Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. А. Шамоян, О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 5, 191–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/im91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 15:50:45

УДК 517.974

Ф. А. Шамоян

О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций

В статье строятся пространства голоморфных в круге функций, в которых существуют сильно обратимые функции, не обладающие слабой обратимостью. Кроме того, получены критерии слабой обратимости в весовых пространствах целых функций.

Библиография: 19 наименований.

Введение

Пусть G – открытое множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, X – некоторое топологическое пространство аналитических в G функций, в котором множество всех многочленов от z всюду плотно, при этом операторы

$$\Phi_z(f) = f(z), \quad T(f)(z) = zf(z), \quad z \in G, \quad (1)$$

являются непрерывными в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in G$, и существует последовательность многочленов $\{P_n\}_1^\infty$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(z)f(z) = 1, \quad (2)$$

причем сходимость имеет место в топологии пространства X . Тогда говорят, что f – *слабо обратимый элемент* пространства X .

Отметим, что понятие слабой обратимости теснейшим образом связано с вопросами полноты многочленов в весовых пространствах аналитических функций. По этому поводу отсылаем читателя к оригинальным работам [1]–[9]. По-видимому, название “слабая обратимость” впервые введено в работе [6].

В первой части работы мы построим пространство аналитических в круге функций, удовлетворяющих всем условиям (1), в котором множество всех многочленов от z всюду плотно и в котором существуют обратимые элементы, не обладающие слабой обратимостью. Тем самым мы даем ответ на вопросы, поставленные в работах [8, с. 93] и [9].

В §2 мы исследуем вопросы слабой обратимости в весовых пространствах целых функций. Для подробного обсуждения затрагиваемых здесь вопросов введем обозначение. Пусть σ, ρ – положительные числа. Обозначим через X_ρ^σ множество всех целых функций f , для которых

$$\|f\| = \sup_{z \in \mathbb{C}} \{|f(z)| \exp(-\sigma|z|^\rho)\} < +\infty, \quad X_\rho^\infty = \bigcup_{\sigma > 0} X_\rho^\sigma. \quad (3)$$

Легко видеть, что X_ρ^σ – топологическая алгебра относительно системы норм (3). Эрейнпрейс (см. [10]) описал все замкнутые идеалы этой алгебры при $\rho = 1$. Н. К. Никольский [11] получил описание этих идеалов при всех $0 < \rho < +\infty$. И. Ф. Красичков [12] рассмотрел следующие алгебры целых функций: пусть M – монотонно растущая мажоранта на $(0, +\infty)$; определим X_M^∞ как класс всех целых функций f , для которых при некоторых A_f, B_f справедлива оценка

$$|f(z)| \leq A_f M(B_f |z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

Во множестве X_M^∞ , аналогично тому, что было сделано выше, можно ввести топологию, относительно которой оно превращается в топологическую алгебру. И. Ф. Красичков получил полное описание замкнутых идеалов этой алгебры. Существенным моментом в указанных работах является описание главных идеалов. В терминах аппроксимации описание главных идеалов можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим, например, алгебру X_M^∞ . Пусть $f \in X_M^\infty$; тогда

$$|f(z)| \leq A_f M(B_f |z|), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Каковы те функции $\varphi \in X_M^\infty$, для которых возможна аппроксимация вида

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \left\{ \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\frac{|P(z)f(z) - \varphi(z)|}{M(C|z|)} \right) \right\} = 0, \quad (6)$$

где $\mathcal{P}$ – множество всех многочленов от z , C – достаточно большое положительное число? Подбирая C достаточно большим, мы увеличим мажоранту $M(C|z|)$, реализующую точность аппроксимации, хотя соответствующие A_f, B_f в (5) могут быть достаточно маленькими. В случае алгебры X_ρ^∞ , если $f \in X_\rho^{\sigma_f}$, аппроксимация происходит при наличии веса $\exp(-\sigma|z|^\rho)$, где $\sigma > \sigma_f$, иначе говоря “зазор” составляет величина $\exp\{(\sigma - \sigma_f)|z|^\rho\}$. Можно на таком же языке сформулировать результаты И. Ф. Красичкова-Терновского [13], В. А. Ткаченко [14], Дж. Келегера и Б. А. Тейлора [15], Р. Майзе и Б. Тейлора [16]. Во всех указанных работах доказано, что функция φ допускает аппроксимацию вида (6) тогда и только тогда, когда $Z(\varphi) \supset Z(f)$, где $Z(f)$ – множество всех нулей функции f .

В связи с вышеуказанными результатами естественно возникает вопрос: пусть, например, f – целая функция порядка ρ , $\sigma > 0$:

$$|f(z)| \exp(-\sigma|z|^\rho) \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (7)$$

Какова должна быть функция $\psi : \psi(t), t \in (0, +\infty)$, чтобы для любой φ с условием (7) и $Z(\varphi) \supset Z(f)$ следовало

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \left\{ \sup_{z \in \mathbb{C}} |P(z)f(z) - \varphi(z)| \exp\{-\sigma|z|^\rho - \psi(|z|)\} \right\} = 0, \quad (8)$$

где $\mathcal{P}$ – множество многочленов? При этом естественно искать по возможности “малую” ψ .

В § 2 мы докажем, что ψ существенно зависит от σ и ρ . Здесь мы займемся более общей задачей. Пусть H и h ($h \leq H$) – монотонно растущие мажоранты на полуоси $(0, +\infty)$. Пусть, далее,

$$X_h = \{f \in A(\mathbb{C}) : |f(z)| = o(h(|z|)) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty\},$$

$$\|f\|_{X_h} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left(\frac{|f(z)|}{h(|z|)} \right).$$

Здесь $A(\mathbb{C})$ – множество всех целых функций. Аналогичным образом определяется X_H . Каким условиям должны удовлетворять h и H для того, чтобы каждая функция $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, была слабо обратима в пространстве X_H ? Отметим, что в случае аналитических в круге функций, но с более жесткими ограничениями на мажоранты, аналогичная задача была рассмотрена Н. К. Никольским в [8].

Основные результаты этой статьи в менее общем виде были анонсированы в заметке [17].

§ 1. О слабой обратимости сильно обратимых функций

В этом параграфе мы докажем, что существует довольно широкий класс банаховых пространств аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций, в котором из обратимости не следует слабая обратимость. Вопрос о том, следует ли из обратимости слабая обратимость, поставлен в работах [8] и [9]. Легко видеть, что если множество $\mathcal{P}$ всюду плотно в X и $zX \subset X$, и при этом оператор умножения на z непрерывен в X , то слабая обратимость f в X равносильна полноте последовательности $\{z^k f(z)\}_{k=0}^{+\infty}$ в пространстве X , т.е. цикличности функции f относительно оператора умножения $T(f)(z) = zf(z)$.

