Определим приближения Бубнова–Галёркина

$$w^m(x, t) = \sum_{i=1}^m a_i^m(t) \chi_i(x),$$

где функции времени $a_i^m(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & (w_{tt}^m + \mathcal{D}\nabla^4 w^m - Z - (N_1^m w_{x_1}^m)_{x_1} - (N_{12}^m w_{x_1}^m)_{x_2} - (N_2^m w_{x_2}^m)_{x_2} \\ & - (N_{12}^m w_{x_2}^m)_{x_1} + N_1^m k_1 + N_2^m k_2, \chi_i)_{L_2(\Omega)} = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

при $i = 1, \dots, m$, с начальными данными

$$\begin{aligned} a_i^m(0) &= (w_0, \chi_i)_{L_2(\Omega)}, \\ \dot{a}_i^m(0) &= (w_1, \chi_i)_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

при $i = 1, \dots, m$. Функции $u^m(x, t)$ и $v^m(x, t)$ являются решениями следующей краевой задачи:

$$\Delta u^m + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_1}^m = -\frac{2}{1-\mu} [(k_1 w^m)_{x_1} + w_{x_1}^m w_{x_1 x_1}^m + \mu(k_2 w^m)_{x_1} + \mu w_{x_1}^m w_{x_1 x_2}^m] - w_{x_2}^m w_{x_1 x_2}^m - w_{x_1}^m w_{x_2 x_2}^m - X, \quad (9.2)$$

$$\Delta v^m + \frac{1+\mu}{1-\mu} \theta_{x_2}^m = -\frac{2}{1-\mu} [(k_2 w^m)_{x_2} + w_{x_2}^m w_{x_2 x_2}^m + \mu(k_1 w^m)_{x_2} + \mu w_{x_1}^m w_{x_1 x_2}^m] - w_{x_1}^m w_{x_1 x_2}^m - w_{x_2}^m w_{x_1 x_2}^m - Y \quad (9.3)$$

с краевыми условиями

$$u^m|_{\Gamma} = v^m|_{\Gamma} = 0. \quad (9.4)$$

И. И. Воровичем в [1] показано, что приближения w^m удовлетворяют равномерно по m оценкам вида (1.10)–(1.16). Там же доказано, что можно выбрать подпоследовательность w^{m_k} , слабо сходящуюся к обобщенному решению w задачи (1.1)–(1.9), в пространстве H_{3Q} (H_{3Q} в [1] – это пополнение множества бесконечно дифференцируемых на $\Omega \times [0, t_f]$ функций $z(x, t)$, финитных в Ω при каждом $t \in [0, t_f]$, по норме $\|z\|_{H_{3Q}}^2 = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} [\Delta z(x, t)]^2 dx dt$).

Обобщенное же решение w удовлетворяет следующему интегральному соотношению:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left[-w_t w' + \mathcal{D} \nabla^2 w \nabla^2 w' + (N_1 k_1 + N_2 k_2) w' + (N_1 w_{x_1} + N_{12} w_{x_2}) w'_{x_1} \right. \\ \left. + (N_{12} w_{x_1} + N_2 w_{x_2}) w'_{x_2} - Z w' \right] dx dt - \int_{\Omega} w_1 w' dx = 0 \end{aligned} \quad (9.5)$$

для любой функции $w' \in D^0$ (D^0 в [1] – это пополнение в норме H_{3Q} множества бесконечно дифференцируемых в $\Omega \times [0, t_f]$ функций $z(x, t)$, финитных в Ω при каждом $t \in [0, t_f]$ и таких, что $z(x, t) \equiv 0$ для $t_f - \delta \leq t \leq t_f$, где δ – некоторое, определенное для каждой функции число) и начальному условию

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} (w - w_0)^2 dx|_t = 0.$$

Отметим, что обобщенное решение w удовлетворяет оценкам (1.10)–(1.16) с теми же константами, что и для приближений w^m . Кроме того, продифференцировав (9.5) по t , умножив на $\ddot{a}_i^m(t)$ и просуммировав по i , получим соотношение, из которого для приближений w^m следует неравенство (2.3) с величинами (2.4)–(2.17). Это приводит к тому, что все приближения w^m удовлетворяют оценкам (1.17)–(1.19), что влечет за собой выполнение оценок (1.20)–(1.22) для обобщенного решения w . Отметим, что хотя оценки (4.1)–(4.3) и выполняются для приближений w^m , доказательство их для приближений непригодно. Поэтому

