Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, Об одной задаче Гауэрса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2006, том 70, выпуск 2, 179–221

DOI: <https://doi.org/10.4213/im912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:30:14

УДК 511.218+511.336

И. Д. Шкредов

Об одной задаче Гауэрса

Доказано, что любое множество $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ мощности не меньше δN^2 содержит тройку вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d > 0$, $\delta > 0$ – любое вещественное число, N – натуральное число, $N \geq \exp \exp \exp \{\delta^{-c}\}$, $c > 0$ – некоторая эффективная константа.

Библиография: 24 наименования.

§ 1. Введение

В 1927 г. Б.Л. Ван дер Варден доказал следующую знаменитую теорему об арифметических прогрессиях (см. [1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть h и k – натуральные числа. Существует такое число $N(h, k)$, что для любого натурального $N \geq N(h, k)$ и любого разбиения множества $1, 2, \dots, N$ на h подмножеств одно из подмножеств содержит арифметическую прогрессию длины k .

Пусть N – натуральное число. Положим $a_k(N) = \frac{1}{N} \max\{|A| : A \subseteq [1, N], A \text{ не содержит арифметических прогрессий длины } k\}$, где $|A|$ – мощность множества A . В работе [2] П. Эрдеши и П. Туран высказали гипотезу, согласно которой в любом множестве положительной плотности найдется арифметическая прогрессия заданной длины. Другими словами, они предположили, что для любого $k \geq 3$

$$a_k(N) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Ясно, что из этого предположения вытекает теорема Ван дер Вардена.

Простейший случай $k = 3$ гипотезы (1) был доказан К. Ф. Ротом в [3]. В своей работе Рот, используя метод Харди–Литтлвуда, доказал неравенство

$$a_3(N) \ll \frac{1}{\log \log N}, \quad N \geq 3.$$

Наилучший, в настоящее время, результат об оценке сверху величины $a_3(N)$ принадлежит Дж. Бургейну [4]. Он доказал, что

$$a_3(N) \ll \sqrt{\frac{\log \log N}{\log N}}, \quad N \geq 3. \quad (2)$$

Для произвольного k гипотеза (1) была доказана Е. Семереди [5] в 1975 г. В своем доказательстве Семереди использовал трудные комбинаторные аргументы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-01-00912), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-136.2003.1) и INTAS (грант № 03-51-5070).

Основу его доказательства составляет так называемая лемма регулярности, которая является важнейшим инструментом исследования графов.

Альтернативное доказательство было предложено Х. Фёстенбергом в работе [18], где использованы методы эргодической теории. Фёстенберг показал, что теорема Е. Семереди эквивалентна утверждению о кратной возвращаемости для почти всех точек в произвольной динамической системе. Мы сформулируем его теорему в следующем виде.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и борелевской сигма-алгеброй измеримых множеств Φ . Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя, $0 < \mu(X) < \infty$ и $k \geq 3$. Тогда для почти всех $x \in X$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \max\{d(T^n x, x), d(T^{2n} x, x), \dots, d(T^{(k-1)n} x, x)\} = 0.$$

Следует отметить, что, используя этот метод, Фёстенберг и его ученики получили глубокие обобщения теоремы Семереди (см., например, [18], [22]), которые комбинаторными методами доказать пока не удалось.

А. Беренд в работе [11] получил нижнюю оценку величины $a_3(N)$:

$$a_3(N) \gg \exp\{-C(\log N)^{1/2}\},$$

где C – некоторая положительная вычислимая константа. (Оценку снизу величины $a_k(N)$ для произвольного k см. в [8].)

К сожалению, методы Семереди дают очень слабые верхние оценки для $a_k(N)$. Эргодический подход вообще не дает никаких оценок. Только в 2001 г. В. Т. Гауэрс [6] получил первый эффективный результат о скорости стремления к нулю величины $a_k(N)$ для $k \geq 4$. Он доказал следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\delta > 0$, $k \geq 4$ и $N \geq \exp \exp\{C\delta^{-K}\}$, где $C, K > 0$ – некоторые эффективные константы, зависящие только от k . Пусть A – произвольное множество из $\{1, 2, \dots, N\}$, $|A| \geq \delta N$. Тогда в A есть арифметическая прогрессия длиной k .

Другими словами, В. Т. Гауэрс доказал, что для произвольного $k \geq 4$ имеет место неравенство $a_k(N) \ll 1/(\log \log N)^{c_k}$, где константа c_k зависит только от k .

В настоящей работе мы будем решать следующую задачу. Рассмотрим двумерную решетку $[1, N]^2$ с базисом $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Пусть

$$L(N) = \frac{1}{N^2} \max\{|A| : A \subseteq [1, N]^2$$

и A не содержит троек вида $(k, m), (k + d, m), (k, m + d), d > 0\}$. (3)

Тройку из (3) мы будем называть *уголком*. В работах [9], [18] было доказано, что величина $L(N)$ стремится к нулю, когда N стремится к бесконечности. В. Т. Гауэрс (см. [6]) поставил вопрос о скорости сходимости $L(N)$ к нулю.

В работе [12] В. Ву предложил следующее решение этого вопроса (см. также [13]). Пусть $\log_{[1]} = \log N$ и $\log_{[l]} N = \log(\log_{[l-1]} N)$ для $l \geq 2$. Пусть k – наибольшее натуральное число такое, что $\log_{[k]} N \geq 2$. Тогда положим $\log_* N = k$.

В. Ву доказал, что

$$L(N) \leq \frac{100}{\log_*^{1/4} N}.$$

Основным результатом настоящей статьи является

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\delta > 0$, $N \geq \exp \exp \exp \{\delta^{-c}\}$, $c > 0$ – некоторая эффективная константа и $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ – произвольное подмножество мощности не меньше δN^2 . Тогда A содержит тройку вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$, где $d > 0$.

Таким образом мы доказываем оценку $L(N) \ll 1/(\log \log \log N)^{C_1}$, где $C_1 > 0$ – некоторая эффективная константа.

Кроме того, мы получим простейшую оценку снизу для величины $L(N)$ (см. предложение 1).

Утверждения, необходимые для доказательства теоремы 4, содержатся в § 2–4.

Прежде всего, отметим, что обычные методы анализа Фурье для доказательства основной теоремы не применимы. Пусть $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, и пусть $\chi_A(\vec{x})$ – характеристическая функция произвольного множества A из $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, а $\hat{\chi}_A(\vec{r})$ – его преобразование Фурье. Тогда количество троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ в A равно

$$\frac{1}{N^3} \sum_{x, y, z \in \mathbb{Z}_N} \hat{\chi}_A(x + z, y - z) \hat{\chi}_A(-x, z) \hat{\chi}_A(-z, -y). \quad (4)$$

Член, получающийся при $x = y = z = 0$, в сумме (4) является главным и равен $\delta^3 N^3$. Обозначим оставшуюся сумму через σ' . В силу метода Фурье если все ненулевые коэффициенты Фурье $\hat{\chi}_A(\vec{r})$ малы, то и σ' мала по сравнению с $\delta^3 N^3$.

Приведем простой пример множества с очень маленькими коэффициентами Фурье, для которого член, получающийся при $x = y = z = 0$, в сумме (4) не является главным. Пусть A имеет вид $E \times E$, где $E \subseteq [1, N]$ – случайное множество с плотностью $\sqrt{\delta}$. Тогда для любого положительного ε все ненулевые коэффициенты Фурье множества E равны $O(N^{1/2+\varepsilon})$, а значит, все ненулевые коэффициенты Фурье множества A равны $O(N^{1+2\varepsilon})$. Но математическое ожидание числа троек вида $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$ в A равно $\delta^2 N^3$. Мы видим, что это число не совпадает с главным членом суммы (4). Следовательно, с положительной вероятностью найдется множество A , имеющее маленькие коэффициенты Фурье и содержащее $\delta^2 N^3$ троек $\{(k, m), (k + d, m), (k, m + d)\}$.

В § 2 обсуждается понятие α -равномерности. Приведем простые эвристические рассуждения. Возьмем некоторое положительное число δ , и пусть натуральное число N больше $1/\delta$. Будем бросать над каждой точкой из $[1, N]^2$ монету и предполагать, что орел выпадает с вероятностью δ , а решка – с вероятностью $1 - \delta$. Пусть A – множество всех точек, над которыми выпал орел. Тогда в среднем $|A| = \delta N^2$ и A содержит $\delta^3 N^3 > 1$ уголков. Мы видим, что с положительной вероятностью в множестве A содержится по крайней мере один уголок (на самом деле, при больших N множество A будет содержать много уголков.) В этом же параграфе мы дадим определение α -равномерных множеств. Смысл

этого определения такой: α -равномерные множества – это множества, которые содержат примерно столько уголков, сколько содержат случайные множества. Значит, если множество α -равномерно, то оно содержит много уголков.