Пусть ω – положительная, монотонно растущая мажоранта на полуоси $(0, +\infty)$. Положим

$$\varphi(\zeta) = \left| \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right|^2 + \omega \left(\left| \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right| \right), \quad \zeta \in \mathbb{D}. \quad (8^*)$$

Предположим также, что ω удовлетворяет следующим условиям:

$$\omega \in C^1(1, +\infty), \quad x\omega'(x) \uparrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\omega'(x)}{\omega(x)} = \alpha_\omega < 1.$$

Положим

$$\|f\|_{X_\varphi} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \{|f(z)| \exp\{-\varphi(z)\}\},$$

$$X_\varphi = \{f \in A(\mathbb{D} \setminus 1) : \|f\|_{X_\varphi} < +\infty, \quad \lim_{\zeta \rightarrow 1} f(\zeta) \exp(-\varphi(\zeta)) = 0\},$$

где $A(\mathbb{D} \setminus 1)$ – множество аналитических в $\mathbb{D}$ и непрерывных в $\overline{\mathbb{D}} \setminus 1$ функций. Очевидно, что $zX_\varphi \subset X_\varphi$, а функционалы $\Phi_\zeta(f) = f(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{D}$, непрерывны в пространстве X_φ , при этом X_φ относительно нормы $\|\cdot\|_{X_\varphi}$ – банаховое пространство.

ТЕОРЕМА 1. Множество всех многочленов $\mathcal{P}$ всюду плотно в X_φ . Функции

$$f(z) = \exp \left[- \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 \right] \quad u \quad \frac{1}{f}$$

принадлежат X_φ . В то же время

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \|Pf - 1\|_{X_\varphi} = C_0 > 0.$$

Доказательству теоремы предположим следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть G – внешняя функция в правой полуплоскости Π_+ такая, что $\log |G(iy)| = \omega(|y|)$, $y \in \mathbb{R}^1$. Тогда существует положительное число C такое, что

$$\frac{\omega(|z|)}{4} \leq \log |G(z)| \leq C\omega(|z|), \quad z \in \Pi_+. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\log |G(x + iy)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + (y - t)^2} dt.$$

Для удобства положим

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\omega(|y + v|)}{x^2 + v^2} dv, \quad z = x + iy.$$

Далее,

$$u(x + iy) \geq \frac{1}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{x\omega(|v + y|)}{x^2 + v^2} dv + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{-x} \frac{x\omega(|v + y|)}{x^2 + v^2} dv. \quad (10)$$

Предположим, что $y \geq 0$; тогда

$$u(x + iy) \geq \frac{\omega(x + y)}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{x dv}{x^2 + v^2}.$$

Если же $y < 0$, нужно брать второй интеграл в (10). Таким образом,

$$u(x + iy) \geq \frac{1}{4} \omega(|z|). \quad (11)$$

Теперь оценим u сверху:

$$u(x + iy) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| < 2r} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + (x - t)^2} dt + \int_{|t| \geq 2r} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + (x - t)^2} dt, \quad r = |z|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{|t| < 2r} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + (y - t)^2} dt &\leq \omega(2r), \\ \frac{1}{\pi} \int_{|t| > 2r} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + (y - t)^2} dt &\leq \frac{4}{\pi} \int_{|t| > 2r} \frac{x\omega(|t|)}{x^2 + t^2} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

так как

$$|y - t| \geq |t| - |y| \geq \frac{|t|}{2}.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{4}{\pi} \int_{|t| > 2r} \frac{x\omega(|t|) dt}{x^2 + t^2} = \frac{8}{\pi} \int_{2r}^{+\infty} \frac{x\omega(t)}{x^2 + t^2} dt \leq \frac{8}{\pi} \int_{2r}^{+\infty} \frac{x\omega(t)}{t^2} dt.$$

Положим $\frac{t}{2r} = u$; тогда получим

$$\frac{8}{\pi} \int_{2r}^{+\infty} \frac{x\omega(t)}{t^2} dt = \frac{8}{2\pi r} \int_1^{+\infty} \frac{x\omega(2ru)}{u^2} du \leq \frac{4}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{\omega(2ru)}{u^2} du. \quad (13)$$

Учитывая тот факт, что

$$\omega(2ru) \leq u^{\alpha_\omega + \varepsilon} 2^{\alpha_\omega + \varepsilon} \omega(r), \quad u \geq u_0,$$

из (11) и (13) получаем

$$\frac{\omega(|z|)}{4} \leq u(z) \leq C_1 \omega(|z|). \quad (14)$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть вопреки утверждению теоремы существует такая последовательность многочленов $\{P_n\}^\infty$, что $\|P_n f - 1\|_{X_\varphi} \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty$. Тогда при $n > n_0$

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \{|P_n(z)f(z) - 1| \exp\{-\varphi(z)\}\} < \frac{1}{2},$$

т.е.

$$|P_n(z)f(z) - 1| < \frac{1}{2} \exp \left\{ \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^2 + \omega \left(\left| \frac{1+z}{1-z} \right| \right) \right\}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Пусть $z = \frac{w-1}{w+1}$; тогда получим

$$\left| P_n \left(\frac{w-1}{w+1} \right) f \left(\frac{w-1}{w+1} \right) - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \exp \{ |w|^2 + \omega(|w|) \}, \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

В частности, такое же неравенство имеет место на мнимой оси. Следовательно,

$$\left| P_n \left(\frac{iy-1}{iy+1} \right) f \left(\frac{iy-1}{iy+1} \right) \right| < 2 \exp(y^2 + \omega(|y|)).$$

Но $f \left(\frac{iy-1}{iy+1} \right) = \exp y^2$, поэтому

$$\left| P_n \left(\frac{iy-1}{iy+1} \right) \right| \leq 2 \exp(\omega(|y|)) = 2|G(iy)|, \quad n \geq n_0.$$

Так как функции $P_n \left(\frac{w-1}{w+1} \right)$ ограничены в правой полуплоскости Π_+ , то такая же оценка выполняется всюду в Π_+ , т.е.

$$\left| P_n \left(\frac{w-1}{w+1} \right) \right| \leq 2|G(w)|, \quad \operatorname{Re} w \geq 0, \quad n \geq n_0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве и учитывая, что

$$P_n \left(\frac{w-1}{w+1} \right) \rightarrow \exp(w^2), \quad \operatorname{Re} w > 0,$$

равномерна на компактных подмножествах правой полуплоскости, получаем

$$|\exp w^2| \leq 2|G(w)|, \quad \operatorname{Re} w > 0.$$

В частности, если положить $w = x$ и учитывать лемму 1, приходим к неравенству

$$\exp(x^2) \leq \exp(c\omega(x)), \quad x > 0, \quad c > 0.$$

Но это противоречит условию

$$\omega(x) \leq c_1 x^{\alpha_\omega + \varepsilon}, \quad x > x_0, \quad \alpha_\omega < 1,$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Осталось доказать, что множество всех многочленов от z всюду плотно в X_φ . Для этого снова рассмотрим образ пространства X_φ после конформного отображения единичного круга на правую полуплоскость. Положим $\varphi_*(x) = x^2 + \omega(x)$,

$$X_{\varphi_*} = \left\{ f \in A(\Pi_+) : \|f\|_{X_{\varphi_*}} = \sup_{z \in \Pi_+} (|f(z)| \exp(-\varphi_*(|z|))) < +\infty, \right. \\ \left. |f(z)| \exp(-\varphi_*(|z|)) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty \right\}.$$

Используем теперь следующую теорему М. М. Джрбашяна (см. [3]).