здесь мы приведем доказательство оценок вида (4.1)–(4.3) специально для приближений Бубнова–Галёркина.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Для всех $m \in \mathbb{Z}^+$ и всех $t \in [0, t_f]$ имеют место следующие оценки:*

$$\|w^m(x, t)\|_{H_2^3(\Omega)} \leq \sigma_{23}(\xi^m(t) + \eta^m)^{1/2}, \quad (9.6)$$

$$\|w^m(x, t)\|_{H_2^4(\Omega)} \leq \sigma_{24}(\xi^m(t) + \eta^m)^{1/2}, \quad (9.7)$$

$$\|w^m(x, t)\|_{H_\infty^2(\Omega)} \leq \sigma_{25}(\xi^m(t) + \eta^m)^{1/2}, \quad (9.8)$$

где константы σ_{23} , σ_{24} , σ_{25} зависят лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.1, и от области Ω , но не зависят от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой $\theta(x) \in H_2^1(\Omega)$ имеет место разложение в ряд:

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \chi_i(x).$$

Обозначим через S_m ортогональную проекцию $\overset{\circ}{H}_2^1(\Omega)$ на линейную оболочку $\chi_1, \dots, \chi_m$. Умножим теперь (9.1) на b_i и просуммируем по i от 1 до m . Мы получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\nabla^4 w^m(x, t), \theta(x))_{L_2(\Omega)} &= -(w_{tt}^m(x, t), \theta(x))_{L_2(\Omega)} \\ &+ \left(Z + N_1^m(x, t)k_1(x) + N_2^m(x, t)k_2(x) \right. \\ &+ (N_1^m(x, t)w_{x_1}^m(x, t))_{x_1} + (N_{12}^m(x, t)w_{x_1}^m(x, t))_{x_2} \\ &\left. + (N_2^m(x, t)w_{x_2}^m(x, t))_{x_2} + (N_{12}^m(x, t)w_{x_2}^m(x, t))_{x_1}, S_m \theta(x) \right)_{L_2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (9.9)$$

Интегрируя по частям в (9.9), учитывая ортогональность проекции S_m , выполнение оценок вида (1.10)–(1.16) для w^m равномерно по m и используя неравенство Шварца, получаем

$$(\nabla \Delta w^m(x, t), \nabla \theta(x))_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_{23}(\xi^m(t) + \eta^m)^{1/2} \|\nabla \theta(x)\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда в силу произвольности $\theta(x)$ следует (9.6). Теперь, учитывая в (9.9) уже полученную оценку (9.6), а также оценки (6.1) и (9.6) для решений задачи (9.2)–(9.4) и ортогональность S_m в $L_2(\Omega)$, получим

$$(\nabla^4 w^m(x, t), \theta(x))_{L_2(\Omega)} \leq \sigma_{24}(\xi^m(t) + \eta^m) \|\theta(x)\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда в силу произвольности $\theta(x)$ следует (9.7). Оценка (9.8) следует из (9.7). Предложение доказано.

Теперь мы знаем, что обобщенные решения обладают достаточной гладкостью, а следовательно, в силу (9.2) почти всюду удовлетворяют уравнению (1.1), причем u и v находятся из уравнений (1.4), (1.6) с учетом краевых условий (1.7) почти всюду по $t \in [0, t_f]$. Теорема доказана.

§ 10. Доказательство теоремы 1.3

Введем следующее обозначение:

$$\xi^{m,i}(t) = \left\| \frac{\partial^{i+2}}{\partial t^{i+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + D \left\| \frac{\partial^{i+1}}{\partial t^{i+1}} \Delta w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

В условиях теоремы 1.3 аналогично (2.3) имеет место для всех $m \in \mathbb{Z}^+$, $k_1, 1 \leq k_1 \leq k \leq r+1$, $t \in [0, t_f]$ следующее неравенство:

$$\xi_t^{m,k_1}(t) \leq \sigma_{26}^k \sum_{l=1}^9 A_l^{m,k_1}(t), \quad (10.1)$$

где константа σ_{26}^k зависит лишь от коэффициентов задачи (1.1)–(1.9) и от k , но не зависит от m .