В § 3 будет разобран случай, когда множество A не является α -равномерным. С множеством A можно ассоциировать некоторый граф G_A и его матрицу смежности M . Будет показано, что α -равномерность множества A эквивалентна тому, что второе по величине собственное значение матрицы MM^T мало (M^T – транспонированная матрица). Оказывается, что если A не α -равномерно, а значит, MM^T имеет большое второе собственное значение, то в A можно выделить подмножество вида $E_1 \times E_2$, в котором A имеет плотность больше $\delta + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$. Пусть A не содержит уголков. Тогда ограничение A на $E_1 \times E_2$ также не содержит уголков и мы можем применить к этому множеству рассуждения, приведенные в § 2 и 3. В конце концов мы либо придем к противоречию, т. е. найдем уголок в A , либо выделим такое множество вида $E_1^T \times E_2^T$, в котором A имеет плотность, близкую к 1.

Если бы E_1^T и E_2^T были достаточно длинными прогрессиями с одинаковой разностью, то любое подмножество $E_1^T \times E_2^T$, плотность которого больше $3/4$, должно содержать уголок. Для произвольных множеств это неверно. Например, если E_2^T – прогрессия с разностью, большей, чем $|E_1^T|$, то в $E_1^T \times E_2^T$ уголков нет. Для доказательства придется выбирать E_1, E_2 специальным образом, а именно α -равномерными в смысле Гауэрса (имеющими маленькие коэффициенты Фурье).

В § 4 приведено доказательство теоремы 4, где мы объединим все результаты, полученные в предыдущих параграфах, и воспользуемся техникой Гауэрса, чтобы выбрать E_1, E_2 нужным нам образом.

С точки зрения эргодической теории теорема 4 является результатом о количественной возвращаемости точки в динамической системе под действием двух коммутирующих отображений. В § 5 приведены приложения теоремы 4 к динамическим системам.

В настоящей статье мы развиваем подход, приведенный в работах [6], [10].

§ 2. α -равномерные множества

Пусть A – произвольное множество из $\mathbb{Z}_N$, $|A| = \delta N$. Обозначим через $\chi_A(s)$ характеристическую функцию множества A . Функция $f(s) = \chi_A(s) - \delta$ называется *балансовой* функцией множества A . Одним из ключевых моментов работы [6] являлось понятие α -равномерности.

Обозначим через D замкнутый диск на комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция f из $\mathbb{Z}_N$ в D называется α -равномерной, если

$$\sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{f(s-k)} \right|^2 \leq \alpha N^3. \quad (5)$$

Будем говорить, что множество A является α -равномерным, если его балансовая функция α -равномерна. В работе [6] было доказано, что если A является

α -равномерным множеством, то A близко к случайному множеству в следующем смысле: количество арифметических прогрессий длины 3 в A примерно такое же, как и в случайном множестве с плотностью δ .

Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N$ в $\mathbb{C}$. Обозначим через $\hat{f}(r)$ r -й коэффициент Фурье функции f :

$$\hat{f}(r) = \sum_k f(k)e(-kr),$$

где $e(x) = e^{2\pi i x/N}$. Заметим, что если $f(k)$ – балансовая функция множества $A \subset \mathbb{Z}_N$, то $\hat{f}(0) = 0$ и $\hat{f}(r) = \hat{\chi}_A(r)$ для всех $r \neq 0$.

Будем использовать несколько известных формул, касающихся преобразования Фурье:

$$N \sum_s |f(s)|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^2, \quad (6)$$

$$N \sum_s f(s) \overline{g(s)} = \sum_r \hat{f}(r) \overline{\hat{g}(r)}, \quad (7)$$

$$N \sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{g(s-k)} \right|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^2 |\hat{g}(r)|^2. \quad (8)$$

Нам понадобится лемма 2.2 из работы [6]. Эта лемма устанавливает, по сути, несколько эквивалентных определений α -равномерности.

ЛЕММА 1. Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N$ в D . Если f является α -равномерной, то:

- 1) $\sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leq \alpha N^4$;
- 2) $\max_r |\hat{f}(r)| \leq \alpha^{1/4} N$;
- 3) $\left| \sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{g(s-k)} \right|^2 - \frac{1}{N} \left| \sum_s f(s) \right|^2 \left| \sum_s g(s) \right|^2 \right| \leq \alpha^{1/2} N^2 \|g\|_2^2$ для любой функции g , $g: \mathbb{Z}_N \rightarrow D$;
- 4) число тех k , для которых $\left| (f * g)(k) - \frac{1}{N} \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)} \right| \geq \alpha^{1/6} N$, не превосходит $\alpha^{1/6} N$, где $g: \mathbb{Z}_N \rightarrow D$ – произвольная функция.

Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leq \alpha N$ с некоторым α , то функция f является α^2 -равномерной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (8) имеем

$$N \sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{f(s-k)} \right|^2 = \sum_r |\hat{f}(r)|^4, \quad (9)$$

и утверждение 1) леммы доказано. Далее,

$$\max_r |\hat{f}(r)|^4 \leq \sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leq \alpha N^4.$$

Следовательно, и утверждение 2) леммы доказано. Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leq \alpha N$ с некоторым α , то, используя равенство (6), получаем

$$\sum_r |\hat{f}(r)|^4 \leq \alpha^2 N^2 \sum_r |\hat{f}(r)|^2 = \alpha^2 N^3 \sum_s |f(s)|^2 \leq \alpha^2 N^4.$$

Значит, функция f является α^2 -равномерной. Осталось доказать утверждения 3) и 4). Пусть $(f * g)(k) = \sum_s f(s) \overline{g(s-k)}$. Тогда

$$\sum_k \sum_s f(s) \overline{g(s-k)} = \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_k \left| (f * g)(k) - \frac{1}{N} \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)} \right|^2 \\ &= \sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{g(s-k)} \right|^2 - \frac{1}{N} \left| \sum_s f(s) \right|^2 \left| \sum_s g(s) \right|^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть $\phi(k) = (f * g)(k) - \frac{1}{N} \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)}$. Тогда

$$\sum_k \left| \sum_s f(s) \overline{g(s-k)} \right|^2 - \frac{1}{N} \left| \sum_s f(s) \right|^2 \left| \sum_s g(s) \right|^2 = \sum_k |\phi(k)|^2.$$

Имеем $\hat{\phi}(0) = \sum_k \phi(k) = 0$. Кроме того, для всех $r \neq 0$ выполнено $\hat{\phi}(r) = \hat{f}(r) \overline{\hat{g}(r)}$. Применяя равенства (6) и (10), находим

$$\sigma = \frac{1}{N} \sum_r |\hat{\phi}(r)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r \neq 0} |\hat{\phi}(r)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{r \neq 0} |\hat{f}(r)|^2 |\hat{g}(r)|^2. \quad (11)$$

Если f является α -равномерной, то в силу утверждения 2) выполнено $\max_r |\hat{f}(r)| \leq \alpha^{1/4} N$. Применяя к (11) равенство (6), получаем

$$\sigma \leq \alpha^{1/2} N \sum_r |\hat{g}(r)|^2 \leq \alpha^{1/2} N^2 \sum_s |g(s)|^2 = \alpha^{1/2} N^2 \|g\|_2^2, \quad (12)$$

и утверждение 3) доказано. Из соотношения (12) вытекает, что

$$\sum_k \left| (f * g)(k) - \frac{1}{N} \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)} \right|^2 \leq \alpha^{1/2} N^3. \quad (13)$$

Обозначим через B множество тех k , для которых выполнено

$$\left| (f * g)(k) - \frac{1}{N} \sum_s f(s) \overline{\sum_s g(s)} \right| \geq \alpha^{1/6} N.$$

Применяя неравенство (13), получаем $|B|(\alpha^{1/6} N)^2 \leq \alpha^{1/2} N^3$. Иными словами, $|B| \leq \alpha^{1/6} N$. Лемма доказана.

Пусть $f: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторая функция. Тогда $\vec{r}$ -й, $\vec{r} = (r_1, r_2)$, коэффициент Фурье вычисляется по формуле

$$\hat{f}(\vec{r}) = \hat{f}(r_1, r_2) = \sum_{k, m} f(k, m) e(-(kr_1 + mr_2)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функция f из $\mathbb{Z}_N^2$ в D называется α -равномерной, если

$$\sum_{\vec{t}} \left| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s}) \overline{f(\vec{s} - \vec{t})} \right|^2 \leq \alpha N^6. \quad (14)$$

Будем говорить, что множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, α -равномерно, если его балансовая функция $f(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s}) - \delta$ является α -равномерной. Ясно, что аналог леммы 1 справедлив и для таких функций.

ЛЕММА 1'. Пусть f – функция из $\mathbb{Z}_N^2$ в D . Если f является α -равномерной, то:

- 1) $\sum_{\vec{r}} |\hat{f}(\vec{r})|^4 \leq \alpha N^8$;
- 2) $\max_{\vec{r}} |\hat{f}(\vec{r})| \leq \alpha^{1/4} N^2$;
- 3) $\left| \sum_{\vec{k}} \left| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s}) \overline{g(\vec{s} - \vec{k})} \right|^2 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_{\vec{s}} f(\vec{s}) \right|^2 \left| \sum_{\vec{s}} g(\vec{s}) \right|^2 \right| \leq \alpha^{1/2} N^4 \|g\|_2^2$ для любой функции g , $g: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow D$;
- 4) число тех $\vec{k}$, для которых $|(f * g)(\vec{k}) - \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{s}} f(\vec{s}) \overline{\sum_{\vec{s}} g(\vec{s})}| \geq \alpha^{1/6} N^2$, не превосходит $\alpha^{1/6} N^2$, где $g: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow D$ – произвольная функция.