ТЕОРЕМА. Пусть $P(r) = \int_1^r \frac{\omega_1(u)}{u} du$, где $\omega_1(t) > 0$, $\omega_1(t) \uparrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$. Пусть далее X – пространство голоморфных в Π_+ функций f , для которых

$$|f(z)| \exp(-P(|z|)) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty,$$

с нормой

$$\|f\|_p = \sup_{z \in \Pi_+} \{|f(z)| \exp(-P(|z|))\} < +\infty.$$

Тогда для того, чтобы множество всех многочленов $\mathcal{P}$ было всюду плотно в X , необходимо и достаточно, чтобы

$$\int^{+\infty} \frac{P(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty.$$

Нетрудно видеть, что вес φ_* удовлетворяет всем условиям этой теоремы. Поэтому функции

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^k$$

всюду плотны в пространстве X_φ . Остается доказать, что в пространстве X_φ функции указанного вида с любой точностью можно приближать многочленами. Пусть $0 < \delta < 1$,

$$f_\delta(z) = \left(\frac{1+z}{1+\delta-z} \right)^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Докажем сначала, что $f_\delta(z) \rightarrow e_n(z)$ при $\delta \rightarrow 0$ в пространстве X_φ ,

$$e_n(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n, \quad z \in \mathbb{D}.$$

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$; поскольку

$$|f_\delta(z)| \leq \left| \frac{1+z}{1-z} \right|^n, \quad z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus 1, \quad 0 < \delta < 1,$$

то существует $\eta = \eta(\varepsilon)$ такое, что

$$\sup_{z \in \mathbb{D}, |1-z| < \eta} \left\{ \left| \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n - f_\delta(z) \right| \exp(-\varphi(z)) \right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но в области $|1-z| \geq \eta$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$, при $\delta \rightarrow 0$ f_δ равномерно сходится к функции $e_n(z)$. Поэтому

$$\sup_{\substack{|1-z| \geq \eta \\ z \in \mathbb{D}}} \left\{ \left| \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^n - f_\delta(z) \right| \exp(-\varphi(z)) \right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $0 < \delta < \delta_0$. Таким образом, $\|e_n - f_\delta\|_{X_\varphi} < \varepsilon$, $0 < \delta < \delta_0$. Осталось заметить, что функция f_δ голоморфна в круге $|z| < 1 + \delta$, поэтому равномерно в $\overline{\mathbb{D}}$ ее можно приближать многочленами от z . Доказательство теоремы закончено.

§ 2. Слабая обратимость в пространствах целых функций

Пусть h и H – положительные непрерывные функции на полуоси $[0, +\infty)$, причем $h(r) \leq H(r)$, $r \in [0, +\infty)$,

$$X_h = \{f \in A(\mathbb{C}) : |f(z)| = o(h(|z|)), z \rightarrow \infty\}, \quad \|f\|_{X_h} = \sup_{z \in \mathbb{C}} \left\{ \frac{|f(z)|}{h(|z|)} \right\}.$$

Аналогично определяется пространство X_H .

В этом параграфе мы займемся следующей задачей: каким условиям должны удовлетворять мажоранты h и H , чтобы каждая функция $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, была слабо обратима в пространстве X_H ?

Для формулировки основных результатов этого параграфа введем следующие классы мажорант: через Ω обозначим класс тех непрерывных функций $h \in C(0, +\infty)$, для которых $\varphi(x) = \log h(x)$ удовлетворяет одному из следующих соотношений:

а) для произвольного положительного A существует положительное число $B = B(A)$ такое, что

$$\log \varphi(Ar) \leq B \log \varphi(r), \quad r \in (0, +\infty); \quad (15)$$

б) существует монотонно растущая дифференцируемая функция ω на $(1, +\infty)$, $\omega(1) > 0$, такая, что на полуоси $(1, +\infty)$ φ допускает представление

$$\log \varphi(r) = \log \varphi(1) + \int_1^r \frac{\omega(u)}{u} du, \quad \text{причем} \quad q_\omega = \sup_{r \geq 1} \left\{ \frac{\omega'(r)r}{\omega^2(r)} \right\} < +\infty. \quad (16)$$

Обозначим через Ω_0 множество тех h , для которых

$$h \in C^1(0, +\infty), \quad \text{при этом} \quad \frac{h'(x)x}{h(x)} \uparrow +\infty \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что принадлежность h классу Ω или Ω_0 не накладывает никаких ограничений на ее рост. Нетрудно видеть, например, что $h_n(r) = \underbrace{\exp \exp \dots \exp(r)}_n$, $r > 0$, принадлежит классам Ω и Ω_0 при любом $n \geq 1$. Кроме того, условие б) равносильно соотношению

$$\sup_{r > 0} \left\{ \frac{\varphi''(r)\varphi(r)}{\varphi'^2(r)} \right\} < +\infty,$$

а последнее хорошо известно, что выполняется для довольно широкого класса мажорант (см. [18]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $h \in \Omega$, $H \in \Omega_0$, $h(r)(\log h(r))^n = o(H(r))$ ($r \rightarrow +\infty$), $n = 1, 2, \dots$, $\nu(t)$ — функция, обратная к функции $\frac{H'(t)t}{H(t)}$ на $(0, +\infty)$. Пусть, далее,

$$m_n = \sup_{k \geq 1} \frac{h(\nu(k))k^n}{H(\nu(k))}, \quad T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{m_n}. \quad (18)$$

Тогда если

$$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \quad (19)$$

то каждая функция $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, слабо обратима в пространстве X_H .

Следующая теорема указывает на точность теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h(r) = \exp\{r^p\}$, p – натуральное число,

$$H(r) = \exp(r^p + \psi(r^p)), \quad r \in (0, +\infty), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_0^x \alpha(u) du; \quad \alpha(u) \rightarrow 0, \quad u\alpha'(u) \rightarrow 0, \quad u^2\alpha''(u) \rightarrow 0, \\ \frac{\lg u}{u\alpha(u)} &\rightarrow 0, \quad u \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (21)$$

при этом

$$\sup_{u \geq u_0} \left\{ \frac{|\alpha'(u)|u}{\alpha(u)} \right\} = q_\alpha < 1. \quad (22)$$

Тогда следующие два утверждения равносильны:

а) каждая функция $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, слабо обратима в пространстве X_H ;

б)

$$\int^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{3/2}} dr = +\infty, \quad (23)$$

где $T(r)$ определяется точно так же, как и в теореме 2.