Далее, аналогично (2.4)–(2.17) имеем

$$A_1^{m,k_1}(t) = \left(\frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} Z(x, t), \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right)_{L_2(\Omega)}, \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} A_2^{m,k_1}(t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1+1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_i}^m(x, t) \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned} A_3^{m,k_1}(t) = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1+1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j}^m(x, t) \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} A_4^{m,k_1}(t) = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1+1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_i x_j}^m(x, t) \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$A_5^{m,k_1}(t) = \left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)}, \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} A_6^{m,k_1}(t) = \sum_{i,j,r,s=1}^2 \sum_{p_1+p_2+p_3=k_1+1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j}^m(x, t) \right. \\ \left. \times \frac{\partial^{p_3}}{\partial t^{p_3}} w_{x_r x_s}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$A_7^{m,k_1}(t) = \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} u_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} v_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} \right), \quad (10.8)$$

$$A_8^{m,k_1}(t) = \sum_{i,j,r=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1+1} \left(\left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} u_{x_j x_r}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} v_{x_j x_r}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} \right), \quad (10.9)$$

$$A_9^{m,k_1}(t) = \sum_{i,j,r=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1+1} \left(\left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} u_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j x_r}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} v_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j x_r}^m(x, t) \frac{\partial^{k_1+2}}{\partial t^{k_1+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_1(\Omega)} \right). \quad (10.10)$$

Оценки величин $A_i^{m,k}(t)$, $i = 1, \dots, 9$, не столь трудоемки, как оценки аналогичных величин $A_i(t)$, $i = 1, \dots, 14$, поскольку мы уже располагаем сильными оценками вида (1.17)–(1.19).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.1. В условиях теоремы 1.3 для всех $m \in \mathbb{Z}^+$, $k_1, 1 \leq k_1 \leq k$, $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:

$$\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \leq \sigma_{27}^k \left[(\xi^{m,k}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^3 + 1 \right], \quad (10.11)$$

где константа σ_{27}^k зависит лишь от данных начально-краевой задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.3, от области Ω и числа k и не зависит от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем уравнения (9.1) k_1 раз по t . Из полученной таким образом системы уравнений для всех $m \in \mathbb{Z}^+$ и $t \in [0, t_f]$ следует неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} &\leq C_1 \left(\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} Z(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right. \\ &+ \sum_{i=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_i}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \\ &+ \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i,j=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_i x_j}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
& + \sum_{i,j,r,s=1}^2 \sum_{p_1+p_2+p_3=k_1} \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j}^m(x, t) \frac{\partial^{p_3}}{\partial t^{p_3}} w_{x_r x_s}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
& + \sum_{i=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} u_{x_i}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} v_{x_i}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) \\
& + \sum_{i,j,r=1}^2 \sum_{p_1+p_2=k_1} \left(\left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} u_{x_j x_r}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right. \\
& + \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} w_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} v_{x_j x_r}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
& + \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} u_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j x_r}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \\
& \left. + \left\| \frac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}} v_{x_i}^m(x, t) \frac{\partial^{p_2}}{\partial t^{p_2}} w_{x_j x_r}^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right), \tag{10.12}
\end{aligned}$$

где константа C_1 зависит лишь от коэффициентов уравнения (1.1).

Учитывая неравенства коэрцитивности вида (6.1), вид правых частей уравнений (9.2), (9.3), оценки приближений w^m вида (1.17)–(1.19) и теорему вложения $H_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$ при $p \leq k_1 - 1$, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} u^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^p}{\partial t^p} v^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} \\
& \leq C_2 \left[\left(\sum_{i=1}^p \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^2 + 1 \right], \tag{10.13}
\end{aligned}$$

где константа C_2 зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.3, от k и от области Ω .

Аналогично имеем

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} u^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} v^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} \\
& \leq C_3 \left[(\xi^{m, k_1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^2 + 1 \right], \tag{10.14}
\end{aligned}$$

где C_3 зависит от тех же величин, что и C_2 .

Представим правую часть (10.12) в виде суммы двух слагаемых, $Q_1(t)$ и $Q_2(t)$, где $Q_1(t)$ состоит из величин, содержащих частную производную, в которой дифференцирование по t имеет порядок k_1 , Q_2 состоит из остальных слагаемых.