Обратно, если выполнено свойство $\max_r |\hat{f}(r)| \leq \alpha N^2$ с некоторым α , то функция f является α^2 -равномерной.

Пусть $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – арифметические прогрессии. Множество $P \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ называется двумерной арифметической прогрессией, если $P = P_1 \times P_2$.

ЛЕММА 2. Пусть $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – арифметические прогрессии с разностью 1, а $P = P_1 \times P_2$ – двумерная арифметическая прогрессия. Пусть множество A принадлежит $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, и является α -равномерным. Тогда

$$||A \cap P| - \delta|P|| \leq 16\alpha^{1/4} N^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s \in \mathbb{Z}_N$. Считая, что s принадлежит приведенной системе вычетов, обозначим через $|s|$ абсолютную величину s . Имеем $|s| \leq N/2$ для любого $s \in \mathbb{Z}_N$. Пусть

$$P = \{a, a+1, \dots, a+M_1-1\} \times \{b, b+1, \dots, b+M_2-1\}.$$

Для любого вектора $\vec{r} = (r_1, r_2)$, $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$, выполнено

$$|\hat{\chi}_P(\vec{r})| = \left| \frac{e(-r_1 M_1) - 1}{e(-r_1) - 1} \right| \left| \frac{e(-r_2 M_2) - 1}{e(-r_2) - 1} \right| \leq \frac{4N^2}{|e(-r_1) - 1| |e(-r_2) - 1|}.$$

Для всех $\theta \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство $|1 - e^{i\theta}| \geq 2|\theta|/\pi$. Отсюда имеем $|\hat{\chi}_P(\vec{r})| \leq N^2/(4|r_1||r_2|)$. Если же $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$, то $|\hat{\chi}_P(\vec{r})| \leq N^2/(2|r_2|)$. Аналогично, $|\hat{\chi}_P(\vec{r})| \leq N^2/(2|r_1|)$, если $r_2 = 0$, $r_1 \neq 0$. Отсюда $\sum_{\vec{r} \neq 0} |\hat{P}(\vec{r})|^{4/3} \leq 32N^{8/3}$. Используя равенство (7), получаем

$$\sigma = ||A \cap P| - \delta|P|| = \left| \sum_{\vec{r}} \chi_A(\vec{r}) \chi_P(\vec{r}) - \delta|P| \right| = \frac{1}{N^2} \left| \sum_{\vec{r} \neq 0} \hat{\chi}_A(\vec{r}) \overline{\hat{\chi}_P(\vec{r})} \right|.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера, получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\vec{r} \neq 0} \widehat{\chi}_A(\vec{r}) \overline{\widehat{\chi}_P(\vec{r})} \right| &\leq \left(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \right)^{1/4} \left(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_P(\vec{r})|^{4/3} \right)^{3/4} \\ &\leq 16N^2 \left(\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

Поскольку множество A является α -равномерным, то

$$\sum_{\vec{r} \neq 0} |\widehat{\chi}_A(\vec{r})|^4 \leq \alpha N^8,$$

откуда имеем

$$\sigma \leq \frac{1}{N^2} 16N^2 (\alpha N^8)^{1/4} = 16\alpha^{1/4} N^2.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ векторы $(1, 0)$ и $(0, -1)$ соответственно.

Мы дадим определение α -равномерности, которое, как мы увидим далее, согласуется с определением α -равномерности, приведенным в работе [6].

Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$ и $f: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow D$ – некоторая функция. Будем записывать $f: E_1 \times E_2 \rightarrow D$, если вне $E_1 \times E_2$ функция f равна нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть α – любое действительное число, $\alpha \in [0, 1]$. Пусть $E_1 \times E_2$ – некоторое подмножество $\mathbb{Z}_N^2$. Функция $f: E_1 \times E_2 \rightarrow D$ называется α -равномерной относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, если

$$\sum_{\vec{s} \in \mathbb{Z}_N^2} \sum_{u \in \mathbb{Z}_N} \sum_{r \in \mathbb{Z}_N} f(\vec{s}) \overline{f(\vec{s} + u\vec{e}_2)} \overline{f(\vec{s} + r\vec{e}_1)} f(\vec{s} + u\vec{e}_2 + r\vec{e}_1) \leq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2. \quad (15)$$

Удобно записать условие α -равномерности в следующей, эквивалентной (15), форме. Пусть $f(k, m) = f(k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2)$. Тогда α -равномерность функции f эквивалентна условию

$$\sum_{m, p \in \mathbb{Z}_N} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k, m) \overline{f(k, p)} \right|^2 \leq \alpha |E_1|^2 |E_2|^2. \quad (16)$$

Будем называть декартово произведение двух множеств $E_1 \times E_2$ *прямоугольником*. Если $|E_1| = |E_2|$, то назовем $E_1 \times E_2$ *квадратом*.

Пусть множество A принадлежит некоторому множеству $E_1 \times E_2$ и $\chi(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s})$ – его характеристическая функция. Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Определим плотности $\delta_m = \delta_m^{\vec{e}_1}$ и $\gamma_k = \gamma_k^{\vec{e}_2}$ по формулам

$$\delta_m = \frac{1}{|E_1|} \sum_{p=1}^N \chi(m\vec{e}_2 + p\vec{e}_1), \quad \gamma_k = \frac{1}{|E_2|} \sum_{p=1}^N \chi(k\vec{e}_1 + p\vec{e}_2).$$

Заметим, что $\delta_m = 0$ вне E_2 , $\gamma_k = 0$ вне E_1 и

$$\frac{1}{|E_2|} \sum_{m \in E_2} \delta_m = \frac{1}{|E_1|} \sum_{k \in E_1} \gamma_k = \frac{|A|}{|E_1 \times E_2|}.$$

Функцию $f(\vec{s}) = (\chi(\vec{s}) - \delta_m)\chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s})$ назовем *балансовой* функцией множества A .

Множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ является α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, если его балансовая функция α -равномерна относительно этого базиса. Если множества E_1 и E_2 не указаны, то мы будем подразумевать, что $E_1 = \mathbb{Z}_N$, $E_2 = \mathbb{Z}_N$. Заметим, что множество A может быть α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, но не α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_2, \vec{e}_1)$.

В §1 был приведен пример α -равномерного множества в $\mathbb{Z}_N^2$, которое не является α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Можно показать, что любое α -равномерное относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ является обычным α -равномерным двумерным множеством. Мы не доказываем здесь этого утверждения, поскольку его не используем.

Прежде всего поясним комбинаторный смысл понятия α -равномерности.

Назовем четверку вида $(\vec{s}, \vec{s} + u\vec{e}_2, \vec{s} + r\vec{e}_1, \vec{s} + u\vec{e}_2 + r\vec{e}_1)$ *простейшим прямоугольником*. Множество $A \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ содержит простейший прямоугольник, если оно содержит все четыре точки прямоугольника.

ЛЕММА 3. Пусть множество A лежит в $\mathbb{Z}_N^2$ и имеет мощность δN^2 . Тогда A содержит не менее чем $\delta^4 N^4$ простейших прямоугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi(\vec{s})$ – характеристическая функция множества A , $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Количество простейших прямоугольников в A равно

$$\sum_{\vec{s}, u} \sum_r \chi(\vec{s}) \overline{\chi(\vec{s} + u\vec{e}_2)} \overline{\chi(\vec{s} + r\vec{e}_1)} \chi(\vec{s} + u\vec{e}_2 + r\vec{e}_1) = \sum_{m, p} \left| \sum_k \chi(k, m) \overline{\chi(k, p)} \right|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{m, p} \left| \sum_k \chi(k, m) \overline{\chi(k, p)} \right|^2 &\geq \frac{1}{N^2} \left(\sum_{m, p} \sum_k \chi(k, m) \overline{\chi(k, p)} \right)^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_k \left| \sum_m \chi(k, m) \right|^2 \right)^2 \geq \frac{1}{N^4} \left(\sum_{k, m} \chi(k, m) \right)^4 = \delta^4 N^4. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Введем несколько обозначений. Пусть $\mathcal{C}$ – оператор комплексного сопряжения. Для каждого целого неотрицательного n пусть $\mathcal{C}^n$ обозначает взятие комплексного сопряжения n раз. Если $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – два вектора из $\mathbb{C}^k$, то мы будем обозначать их скалярное произведение как $\vec{x} \cdot \vec{y}$, или как $(\vec{x}, \vec{y})$. Для $\varepsilon \in \{0, 1\}^k$ пусть $|\varepsilon|$ обозначает $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i$.