При более жестких ограничениях на мажоранты h и H из теоремы 2 можно вывести следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $h \in \Omega$, $H \in \Omega_0$, при этом

$$h(r)(\log h(r))^n = o(H(r)) \quad (r \rightarrow +\infty), \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

Кроме того, предположим, что функция $\log \left(\frac{H(\nu(e^t))}{h(\nu(e^t))} \right)$ выпуклая в окрестности точки $+\infty$, где $\nu(t)$ – обратная к функции $\frac{tH'(t)}{H(t)}$. Тогда если

$$\int^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \log \frac{H(\nu(t))}{h(\nu(t))} dt = +\infty, \quad (25)$$

то каждая функция $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, слабо обратима в пространстве X_H .

Доказательству этих теорем предпшлем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in X_h$, $f(0) = 1$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда имеет место оценка

$$|\log |f(re^{i\varphi})|| \leq 4 \inf_{R > r} \left\{ \frac{\log h(R)}{1 - r/R} \right\}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, $f(0) = 1$, то функция $u(z) = \lg|f(z)|$ гармонична в $\mathbb{C}$. Поэтому при $0 \leq r < R$ справедливо представление

$$\log|f(re^{i\varphi})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2) \log|f(Re^{i\theta})|}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta.$$

Следовательно,

$$|\log|f(re^{i\varphi})|| \leq \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(Re^{i\theta})|| d\theta. \quad (27)$$

Теперь оценим последний интеграл. Пусть

$$\log^+|f(z)| = \max(\log|f(z)|, 0), \quad \log^-|f(z)| = \max(0, -\log|f(z)|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда очевидно, что

$$|\log|f(z)|| = \log^+|f(z)| + \log^-|f(z)|.$$

Кроме того, ввиду условия

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta = 0$$

получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\log|f(Re^{i\theta})|| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(Re^{i\theta})| d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^-|f(Re^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+|f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2 \log h(R). \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно, из неравенства (27) получаем оценку

$$|\log|f(re^{i\theta})|| \leq 4 \inf_{R>r} \frac{\log h(R)}{(1-r/R)}. \quad (29)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \log h(x) = \varphi(1) \exp \left\{ \int_1^x \frac{\omega(u)}{u} du \right\}$, $x \geq 1$. Предположим, что ω — неубывающая дифференцируемая функция, $\omega(1) > 0$, при этом

$$\sup_{x \geq 1} \left\{ \frac{\omega'(x)x}{\omega^2(x)} \right\} = q_\omega < +\infty. \quad (30)$$

Тогда имеет место оценка

$$\inf_{R>r} \left\{ \frac{\varphi(R)}{(1-r/R)} \right\} \leq \text{const} \{ \varphi(r) + r\varphi'(r) \}, \quad r \geq 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = e^x$, $R = e^{x+t}$,

$$I(r) = \inf_{R>r} \left\{ \frac{\varphi(R)}{1-r/R} \right\} = \inf_{t>0} \left\{ \frac{\varphi(e^{x+t})}{1-e^{-t}} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $I(r) = \frac{\varphi(e^{x+t_x})}{1-e^{-t_x}}$, где t_x – решение уравнения

$$1 - e^{-t_x} = \frac{1}{\omega(e^{x+t_x}) + 1}. \quad (31)$$

Поэтому

$$I(r) = \varphi(e^{x+t_x})(1 + \omega(e^{x+t_x})). \quad (32)$$

Оценим теперь значения этих функций через функции $\varphi(e^x)$ и $\omega(e^x)$. Имеем

$$\log \varphi(e^{x+t_x}) - \log \varphi(e^x) = \frac{\varphi'(\tau_x)}{\varphi(\tau_x)}(e^{x+t_x} - e^x),$$

где

$$\tau_x = e^{x+\tilde{t}_x}, \quad 0 \leq \tilde{t}_x \leq t_x.$$

Поэтому

$$\frac{\varphi'(\tau_x)}{\varphi(\tau_x)} e^x (e^{t_x} - 1) = \omega(e^{x+\tilde{t}_x}) e^{-\tilde{t}_x} (e^{t_x} - 1) = \frac{\omega(e^{x+\tilde{t}_x})}{\omega(e^{x+t_x})} e^{-\tilde{t}_x} \leq \text{const} \quad (33)$$

ввиду (31) и ввиду того, что функция ω неубывающая. Таким образом,

$$\varphi(e^{x+t_x}) \leq C \varphi(e^x), \quad C - \text{const}. \quad (34)$$

Оценим теперь $\omega(e^{x+t_x})$. Как и выше, имеем

$$I_1(r) = \log \omega(e^{x+t_x}) - \log \omega(e^x) = \frac{\omega'(u_x)}{\omega(u_x)} e^x (e^{t_x} - 1), \quad (35)$$

где

$$u_x = e^{x+\tilde{u}_x}, \quad 0 \leq \tilde{u}_x \leq t_x.$$

Поэтому

$$I_1(r) = \frac{\omega'(e^{x+\tilde{u}_x})}{\omega(e^{x+\tilde{u}_x})} \frac{e^x}{\omega(e^{x+t_x})} \leq \frac{\omega'(e^{x+\tilde{u}_x}) e^x}{\omega^2(e^{x+\tilde{u}_x})} \leq \sup_{u \geq 1} \frac{\omega'(u) u}{\omega^2(u)} = q_\omega < +\infty,$$

т.е.

$$\omega(e^{x+t_x}) \leq e^{q_\omega} \omega(e^x). \quad (36)$$

Учитывая также оценку (34), окончательно получаем

$$I(r) \leq C(1 + \omega(e^x)) \varphi(e^x) = C(\varphi(e^x) + \varphi'(e^x) e^x) = C(\varphi(r) + \varphi'(r) r),$$

где $C - \text{const}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть

$$\log \varphi(x) = \log \varphi(1) + \int_1^x \frac{\omega(u)}{u} du$$

и ω удовлетворяет условию (30). Тогда справедлива оценка

$$x\varphi'(x) \leq \omega(1)[\varphi(x)]^{q_\omega+1}, \quad x \in [1, +\infty). \quad (37)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\varphi'(x) = \frac{\varphi(x)\omega(x)}{x}$; используя оценку (30), $\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leq q_\omega \frac{\omega'(t)}{t}$, и интегрируя ее по интервалу $[1, x]$, получим

$$\log \frac{\omega(x)}{\omega(1)} \leq q_\omega \int_1^x \frac{\omega(u)}{u} du,$$

т.е.

$$\omega(x) \leq \omega(1) \exp \left\{ q_\omega \int_1^x \frac{\omega(u)}{u} du \right\}, \quad (38)$$

или же

$$x\varphi'(x) \leq \omega(1)\varphi(x)[\varphi(x)]^{q_\omega} = \omega(1)[\varphi(x)]^{q_\omega+1}.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $f \in X_\varphi$ и φ удовлетворяет всем условиям леммы 3. Тогда имеет место оценка

$$|f'(z)| \leq C(\varphi'(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad C - \text{const}. \quad (39)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывает пример

$$f(z) = \underbrace{\exp \dots \exp}_n z, \quad \varphi(r) = \exp \dots \exp r, \quad n \geq 1,$$

оценка (39) точная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Используя формулу Коши, имеем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta. \quad (40)$$

Поэтому

$$|f'(z)| \leq \inf_{\rho>0} \frac{\varphi(r+\rho)}{\rho}, \quad z = re^{i\varphi}.$$

Положим $r+\rho = e^{x+t}$, $r = e^x$; тогда $\rho = e^{x+t}(1-e^{-t})$. Поэтому из (40) получаем

$$|f'(z)| \leq e^{-x} \inf_{t>0} \frac{\varphi(e^{x+t})}{(1-e^{-t})}.$$

Остается применить рассуждения, приведенные при доказательстве лемм 3 и 4. Лемма доказана.

