Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Жгун, Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов. I, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 6, 29–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/im901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 18:03:43

УДК 512.745.2

В. С. Жгун

Вариация фактора Мамфорда действия тора на многообразии полных флагов. I

Изучается вариация фактора Мамфорда действия максимального тора T на многообразии флагов G/B в зависимости от проективного вложения $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, причем T -линеаризация получается из стандартной G -линеаризации. Для этого описываются линейные оболочки носителей полустабильных орбит, что позволяет вычислить ранг группы Пикара фактора $(G/B)^{ss} // T$ в случае, когда группа G не содержит простых компонент типа A_n .

Библиография: 12 наименований.

Введение

Пусть G – связная полупростая алгебраическая группа над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, T – максимальный тор в G , а B – содержащая его борелевская подгруппа. Рассмотрим действие тора T на многообразии флагов G/B левыми сдвигами. Пусть χ – некоторый вес тора T , строго доминантный относительно борелевской подгруппы B . Хорошо известно, что G/B G -эквивариантно вкладывается в проективизацию $\mathbb{P}(V(\chi))$ неприводимого модуля $V(\chi)$ старшего веса χ как проективизация орбиты старшего вектора. Обозначим через L_χ ограничение на многообразие флагов G/B G -линеаризованного пучка $\mathcal{O}(1)$ на проективном пространстве $\mathbb{P}(V(\chi))$. Так реализуются все обильные G -линеаризованные одномерные расслоения на G/B (см. [1]). Тогда согласно [2] можно определить открытое по Зарискому подмножество $X_{L_\chi}^{ss}$ флагового многообразия $X = G/B$, для которого существует категорный фактор $X_{L_\chi}^{ss} // T$ действия T . Этот фактор мы назовем *фактором Мамфорда*. В настоящей работе рассмотрим вариацию фактора Мамфорда в зависимости от T -линеаризованного пучка L_χ и опишем линейные оболочки носителей полустабильных T -орбит, что позволит нам вычислить ранг группы Пикара $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ проективного многообразия $X_{L_\chi}^{ss} // T$ (в зависимости от доминантного веса χ). В данном случае $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss} // T)$ – конечно порожденная свободная абелева группа, что будет показано в теореме 3.1.

Напомним определения множеств полустабильных и стабильных точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – алгебраическое многообразие с действием группы G , L – обратимый обильный G -линеаризованный пучок на X .

(i) Множеством полустабильных точек называется

$$X_L^{ss} = \{x \in X \mid \exists n > 0, \exists \sigma \in \Gamma(X, L^{\otimes n})^G: \sigma(x) \neq 0\}.$$

(ii) Множеством стабильных точек называется

$$X_L^s = \{x \in X_L^{ss} \mid \text{орбита } Gx \text{ замкнута в } X_L^{ss} \text{ и стабилизатор } G_x \text{ конечен}\}.$$

Орбиты действия максимального тора T на флаговых многообразиях изучались, в частности, в работах [3]–[5]. В работе [4] доказана нормальность замыканий типичных T -орбит на G/P (где $P \supseteq B$ – параболическая подгруппа). В работе [3] изучена нормальность необщих T -орбит на G/P . В [5] получен ответ на вопрос: для каких групп G и их параболических подгрупп P возможно равенство $(G/P)_L^{ss} = (G/P)_L^s$ для некоторого обильного пучка L ? Кольца рациональных когомологий факторов $X_{L_x}^{ss}$ были описаны в работах [6] и [7] с помощью методов симплектической геометрии.

В §1 мы выведем критерий Сешадри [8] стабильности точки на G/B относительно действия максимального тора и разобьем камеру Вейля C на классы GIT-эквивалентности, для точек которых совпадают множества $X_{L_x}^{ss}$. В §2 опишем линейные оболочки носителей замкнутых T -орбит подмногообразия $X_{L_x}^{ss}$. В §3 применим полученные результаты к вычислению ранга группы $\text{Pic}(X_{L_x}^{ss}/T)$ в случае, когда группа G не содержит простых компонент типа A_n .

В последующих публикациях автор надеется вычислить группы Пикара факторов флаговых многообразий для групп, в которые входят простые компоненты типа A_n , а также изучить вариацию фактора не только для стандартной, но и для всех возможных T -линеаризаций обильных линейных расслоений над G/B .

Введем следующие обозначения: готическими буквами будем обозначать алгебры Ли, соответствующие группам Ли; $\Xi = \Xi(T)$ – решетка характеров тора T ; двойственная к ней решетка отождествляется с решеткой однопараметрических подгрупп $\Lambda(T)$ с помощью инвариантного относительно группы Вейля спаривания, которое мы обозначим $\langle \cdot; \cdot \rangle$; $\Xi_{\mathbb{Q}} = \Xi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – пространство всех рациональных характеров тора T ; $\Lambda_{\mathbb{Q}} = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – пространство всех рациональных однопараметрических подгрупп тора T ; $U \subset B$ – унипотентный радикал группы B ; $W = N_G(T)/T$ – группа Вейля; на пространстве $\Xi_{\mathbb{Q}}$ мы введем W -инвариантное скалярное произведение $(\cdot; \cdot)$, которое позволит отождествить $\Xi_{\mathbb{Q}}$ с $\Lambda_{\mathbb{Q}}$; Δ – система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно тора T ; Δ^+ (Δ^-) – система положительных (отрицательных) корней относительно борелевской подалгебры $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$; Π – система простых корней; $w_0 \in W$ – элемент группы Вейля, переводящий все множество положительных корней в множество отрицательных корней; C – положительная камера Вейля.

Пусть $\tilde{\Delta} \subset \Delta$ – подсистема корней, т.е. множество корней, являющееся абстрактной системой корней, $C_{\tilde{\Delta}} := \{\chi \in \Xi_{\mathbb{Q}} \mid (\chi; \alpha) \geq 0 \ \forall \alpha \in \tilde{\Delta}^+\}$ – положительная камера Вейля для системы корней $\tilde{\Delta}$.

Подсистемы корней $\tilde{\Delta} \subset \Delta$, для которых выполнено $\tilde{\Delta} = \langle \tilde{\Delta} \rangle \cap \Delta$, где $\langle \tilde{\Delta} \rangle$ – линейная оболочка системы $\tilde{\Delta}$, мы будем называть *насыщенными*.

Через $V(\chi)$ обозначим неприводимый G -модуль со старшим строго доминантным весом $\chi \in C \cap \Xi$ и старшим вектором $v_{\chi} \in V(\chi)$. Пусть тор T действует на линейном пространстве $V = \bigoplus_{\lambda \in \Xi} V_{\lambda}$, где V_{λ} – весовая компонента веса $\lambda \in \Xi$, и $v = \sum_{\lambda \in \Xi} v_{\lambda}$, где $v_{\lambda} \in V_{\lambda}$ и $v_{\lambda} \neq 0$. Обозначим через $\text{supp}(v) \subset \Xi_{\mathbb{Q}}$ выпуклую оболочку весов $\lambda \in \Xi$, для которых в разложении вектора v на весовые компоненты выполнено $v_{\lambda} \neq 0$. Заметим, что $\text{supp}(v) = \text{supp}(tv)$ для любого $t \in T$, тем самым корректно определен носитель T -орбиты, обозначаемый $\text{supp}(Tv)$. Определим также носитель T -инвариантного множества как выпуклую оболочку носителей всех T -орбит из этого множества. Пусть $x \in \mathbb{P}(V)$ – точка, отвечающая прямой, порожденной вектором $v \in V$. Обозначим через

$\text{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V))$ носитель орбиты $Tv \hookrightarrow V$. Множество весов T -орбиты при вложении $Tx \subset \mathbb{P}(V(\chi))$ обозначим $\text{Pd}_\chi(Tx)$.

Далее, если не оговорено противное, везде рассматривается G -эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ в качестве G -орбиты прямой, порожденной старшим вектором v_χ .