ЛЕММА 4. Пусть $f_\varepsilon(\vec{s})$ – некоторая функция из $\mathbb{Z}_N^2$ в D для каждого $\varepsilon \in \{0, 1\}^2$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sum_{p,q} \sum_{\vec{s}} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} C^{|\varepsilon|} f_\varepsilon(\vec{s} + \varepsilon_1 p \vec{e}_1 + \varepsilon_2 q \vec{e}_2) \right| \leq \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} \left| \sum_{p,q} \sum_{\vec{s}} \prod_{\eta \in \{0,1\}^2} C^{|\eta|} f_\varepsilon(\vec{s} + \eta_1 p \vec{e}_1 + \eta_2 q \vec{e}_2) \right|^{1/4}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{s} = k \vec{e}_1 + m \vec{e}_2$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{p,q} \sum_{\vec{s}} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} C^{|\varepsilon|} f_\varepsilon(\vec{s} + \varepsilon_1 p \vec{e}_1 + \varepsilon_2 q \vec{e}_2) \right| \\ &= \sum_{k,p} \left(\sum_m f_{\{0,0\}}(k, m) \overline{f_{\{1,0\}}(k+p, m)} \right) \left(\sum_m \overline{f_{\{0,1\}}(k, m)} f_{\{1,1\}}(k+p, m) \right) \\ &\leq \left(\sum_{k,p} \left| \sum_m f_{\{0,0\}}(k, m) \overline{f_{\{1,0\}}(k+p, m)} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sum_{k,p} \left| \sum_m \overline{f_{\{0,1\}}(k, m)} f_{\{1,1\}}(k+p, m) \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из скобок. Первую скобку можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k,p} \left| \sum_m f_{\{0,0\}}(k, m) \overline{f_{\{1,0\}}(k+p, m)} \right|^2 \\ &= \sum_{k,p} \sum_{m,r} f_{\{0,0\}}(k, m) \overline{f_{\{1,0\}}(k+p, m)} \overline{f_{\{0,0\}}(k, r)} f_{\{1,0\}}(k+p, r) \\ &= \sum_{m,r} \left(\sum_k f_{\{0,0\}}(k, r) \overline{f_{\{0,0\}}(k, m)} \right) \left(\sum_k f_{\{1,0\}}(k, r) \overline{f_{\{1,0\}}(k, m)} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

Опять можно применить неравенство Коши–Буняковского к (17). Точно так же преобразуем вторую скобку. Лемма доказана.

Пусть f – произвольная функция, $f: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Определим $\|f\|$ формулой

$$\|f\| = \left| \sum_{\vec{s}} \sum_{r,u} f(\vec{s}) \overline{f(\vec{s} + u \vec{e}_2)} \overline{f(\vec{s} + r \vec{e}_1)} f(\vec{s} + u \vec{e}_2 + r \vec{e}_1) \right|^{1/4}. \quad (18)$$

ЛЕММА 5. Формула (18) задает норму.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|f\|^4 = \sum_{m,p} \left| \sum_k f(k, m) \overline{f(k, p)} \right|^2$, то $\|f\| = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$. Ясно также, что $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Рассмотрим выражение

$$\|f + g\|^4 = \sum_{p,q} \sum_{\vec{s}} \prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} C^{|\varepsilon|} (f + g)(\vec{s} + \varepsilon_1 p \vec{e}_1 + \varepsilon_2 q \vec{e}_2). \quad (19)$$

Раскрыв все скобки в произведении из (19), мы получим 16 слагаемых вида $\prod_{\varepsilon \in \{0,1\}^2} C^{|\varepsilon|} f_{\varepsilon}(\vec{s} + \varepsilon_1 p \vec{e}_1 + \varepsilon_2 q \vec{e}_2)$, где функция f_{ε} равна либо f , либо g . Рассмотрим одно из этих слагаемых σ . Пусть k – число функций f_{ε} в σ , равных функции f , а l – число функций f_{ε} в σ , равных функции g , $l + k = 4$. По лемме 4 слагаемое σ оценивается выражением $\|f\|^k \|g\|^l$. Значит,

$$\|f + g\|^4 \leq \sum_{k=0}^4 C_4^k \|f\|^k \|g\|^{4-k} = (\|f\| + \|g\|)^4.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5 (комбинаторный смысл понятия α -равномерности). Пусть множество A α -равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\sum_p (\delta_p - \delta)^2 \leq \alpha N$. Тогда A содержит не более $(\delta + 2\alpha^{1/4})^4 N^4$ простейших прямоугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть χ – характеристическая, а f – балансовая функции множества A . По определению балансовой функции $\chi = f + \delta + (\delta_m - \delta)$. Поскольку множество A является α -равномерным, то $\|f\| \leq \alpha^{1/4} N$. Далее,

$$\|(\delta_m - \delta)\| = N^{1/2} \left(\sum_p (\delta_p - \delta)^2 \right)^{1/2} \leq \alpha^{1/2} N.$$

Количество простейших прямоугольников в A равно $\|\chi\|^4$. По лемме 5 имеем

$$\|\chi\| \leq \|\delta\| + \|f\| + \|(\delta_m - \delta)\|,$$

откуда получаем $\|\chi\|^4 \leq (\delta + 2\alpha^{1/4})^4 N^4$. Теорема доказана.

Пусть Q_1 и Q_2 – некоторые подмножества множества $E_1 \times E_2 \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, а h и g – их характеристические функции. Пусть также $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $f: E_1 \times E_2 \rightarrow D$ является α -равномерной относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и множества E_1, E_2 являются α_0 -равномерными, $\alpha_0 = 2^{-12} \alpha^3 \beta_1^{24} \beta_2^{24}$. Тогда

$$\left| \sum_{\vec{s} \in \mathbb{Z}_N^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}_N} h(\vec{s}) g(\vec{s} + r(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)) f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \right| \leq 2\alpha^{1/4} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$, $\chi(\vec{s}) = \chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s})$ и $\chi_1(k) = \chi_{E_1}(k)$, $\chi_2(m) = \chi_{E_2}(m)$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \left| \sum_{\vec{s} \in \mathbb{Z}_N^2} \sum_{r \in \mathbb{Z}_N} h(\vec{s}) g(\vec{s} + r\vec{e}) f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \right|^2 \\ &\leq \left(\sum_{\vec{s}} |h(\vec{s})|^2 \right) \left(\sum_{\vec{s}} \chi(\vec{s}) \left| \sum_r g(\vec{s} + r\vec{e}) f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \right|^2 \right) \\ &= \left(\sum_{\vec{s}} |h(\vec{s})|^2 \right) \left(\sum_{\vec{s}} \chi(\vec{s}) \sum_{r,p} g(\vec{s} + r\vec{e}) \overline{g(\vec{s} + p\vec{e})} f(\vec{s} + r\vec{e}_2) \overline{f(\vec{s} + p\vec{e}_2)} \right) \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{r,u} \chi(\vec{s} - r\vec{e}) g(\vec{s}) \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})} f(\vec{s} - r\vec{e}_1) \overline{f(\vec{s} + u\vec{e}_2 - r\vec{e}_1)} = \sigma_1. \quad (20) \end{aligned}$$

Функция f равна нулю вне $E_1 \times E_2$, следовательно, $f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_1(k - r) \times f(\vec{s} - r\vec{e}_1)$. Отсюда $\chi(\vec{s} - r\vec{e}) f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_1(k - r) \chi_2(m - r) f(\vec{s} - r\vec{e}_1) = \chi_2(m - r) f(\vec{s} - r\vec{e}_1)$. Значит,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_{u,r} \chi_2(m - r) g(\vec{s}) \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})} f(\vec{s} - r\vec{e}_1) \overline{f(\vec{s} + u\vec{e}_2 - r\vec{e}_1)} \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_u g(\vec{s}) \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})} \sum_r \chi_2(m - r) f(k - r, m) \overline{f(k - r, m + u)} \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{\vec{s}} \sum_u g(\vec{s}) \overline{g(\vec{s} + u\vec{e})} \sum_r \chi_2(r + m - k) f(r, m) \overline{f(r, m + u)} \\ &= \|h\|_2^2 \sum_{m,u} \sum_r f(r, m) \overline{f(r, m + u)} \sum_k \chi_2(r + m - k) g(k, m) \overline{g(k + u, m + u)}. \end{aligned}$$

По лемме 1, 3), для всех, кроме, может быть, $\alpha_0^{1/6} N$, значений r справедливо неравенство

$$\left| \sum_k \chi_2(r + m - k) g(k, m) \overline{g(k + u, m + u)} - \beta_2 \sum_k g(k, m) \overline{g(k + u, m + u)} \right| \leq \alpha_0^{1/6} N.$$

Используя оценку для α_0 , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \beta \|h\|_2^2 \sum_{m,u} \sum_k g(k, m) \overline{g(k + u, m + u)} \left| \sum_r f(r, m) \overline{f(r, m + u)} \right| + 2\alpha_0^{1/6} N^6 \\ &\leq \beta \|h\|_2^2 \sum_{m,u} \sum_k \chi(k, m) \overline{\chi(k + u, m + u)} \left| \sum_r f(r, m) \overline{f(r, m + u)} \right| + 2\alpha_0^{1/6} N^6. \end{aligned}$$

Имеем

$$\sum_k \chi(k, m) \overline{\chi(k + u, m + u)} = \chi_2(m) \overline{\chi_2(m + u)} \sum_k \chi_1(k) \overline{\chi_1(k + u)}.$$

Пользуясь α_0 -равномерностью множества E_1 и леммой 1, 3), получаем

$$|\sigma_1|^2 \leq 2\beta_2^2 \|h\|_2^4 \beta_1^4 N^2 \left| \sum_{m,u} \chi_2(m) \overline{\chi_2(m + u)} \left| \sum_r f(r, m) \overline{f(r, m + u)} \right| \right|^2 + 2^5 \alpha_0^{1/3} N^{12}.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} |\sigma_1|^2 &\leq 2\beta_1^4 \beta_2^2 \|h\|_2^4 N^2 \left(\sum_{m,u} \chi_2(m) \chi_2(m + u) \right) \|f\|^4 + 2^5 \alpha_0^{1/3} N^{12} \\ &\leq 4\beta_1^4 \beta_2^2 N^2 (\beta_1 \beta_2 N^2)^2 \beta_2^2 N^2 \alpha (\beta_1^2 \beta_2^2 N^4) = 4\alpha \beta_1^8 \beta_2^8 N^{12}. \end{aligned}$$

Значит, $\sigma \leq 2\alpha^{1/4} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3$. Теорема доказана.