Пусть теперь $f \in X_h$, $h \in \Omega$. Определим оператор

$$Df(z) = zf'(z), \quad D^0 f = f, \quad D^n f = D(D^{n-1}f), \quad n = 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 6. Пусть $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, $h \in \Omega$. Тогда справедливо представление

$$D^n f(z) = \psi_n(z) f(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1, \quad (41)$$

где

$$\psi_n \in X_{\varphi_n}, \quad \varphi_n = [\varphi]^{(q_\omega+1)n}; \quad (42)$$

q_ω определяется по (16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R > r$, $z = re^{i\varphi}$, $F(z) = \log f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, где выбрана главная ветвь логарифма. Пусть $R > r$, $z = re^{i\varphi}$. Докажем оценку

$$|F(z)| \leq C_1 [\varphi(|z|)]^{q_\omega+1}. \quad (43)$$

Используя формулу Шварца, имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Re^{i\theta} + re^{i\varphi}}{Re^{i\theta} - re^{i\varphi}} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta + iC. \quad (44)$$

По лемме 2

$$|F(re^{i\varphi})| \leq C_1 \inf_{R>r} \left(\frac{\varphi(R)}{1-r/R} \right). \quad (45)$$

Если теперь φ удовлетворяет условию (15), то, подбирая $R = 2r$, получаем

$$|F(z)| \leq C_2 \varphi(2r) \leq C_3 \varphi(|z|).$$

Если же φ удовлетворяет условию (16), то, применяя леммы 3 и 4, получим оценку (43). Теперь докажем лемму по индукции. Пусть $n = 1$; тогда

$$Df(z) = zf'(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} \cdot f(z) = \psi_1(z)f(z).$$

Оценим функцию ψ_1 . Сначала оценим ψ_1 при условии, что φ удовлетворяет оценке (15). Тогда, учитывая оценку (43) и используя формулу Коши по окружности радиуса $R > 2|z|$, нетрудно видеть

$$|\psi_1(z)| \leq C_4 [\varphi(|z|)]^{q_\omega+1}, \quad (46)$$

а в случае, когда φ удовлетворяет оценке (16), нужно использовать леммы 4 и 5. Допустим теперь, что лемма доказана при $0 \leq k \leq n-1$. Докажем ее при $k = n$.

Пусть $D^{n-1}f(z) = \psi_{n-1}(z)f(z)$. Тогда

$$D^n f(z) = z\psi'_{n-1}(z)f(z) + z\psi_{n-1}(z)f'(z) = \psi_n(z)f(z), \quad (47)$$

где

$$\psi_n(z) = z\psi'_{n-1}(z) + \psi_{n-1}(z)\psi_1(z).$$

Теперь если φ удовлетворяет оценке (15), то, как и при выводе оценки (46), нетрудно получить (42). Если же φ удовлетворяет условию (16), то, учитывая (46) и индукцию, получим

$$|\psi_{n-1}(z)\psi_1(z)| \leq C_1 [\varphi(|z|)]^{(n-1)(q_\omega+1)} C_2 [\varphi(|z|)]^{q_\omega+1} = C_3 [\varphi(|z|)]^{n(q_\omega+1)}.$$

Для оценки $z\psi'_{n-1}$ остается применить лемму 5. Лемма доказана.

Следующая лемма хорошо известна (см. [19]).

ЛЕММА 7. Пусть $F(z)$ голоморфна в полуплоскости

$$\Pi_{C_0} = \{z : \operatorname{Re} z > C_0 \geq 0\};$$

при этом

$$|F(z)| \leq \frac{m_n}{|z|^{qn}}, \quad z \in \Pi_{C_0}, \quad q > 0.$$

Тогда если

$$\int^{+\infty} \frac{\log T(r) dr}{r^{1+1/q}} = +\infty, \quad (48)$$

где

$$T(r) = \sup_{k \geq 1} \frac{r^k}{m_k}, \quad (49)$$

то $F(z) \equiv 0$.

ЛЕММА 8. Пусть $H \in \Omega_0$ и $f \in X_H$, $e_k(z) = z^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, и пусть Φ — линейный непрерывный функционал на X_H . Тогда имеет место равенство

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \Phi(e_k). \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что если $0 < \rho < 1$,

$$f_\rho(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k z^k = f(\rho z) \quad (51)$$

и

$$S_N^\rho(z) = \sum_{k=0}^N a_k \rho^k z^k, \quad (52)$$

то имеет место равенство

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N^\rho - f_\rho\|_{X_H} = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \|f_\rho - f\|_{X_H} = 0. \quad (53)$$

Докажем первое из них. Имеем

$$\|S_N^\rho - f_\rho\|_{X_H} \leq \sup_{r \geq 0} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|a_k| r^k}{H(r)} \rho^k \leq \|f\|_{X_H} \frac{\rho^{N+1}}{1-\rho}.$$

Последняя оценка следует из неравенства Коши для коэффициентов. Следовательно, первое равенство доказано. Докажем второе равенство в (53). Пусть ε и R — такие положительные числа, что

$$\sup_{|z| > R} \left\{ \frac{|f(z)|}{H(|z|)} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (54)$$

Тогда

$$\|f_\rho - f\|_{X_H} \leq \sup_{|z| \leq 2R} \{ \} + \sup_{|z| > 2R} \{ \} \stackrel{\text{def}}{=} J_1(\rho) + J_2(\rho).$$

Очевидно, что $\lim_{\rho \rightarrow 1-0} J_1(\rho) = 0$. Поэтому при $\rho_0(\varepsilon) < \rho < 1$ получаем

$$J_1(\rho) < \varepsilon/3. \quad (55)$$

Оценим

$$\begin{aligned} J_2(\rho) &= \sup_{|z| \geq 2R} \frac{|f(\rho z) - f(z)|}{H(|z|)} \leq \sup_{|z| > 2R} \left\{ \frac{|f(\rho z)|}{H(|z|)} \right\} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \sup_{|z| > 2R} \frac{|f(\rho z)|}{H(\rho|z|)}. \end{aligned}$$