Автор глубоко признателен своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи, а также за постоянное внимание к работе. Благодарю Д. А. Тимашева, замечания которого позволили существенно упростить доказательство теоремы 3.1, и Э. Б. Винберга за полезные комментарии и обсуждение некоторых вопросов. Выражаю признательность рецензенту за исправление ряда неточностей и ошибок.

§ 1. Критерий стабильности

Как мы увидим далее, стабильность точки зависит от того, в каком многообразии Шуберта она лежит, поэтому ниже приведем без доказательства лемму из работы [9], описывающую строение многообразий Шуберта при данном проактивном вложении.

ЛЕММА 1.1 [9, лемма 2.12]. Пусть $w \in W$ – элемент группы Вейля, и пусть BwB/B – соответствующая ему клетка Шуберта. Рассмотрим замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, где χ – строго доминантный вес. Пусть $f \in V(\chi)$ – вектор из орбиты старшего вектора. Тогда $\langle f \rangle \in BwB/B$, если и только если $w\chi \in \text{supp}(f)$ и $f \in \mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi}$, где $\mathfrak{U}(\mathfrak{b})$ – универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{b}$, а $v_{w\chi} = wv_\chi$ – вектор веса $w\chi$ (входящего в неприводимое представление $V(\chi)$ с кратностью 1).

Используя лемму 1.1, легко доказать критерий стабильности, принадлежащий Сешадри [8] (см. далее утверждение 1.4). Мы приведем доказательство, отличное от доказательства Сешадри, но сначала напомним определение численной функции Мамфорда для действия тора и численный критерий Мамфорда.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть L – обильное T -линеаризованное расслоение на T -многообразии X , определяющее T -эквивариантное вложение X в проективное пространство $\mathbb{P}(V)$, $\lambda \in \Lambda(T)$ – однопараметрическая подгруппа. Тогда для точки $x \in \mathbb{P}(V)$ значение численной функции Мамфорда определяется следующим образом:

$$\mu^L(x, \lambda) = \min_{\tau \in \text{supp}(Tx)} \langle \tau; \lambda \rangle.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3 (численный критерий Мамфорда [2]). Пусть X – многообразие с действием тора T , а L – обильное T -линеаризованное расслоение на нем, задающее T -эквивариантное вложение X в проективное пространство $\mathbb{P}(V)$. Точка $x \in \mathbb{P}(V)$ стабильна (полустабильна) тогда и только тогда, когда $\mu^L(x, \lambda) < 0$ (соответственно, $\mu^L(x, \lambda) \leq 0$) для любой нетривиальной однопараметрической подгруппы $\lambda \in \Lambda(T)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4 [8]. Пусть C – камера Вейля, $x \in G/B$ и $x = bwB/B$. Рассмотрим очень обильный пучок L_χ , отвечающий строго доминантному весу χ . Пусть $\lambda \in C$ – однопараметрическая подгруппа, лежащая в камере Вейля. Тогда $\mu^{L_\chi}(x, \lambda) = \langle w\chi; \lambda \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим носитель орбиты Tx . Поскольку $Tx \subset BwB/B$, по лемме 1.1 имеем $w\chi \in \text{supp}(Tx)$ и выполнено включение

$$\text{supp}(Tx) \subset \text{supp}(BwB/B) = \text{supp}(\mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi}),$$

где последнее равенство также следует из леммы 1.1.

Если вес τ принадлежит $\text{supp}(\mathfrak{U}(\mathfrak{b})v_{w\chi})$, то

$$\tau = w\chi + \sum_{\alpha \in \Delta^+} c_\alpha \alpha,$$

где $c_\alpha \geq 0$. Спаривая вес τ с однопараметрической подгруппой λ , получаем

$$\langle \tau; \lambda \rangle = \langle w\chi; \lambda \rangle + \sum_{\alpha \in \Delta^+} c_\alpha \langle \alpha; \lambda \rangle \geq \langle w\chi; \lambda \rangle,$$

так как $c_\alpha \geq 0$ и $\langle \lambda; \alpha \rangle \geq 0$. Теперь вычислим численную функцию

$$\mu^{L^\chi}(x, \lambda) = \min_{\tau \in \text{supp}(Tx)} \langle \tau; \lambda \rangle = \langle w\chi; \lambda \rangle,$$

что и требовалось доказать.

Получим описание множества полустабильных точек. Для этого введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Элемент $w \in W$ называется χ -полустабильным, если $\langle w\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Множество таких w обозначим W_χ^{st} .

ТЕОРЕМА 1.6. Рассмотрим G -эквивариантное замкнутое вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Тогда множество полустабильных точек относительно действия тора (с линеаризацией, индуцированной стандартным действием T на $V(\chi)$) может быть найдено по следующей формуле:

$$X_{L^\chi}^{ss} = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} \tilde{w}BwB/B.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, $\bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B$ – множество точек x таких, что $\mu^{L^\chi}(x, \lambda) \leq 0$ для любой однопараметрической подгруппы $\lambda \in C$.

Воспользуемся известным равенством для численных функций:

$$\mu^{L^\chi}(x, \lambda) = \mu^{L^\chi}(\tilde{w}x, \tilde{w}\lambda),$$

где $\tilde{w}$ – представитель элемента группы Вейля в нормализаторе тора T .

Из сказанного выше следует, что условие полустабильности точки x , а именно $\mu^{L^\chi}(x, \lambda) \leq 0$ для любого $\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}(T)$, может быть переписано как $\mu^{L^\chi}(\tilde{w}x, \lambda) \leq 0$ для любых $\lambda \in C$ и $\tilde{w} \in W$. Значит, множество, удовлетворяющее этим условиям, может быть получено следующим образом:

$$X_{L^\chi}^{ss} = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \left(\bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B \right) = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} \tilde{w}BwB/B.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. Множество $X_{L_\chi}^{ss}$ является наибольшим $N_G(T)$ -инвариантным подмножеством в $\bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. Рассмотрим два обильных T -линеаризованных расслоения L_{χ_1} и L_{χ_2} . Тогда из $X_{L_{\chi_1}}^{ss} = X_{L_{\chi_2}}^{ss}$ следует $W_{\chi_1}^{st} = W_{\chi_2}^{st}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любого элемента $w \in W_\chi^{st}$ найдется полустабильная T -орбита, лежащая в клетке BwB/B . Отсюда будет следовать, что множество W_χ^{st} однозначно восстанавливается по $X_{L_\chi}^{ss}$. Имеем $\langle w\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$, что равносильно $0 \in w\chi + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{Q}_+ \alpha$, откуда следует, что $0 \in \text{supp}(BwB/B)$ согласно следствию 2.6, которое мы докажем в следующем параграфе в силу его технической сложности. Однако для типичной орбиты Tx из клетки BwB/B имеем $\text{supp}(Tx) = \text{supp}(BwB/B)$, тем самым, $0 \in \text{supp}(Tx)$, т. е. типичная орбита клетки BwB/B полустабильна.

Разобьем камеру Вейля на клетки C_i – классы GIT-эквивалентности, характеризуемые следующим свойством: два характера χ_1, χ_2 принадлежат одной клетке C_i тогда и только тогда, когда $X_{L_{\chi_1}}^{ss} = X_{L_{\chi_2}}^{ss}$, что по утверждению 1.8 эквивалентно $W_{\chi_1}^{st} = W_{\chi_2}^{st}$.

Пусть A – конус, порожденный простыми корнями. Определим по элементу $\chi \in C^0$ конус

$$\sigma_\chi = C \cap \bigcap_{\substack{w \in W \\ \chi \in (-wA)}} (-wA).$$

ТЕОРЕМА 1.9 (вариация фактора Мамфорда). Множество конусов σ_χ для $\chi \in C^0$ конечно. Они образуют веер с носителем C . Внутренности этих конусов отвечают классам GIT-эквивалентности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность множества следует из того, что конусы σ_χ получаются пересечением конусов из конечного набора $\{-wA \mid w \in W\}$. Из определения конусов ясно, что либо внутренности этих конусов не пересекаются, либо один является гранью другого (в частности, эти конусы могут совпадать).