Докажем основную теорему настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 7. Пусть множество A принадлежит $E_1 \times E_2$ и имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть $|E_1| = \beta_1 N$, $|E_2| = \beta_2 N$ и множества E_1, E_2 являются $(10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132})$ -равномерными. Пусть также A является α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\alpha = 10^{-108}\delta^{44}$, $N \geq 10^{10}(\delta^4\beta_1\beta_2)^{-1}$ и $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \leq \alpha\beta_2 N$. Тогда A содержит уголок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = 2^{-20}\delta^2$. Пусть также c – натуральное число такое, что $[\varepsilon N]c \leq N < [\varepsilon N](c+1)$. Пусть

$$\{1, 2, \dots, N\} = R_1 \sqcup R_2 \sqcup \dots \sqcup R_c \sqcup R_{c+1},$$

где R_l , $l = 1, \dots, c$, – прогрессии с разностью один и длиной $[\varepsilon N]$, $R_1 = \{1, 2, \dots, [\varepsilon N]\}$ и R_{c+1} – некоторая арифметическая прогрессия с разностью один.

Разобьем $\mathbb{Z}_N^2$ на квадраты $R_l \times R_q$, $l, q = 1, 2, \dots, c$. Пусть номер квадрата $R_l \times R_q$ равен $(q-1)c+l$. Рассмотрим две двумерные арифметические прогрессии $R_{c+1} \times \{1, 2, \dots, N\}$ и $\{1, 2, \dots, N\} \times R_{c+1}$. По лемме 2 в этих прогрессиях находится не более $4\varepsilon\beta_1\beta_2 N^2 + 4\varepsilon\beta_1\beta_2 N^2 = 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N^2$ точек множества $E_1 \times E_2$. Обозначим через A_i пересечение A с i -м квадратом. Пусть общее количество нумерованных квадратов равно t , $t = c^2$, и пусть i -й квадрат равен $P_i \times S_i$. Пусть также $\vec{e} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}$. Обозначим через χ_i характеристическую функцию множества A_i . Поскольку $\varepsilon = 2^{-20}\delta^2$, то

$$\sum_{i=1}^t \sum_{k,m} \chi_i(k, m) \geq (1 - 2^{-5})\delta\beta_1\beta_2 N^2.$$

Разобьем множество $\{1, \dots, c\}$ на три арифметические прогрессии K_1, K_2, K_3 с разностью один так, чтобы их длины отличались не более чем на 1. Тогда все нумерованные квадраты разобьются на девять подмножеств. Для одного из девяти подмножеств, скажем V , справедливо неравенство

$$\sum_{i \in V} \sum_{k,m} \chi_i(k, m) \geq 10^{-1}\delta\beta_1\beta_2 N^2.$$

По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{100} \delta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 N^3 &\leq \sum_k \left(\sum_{m,i} \chi_i(k, m) \right)^2 = \sum_{i,j=1}^t \sum_k \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right) \left(\sum_m \chi_j(k, m) \right) \\ &= \sum_{i \neq j} \sum_k \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right) \left(\sum_m \chi_j(k, m) \right) + \sum_i \sum_k \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right)^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим второе слагаемое в (21). Пусть $\zeta = 10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132}$. По лемме 1 существует не менее чем $(1 - \zeta^{1/6})N$ значений k , для которых выполнено неравенство

$$\left| \sum_m \chi_{E_1}(k+m) \chi_{E_2 \cap S_i}(m) - \beta_1 |E_2 \cap S_i| \right| \leq \zeta^{1/6} N.$$

По лемме 2 имеем $|E_2 \cap S_i| = |(E_2 \times \{1\}) \cap (S_i \times \{1\})| \leq 4\varepsilon\beta_2 N$. Значит, существует не менее чем $(1 - \zeta^{1/6})N$ значений k , для которых справедливо неравенство

$$\sum_m \chi_{E_1}(k+m) \chi_{E_2 \cap S_i}(m) \leq 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N. \quad (22)$$

Обозначим через B множество тех k , для которых (22) не выполнено. Тогда $|B| \leq \zeta^{1/6} N$. Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_m \chi_i(k, m) &= \sum_m \chi_{E_1 \cap P_i}(k+m) \chi_{E_2 \cap S_i}(m) \leq \sum_m \chi_{E_1}(k+m) \chi_{E_2 \cap S_i}(m), \\ \chi_i(k, m) &\leq \chi_{E_1}(k+m) \chi_{E_2 \cap S_i}(m) \leq \chi_{E_2 \cap S_i}(m), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_k \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right)^2 &= \sum_i \sum_{k \in B} \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right)^2 + \sum_i \sum_{k \notin B} \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right)^2 \\ &\leq \zeta^{1/6} N \sum_i \left| \sum_m \chi_{E_2 \cap S_i}(m) \right|^2 + 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N \sum_i \sum_k \sum_m \chi_i(k, m) = \sigma. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2 еще раз, получаем

$$\sigma \leq 16\zeta^{1/6} N (\varepsilon\beta_2 N)^2 t + 8\varepsilon\beta_1\beta_2 N \beta_1\beta_2 N^2 \leq 10\varepsilon\beta_1^2\beta_2^2 N^3,$$

откуда имеем

$$\sum_{i \neq j} \sum_k \left(\sum_m \chi_i(k, m) \right) \left(\sum_m \chi_j(k, m) \right) \geq \frac{1}{200} \delta^2 \beta_1^2 \beta_2^2 N^3. \quad (23)$$

Из формулы (23) вытекает, что существуют индексы $i_0, j_0, i_0 \neq j_0$, для которых выполнено

$$\sum_k \left(\sum_m \chi_{i_0}(k, m) \right) \left(\sum_m \chi_{j_0}(k, m) \right) \geq 10^{-26} \delta^{10} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3. \quad (24)$$

Пусть $i_0 < j_0$. Обозначим A_{i_0} через Q_1 , а A_{j_0} — через Q_2 . Рассмотрим сумму

$$\sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) \chi_A(\vec{s} + r\vec{e}_2). \quad (25)$$

Пользуясь равенством $\chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) \chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s} + r\vec{e}_2) = \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e})$, запишем сумму (25) в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) (\delta_{m+r} \chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s} + r\vec{e}_2) + f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2)) \\
 &= \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) \chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s} + r\vec{e}_2) \delta_{m+r} \\
 & \quad + \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2) \\
 &= \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) \delta_{m+r} \\
 & \quad + \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2) \\
 &= \delta \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) + \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) (\delta_{m+r} - \delta) \\
 & \quad + \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) f_A(\vec{s} + r\vec{e}_2). \tag{26}
 \end{aligned}$$

По теореме 6 третье слагаемое в равенстве (26) не превосходит по модулю $2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3$. Из неравенства (24) вытекает, что первый член в (26) не меньше $10^{-26}\delta^{11}\beta_1^2\beta_2^2N^3$. Оценим второе слагаемое в (26). Обозначим через H множество тех $m \in E_2$, для которых не выполнено неравенство $|\delta_m - \delta| \leq \alpha^{1/3}$. Поскольку по условию $\sum_m |\delta_m - \delta|^2 \leq \alpha\beta_2N$, то $|H| \leq \alpha^{1/3}\beta_2N$. Пусть теперь $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\vec{s}} \sum_r \chi_{Q_1}(\vec{s}) \chi_{Q_2}(\vec{s} + r\vec{e}) (\delta_{m+r} - \delta) \right| \\
 &= \left| \sum_{k,m,r} \chi_{Q_1}(k, m) \chi_{Q_2}(k + r, m + r) (\delta_{m+r} - \delta) \right| \\
 &= \left| \sum_{k,r} \sum_m \chi_{Q_1}(k, m - r) \chi_{Q_2}(k + r, m) (\delta_m - \delta) \right| = \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_3,
 \end{aligned}$$