Но из $\rho > 1/2$, $|z| > 2R$ следует, что $\rho|z| > R$. Поэтому

$$\sup_{|z| > 2R} \left\{ \frac{|f(\rho z)|}{H(\rho|z|)} \right\} \leq \sup_{|z| > R} \left\{ \frac{|f(z)|}{H(|z|)} \right\} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (56)$$

Объединяя оценки (54)–(56), получаем $\|f_\rho - f\|_{X_H} < \varepsilon$, как только $\rho_0 < \rho < 1$. Этим доказано второе равенство в (53). Теперь предположим, что Φ – линейный непрерывный функционал на X_H и $f \in X_H$. Тогда, исходя из равенств (53), получаем

$$\Phi(f_\rho) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \Phi(S_N^\rho) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \rho^k \Phi(e_k).$$

Поэтому

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \Phi(f_\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k \Phi(e_k).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть h и H – монотонно растущие мажоранты на $(0, +\infty)$, $h \in \Omega$, причем

$$h(x)(\log h(x))^n = o(H(x)) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad n = 0, 1, \dots \quad (57)$$

Предположим также, что $f \in X_h$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Тогда существует последовательность многочленов $\{P_{n,m}\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_{n,m}f - D^m f\|_{X_H} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (58)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала заметим, что $D^m f = f\psi_m$, где ψ_m удовлетворяет условию (42). Зафиксируем теперь натуральное число m и положим

$$P_{n,m}(re^{i\varphi}) = \sigma_{n,m}(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{n(\theta-\varphi)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)} \right)^2 \psi_m(re^{i\theta}) d\theta,$$

где ψ_m — функция, определяемая по лемме 6. Очевидно, что $\sigma_{n,m}$ — многочлен степени n , он представляет чезаровское среднее ряда Фурье функции ψ_m по окружности $|\zeta| = r$ и равномерно сходится к ψ в круге $|\zeta| \leq r$. Применяя свойство этих средних, имеем

$$|P_{n,m}(re^{i\varphi})| \leq \max_{\theta \in [-\pi, \pi]} |\psi_m(re^{i\theta})| \leq C[\varphi(r)]^{m(q_\omega+1)}, \quad C - \text{const.}$$

Докажем, что $P_{n,m}f \rightarrow f\psi_m$ ($n \rightarrow +\infty$) в пространстве X_H . Имеем

$$\begin{aligned} \|P_{n,m}f - f\psi_m\|_{X_H} &= \sup_{|\zeta| < R_0} \left\{ \frac{|P_{n,m}(\zeta)| |f(\zeta)|}{H(\zeta)} \right\} + \sup_{|\zeta| > R_0} \left\{ \right\} \\ &\leq \sup_{|\zeta| < R_0} \left\{ \right\} + C_0 \sup_{|\zeta| > R_0} \left\{ \frac{h(|\zeta|)(\varphi(|\zeta|))^{m(q_\omega+1)}}{H(|\zeta|)} \right\}. \end{aligned} \quad (59)$$

Подберем R_0 таким образом, чтобы последний супремум был меньше, чем наперед заданное число $\varepsilon > 0$. Для оценки первого выражения заметим, что

$$\sup_{|\zeta| < R_0} \left\{ \frac{|P_{n,m}(\zeta) - \psi_m(\zeta)| |f(\zeta)|}{H(|\zeta|)} \right\} \leq \sup_{|\zeta| \leq R_0} \left\{ \frac{h(|\zeta|)}{H(|\zeta|)} |P_{n,m}(\zeta) - \psi_m(\zeta)| \right\}.$$

Выбирая теперь n_0 достаточно большим, получаем

$$\|(P_{n,m} - \psi_m)f\|_{X_H} < 2\varepsilon,$$

как только $n > n_0(\varepsilon)$. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теорем 2 и 3

1. Доказательство теоремы 2. Пусть f — функция из X_h , $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Обозначим через $L(f)$ множество всех функций ψ из X_H , допускающих аппроксимации вида

$$\inf_{P \in \mathcal{P}} \|Pf - \psi\|_{X_H} = 0.$$

Пусть Φ — произвольный линейный непрерывный функционал на X_H , ортогональный к $L(f)$. Для доказательства теоремы по теореме Хана–Банаха достаточно установить, что $\Phi(1) = 0$, т.е. $1 \in L(f)$. По лемме 8 для любого $\psi \in X_H$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} b_k z^k, \\ \Phi(f) &= \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \Phi(e_k) \rho^k. \end{aligned}$$

По лемме 9, если $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, функция

$$D^n f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n a_k z^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

принадлежит подпространству $L(f)$ и, следовательно,

$$\Phi(D^n f) = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k^n \Phi(e_k) \rho^k = 0, \quad (60)$$

где $e_k(z) = z^k$, $k = 0, 1, 2$.

Докажем, что в условиях теоремы в равенстве (60) возможен предельный переход под знаком суммы и что

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| k^n |\Phi(e_k)| < +\infty, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (61)$$

В самом деле, пусть $b_k = k^n a_k$; из леммы 6 и неравенства Коши получаем

$$|b_k| \leq C_0 \inf_{r>0} \left\{ \frac{h(r)(\varphi(r))^{n(q_\omega+1)}}{r^k} \right\}. \quad (62)$$

В то же время

$$|\Phi(e_k)| \leq \|\Phi\| \|e_k\| = \|\Phi\| \sup_{r>0} \left\{ \frac{r^k}{H(r)} \right\}.$$

Пусть теперь $\sup \frac{r^k}{H(r)} = \frac{r_k^k}{H(r_k)}$. Тогда в силу соотношений $h(r)\Phi^n(r) = o(H(r))$, $n = 1, 2, \dots$, следует

$$|b_k \Phi(e_k)| \leq C \frac{h(r_k)(\varphi(r_k))^{n(q_\omega+1)}}{H(r_k)} \leq C_n, \quad C - \text{const},$$

C_n – положительное число, зависящее только от n . Аналогичным образом

$$|b_k k^2 \Phi(e_k)| \leq C \frac{h(r_k)(\varphi(r_k))^{(n+2)(q_\omega+1)}}{H(r_k)} = C_{n+2},$$

т.е.

$$|b_k \Phi(e_k)| \leq \frac{C_{k+2}}{k^2}.$$

Поэтому ряд (61) сходится и, следовательно,

$$\Phi(D^n f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k k^n \Phi(e_k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (63)$$

Отсюда для любого многочлена $P \in \mathcal{P}$ имеем

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k P(k) \Phi(e_k) = 0. \quad (64)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k \Phi(e_k)}{k - z}. \quad (65)$$

Очевидно, что F голоморфна вне луча $\arg z = 0$. Оценим модуль функции

$$\psi(z) = F(-z^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k \Phi(e_k)}{k + z^2}. \quad (66)$$