По определению имеем $w \in W_\chi^{st}$, когда $\langle w\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Это равносильно $w\chi \in -A$, что, в свою очередь, эквивалентно $\chi \in -w^{-1}A$. Таким образом, внутренность конуса σ_χ соответствует в точности тем элементам $\tilde{\chi}$, для которых $W_{\tilde{\chi}}^{st} = W_\chi^{st}$.

Изучим множества полустабильных точек. В последующих двух утверждениях мы докажем, что для полупростых групп, не содержащих простых компонент типа A_n , коразмерность множества нестабильных точек не меньше двух.

ЛЕММА 1.10. Пусть группа G не содержит простых компонент типа A_n . Пусть $s_\alpha \in W$ – отражение, отвечающее простому корню α . Тогда $s_\alpha w_0$ принадлежит множеству W_χ^{st} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо проверить, что $\langle s_\alpha w_0 \chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C$. Обозначим через π_α фундаментальный вес, двойственный к простому корню α . Если $\beta, \gamma \in \Pi$, то $(\pi_\gamma; \beta) = \frac{(\beta; \beta)}{2} \delta_{\gamma\beta}$. Также имеет место равенство $s_\gamma \pi_\gamma = \pi_\gamma - \gamma$.

Вес χ – доминантный, значит, $w_0 \chi$ – антидоминантный и $w_0 \chi = -\sum_\beta c_\beta \pi_\beta$, где $c_\beta > 0$. Поскольку $\lambda \in C$, имеем $\lambda = \sum_\beta a_\beta \pi_\beta$, где $a_\beta \geq 0$.

Итак,

$$\begin{aligned}
 -\langle s_\alpha w_0 \chi; \lambda \rangle &= \left\langle s_\alpha \sum_{\beta} c_\beta \pi_\beta; \sum_{\beta} a_\beta \pi_\beta \right\rangle \\
 &= \left(c_\alpha (\pi_\alpha - \alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; a_\alpha \pi_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta \right) \\
 &= c_\alpha a_\alpha \left((\pi_\alpha; \pi_\alpha) - \frac{(\alpha; \alpha)}{2} \right) + \left(\sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; \sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta \right) \\
 &\quad + \left(c_\alpha \pi_\alpha; \sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} a_\beta \pi_\beta \right) + \left(\sum_{\beta \neq \alpha, \beta \in \Pi} c_\beta \pi_\beta; a_\alpha \pi_\alpha \right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено, так как множитель первого слагаемого $(\pi_\alpha; \pi_\alpha) - \frac{(\alpha; \alpha)}{2}$ неотрицателен для простых систем корней, отличных от A_n (что несложно получить из [10, табл. 2, с. 308–309]), остальные слагаемые также неотрицательны, поскольку каждое из них является скалярным произведением двух доминантных весов.

ТЕОРЕМА 1.11. Пусть группа G не содержит простых компонент типа A_n . Тогда дополнение до множества полустабильных точек в G/B имеет коразмерность не менее двух.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим формулу для множества полустабильных точек, учитывая, что по лемме 1.10 выполнено $s_\alpha w_0 \in W_\chi^{st}$ для всех $\alpha \in \Pi$, а также $w_0 \in W_\chi^{st}$:

$$X_{L_\chi}^{ss} = \bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \bigcup_{w \in W_\chi^{st}} BwB/B \supset \bigcap_{\tilde{w} \in W} \tilde{w} \left(\bigcup_{\alpha \in \Pi} Bs_\alpha w_0 B/B \cup Bw_0 B/B \right).$$

Множество $\bigcup_{\alpha \in \Pi} Bs_\alpha w_0 B/B \cup Bw_0 B/B$ уже имеет дополнение коразмерности два, отсюда $X_{L_\chi}^{ss}$ имеет дополнение коразмерности не менее двух, так как является конечным пересечением множеств с дополнением коразмерности не менее двух (сдвиг на $\tilde{w}$ не меняет коразмерности дополнения).

Рис. 1

СЛЕДСТВИЕ 1.12. В условиях теоремы 1.11 имеем $\text{Pic}(G/B) = \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss})$, а также $\text{Pic}_T(G/B) = \text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})$, где $\text{Pic}_T(X)$ – группа T -линеаризованных линейных расслоений на T -многообразии X .

ПРИМЕР 1.13. Приведем пример, который показывает, что в случае системы корней типа A_2 утверждения леммы 1.10 и теоремы 1.11 перестают быть верными.

Пусть $\chi = a\pi_1 + b\pi_2$, где $a > b$ (рис. 1). Тогда $\langle s_{\alpha_2} w_0 \chi; \lambda \rangle > 0$ для $\lambda = \pi_2 \in C$. Таким образом, $s_{\alpha_2} w_0 \notin W_\chi^{st}$, а значит, дивизор $Bs_{\alpha_2} w_0 B/B$ состоит из неполуустойчивых точек.

§ 2. Линейные оболочки носителей полуустойчивых T -орбит

В этом параграфе мы опишем линейные оболочки носителей T -орбит на $X_{L_\chi}^{ss}$.

Пусть $x \in G/B$ представлен в виде $x = bww_0 B/B$. Разложим $b \in B$ в произведение элемента t тора и унипотентного элемента u , а именно $b = tu$. Тогда

$$\text{supp}(Tx) = \text{supp}(Tbww_0 B/B) = \text{supp}(Tuw_0 B/B).$$

Представим элемент u в виде экспоненты от элемента алгебры Ли:

$$u = \exp\left(\sum_{\alpha \in \bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+} c_\alpha e_\alpha\right) = \text{id} + \frac{\sum c_\alpha e_\alpha}{1!} + \frac{(\sum c_\alpha e_\alpha)^2}{2!} + \dots,$$

где $e_\alpha \in \mathfrak{u}$ соответствует положительному корню α , $c_\alpha \neq 0$, а $\bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+$ – некоторый набор положительных корней. Будем считать, что элемент u записан в нормальной форме, т. е. $\bar{\Delta}^+ \subseteq \Delta^+ \cap w\Delta^+$ [11, п. 28.4].

Поскольку $\text{supp}(ww_0 B/B) = ww_0 \chi$ и действие T не меняет носитель, то, исходя из формулы для u , получаем

$$\text{supp}(Tx) \subset ww_0 \chi + \sum_{\alpha \in \bar{\Delta}^+} \mathbb{Z}_+ \alpha.$$

Докажем следующее утверждение, описывающее линейную оболочку носителя в терминах подсистемы корней $\bar{\Delta}^+$, для которой мы предполагаем, что она насыщена.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть w – элемент группы Вейля такой, что $ww_0 \in W_\chi^{st}$, $\tilde{\Delta} \subseteq \Delta$ – насыщенная подсистема корней, для которой

$$0 \in ww_0 \chi + \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+ \alpha.$$

Тогда носитель T -орбиты $\text{supp}(Tuw_0 B/B)$, где $u = \exp(\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_\alpha e_\alpha)$, содержит нуль для почти всех значений c_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.2. В условиях теоремы 2.1 пусть α_0 – старший корень системы корней $\tilde{\Delta}$ и во множестве весов орбиты содержится строго антидоминантный вес $M \in (-C)^0 \cap \text{supp}(Tuw_0 B/B)$. Тогда вес $\alpha_0 + M$ также принадлежит множеству весов T -орбиты (рис. 2).