где через σ_2, σ_3 обозначены суммы по всем $m \notin H$ и всем $m \in H$ соответственно. Множества E_1, E_2 являются $(10^{-330}\beta_1^{24}\beta_2^{24}\delta^{132})$ -равномерными. Пользуясь леммой 1, получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_2 &= \left| \sum_{k,r} \sum_{m \notin H} \chi_{Q_1}(k, m - r) \chi_{Q_2}(k + r, m) (\delta_m - \delta) \right| \\
 &\leq \alpha^{1/3} \sum_{k,r} \sum_m \chi_{E_1}(k) \chi_{E_1}(k + r) \chi_{E_2}(m) \chi_{E_2}(m - r) \leq 2\alpha^{1/4}\beta_1^2\beta_2^2N^3. \tag{27}
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 \sigma_3 &= \left| \sum_{k,r} \sum_{m \in H} \chi_{Q_1}(k, m - r) \chi_{Q_2}(k + r, m) (\delta_m - \delta) \right| \\
 &\leq \sum_{k,r} \sum_m \chi_{E_1}(k) \chi_{E_1}(k + r) \chi_H(m) \chi_{E_2}(m - r). \tag{28}
 \end{aligned}$$

Обозначим через T_1 множество тех r , для которых выполнено

$$\left| \sum_k \chi_{E_1}(k) \chi_{E_1}(k+r) - \beta_1^2 N \right| \geq \zeta^{1/6} N,$$

а через T_2 множество тех r , для которых

$$\left| \sum_k \chi_H(k) \chi_{E_2}(k+r) - \beta_2 |H| \right| \geq \zeta^{1/6} N.$$

По лемме 1 $|T_1|, |T_2| \leq \zeta^{1/6} N$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \sigma_3 &\leq \sum_{r \in T_1 \cup T_2} \left(\sum_k \chi_{E_1}(k) \chi_{E_1}(k+r) \right) \left(\sum_m \chi_H(m) \chi_{E_2}(m-r) \right) \\ &\quad + \sum_{r \notin T_1 \cup T_2} \left(\sum_k \chi_{E_1}(k) \chi_{E_1}(k+r) \right) \left(\sum_m \chi_H(m) \chi_{E_2}(m-r) \right) \\ &\leq 2\zeta^{1/6} N^3 + N\beta_1^2 N\beta_2 |H| + 2\zeta^{1/6} N^3 \leq 2\alpha^{1/4} \beta_1^2 \beta_2 N^3. \end{aligned} \quad (29)$$

Используя (27) и (29), получаем оценку $\sigma_1 \leq 4\alpha^{1/4} \beta_1^2 \beta_2 N^3$.

Поскольку $\alpha = 10^{-108} \delta^{44}$, то сумма (25) не меньше $10^{-27} \delta^{11} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3$. Вследствие выбора Q_1 и Q_2 сумма (25) равна количеству троек вида $\{(k, m), (k+d, m-d), (k, m-d)\}$ в $Q_1 \times Q_2 \times A$. Так как $N \geq 10^{10} (\delta^4 \beta_1 \beta_2)^{-1}$, то $10^{-27} \delta^{11} \beta_1^2 \beta_2^2 N^3 > 1$. Значит, A содержит уголок. Теорема доказана.

§ 3. Графы

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_N^2$ как двумерную решетку с базисом $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Тогда каждая точка из $\mathbb{Z}_N^2$ однозначно представляется своими координатами в этом базисе.

Пусть множество A принадлежит некоторому квадрату $E_1 \times E_2$ двумерной решетки $\mathbb{Z}_N^2$. Пусть множества E_1, E_2 имеют мощность n . Мы свяжем с A двудольный ориентированный граф G_A (см. [12], [13]). Пусть ψ и ρ – два биективных отображения множеств E_1 и E_2 в непересекающиеся множества W и V соответственно. Пусть $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ и $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Множество вершин двудольного графа G_A состоит из множеств W и V . Вершину v_j соединим ребром с вершиной w_i , если и только если $(\psi^{-1}(i), \rho^{-1}(j)) \in A$. *Окрестностью* A_v вершины $v \in V$ мы будем называть множество $\{w_i \in W \mid (v, w_i) \text{ – ребро в } G_A\}$.

В работе [7] с множеством $A \subseteq \mathbb{Z}_N$ связывался другой граф G'_A . Множество вершин этого графа равно $\mathbb{Z}_N$, точка x соединена с точкой y тогда и только тогда, когда $y - x \in A$. На самом деле эти определения в некотором смысле совпадают. Пусть A – произвольное подмножество в $\mathbb{Z}_N$. Построим множество A^* – “вложение” A в $\mathbb{Z}_N^2$ – по следующему правилу: $(x, y) \in A^*$ тогда и только тогда, когда $x = a - y$, где $a \in A$. Несложно проверить, что отображение $\phi: A^* \rightarrow A$, $\phi(x, y) = x + y$, задает гомоморфизм Фреймана [15] порядка 2.

Пользуясь этим вложением, мы докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $N \geq N_\varepsilon$ существует множество $Q \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ мощности не меньше чем $N^{2 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log N}}$, не содержащее уголков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме Беренда [11] для любого $\varepsilon > 0$ существует $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех натуральных $K \geq K_\varepsilon$ найдется множество $A \subseteq \{1, \dots, K\}$, не содержащее арифметических прогрессий длины 3 и имеющее мощность $|A| > K^{1 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log K}}$. Применяя теорему Беренда с параметрами $\varepsilon > 0$, $K = \lfloor N/3 \rfloor$, находим множество A .

Рассмотрим множество $\mathbb{Z}_N^2$ и занумеруем его горизонтали, начиная снизу. Пусть множество A принадлежит отрезку натурального ряда $[K, K+1, \dots, 2K-1]$. Рассмотрим трансляции A вида $\{(A+i-1) \times \{i\}\}_{i=1}^K \subseteq \mathbb{Z}_N^2$. Пусть Q – объединение всех трансляций. Легко убедиться в том, что Q не содержит уголков. Кроме того, Q имеет мощность не меньше чем $N^{2 - \frac{\log 2 + \varepsilon}{\log \log N}}/10$. Предложение доказано.

Квадратная матрица M называется *неотрицательной*, если все ее элементы неотрицательны. Мы выделим результаты о неотрицательных матрицах в следующую теорему (см., например, [16]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть M – неотрицательная матрица. Тогда:

- 1) M имеет действительное собственное значение r , равное спектральному радиусу M ;
- 2) существует неотрицательный собственный вектор, соответствующий собственному значению r .

Пусть $M = (m_{ij})$ – матрица инцидентности графа G_A , а $T = MM^T$. Пусть также $\mu_1, \dots, \mu_n$ – собственные значения матрицы T , занумерованные в порядке убывания: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$, а $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ – соответствующие им собственные векторы. Пусть для всех $i = 1, \dots, n$ выполнено $\|\vec{u}_i\|_2^2 = n$. Обозначим через $\vec{u}$ вектор $(1, \dots, 1)$. В доказательстве мы будем использовать матрицу T . Можно было бы обойтись без этой дополнительной матрицы, а использовать только матрицу M , но для этого необходимо было бы вводить некоторые новые понятия. Кроме того, доказательство с матрицей T короче.

Пусть α_1 – вещественное число, $0 \leq \alpha_1 \leq 1$. Пусть плотности δ_m множества $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|A| = \delta|E_1||E_2|$, обладают свойством

$$\sum_{m \in E_2} (\delta_m - \delta)^2 \leq \alpha_1^2 |E_2|. \quad (30)$$

Далее мы будем подразумевать, что условие (30) выполнено. Кроме того, мы будем считать, что выполнено условие, налагаемое на плотности γ_k :

$$\sum_{k \in E_1} (\gamma_k - \delta)^2 \leq \alpha_1^2 |E_1|. \quad (31)$$

ЛЕММА 6. Пусть $\vec{a}$ – произвольный вектор из $\mathbb{C}^n$, а $C = (c_{ij})$ – вещественная $(n \times n)$ -матрица. Тогда выполнено неравенство $(C\vec{a}, C\vec{a}) \leq \|\vec{a}\|^2 \sum_i \sum_j c_{ij}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(C\vec{a}, C\vec{a}) = \sum_i \left| \sum_j c_{ij} a_j \right|^2 \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^2 \sum_j |a_j|^2 = (\vec{a}, \vec{a}) \sum_i \sum_j c_{ij}^2.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. Пусть ε – любое число из интервала $(0, 1)$. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$. Тогда $\mu_1 \geq \delta^2 n^2$. Если $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leq \varepsilon^2 n$, то $\mu_1 < \delta^2 n^2 + (2\varepsilon + \alpha_1^2) n^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = (m'_{ij})$. По свойству экстремальности собственных значений имеем

$$\mu_1 n \geq (M^T \vec{u}, M^T \vec{u}) = \sum_i \left(\sum_j m'_{ij} \right)^2. \quad (32)$$

Используя соотношение (32), неравенство Коши–Буняковского и тот факт, что $\sum_{i,j} m'_{ij} = |A| = \delta n$, получаем

$$\mu_1 \geq \frac{1}{n} \sum_i \left(\sum_j m'_{ij} \right)^2 \geq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i,j} m'_{ij} \right)^2 = \delta^2 n^2.$$

Пусть теперь $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leq \varepsilon^2 n$. Имеем

$$(M^T \vec{u}_1, M^T \vec{u}_1) = (M^T \vec{u}, M^T \vec{u}) + (M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}), M^T \vec{u}) + (M^T \vec{u}_1, M^T (\vec{u}_1 - \vec{u})).$$