Используя равенство

$$\frac{1}{k + z^2} = \frac{(-1)^{n-1}}{z^{2(n-1)}} \frac{k^{n-1}}{(k + z^2)} + \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m k^m}{z^{2(m+1)}}, \quad n \geq 2, \quad (67)$$

и (64), (65), получим

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{(-1)^{n-1}}{z^{2(n-1)}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^{n-1} a_k \Phi(e_k)}{k + z^2} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{n-2} \frac{(-1)^m k^m a_k \Phi(e_k)}{z^{2(m+1)}} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{z^{2(n-1)}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^{n-1} a_k \Phi(e_k)}{k + z^2}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (68)$$

Отсюда имеем

$$|\psi(z)| \leq \frac{\sup_{k \geq 1} k^n |a_k| |\Phi(e_k)|}{|z|^{2(n-1)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = C_0 \frac{\sup\{ \}}{|z|^{2(n-1)}}. \quad (69)$$

Теперь оценим последний супремум. При $\operatorname{Re} z \geq 1$ имеем

$$|a_k| \leq \inf_{r>0} \frac{h(r)}{r^k}; \quad |\Phi(e_k)| \leq \|\Phi\| \sup_{r \geq 0} \frac{r^k}{H(r)} = \|\Phi\| \frac{r_k^k}{H(r_k)}, \quad (70)$$

где r_k является решением уравнения

$$H'(r_k) r_k^k - k H(r_k) r_k^{k-1} = 0,$$

т.е. $k = \frac{H'(r_k)r_k}{H(r_k)}$. Или если $\nu(t) = \left(\frac{H'(t)t}{H(t)}\right)^{-1}$ – обратная функция к $\frac{H'(t)t}{H(t)}$, то $r_k = \nu(k)$. Из (70) имеем

$$\sup_{k \geq 0} k^n |a_k| |\Phi(e_k)| \leq C_0 \sup_{k \geq 1} \frac{h(\nu(k))k^n}{H(\nu(k))}.$$

Таким образом, окончательно получаем

$$|\psi(z)| \leq \frac{A \cdot m_n}{|z|^{2(n-1)}} \quad (n \geq 2), \quad \operatorname{Re} z \geq 1.$$

Применяя лемму 7 к функции $\frac{\psi(z)}{z^2}$, получаем

$$\psi(z) \equiv 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

И, следовательно, $a_k \Phi(e_k) = 0$, $k = 0, 1, \dots$. Так как $a_0 = f(0) \neq 0$, то $\Phi(e_0) = \Phi(1) = 0$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно следует утверждение следствия.

Действительно, достаточно использовать тот факт, что в силу выпуклости функции $\log \frac{H(\nu(e^t))}{h(\nu(e^t))}$ в окрестности $+\infty$ интегралы (19) и (25) одновременно расходятся и сходятся (см. [4] и [19]).

2. Доказательство теоремы 3. Сначала установим импликацию б) $\Rightarrow$ а). Для этого используем утверждение следствия 1. Докажем выпуклость функции $\log \frac{H(\nu(e^t))}{h(\nu(e^t))}$ в окрестности $+\infty$. Имеем

$$\omega(x) = \frac{H'(x)x}{H(x)} = px^p + \alpha(x^p)px^p. \quad (71)$$

Учитывая (21), (22), нетрудно установить следующие свойства функции ν :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \nu'(x)\nu^{p-1}(x) &= \frac{1}{p^2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\nu^p(x)}{x} = \frac{1}{p}, \\ \frac{\nu''(x)}{\nu'^2(x)} &= -\frac{p-1}{\nu(x)} + o\left(\frac{1}{\nu(x)}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (72)$$

Действительно, первое свойство непосредственно следует из (71) и равенства $\nu^p(\omega(x)) = x^p$.

Докажем третье равенство. Имеем

$$\frac{1}{\nu'(\omega(x))} = \omega'(x), \quad \frac{\nu''(\omega(x))}{\nu'^2(\omega(x))} = -\frac{\omega''(x)}{\omega'(x)}.$$

Используя (71), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\nu''(\omega(x))}{\nu'^2(\omega(x))} &= -\frac{(p-1)x^{p-2}}{x^{p-1}} \left[\frac{1 + \alpha''(x^p)x^{2p} + 2p\alpha'(x^p)x^p + (p-1)\alpha(x^p)}{1 + \alpha'(x^p)x^p + \alpha(x^p)} \right] \\ &= -\frac{p-1}{x} - \frac{p-1}{x} \left[\frac{\alpha''(x^p)x^{2p} + \alpha'(x^p)x^p(2p-1) + (p-2)\alpha(x^p)}{1 + \alpha'(x^p)x^p + \alpha(x^p)} \right]. \end{aligned}$$

Используя (21) и полагая $x = \nu(y)$, получим третье свойство из (72).

Положим теперь $\varphi(t) = \lg \frac{H(\nu(e^t))}{h(\nu(e^t))}$. Докажем, что $\varphi''(t) > 0$ при достаточно больших t . Учитывая (71), имеем

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \alpha'(\nu^p(e^t))(p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t)^2 + \alpha(\nu^p(e^t))[p\nu''(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^{2t} \\ &\quad + p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t + (p-1)p\nu^{p-2}(e^t)e^{2t}(\nu'(e^t))^2] \\ &= \alpha'(\nu(e^t)^p)(p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t)^2 + \alpha(\nu^p(e^t))\left[p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t \right. \\ &\quad \left. + e^{2t}p\nu'^2(e^t)\nu^{p-1}(e^t)\left(\frac{p-1}{\nu(e^t)} + \frac{\nu''(e^t)}{\nu'^2(e^t)}\right)\right].\end{aligned}$$

Используя теперь оценки (72), получаем

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \alpha'(\nu(e^t)^p)(p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t)^2 \\ &\quad + \alpha(\nu(e^t)^p)[p\nu'(e^t)\nu^{p-1}e^t + pe^{2t}\nu'^2(e^t)\nu^{p-2}\delta(t)],\end{aligned}$$

где $\delta(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}\frac{\varphi''(t)}{\alpha(\nu^p(e^t))e^t} &= \frac{\alpha'(\nu^p(e^t))(p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t)e^t)^2}{\alpha(\nu^p(e^t))e^t} \\ &\quad + p\nu'(e^t)\nu^{p-1}(e^t) + \delta(t)pe^t\nu'^2(e^t)\nu^{p-2}(e^t).\end{aligned}$$

Следовательно, используя (21), (22), (72), окончательно получаем

$$\frac{\varphi''(t)}{\alpha(\nu^p(e^t))e^t} > \frac{1}{p} - \frac{q_\alpha}{p} - \varepsilon = \frac{1}{p}(1 - q_\alpha - \varepsilon p) > 0, \quad (73)$$

как только $t > t_0(\varepsilon) > 0$, где ε – наперед заданное достаточно малое положительное число.