Рис. 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v_M – вектор веса M , входящий в весовое разложение вектора, соответствующего точке орбиты Tx . Выпишем формулу для вектора v_M :

$$v_M = \sum_{M=w_0\chi + \sum_{\alpha_i \in \tilde{\Delta}^+} a_i \alpha_i} \frac{c_{\alpha_0}^{a_0} \dots c_{\alpha_l}^{a_l}}{(\sum_i a_i)!} \text{Sym}(\underbrace{e_{\alpha_0}, \dots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \dots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \dots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi}.$$

В этой формуле внешняя сумма берется по всем наборам целых неотрицательных чисел $\{a_0, a_1, \dots, a_k\}$, для которых выполнено равенство $M = w_0\chi + \sum_{\alpha_i \in \tilde{\Delta}^+} a_i \alpha_i$, где α_i – корни из подсистемы $\tilde{\Delta}^+$, причем α_0 – старший корень; $\text{Sym}(\cdot)$ – сумма по всем перестановкам произведений переменных, стоящих в скобках.

Заметим, что вектор v_M не равен нулю при почти всех значениях коэффициентов $\{c_{\alpha_i}\}$, если и только если найдется набор $\{a_i\}$ такой, что

$$\text{Sym}(\underbrace{e_{\alpha_0}, \dots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \dots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \dots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi} \neq 0$$

(обозначим этот вектор v_M^0). Таким образом, чтобы доказать, что вектор $v_{M+\alpha_0}$ не равен нулю (при почти всех значениях $\{c_{\alpha_i}\}$), достаточно доказать, что

$$\text{Sym}(e_{\alpha_0}, \underbrace{e_{\alpha_0}, \dots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \dots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \dots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi} \neq 0.$$

Покажем, что вектор $\text{Sym}(e_{\alpha_0}, \underbrace{e_{\alpha_0}, \dots, e_{\alpha_0}}_{a_0}, \dots, \underbrace{e_{\alpha_l}, \dots, e_{\alpha_l}}_{a_l}) v_{w_0\chi}$ пропорцио-

нален вектору $e_{\alpha_0} v_M^0$. Элемент e_{α_0} коммутирует со всеми e_{α_i} , где $\alpha_i \in \tilde{\Delta}^+$ (действительно, $[e_{\alpha_i}, e_{\alpha_0}] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha_i + \alpha_0} = 0$, так как вес $\alpha_i + \alpha_0$ не является корнем алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Значит, e_{α_0} можно вынести из-под знака симметризации.

Мы завершим доказательство леммы, если покажем, что $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$. Рассмотрим представление $\mathfrak{sl}_2 = \langle e_{\alpha_0}, f_{\alpha_0}, h_{\alpha_0} \rangle$, порожденное вектором v_M^0 . Тогда имеем $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$, так как M строго антидоминантен, а значит, v_M^0 не может быть старшим вектором.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. В лемме 2.2 антидоминантность веса M можно заменить на более слабое условие, а именно $(M; \alpha_0) < 0$. Тогда $e_{\alpha_0} v_M^0 \neq 0$. Действительно, из условия $(M; \alpha_0) < 0$ следует, что v_M^0 не может быть старшим вектором для соответствующего представления $\mathfrak{sl}_2$ (остальная часть доказательства остается без изменений).

Докажем следующее вспомогательное утверждение, но перед этим введем обозначения. Пусть M – рациональный вес, а $\tilde{\Delta}$ – некоторая система корней. Обозначим через $H_M(\tilde{\Delta}^+)$ аффинный конус $M + \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} \mathbb{Q}_+ \alpha$, а через $\delta H_M(\tilde{\Delta}^+)$ его границу. Иногда мы не будем указывать систему корней в этих обозначениях, что не должно привести к двусмысленности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.4. Пусть $ww_0\chi$ – такой вес, что

$$0 = ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \Delta^+} c_\alpha \alpha, \quad c_\alpha \geq 0.$$

Тогда любой луч из $-C$ с началом в нуле пересекает границу $\delta H_{ww_0\chi}(\Delta^+)$, причем пересечение лежит внутри многогранника Pd_χ весов представления $V(\chi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π_α – фундаментальный вес, двойственный к простому корню α . Рассмотрим луч, лежащий в $-C$, с началом в нуле, заданный формулой

$$l(t) = -t \sum_{\alpha \in \Pi} b_\alpha \pi_\alpha, \quad b_\alpha \geq 0.$$

Конус $H_{ww_0\chi}$ задается неравенствами $(\pi_\beta, x) \geq (\pi_\beta, ww_0\chi)$ для всех $\beta \in \Pi$. Обозначим через $l(t_\beta)$ точку пересечения (если такая точка существует) прямой, на которой лежит луч, с гранью коразмерности один конуса $H_M(\tilde{\Delta}^+)$, перпендикулярной вектору π_β . (Прямая может быть параллельна гиперплоскости, однако она не может быть параллельна всем гиперплоскостям, так как конус $H_{ww_0\chi}$ телесный, тем самым, хотя бы одна точка пересечения прямой и гиперплоскости существует.) Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что все $t_\beta \geq 0$. Уравнение пересечения прямой с гранью конуса, перпендикулярной вектору π_β , записывается в виде

$$(\pi_\beta; l(t_\beta)) - (\pi_\beta; ww_0\chi) = -t_\beta \sum_{\alpha \in \Pi} b_\alpha (\pi_\alpha; \pi_\beta) + \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha (\alpha; \pi_\beta) = 0.$$

Отсюда имеем

$$t_\beta = \frac{\sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha (\alpha; \pi_\beta)}{\sum_{\alpha \in \Pi} b_\alpha (\pi_\alpha; \pi_\beta)} \geq 0,$$

так как $(\alpha; \pi_\beta) \geq 0$, $(\pi_\alpha; \pi_\beta) \geq 0$, $b_\alpha, c_\alpha \geq 0$. Минимальное из всех t_β даст точку пересечения луча $l(t)$ и границы $\delta H_{ww_0\chi}$ (рис. 3).

Докажем теперь, что пересечение лежит в многограннике Pd_χ весов представления. Для этого необходимо показать, что это пересечение принадлежит конусу $H_{w_0\chi}$, так как $P_\chi \cap (-C) = H_{w_0\chi} \cap (-C)$. Рассмотрим решения $\tilde{t}_\beta$ уравнений $(\pi_\beta; l(\tilde{t}_\beta)) = (\pi_\beta; w_0\chi)$ (уравнения граней конуса $H_{w_0\chi}$). Поскольку грани конуса $H_{w_0\chi}$ параллельны соответствующим граням конуса $H_{ww_0\chi}$, то достаточно показать, что $\tilde{t}_\beta \geq t_\beta$. Известно, что

$$ww_0\chi = w_0\chi + \sum_{\alpha \in \Pi} d_\alpha \alpha, \quad d_\alpha \geq 0,$$

Рис. 3

тем самым,

$$\tilde{t}_\beta = \frac{\sum_{\alpha \in \Pi} d_\alpha(\pi_\beta; \alpha) - \sum_{\alpha \in \Pi} (\pi_\beta; ww_0\chi)}{\sum_{\alpha \in \Pi} b_\alpha(\pi_\alpha; \pi_\beta)} \geq \frac{-\sum_{\alpha \in \Pi} (\pi_\beta; ww_0\chi)}{\sum_{\alpha \in \Pi} b_\alpha(\pi_\alpha; \pi_\beta)} = t_\beta,$$

так как $(\pi_\beta; \alpha) \geq 0$ и $d_\alpha \geq 0$.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2.5. Пусть $ww_0 \in W_\chi^{st}$, α_0 – старший корень насыщенной подсистемы $\tilde{\Delta}$, для которой $ww_0\chi = -\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha \geq 0$. Тогда $\alpha_0 \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вес $w_0\chi$ строго антидоминантен, поэтому некоторый корень α положителен тогда и только тогда, когда $\langle w_0\chi; \alpha \rangle \leq 0$. Поскольку $ww_0\chi = -\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha \geq 0$, то $\langle ww_0\chi; \lambda \rangle \leq 0$ для любого $\lambda \in C_{\tilde{\Delta}}^-$. Так как α_0 – старший корень системы $\tilde{\Delta}$, то он принадлежит замыканию камеры Вейля $C_{\tilde{\Delta}}^-$ и его можно взять в качестве λ . Таким образом, $\langle ww_0\chi; \alpha_0 \rangle = \langle w_0\chi; w^{-1}\alpha_0 \rangle \leq 0$, т. е. корень $w^{-1}\alpha_0$ положителен.