Оценим слагаемое $(M^T \vec{u}_1, M^T (\vec{u}_1 - \vec{u})) = \sigma$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$(M^T \vec{u}_1, M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}))^2 \leq (M^T \vec{u}_1, M^T \vec{u}_1) (M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}), M^T (\vec{u}_1 - \vec{u})).$$

Применяя лемму 6 и учитывая, что $\sum_i \sum_j m_{ij}^2 \leq n^2$, получаем

$$|\sigma|^2 \leq \|\vec{u}_1\|^2 n^2 \|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 n^2 \leq \varepsilon^2 n^6.$$

Значит, $|(M^T \vec{u}_1, M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}))| \leq \varepsilon n^3$. Аналогично, $|(M^T (\vec{u}_1 - \vec{u}), M^T \vec{u})| \leq \varepsilon n^3$. Таким образом,

$$\mu_1 n = (M^T \vec{u}_1, M^T \vec{u}_1) \leq (M^T \vec{u}, M^T \vec{u}) + 2\varepsilon n^3.$$

Имеем $(M^T \vec{u}, M^T \vec{u}) = \sum_i (\sum_j m'_{ij})^2 = n^2 \sum_i \delta_i^2$. Заметим, что неравенство (30) можно переписать в виде $\sum_m \delta_m^2 \leq (\alpha_1^2 + \delta^2) n$. Отсюда имеем

$$\mu_1 n \leq \delta^2 n^3 + 2\varepsilon n^3 + \alpha_1^2 n^3.$$

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Матрица инцидентности графа G_{A^*} имеет собственные числа, которые равны коэффициентам Фурье множества A , а собственные векторы имеют вид

$$\vec{v}_r = (e^{2(N-1)\pi i r/N}, e^{2(N-2)\pi i r/N}, \dots, e^{2\pi i r/N}, 1), \quad r = \overline{0, N-1}.$$

Следующая лемма показывает, что α -равномерность эквивалентна квазислучайности графа G_A (см. [10]).

ЛЕММА 8. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$ и $\varepsilon \in (0, 1)$. Если множество A является α -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leq \varepsilon^2 n$, то $\mu_2 < \alpha^{1/2} n^2 + 4\sqrt{\varepsilon} n^2 + 4\sqrt{\alpha_1} n^2$. Обратно, если $\mu_2 < \eta n^2$ и $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leq \varepsilon^2 n$, то множество A α -равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\alpha = \eta + 16\varepsilon + 16\alpha_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{tr}(T) = \text{tr}(MM^T) = \sum_{i=1}^n \mu_i = \sum_{k,i} m_{ik}^2 = \delta n^2$, то мы имеем формулу

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \delta n^2. \quad (33)$$

Обозначим через A_p окрестность вершины v_p в графе G_A . Так как $\text{tr}(T^2) = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{p,q} |\sum_k m_{pk} m_{qk}|^2$, то $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = \sum_{p,q} |A_p \cap A_q|^2$. Поскольку $\|\vec{u}_1 - \vec{u}\|^2 \leq \varepsilon^2 n$, то по лемме 7 имеем $\delta^2 n^2 \leq \mu_1 \leq \delta^2 n^2 + 2\varepsilon n^2 + \alpha_1^2 n^2$ и, следовательно,

$$\sum_{p,q=1}^n |A_p \cap A_q|^2 - \delta^4 n^4 = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 - \delta^4 n^4 = \sum_{i=2}^n \mu_i^2 + \theta(12\varepsilon + 3\alpha_1^2)n^4, \quad (34)$$

где $|\theta| \leq 1$.

Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + l\vec{e}_2$ и $f(\vec{s}) = f(k, l)$ – балансовая функция множества A . Обозначим через B_l множество всех точек из A , принадлежащих l -й горизонтали. Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{l,t=1}^N \left| \sum_{k=1}^N f(k, l) \overline{f(k, t)} \right|^2 \\ &= \sum_{l,t=1}^N \left| \sum_{k=1}^N (\chi_A(k, l) - \delta_l \chi_{E_1 \times E_2}(k, l)) (\chi_A(k, t) - \delta_t \chi_{E_1 \times E_2}(k, t)) \right|^2 \\ &= \sum_{l,t \in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - \delta_l \delta_t n^2 \\ &= \sum_{l,t \in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - 2n \sum_{l,t \in E_2} \delta_l \delta_t |B_l \cap B_t| + n^2 \sum_{l,t \in E_2} \delta_l^2 \delta_t^2 \\ &= \sum_{l,t \in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - 2n \sum_{v \in E_1} \left(\sum_{l \in E_2} \delta_l \chi_A(v, l) \right)^2 + n^2 \left(\sum_{l \in E_2} \delta_l^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Оценим третье слагаемое в последнем равенстве формулы (35). По неравенству Коши–Буняковского получаем

$$n^2 \left(\sum_{l \in E_2} \delta_l^2 \right)^2 \geq \delta^4 n^4. \quad (36)$$

С другой стороны, неравенство (30) можно переписать в виде $\sum_{l \in E_2} \delta_l^2 \leq (\delta^2 + \alpha_1^2)n$, следовательно,

$$n^2 \left(\sum_{l \in E_2} \delta_l^2 \right)^2 \leq \delta^4 n^4 + 3\alpha_1^2 n^4. \quad (37)$$

Из неравенств (36) и (37) вытекает, что

$$n^2 \sum_{l,t \in E_2} \delta_l^2 \delta_t^2 = \delta^4 n^4 + 3\theta_1 \alpha_1^2 n^4, \quad (38)$$

где $|\theta_1| \leq 1$. Оценим теперь второе слагаемое в (35). Имеем

$$\sum_{l \in E_2} \delta_l \chi_A(v, l) = \sum_{l \in E_2} (\delta_l - \delta) \chi_A(v, l) + \delta \sum_{l \in E_2} \chi_A(v, l) = \sum_{l \in E_2} (\delta_l - \delta) \chi_A(v, l) + n\delta\gamma_v.$$

Применяя (30) и неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\left(\sum_{l \in E_2} (\delta_l - \delta) \chi_A(v, l) \right)^2 \leq \sum_{l \in E_2} (\delta_l - \delta)^2 \sum_{l \in E_2} \chi_A^2(v, l) \leq \alpha_1^2 \gamma_v n^2.$$

Пусть $\rho(v) = \sum_{l \in E_2} (\delta_l - \delta) \chi_A(v, l)$. Тогда $|\rho(v)| \leq \alpha_1 \gamma_v^{1/2} n$. Запишем второе слагаемое из (35) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 2n \sum_{v \in E_1} \left(\sum_{l \in E_2} \delta_l \chi_A(v, l) \right)^2 = 2n \sum_{v \in E_1} (\rho(v) + n\delta\gamma_v)^2 \\ &= 2n \left(\sum_{v \in E_1} \rho^2(v) + 2n\delta \sum_{v \in E_1} \rho(v) \gamma_v + n^2 \delta^2 \sum_{v \in E_1} \gamma_v^2 \right) = 2n^3 \delta^2 \sum_{v \in E_1} \gamma_v^2 + 6\theta_2 \alpha_1 n^4, \end{aligned} \quad (39)$$

где $|\theta_2| \leq 1$. По неравенству Коши–Буняковского $\sum_{v \in E_1} \gamma_v^2 \geq \delta^2 n$. С другой стороны, по неравенству (31) $\sum_{v \in E_1} \gamma_v^2 \leq (\delta^2 + \alpha_1^2) n$. Следовательно,

$$\sigma_1 = 2\delta^2 n^4 + 8\theta_3 \alpha_1 n^4, \quad (40)$$

где $|\theta_3| \leq 1$. Подставляя неравенства (38) и (40) в (35), окончательно получаем

$$\sigma = \sum_{l,t \in E_2} |B_l \cap B_t|^2 - \delta^4 n^4 + 11\alpha_1 \theta_4 n^4, \quad (41)$$

где $|\theta_4| \leq 1$. Ясно, что $\sum_{l,t \in E_2} |B_l \cap B_t|^2 = \sum_{p,q} |A_p \cap A_q|^2$. Подставляя это равенство и формулу (41) в (34), находим

$$\sum_{i=2}^n \mu_i^2 = \sum_{l,t=1}^N \left| \sum_{k=1}^N f(k, l) \overline{f(k, t)} \right|^2 + \theta_5 n^4 (14\alpha_1 + 12\varepsilon), \quad (42)$$

где $|\theta_5| \leq 1$.