Таким образом, функция φ выпукла в окрестности $+\infty$. Отсюда нетрудно заметить, что функции h и H удовлетворяют всем требованиям следствия 1. Поэтому имеет место импликация б) $\Rightarrow$ а).

Докажем обратную импликацию. Для этого докажем, что если интеграл (19) сходится, то можно построить функцию $f \in X_h$ такую, что $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$, и слабо обратимую в пространстве X_H . Докажем, что функция $f_p(z) = \exp z^p$, $z \in \mathbb{C}$, p – натуральное число, слабо необратима в пространстве X_H , где $H(x) = \exp\{x^p + \psi(x^p)\}$. Докажем последнее утверждение от противного. Предположим, что существует последовательность многочленов P_n такая, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n f_p - 1\|_{X_H} = 0.$$

Тогда, в частности,

$$|P_n(z)f_p(z) - 1| < \frac{1}{2} \exp\{|z|^p + \psi(|z|^p)\}, \quad n \geq n_0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (74)$$

Теперь докажем, что из сходимости интеграла (19) следует

$$\int^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{3/2}} dx < +\infty. \quad (75)$$

Действительно, пусть

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \log \frac{H(\nu(t))}{h(\nu(t))} dt.$$

Произведем замену переменной $x = \nu(t)$. Получаем

$$I = \int_{\nu(1)}^{+\infty} \frac{1}{(\omega(x))^{3/2}} \log \frac{H(x)}{h(x)} \omega'(x) dx = \int_{\nu(1)}^{+\infty} \frac{\psi(x^p) \omega'(x)}{(\omega(x))^{3/2}} dx.$$

Теперь, учитывая, что $\omega(x) \sim x^p$ и $\omega'(x) \sim x^{p-1}$ (см. (71)) при $x \rightarrow +\infty$, получаем

$$I \geq C_1 \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x^p)}{(x^p)^{3/2}} x^{p-1} dx = \frac{C_1}{p} \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{3/2}} dx.$$

Оценка (75) установлена. Возвращаясь к неравенству (74), заметим, что, в частности, такое же неравенство имеет место на лучах $\arg z = 0$, $\arg z = \frac{2\pi}{p}$, т.е.

$$|P_n(\xi) \exp \xi^p| \leq 2 \exp\{|\xi|^p + \psi(|\xi|^p)\}, \quad \xi \in \partial\Delta_p,$$

где Δ_p будет обозначать угол со сторонами $\arg \xi = 0$, $\arg \xi = 2\pi/p$. На этих лучах $\xi^p = |\xi|^p$, поэтому

$$|P_n(\xi)| \leq 2 \exp\{\psi(|\xi|^p)\}, \quad \xi \in \partial\Delta_p. \quad (76)$$

Положим $\xi = z^{2/p}$, где подобрана главная ветвь этой функции. Тогда имеем

$$|P_n(x^{2/p})| \leq 2 \exp\{\psi(x^2)\}$$

при всех $x \in (-\infty, +\infty)$. Построим внешнюю функцию $G(z)$ в верхней полуплоскости, модуль которой совпадает на вещественной оси с функцией $\psi(x^2)$. Такое построение возможно ввиду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\psi(x^2)}{1+x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\psi(x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\psi(u) du}{(1+u)u^{1/2}} < +\infty.$$

Тогда из неравенства (76) следует, что

$$|P_n^*(\xi)| \leq 2|G(\xi)|, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad P^*(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} P_n(\xi^{2/p}).$$

Теперь, поскольку $P_n^*(\xi)$ голоморфна в верхней полуплоскости и принадлежит там классу В. И. Смирнова, неравенство

$$|P_n^*(\xi)| \leq 2|G(\xi)| \quad (77)$$

выполняется при всех ξ , $\text{Im } \xi \geq 0$. Перейдем в этом неравенстве к пределу, когда $n \rightarrow +\infty$. Получаем

$$|e^{-\xi^2}| \leq 2|G(\xi)|, \quad \text{Im } \xi \geq 0.$$

Но такое неравенство не может выполняться, например, при $\xi = iy$, $y > 0$. Поэтому функция f слабо необратима в пространстве X_H . Теорема доказана.

Список литературы

1. *Келдыш М. В.* Sur l'approximation en moyenne par polynômes des fonctions d'une variable complexe // Матем. сб. 1945. Т. 16(58). С. 1–20.
2. *Джрбачян М. М.* О метрических признаках полноты системы полиномов при взвешенном приближении // ДАН СССР. 1946. Т. 66. № 6. С. 1037–1040.
3. *Джрбачян М. М.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области // Матем. сб. 1955. Т. 36. № 3. С. 353–440.
4. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // УМН. 1956. Т. 9. № 5. С. 107–152.
5. *Шапиро Г. С.* Некоторые замечания о весовой полиномиальной аппроксимации голоморфных функций // Матем. сб. 1967. Т. 73(115). С. 320–330.
6. *Shapiro H. S.* Weakly invertible elements in certain functions spaces and generators in l^1 // Michigan Math. J. 1964. V. 11. № 2. P. 161–165.
7. *Никольский Н. К.* Спектральный анализ и задача весовой аппроксимации в пространствах аналитических функций // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1971. Т. 6. № 5. С. 345–367.
8. *Никольский Н. К.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1974. Т. CXX. С. 270.
9. *Shields A. L.* Cyclic vectors in Spaces of analytic functions // Linear and complex analysis, problems book. Lecture Notes in Math. V. 1043. Springer-Verlag, 1984.
10. *Ehrenpreis L.* Mean periodic functions. I // Amer. Math. J. 1955. V. 77. № 2. P. 233–258.
11. *Никольский Н. К.* Замкнутые идеалы в некоторых алгебрах целых функций // Сиб. матем. журн. 1968. Т. 9. № 1. С. 211–215.
12. *Красичков И. Ф.* О замкнутых идеалах в локально выпуклых алгебрах целых функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1968. Т. 32. № 5. С. 1024–1032.
13. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 459–489; II // Матем. сб. 1973. Т. 88. № 1. С. 3–30.
14. *Ткаченко В. А.* О спектральном синтезе в пространствах аналитических функционалов // ДАН СССР. 1975. Т. 223. № 2. С. 307–309.
15. *Kelleher S. S., Taylor B. A.* Closed ideals in local convex algebras of analytic functions // J. Reine and angew. Math. 1972. Bd. 255. S. 190–209.
16. *Meise R., Taylor B. A.* Splitting of slowly decreasing ideals in weighted algebra of entire functions // Lecture Note in Math. 1989. V. 1276. P. 229–252.
17. *Шамоян Ф. А.* О слабой обратимости в некоторых пространствах аналитических функций // ДАН АрмССР. 1982. Т. 74. № 4. С. 157–160.
18. *Earl S. P., Hayman W. K.* Smoot majorants for functions of arbitrarily rapid growth // Math. proc. comb. Soc. 1991. V. 109. P. 565–569.
19. *Мандельброт С.* Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применение. М.: ИЛ, 1955.