Построим кусочно линейный путь из точки нуль в точку $ww_0\chi$. Будем строить его по индукции. Опишем базу, а затем шаг индукции.

Пусть, как и в лемме 2.5, α_0 – старший корень насыщенной подсистемы $\tilde{\Delta}$, к тому же $ww_0\chi = -\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_\alpha \alpha$, где $c_\alpha \geq 0$.

Рассмотрим луч, проходящий через корень $-\alpha_0$, с началом в точке нуль. Поскольку α_0 – старший корень, этот луч принадлежит антидоминантной камере Вейля $C_{\tilde{\Delta}}^-$. По утверждению 2.4 он пересечет $\delta H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}^+) \cap (-C_{\tilde{\Delta}}^-)$ в некоторой точке M_1 . Таким образом, M_1 принадлежит грани конуса $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}^+)$. Эта грань, очевидно, является конусом $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_1^+)$ для некоторой насыщенной подсистемы корней $\tilde{\Delta}_1 \subset \tilde{\Delta}$. Так как точка M_1 лежит в антидоминантной камере Вейля, то она лежит и в камере $-C_{\tilde{\Delta}_1}^-$. Также можно утверждать, что $M_1 = -k_0\alpha_0$ для $k_0 \in \mathbb{Q}_+$.

Опишем шаг индукции. На i -м шаге построены последовательность насыщенных подсистем корней

$$\tilde{\Delta}^+ \supseteq \tilde{\Delta}_1^+ \supseteq \dots \supseteq \tilde{\Delta}_{i-1}^+ \supseteq \tilde{\Delta}_i^+$$

Рис. 4

Рис. 5

и последовательность корней $\{\alpha_0, \beta_1, \dots, \beta_i\}$, где β_j – старший корень подсистемы $\tilde{\Delta}_j$, и уже построена последовательность весов $\{0, M_1, M_2, \dots, M_i\}$ такая, что $M_j \in H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_j^+) \cap (-C_{\tilde{\Delta}_j})$, а также $M_j = M_{j-1} - k_{j-1}\alpha_{j-1}$, где $k_{j-1} \in \mathbb{Q}_+$ (рис. 4 и рис. 5).

Построим вес M_{i+1} и систему корней $\tilde{\Delta}_{i+1}^+$. Вес M_i лежит в пересечении $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+) \cap (-C_{\tilde{\Delta}_i})$. Так как старший корень β_i принадлежит камере Вейля $C_{\tilde{\Delta}_i}^-$, то точка пересечения луча $M_i - t\beta_i$ (где $t \in \mathbb{Q}_+$) с началом в M_i и границы $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+) \cap (-C_{\tilde{\Delta}_i})$ лежит на $\delta H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+)$. Пусть грани конуса $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+)$, которой принадлежит M_i , соответствует насыщенная подсистема корней $\tilde{\Delta}_{i+1}^+ \subset \tilde{\Delta}_i^+$. Заметим, что $M_{i+1} \in (-C_{\tilde{\Delta}_{i+1}}^-)$, а число k_{i+1} рационально, так как вес M_i рационален и конус $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+)$ рационален. Тем самым все условия выполнены.

Наше построение закончится, когда $M_i = ww_0\chi$ для некоторого i . Все веса M_i рациональны, значит, найдется такое N , что все NM_i – целые и Nk_i – целые. Если вместо веса $ww_0\chi$ мы возьмем вес $Nww_0\chi$ (это заменит вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$ на $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(N\chi))$, что не повлияет на утверждение теоремы), то путь, построенный выше, будет проходить через целые веса NM_i . Эти веса удовлетворяют равенствам $NM_{i+1} = NM_i - \tilde{k}_i\beta_i$, где $\tilde{k}_i$ – целые. Далее мы можем считать, что M_i удовлетворяют описанным выше условиям.

Покажем теперь, что все веса M_i принадлежат весам орбиты $Tuww_0B/B$. Отсюда, в частности, будет следовать, что нуль принадлежит носителю орбиты $Tuww_0B/B$. Для этого воспользуемся индукцией. Заметим, что $ww_0\chi$ принадлежит весам орбиты $\text{Pd}_\chi(Tuww_0B/B)$.

Пусть теперь $M_{i+1} + l\beta_i \in \text{Pd}_\chi(Tuww_0B/B)$ для некоторого l , $0 \leq l < k_i$; покажем, что и $M_{i+1} + (l+1)\beta_i \in \text{Pd}_\chi(Tuww_0B/B)$. Для этого к весу $M_{i+1} + l\beta_i$, корню β_i и насыщенной системе корней $\tilde{\Delta}_i$ применим усиленный вариант леммы 2.2 (замечание 2.3). Но для этого необходимо проверить, что условия леммы выполнены, а именно:

$$(*) (M_{i+1} + l\beta_i, \beta_i) < 0 \text{ для всех } 0 \leq l < k_i;$$

(**) корень β_i входит в экспоненциальное представление u , т.е. $\beta_i \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$.

В случае, когда $\tilde{\Delta}_i \subsetneq \Delta$, для применения леммы 2.2 к весу $M_{i+1} + l\beta_i$ и системе $\tilde{\Delta}_i$ необходимо, чтобы в формуле для $v_{M_{i+1}+l\beta_i}$ из этой леммы встречались только e_{α_j} , для которых $\alpha_j \in \tilde{\Delta}_i^+$. Но это условие выполнено, так как

$$M_{i+1} + l\beta_i \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}_i^+} \mathbb{Q}_+\alpha$$

и конус $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta}_i^+)$ является гранью конуса $H_{ww_0\chi}(\tilde{\Delta})$.

Итак, по построению имеем

$$M_{i+1} = -(k_i\beta_i + \dots + k_1\beta_1 + k_0\alpha_0),$$

где β_j – старший корень системы $\tilde{\Delta}_j^+$. Пусть β_j – старший корень системы $\tilde{\Delta}_j^+ \supseteq \tilde{\Delta}_{j+1}^+ \supseteq \dots \supseteq \tilde{\Delta}_i^+$. Отсюда $(\beta_j, \gamma) \geq 0$ для любого $\gamma \in \tilde{\Delta}_j^+$, в частности $(\beta_j, \beta_m) \geq 0$ для всех $m \geq j$, откуда следует, что $(\beta_j, \beta_i) \geq 0$ для любого j , а также $(\alpha_0, \beta_i) \geq 0$, так как $\beta_i \in \tilde{\Delta}^+$, а α_0 – старший корень системы $\tilde{\Delta}^+$.

Из сказанного выше следует соотношение

$$(M_{i+1} + l\beta_i, \beta_i) = -((k_i - l)(\beta_i, \beta_i) + \dots + k_1(\beta_1, \beta_i) + k_0(\alpha_0, \beta_i)) < 0,$$

что доказывает выполнение условия (*).

Теперь проверим условие (**). По построению $-ww_0\chi = (k_l\beta_l + \dots + k_1\beta_1 + k_0\alpha_0)$ для некоторого l . Заметим, что

$$(-w_0\chi, w^{-1}\beta_i) = (-ww_0\chi, \beta_i) = k_l(\beta_l, \beta_i) + \dots + k_1(\beta_1, \beta_i) + k_0(\alpha_0, \beta_i) \geq 0,$$

так как $(\beta_j, \beta_i) \geq 0$ и $(\alpha_0, \beta_i) \geq 0$. Из неравенства $(-w_0\chi, w^{-1}\beta_i) \geq 0$ и из того, что вес $-w_0\chi$ строго доминантен, следует, что корень $w^{-1}\beta_i$ положителен, что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 2.6. Пусть χ – строго доминантный вес, а $w \in W$ – элемент группы Вейля. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$;
- (ii) $0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$.