Оценим сначала $Q_1(t)$, используя теорему вложения $H_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$ и равномерные оценки приближений w^m вида (1.17)–(1.19). Имеем

$$Q_1(t) \leq C_4 \left[(\xi^{m,k_1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^2 + 1 \right]. \quad (10.15)$$

Аналогично оценим $Q_2(t)$. Получаем

$$Q_2(t) \leq C_5 \left[\left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^3 + 1 \right]. \quad (10.16)$$

Константы C_4 и C_5 зависят от тех же величин, что и константа C_2 . Оценки (10.12), (10.15) и (10.16) дают (10.11). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *В условиях теоремы 1.3 для всех $m \in \mathbb{Z}^+$, $k_1, 1 \leq k_1 \leq k$, $t \in [0, t_f]$ имеет место следующая оценка:*

$$\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \leq \sigma_{28}^{k,k_1} \left[(\xi^{m,k_1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^3 + 1 \right], \quad (10.17)$$

где константа σ_{28}^{k,k_1} зависит лишь от данных задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.3, от области Ω , от чисел k, k_1 и не зависит от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (проведем его по индукции по k_1). Для $k_1 = 0$ у нас есть оценка (1.19). Опираясь на неравенство (10.11) и используя индуктивное предположение о выполнении (10.17) при k_1 , покажем, что (10.17) выполняется при $k_1 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} &\leq \sigma_{27}^k \left[(\xi^{m,k_1+1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right)^3 + 1 \right] \\ &\leq \sigma_{25}^k \left[(\xi^{m,k_1+1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1} \sigma_{28}^{k,i} \left((\xi^{m,i}(t))^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^{i-1} \xi^{m,j}(t) \right)^3 \right)^3 + 1 \right) \right] \\ &\leq \sigma_{27}^k (\xi^{m,k_1+1}(t))^{1/2} + C_1 \left[\left(\sum_{i=1}^{k_1} \xi^{m,i}(t) \right)^3 + 1 \right], \end{aligned}$$

где константа C_1 зависит лишь от констант $\sigma_{27}^k, \sigma_{28}^{k,i}$, $i = 1, \dots, k_1$, и k_1 . Тем самым предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. *В условиях теоремы 1.3 для всех $m \in \mathbb{Z}^+$, $k_1, 1 \leq k_1 \leq k$, $t \in [0, t_f]$*

$$\xi_t^{m,k_1}(t) \leq \sigma_{29}^{k,k_1} \left[\xi^{m,k_1}(t) + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^{3^{k_1+2}} + 1 \right], \quad (10.18)$$

где константа σ_{29}^{k,k_1} зависит лишь от данных начально-краевой задачи (1.1)–(1.9), указанных в формулировке теоремы 1.3, от области Ω и чисел k, k_1 и не зависит от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим правую часть (10.1) в виде суммы двух слагаемых, $Q^1(t)$ и $Q^2(t)$, где $Q^1(t)$ состоит из величин, содержащих частную производную, в которой дифференцирование по t имеет порядок $k_1 + 1$, а $Q^2(t)$ состоит из остальных слагаемых. С учетом (10.2)–(10.10) и оценки (10.17) $Q^1(t)$ оценивается аналогично (10.15). Сначала, используя ограниченность вложения $H_2^2(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, оценки (1.17)–(1.19), вид $\xi^{m,i}(t)$ и (10.17), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} u^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{k_1+1}}{\partial t^{k_1+1}} v^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} \\ & \leq C_1 \left[(\xi^{m,k_1}(t))^{1/2} + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial}{\partial t} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^{k_1-1} \left\| \frac{\partial^i}{\partial t^i} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)}^2 + 1 \right] \\ & \leq C_2 \left[(\xi^{m,k_1}(t))^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^{3^{k_1+1}} + 1 \right], \end{aligned} \quad (10.19)$$

где константа C_2 зависит от тех же величин, что и σ_{29}^{k,k_1} .

Теперь, используя те же результаты, неравенства Шварца и Юнга, а также (10.19), оценим $Q^1(t)$. Получаем

$$Q^1(t) \leq C_3 \left[\xi^{m,k_1}(t) + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^{3^{k_1+2}} + 1 \right], \quad (10.20)$$

где константа C_3 зависит от тех же величин, что и C_2 .