В том случае, когда выполнено одно из условий, носитель клетки Шуберта Bww_0B/B содержит нуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве теоремы 2.1 был построен кусочно линейный путь из $ww_0\chi$ в нуль. При этом корни, которые входят в этот путь, удовлетворяют условию $\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+$. Заметим, что для построения этого пути было использовано лишь условие (i). Из существования такого пути следует, что выполнено условие (ii).

Используя теорему 2.1, получаем

$$0 \in \text{supp}(Tww_0B/B) \subset \text{supp}(Bww_0B/B)$$

для почти всех значений c_α , где c_α – коэффициенты из экспоненциального разложения u при элементах e_α , соответствующих корням $\alpha \in \Delta^+ \cap w\Delta^+$.

С помощью следствия 2.6 и теоремы 2.1 можно описать линейные оболочки носителей всех полустабильных орбит.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.7. *Рассмотрим полустабильную орбиту Tuw_0B/B из клетки Bww_0B/B . Тогда найдется полустабильная орбита $T\tilde{u}ww_0B/B$ из той же клетки такая, что для $\tilde{u}$ имеет место экспоненциальное разложение*

$$\tilde{u} = \exp\left(\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_\alpha e_\alpha\right),$$

где подсистема $\tilde{\Delta}$ насыщена, а ее линейная оболочка такая же, как у носителя орбиты Tuw_0B/B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим экспоненциальное разложение

$$u = \exp\left(\sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} c_\alpha e_\alpha\right).$$

Здесь мы не предполагаем, что $c_\alpha \neq 0$, и считаем, что элемент u выбран в нормальной форме, т. е. $u \in U \cap wU$. Рассмотрим конус с вершиной в $ww_0\chi$, порожденный корнями $\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$, для которых $c_\alpha \neq 0$. Пусть $\beta \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+ -$ корни, лежащие на ребрах этого конуса. Покажем, что в весовое разложение вектора из $V(\chi)$, соответствующего точке орбиты $Tuw_0B/B \subset \mathbb{P}(V(\chi))$, входят векторы $e_\beta v_{ww_0\chi} \neq 0$.

Поддействуем на орбиту элементом w^{-1} . Поскольку это элемент группы $N_G(T)$, то мы получим $Tu'w_0B/B$ (где $u' = w^{-1}uw$) только уже из открытой клетки (так как $w_0\chi \in \text{supp}(w^{-1}Tuw_0B/B)$ по лемме 1.1). Корень $\gamma \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+$ входит в экспоненциальное представление u тогда и только тогда, когда корень $w^{-1}\gamma \in \Delta^+ \cap w^{-1}\tilde{\Delta}^+$ входит в экспоненциальное представление u' . Поэтому необходимо доказать, что $e_{w^{-1}\beta} v_{w_0\chi} \neq 0$.

Действительно, $w^{-1}\beta \in \Delta^+$, и вес $w_0\chi$ строго антидоминантен, тем самым, $v_{w_0\chi}$ не может быть старшим вектором порожденного им представления $\mathfrak{sl}_2$ тройки $\langle e_{w^{-1}\beta}, f_{w^{-1}\beta}, h_{w^{-1}\beta} \rangle$, что влечет нужное утверждение.

Поскольку β – ребро конуса, вес $ww_0\chi + \beta$ принадлежит носителю орбиты; действительно, в весовом разложении ему отвечает вектор $e_\beta v_{ww_0\chi} \neq 0$, и только он (это весовое разложение получается при раскрытии скобок в экспоненциальном представлении). Так как носитель орбиты содержит нуль (орбита полустабильна), линейная оболочка носителя совпадает с линейной оболочкой корней β (ребер конуса), которую мы обозначим $\langle \beta \rangle_{\text{lin}}$. Рассмотрим подсистему корней $\tilde{\Delta} = \Delta \cap \langle \beta \rangle_{\text{lin}}$. Используя теорему 2.1 для системы $\tilde{\Delta}$, получаем орбиту специального вида с такой же линейной оболочкой носителя, что и у исходной орбиты.

Тем самым, для описания линейных оболочек носителей полустабильных орбит из клетки Bww_0B/B достаточно описать лишь насыщенные подсистемы Δ , для которых $0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in \tilde{\Delta}^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}\alpha$.

§ 3. Вычисление ранга $\text{Pic}(X^{ss}/T)$ в случае группы G , свободной от компонент типа A_n

Согласно следствию 1.12 выполнено

$$\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss}) = \text{Pic}_T(G/B) \cong \text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$$

(последний изоморфизм следует из того, что любое линейное расслоение T -линеаризуемо [12] и любые две T -линеаризации линейного расслоения отличаются на характер тора).

Известно, что $\text{Pic}(G/B) \cong \Xi(B) = \Xi(T)$ [1], [12]. Изоморфизм строится следующим образом: расслоению можно сопоставить характер действия B на слое над B -неподвижной точкой eB/B . Обратно, характеру χ можно сопоставить однородное расслоение $G *_B k_\chi$ (где k_χ – линейное пространство, на котором B действует характером χ), полученное как факторизация $G \times k_\chi$ по действию B : $b(g, t) = (gb^{-1}, \chi(b)t)$. При этом изоморфизме конус обильных расслоений совпадает с внутренностью камеры Вейля.

Все T -линеаризованные расслоения будут представлены в виде $G *_B k_{\chi_0} \otimes k_{\chi_1}$ (см. [12]). Как расслоение оно изоморфно $G *_B k_{\chi_0}$, однако действие тора на каждом слое “подкручивается” на произвольный характер χ_1 (при этом разным характерам χ_1 соответствуют разные линейаризации, так как на $X_{L_\chi}^{ss}$ нет тривиальных регулярных T -полуинвариантных обратимых функций [12]). Тем самым, группа T -линеаризованных расслоений $\text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss}$ изоморфна $\Xi(B) \times \Xi(T)$.

Пусть $\pi: X_{L_\chi}^{ss} \rightarrow X_{L_\chi}^{ss}/T$ – отображение факторизации. Известно, что $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/T)$ вкладывается в $\text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss}$ с помощью отображения π^* [12]. В следующей теореме мы сформулируем условие принадлежности расслоения $M \in \text{Pic}_T X_{L_\chi}^{ss}$ подгруппе $\pi^* \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/T)$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть χ – строго доминантный вес, которому отвечает вложение $G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$. Пусть $\{\tilde{\Delta}_j^w\}$ – всевозможные насыщенные подсистемы корней в Δ такие, что

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Элемент $\mu = (\mu_0; \mu_1) \in (\text{Pic}(G/B) \times \Xi(T)) \otimes \mathbb{Q}$ принадлежит $\pi^* \text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/T) \otimes \mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle$$

для всех $ww_0 \in W_\chi^{st}$. Ранг группы Пикара $\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/T)$ равен размерности линейного пространства, натянутого на точки μ , удовлетворяющие условиям, описанным выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Для открытой клетки соответствующее условие упрощается и имеет следующий вид. Пусть $\{\tilde{\Delta}_j\}$ – всевозможные насыщенные подсистемы корней такие, что $w_0\chi \in \langle \tilde{\Delta}_j \rangle$; тогда по орбитам из открытой клетки строятся следующие условия:

$$w_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Рассмотрим следующую точную последовательность из работы [12]:

$$1 \longrightarrow \mathrm{Pic}(X^{ss} // T) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}_T X^{ss} \xrightarrow{\delta} \prod_{Tx \subset X^{ss}} \Xi(T_x).$$

Здесь в последнем члене стоит произведение по всем орбитам из X^{ss} групп характеров стабилизаторов точек этих орбит (в произведении можно использовать только замкнутые в X^{ss} орбиты). Отображение δ устроено следующим образом: возьмем некоторое расслоение $L \in \mathrm{Pic}_T X^{ss}$ и ограничим его на орбиту Tx , тогда стабилизатор точки орбиты T_x будет действовать линейно на слое над x , а именно некоторым характером; этот характер и есть образ L в компоненте $\Xi(T_x)$ (обозначим это отображение $\mathrm{Pr}_{\Xi(T_x)}: \mathrm{Pic}_T X^{ss} \longrightarrow \Xi(T_x)$, тем самым, $\delta = \prod_{Tx \subset X^{ss}} \mathrm{Pr}_{\Xi(T_x)}$). В частности, отсюда следует, что $\mathrm{Pic}(X^{ss} // T)$ – свободная конечно порожденная абелева группа, так как она является подгруппой свободной конечно порожденной абелевой группы $\mathrm{Pic}_T X^{ss} \cong \Xi(B) \times \Xi(T)$.