Теперь сходным образом оценим $Q^2(t)$, учитывая (10.19) для производных по t меньшего порядка и используя (10.13). Имеем

$$\begin{aligned} Q^2(t) & \leq C_4 \left[\left(\left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} w^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} u^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \frac{\partial^{k_1}}{\partial t^{k_1}} v^m(x, t) \right\|_{H_2^2(\Omega)}^2 \right) \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} w^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)}^2 + 1 \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^{3^{k_1+2}} + 1 \right] \leq C_5 \left[\left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m,i}(t) \right)^{3^{k_1+2}} + 1 \right]. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Константа C_5 зависит от тех же величин, что и C_3 . Оценки (10.20) и (10.21) дают (10.18). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.4. В условиях теоремы 1.3 для всех $m \in \mathbb{Z}^+$, $t \in [0, t_f]$ имеют место следующие оценки:

$$\max_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^{r+2}}{\partial t^{r+2}} w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}} \Delta w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq K_4^r, \quad (10.22)$$

$$\max_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} \nabla^4 w^m(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \leq K_5^r, \quad (10.23)$$

$$\max_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} u^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} v^m(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right) \leq K_6^r, \quad (10.24)$$

где константы K_4^r , K_5^r , K_6^r зависят лишь от величин, указанных в формулировке теоремы 1.3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя оценку решения неравенства Гронуола и (10.18), мы получим рекуррентную оценку

$$\xi^{m, k_1}(t) \leq \left[\xi^{m, k_1}(0) + \sigma_{29}^{k, k_1} \left(\int_0^t \left(\sum_{i=1}^{k_1-1} \xi^{m, i}(\tau) \right)^{3^{k_1+2}} d\tau + t_f \right) \right] \exp(\sigma_{29}^{k, k_1} t_f). \quad (10.25)$$

Из (10.25) шаг за шагом получим (10.22). Оценка (10.23) получится из (10.17) и (10.22), а (10.24) получится из (10.14) и (10.22). Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.5. В условиях теоремы 1.3 для решения $w(x, t)$ начально-краевой задачи (1.1)–(1.9) для всех $t \in [0, t_f]$ имеют место следующие оценки:

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^{r+2}}{\partial t^{r+2}} w(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^{r+1}}{\partial t^{r+1}} \Delta w(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \right) \leq K_4^r, \quad (10.26)$$

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} \nabla^4 w(x, t) \right\|_{L_2(\Omega)} \leq K_5^r, \quad (10.27)$$

$$\text{vrai max}_{t \in [0, t_f]} \left(\left\| \frac{\partial^r}{\partial t^r} u(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial^3}{\partial t^3} v(x, t) \right\|_{H_2^4(\Omega)} \right) \leq K_6^r. \quad (10.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя к пределу по подпоследовательности приближений, сходящейся к решению задачи (1.1)–(1.9), из оценок (10.22)–(10.24) получим оценки (10.26)–(10.28). Предложение доказано.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1.3. Нам осталось доказать две серии оценок (1.23) и (1.24). Мы уже доказали первые три оценки из первой серии. Это оценки (10.22) и (10.23). Доказана также оценка (10.24), первая из серии (1.24). Остальные оценки последовательно получаются из уравнения (1.1) и задачи (1.4), (1.5), (1.7) с учетом неравенств коэрцитивности вида (6.1) и предыдущих оценок каждой серии, а также оценок (1.17)–(1.19) и неравенств коэрцитивности для операторов Δ и Δ^2 с однородными условиями, неравенств Шварца и Гёльдера и теорем вложения. Теорема доказана.

Класс S_a^r гладкости границ Γ определяется условиями выполнения неравенств коэрцитивности для тех же задач, что и класс S_a , только соответственно для производных более высокого порядка.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу и И. И. Воровичу за полезное обсуждение работы.

Список литературы

1. Ворович И. И. О некоторых прямых методах в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1957. Т. 21. № 6. С. 747–784.
2. Седенко В. И. Единственность обобщенного решения начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1319–1322.
3. Седенко В. И. Теорема единственности обобщенного решения начально-краевой задачи нелинейной теории колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений // Изв. АН СССР. Сер. мех. тв. тела. 1991. № 6. С. 142–150.
4. Морозов Н. Ф. О нелинейных колебаниях тонких пластин с учетом инерции вращения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 3. С. 522–525.
5. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
6. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
7. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
8. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Ростов-на-Дону

Поступило в редакцию
14.VI.1994