Далее пусть $\mu = \mu_0 + \mu_1 \in \mathrm{Pic}(G/B) \times \Xi(T)$ – характер, задающий линейное расслоение L_μ из $\mathrm{Pic}_T X^{ss}$.

Пусть мы вычислили группы $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_{\Xi(T_x)})$. Тогда

$$\mathrm{Pic}(X^{ss} // T) \cong \mathrm{Ker} \delta = \bigcap_{Tx \subset X^{ss}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_{\Xi(T_x)}).$$

Поскольку мы вычисляем только ранг группы Пикара, достаточно ограничиться рассмотрением действия однопараметрических подгрупп $\lambda: k^\times \rightarrow T_x$. Пусть $v_x = v_{\tau_1} + \dots + v_{\tau_l}$ – весовое разложение вектора v_x для вложения $x = twB/B \in G/B \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))$, $\tau_i \in \Xi(T)$.

Рассмотрим действие однопараметрической подгруппы λ на v_x :

$$\lambda(t)v_x = t^{\langle \lambda; \tau_0 \rangle} v_x = t^{\langle \lambda; \tau_1 \rangle} v_{\tau_1} + \dots + t^{\langle \lambda; \tau_l \rangle} v_{\tau_l}.$$

Отсюда $\lambda(k^\times) \subset T_x$ тогда и только тогда, когда $\langle \lambda; \tau_0 \rangle = \langle \lambda; \tau_1 \rangle = \dots = \langle \lambda; \tau_l \rangle$, или, что то же самое, $\langle \lambda; \chi_i - \chi_j \rangle = 0$ для любых $\chi_i, \chi_j \in \mathrm{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$. Так как $0 \in \mathrm{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi)))$, то эта система эквивалентна $\langle \lambda; \chi_i \rangle = 0$ для любого $\chi_i \in \mathrm{supp}(Tx)$.

Как и в доказательстве утверждения 2.7, имеем $ww_0\chi \in \mathrm{supp}(Tx)$, а также $ww_0\chi + \alpha_i \in \mathrm{supp}(Tx)$, где α_i – корни, входящие с ненулевым коэффициентом в экспоненциальное разложение элемента u , который можно считать записанным в нормальной форме. Тем самым имеем $\langle \lambda; \alpha_i \rangle = 0$, откуда следует, что T_x^0 стабилизирует u .

Посчитаем характер действия T_x^0 на слое расслоения $G *_B k_{\mu_0} \otimes k_{\mu_1}$ над точкой x . Так как T_x^0 стабилизирует u , то характер действия T_x^0 на слое над точкой ww_0B/B равен характеру действия T_x^0 на слое над точкой ww_0B/B , т.е. равен $ww_0\mu_0 + \mu_1$.

Из сказанного выше следует, что характер действия T_x^0 на слое будет тривиален тогда и только тогда, когда $\langle \lambda, ww_0\mu_0 + \mu_1 \rangle = 0$ для любой однопараметрической подгруппы из стабилизатора. Тем самым условие принадлежности $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_{\Xi(T_x)}) \otimes \mathbb{Q}$ расслоения L_μ записывается в виде

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \langle \mathrm{supp}(Tx \hookrightarrow \mathbb{P}(V(\chi))) \rangle.$$

Теперь воспользуемся теоремой о линейных оболочках носителей полустабильных орбит. Орбитам из $X^{ss} \cap Bw_0B/B$ соответствуют подсистемы $\{\tilde{\Delta}_j^{w+}\}$ положительных корней, удовлетворяющие условию

$$0 \in ww_0\chi + \sum_{\alpha \in (\tilde{\Delta}_j^w)^+ \cap w\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha.$$

Перепишем условия принадлежности веса $\mu \in \text{Ker}(\delta)$ в терминах веса χ :

$$ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \bigcap_j \langle \tilde{\Delta}_j^w \rangle,$$

что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3.3. Разберем случай общего положения, а именно случай, когда характер $w_0\chi$ не принадлежит линейным оболочкам подсистем корней в системе Δ , размерность которых меньше, чем ранг системы Δ . В этом случае на μ_0 и μ_1 не налагаются никакие условия; тем самым имеем

$$\text{rk}(\text{Pic}(X_{L_\chi}^{ss}/T)) = \text{rk}(\text{Pic}_T(X_{L_\chi}^{ss})) = 2 \text{rk } G$$

(в случае отсутствия компонент типа A_n).

ПРИМЕР 3.4. Рассмотрим систему корней типа B_4 . Выпишем простые корни и двойственные им фундаментальные веса:

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad \alpha_2 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \alpha_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \quad \alpha_4 = \varepsilon_4,$$

а также

$$\pi_1 = \varepsilon_1, \quad \pi_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad \pi_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \quad \pi_4 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4).$$

Рассмотрим строго доминантный вес

$$\chi = (\varepsilon_4 - \varepsilon_3) + 10(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = 10\pi_1 + \pi_2 + 8\pi_3 + 2\pi_4.$$

Можно проверить, что он принадлежит пространствам, натянутым на подсистемы корней Δ_1 и Δ_2 , описанные ниже, и только им. Первая подсистема корней Δ_1 типа A_3 порождена корнями $\varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_4$, которые являются простыми корнями этой системы (также она содержит корни $\varepsilon_2 - \varepsilon_4$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ в качестве положительных корней), а вторая система Δ_2 типа $A_1 \oplus A_2$ порождена корнями ε_1 , $\varepsilon_2 + \varepsilon_4$, $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$, которые являются простыми в этой системе (и содержит корень $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ в качестве положительного). Пересечение линейных оболочек систем Δ_1 и Δ_2 – двумерное подпространство, порожденное корнем $\varepsilon_3 - \varepsilon_4$ и доминантным весом $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \pi_1 + \pi_3$.

Мы покажем, что ранг группы Пикара $X_{L_\chi}^{ss}/T$ равен двум.

Запишем условия теоремы 3.1 для части χ -полустабильных элементов группы Вейля $w_0, s_{\alpha_1}w_0, s_{\alpha_2}w_0, s_{\alpha_3}w_0, s_{\alpha_4}w_0$:

$$w_0\mu_0 + \mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle, \tag{3.1}$$

$$w_0\mu_0 + s_{\alpha_1}\mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle, \tag{3.2}$$

$$w_0\mu_0 + s_{\alpha_2}\mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle, \tag{3.3}$$

$$w_0\mu_0 + s_{\alpha_3}\mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle, \tag{3.4}$$

$$w_0\mu_0 + s_{\alpha_4}\mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle. \tag{3.5}$$

Для доказательства последних четырех включений надо проверить, что имеет место включение

$$s_{\alpha_i}\chi \in \sum_{\beta \in (s_{\alpha_i}\Delta_1)^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^+} \mathbb{Q}_+\beta \quad (3.6)$$

и аналогичное включение для системы Δ_2 :

$$s_{\alpha_i}\chi \in \sum_{\beta \in (s_{\alpha_i}\Delta_2)^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^+} \mathbb{Q}_+\beta. \quad (3.7)$$

Однако

$$(s_{\alpha_i}\Delta_1)^+ \cap s_{\alpha_i}\Delta^+ = s_{\alpha_i}\Delta_1 \cap s_{\alpha_i}\Delta^+ \cap \Delta^+,$$

так что если применить s_{α_i} к предыдущим двум выражениям, получим

$$\chi \in \sum_{\beta \in \Delta_1^+ \setminus \{\alpha_i\}} \mathbb{Q}_+\beta.$$

Действительно, если s_{α} – простое отражение, то $\Delta^+ \cap s_{\alpha}\Delta^+ = \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, и, тем самым, $s_{\alpha_i}(s_{\alpha_i}\Delta_1 \cap s_{\alpha_i}\Delta^+ \cap \Delta^+) = \Delta_1^+ \setminus \{\alpha_i\}$.

Заметим, что в случае $i = 1, 4$ условие (3.1) выполнено, так как корни α_1, α_4 не лежат в системах Δ_1 и Δ_2 . В случае $i = 2$ условие (3.2) выполнено, так как $\alpha_2 \notin \Delta_2$; для системы Δ_1 условие (3.1) выполнено, так как $\chi = 10(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 9(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_4)$. В случае s_{α_3} условия (3.1) и (3.2) выполнены, так как $\chi = (\varepsilon_1 + \varepsilon_4) + 10(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + 19(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ для системы Δ_1 и $\chi = 20\varepsilon_1 + 9(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) + (\varepsilon_2 + \varepsilon_4)$ для системы Δ_2 .

Вычтем из выражения (3.1) аналогичное выражение для s_{α_i} . Получим

$$(w_0\mu_0 + \mu_1) - (w_0\mu_0 + s_{\alpha_i}\mu_1) = \frac{2(\alpha_i, \mu_1)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Поскольку $\alpha_i \notin \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$ для $i = 1, 2, 4$, выполнены равенства $(\alpha_i, \mu_1) = 0$. Отсюда $\mu_1 = t\pi_3$. Выражение (3.4) для элемента s_{α_3} не налагает дополнительных условий, так как $\alpha_3 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$. Покажем, что $\mu_1 = 0$. Отсюда будет следовать, что все условия, которые налагаются полустабильными орбитами, являются следствиями условия, налагаемого орбитами открытой клетки, т. е. $w_0\mu_0 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$. Действительно, так как $\mu_1 = 0$, условия для $w \in W_{\chi}^{st}$ переписутся в виде $w_0\mu_0 \in \langle \bigcap \Delta_i \rangle$, где $\chi \in \Delta_i$, но все эти условия являются следствием условия для открытой клетки, для которой это пересечение минимально. Тем самым мы получим, что $\text{rk}(\text{Pic}(X_{L_{\chi}}^{ss}/T)) = 2$.

Для доказательства равенства $\mu_1 = 0$ рассмотрим элемент $w = s_{\alpha_3}s_{\alpha_4}$. Сначала покажем, что элемент ww_0 χ -полустабильен и налагает на μ условие $ww_0\mu_0 + \mu_1 \in \langle w\Delta_1 \rangle \cap \langle w\Delta_2 \rangle$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$w\chi \in \sum_{\alpha \in w\Delta_1 \cap w\Delta^+ \cap \Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha$$

и аналогичное включение для подсистемы корней Δ_2 . Применим к этому включению элемент w^{-1} . Учитывая, что w переводит корни $\varepsilon_3 + \varepsilon_4$ и ε_4 в отрицательные, мы получаем условие

$$\chi \in \sum_{\alpha \in \Delta_1 \cap \Delta^+ \cap s_{\alpha_4}s_{\alpha_3}\Delta^+} \mathbb{Q}_+\alpha = \sum_{\alpha \in \Delta_1^+ \setminus \{\alpha_4, \varepsilon_3 + \varepsilon_4\}} \mathbb{Q}_+\alpha$$

и аналогичное условие для системы Δ_2 . Оба условия, очевидно, выполнены, так как ε_4 и $\varepsilon_3 + \varepsilon_4$ не принадлежат ни одной из систем Δ_i . Итак, условия, налагаемые орбитами из клетки Bww_0B/B , записываются в виде $w_0\mu_0 + w^{-1}\mu_1 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$. Учитывая, что $\mu_1 = t\pi_3$, получаем

$$w_0\mu_0 + w^{-1}\mu_1 = w_0\mu_0 + ts_{\alpha_4}(\pi_3 - \alpha_3) = w_0\mu_0 + t\pi_3 - t(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle.$$

Вычтем отсюда $w_0\mu_0 + t\pi_3 \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$ и получим $t(\varepsilon_3 + \varepsilon_4) \in \langle \Delta_1 \rangle \cap \langle \Delta_2 \rangle$, что возможно только при $t = 0$. Отсюда $\mu_1 = 0$.

Список литературы

1. В. Л. Попов, “Группы Пикара однородных пространств линейных алгебраических групп и одномерные однородные векторные расслоения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:2 (1974), 294–322; англ. пер.: V. L. Popov, “Picard groups of homogeneous spaces of linear algebraic groups and one-dimensional homogeneous vector bundles”, *Math. USSR-Izv.*, **8**:2 (1974), 301–327.
2. Ж. Дьедонне, Дж. Керролл, Д. Мамфорд, *Геометрическая теория инвариантов*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: J. A. Dieudonné, J. B. Carrell, *Invariant theory, old and new*, Academic Press, New York–London, 1971; D. Mumford, *Geometric invariant theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, **34**, Springer, Berlin–New York, 1965.
3. J. B. Carrell, A. Kurth, “Normality of torus orbit closures in G/P ”, *J. Algebra*, **233**:1 (2000), 122–134.
4. R. Dabrowski, “On normality of the closure of a generic torus orbit in G/P ”, *Pacific J. Math.*, **172**:2 (1996), 321–330.
5. S. Senthamarai Kannan, “Torus quotients of homogeneous spaces. II”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **109**:1 (1999), 23–39.
6. R. F. Goldin, “The cohomology ring of weight varieties and polygon spaces”, *Adv. Math.*, **160**:2 (2001), 175–204.
7. R. F. Goldin, A. L. Mare, “Cohomology of symplectic reductions of generic coadjoint orbits”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **132**:10 (2004), 3069–3074.
8. C. S. Seshadri, “Quotient spaces modulo reductive algebraic groups”, *Ann. of Math.* (2), **95**:3 (1972), 511–556.
9. И. Н. Берштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд, “Клетки Шуберта и когомологии пространств G/P ”, *УМН*, **28**:3 (1973), 3–26; англ. пер.: I. N. Bernstein, I. M. Gel’fand, S. I. Gel’fand, “Schubert cells and cohomology of the spaces G/P ”, *Russian Math. Surveys*, **28**:3 (1973), 1–26.
10. Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, 2-е изд., УРСС, М., 1995; англ. пер.: A. L. Onishchik, E. B. Vinberg, *Lie groups and algebraic groups*, Springer Ser. Soviet Math., Springer, Berlin, 1990.
11. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980; пер. с англ.: J. E. Humphreys, *Linear algebraic groups*, Grad. Texts in Math., **21**, Springer, New York–Heidelberg, 1975.
12. Ф. Кноп, Н. Крафт, Т. Вуст, “The Picard group of a G -variety”, *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV-Sem., **13**, eds. Н. Крафт, П. Слодовы, Т. Спрингер, Birkhäuser, Basel–Boston, 1989, 77–87.

В. С. ЖГУН (V. S. ZHGOON)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова,

механико-математический факультет

E-mail: zhgoon@mail.ru

Поступило в редакцию

07.03.2006