Если A α -равномерно, то $\sum_{l,t=1}^N \left| \sum_{k=1}^N f(k, l) \overline{f(k, t)} \right|^2 \leq \alpha n^4$. Отсюда получаем

$$\mu_2^2 \leq \sum_{i=2}^n \mu_i^2 \leq \alpha n^4 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4.$$

Значит, $\mu_2 < \alpha^{1/2}n^2 + 4\sqrt{\varepsilon}n^2 + 4\alpha_1^{1/2}n^2$. Обратно, если $\mu_2 < \eta n^2$, то по формулам (33) и (42) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{p,q} \left| \sum_k f(k,p) \overline{f(k,q)} \right|^2 &\leq \sum_{i=2}^n \mu_i^2 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4 \\ &\leq \mu_2 \sum_{i=2}^n \mu_i + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4 < \eta \delta n^4 + 16\varepsilon n^4 + 16\alpha_1 n^4. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть B – $(n \times n)$ -матрица, все элементы которой ограничены по модулю числом D . Пусть $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$, $(\vec{v}, \vec{v}) = n$, – собственный вектор матрицы B , отвечающий собственному значению λ , $|\lambda| \geq \alpha n D$, $0 < \alpha < 1$. Тогда для любого $\xi > 0$, $\xi < 1/2$, существуют натуральное число m , $m \leq 2^5/(\alpha\xi)^2$, комплексные числа $c_1, \dots, c_m$ и непересекающиеся множества $F_1, \dots, F_m \subseteq \{1, \dots, n\}$, обладающие свойствами:

- 1) $\bigsqcup_{i=1}^m F_i = \{1, \dots, n\}$;
- 2) для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ и всех $j \in F_i$ выполнено $|v_j - c_i| \leq \xi$;
- 3) для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ выполнено $|c_i| \leq 1/\alpha$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через b_{ij} элементы матрицы B . По условию $|b_{ij}| \leq D$. Вектор $\vec{v}$ является собственным вектором матрицы B , отвечающим собственному значению λ . Для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеем

$$|\lambda v_i| = \left| \sum_{k=1}^n b_{ik} v_k \right| \leq nD, \quad (43)$$

откуда для всех $i = 1, \dots, m$ выполнено $|v_i| \leq 1/\alpha$.

Пусть U – круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в 0 и радиусом $1/\alpha$. По условию $0 < \alpha < 1$ и $0 < \xi < 1/2$. Отсюда $\xi < 1/(2\alpha)$. Пусть $l = [2\sqrt{2}/(\alpha\xi)] + 1$. Так как $\xi < 1/(2\alpha)$, то $1 \leq l \leq 4\sqrt{2}/(\alpha\xi)$. Разобьем квадрат $Q = [-1/\alpha, 1/\alpha] \times [-1/\alpha, 1/\alpha]$ на $m = l^2$ квадратов. У каждого такого квадрата сторона не больше чем $\xi/\sqrt{2}$ и, следовательно, диаметр не больше чем ξ . Поскольку $U \subseteq Q$, то множество U разбивается этими квадратами на m множеств $U_1, \dots, U_m$, $m \leq 2^5/(\alpha\xi)^2$, так что $\text{diam}(U_i) \leq \xi$, $i = 1, \dots, m$. Пусть $c_1, \dots, c_m$ – произвольные точки из $U_1, \dots, U_m$. Рассмотрим множества

$$F_i = \{j: v_j \in U_i\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Множества $F_1, \dots, F_m$ и числа $c_1, \dots, c_m$ удовлетворяют всем утверждениям леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 10. Пусть C – некоторое множество и $A \subseteq C$, $|A| = \delta|C|$. Пусть множества $Q_1, \dots, Q_m$ образуют разбиение C . Обозначим через B множество тех i , для которых $|A \cap Q_i| < (\delta - \eta)|Q_i|$, $\eta > 0$. Тогда

$$\sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| \geq \delta \sum_{i \notin B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i|. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\delta|C| = \sum_{i=1}^m |A \cap Q_i| = \sum_{i \in B} |A \cap Q_i| + \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| \leq (\delta - \eta) \sum_{i \in B} |Q_i| + \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i|. \quad (45)$$

Из соотношения (45) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i \notin B} |A \cap Q_i| &\geq \delta|C| - \delta \sum_{i \in B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i| \\ &= \delta \sum_{i=1}^m |Q_i| - \delta \sum_{i \in B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i| = \delta \sum_{i \notin B} |Q_i| + \eta \sum_{i \in B} |Q_i|. \end{aligned} \quad (46)$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_2| \leq |E_1|$, имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Тогда для любого $\zeta > 0$, $\zeta < \delta^2$, либо A удовлетворяет неравенствам (30), (31) при $\alpha_1 = \zeta$, либо существуют множества G_1 и G_2 , $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > \left(\delta + \frac{\zeta^3}{8} \right) |G_1| |G_2|, \quad (47)$$

$$|G_1| > \frac{\zeta^3}{8} |E_1|, \quad |G_2| > \frac{\zeta^3}{8} |E_2|. \quad (48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнены оба неравенства (30), (31) при $\alpha_1 = \zeta$, то доказывать нечего. Пусть, например, не выполнено неравенство (30). Тогда существует не менее $\zeta^2|E_2|/2$ значений m , для которых $|\delta_m - \delta| > \zeta/2$. Пусть $n = |E_2|$. Обозначим через B^+ множество тех m , для которых $\delta_m > \delta + \zeta/2$, а через B^- – множество тех m , для которых $\delta_m < \delta - \zeta/2$. Тогда либо $|B^+| \geq \zeta^2 n/4$, либо $|B^-| \geq \zeta^2 n/4$. Если $|B^+| \geq \zeta^2 n/4$, то положим $G_1 = E_1$, $G_2 = B^+$. Ясно, что для множеств G_1, G_2 условие (48) выполнено. Проверим выполнение условия (47). Имеем

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| = |G_1| \sum_{m \in G_2} \delta_m > \left(\delta + \frac{\zeta}{2} \right) |G_1| |G_2|,$$

следовательно, условие (47) для множеств G_1, G_2 также выполнено. Если же $|B^-| \geq \zeta^2 n/4$, то положим $G_1 = E_1$, $G_2 = E_2 \setminus B^-$. Рассмотрим разбиение $E_1 \times E_2$ на множества $Q_i = E_1 \times \{x\}$, $x \in E_2$. Ясно, что для любого $i \in E_2$ мощность Q_i равна $|E_1|$. Применяя лемму 10 к множеству $C = E_1 \times E_2$ и разбиению C на Q_i , получаем

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| = \sum_{i \notin B^-} |A \cap Q_i| \geq \delta \sum_{i \notin B^-} |Q_i| + \frac{\zeta}{2} \sum_{i \in B^-} |Q_i|.$$

Поскольку $|B^-| \geq \zeta^2 n/4$, то

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| \geq \delta|G_1||G_2| + \frac{\zeta^3}{8} n|E_1| \geq \left(\delta + \frac{\zeta^3}{8} \right) |G_1| |G_2|. \quad (49)$$

Следовательно, для множеств G_1 и G_2 неравенство (47) выполнено. Легко видеть, что неравенство (48) для этих множеств также выполнено. Действительно, из неравенства (49) вытекает, что

$$|G_1||G_2| \geq |A \cap (G_1 \times G_2)| \geq \frac{\zeta^3}{8} n|E_1|.$$

Значит, $|G_2| \geq n\zeta^3/8$. В случае, когда не выполнено неравенство (31), доказательство аналогично. Лемма доказана.

Пусть $\vec{u}_1$ – неотрицательный собственный вектор, соответствующий первому собственному значению μ_1 матрицы T , а $\vec{u}_2$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению μ_2 . Вектор $\vec{u}_1$ существует по теореме 8. Будем считать, что $(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = (\vec{u}_2, \vec{u}_2) = n$ и $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$. Положим $\vec{u} = (1, \dots, 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$, $|E_1| = |E_2| = n$, имеет мощность $|A| = \delta n^2$. Пусть $0 < \alpha \leq \delta$ – действительное число, и A не α -равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Если $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leq 2^{-12}\alpha^2 n$, то существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-200}\alpha^{60})|G_1||G_2|, \quad |G_1||G_2| > 2^{-200}\alpha^{60}n. \quad (50)$$

Если $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 > 2^{-12}\alpha^2 n$, то неравенства (50) выполнены даже без условия, что A не α -равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что неравенства (30), (31) выполнены при $\alpha_1 = 2^{-56}\alpha^{20}$. Если это не так, то множества G_1, G_2 , удовлетворяющие (50), найдутся по лемме 11.

Случай 1. Пусть $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leq 2^{-12}\alpha^2 n$. Поскольку A не α -равномерно, то по лемме 8 имеем $\mu_2 \geq \alpha n^2/2$. Пусть $\mathcal{E}$ – $(n \times n)$ -матрица, состоящая из одних единиц, $M_1 = M - \delta\mathcal{E}$, $T_1 = M_1 M_1^T$. Тогда

$$(M^T \vec{u}_2, M^T \vec{u}_2) = (M_1^T \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2) + (M_1^T \vec{u}_2, \delta\mathcal{E} \vec{u}_2) + (\delta\mathcal{E} \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2) + (\delta\mathcal{E} \vec{u}_2, \delta\mathcal{E} \vec{u}_2). \quad (51)$$

Оценим второе слагаемое в (51). Так как $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, то $(\vec{u}, \vec{u}_2) = (\vec{u} - \vec{u}_1, \vec{u}_2)$. Применяя неравенство Коши–Буняковского и оценку $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 \leq 2^{-12}\alpha^2 n$, получаем

$$|(\vec{u}, \vec{u}_2)|^2 \leq \|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 n \leq 2^{-12}\alpha^2 n^2. \quad (52)$$

Имеем $\mathcal{E} \vec{u}_2 = \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2)$. Применяя лемму 6, неравенство Коши–Буняковского и оценку (52), находим

$$\begin{aligned} |(M_1^T \vec{u}_2, \delta\mathcal{E} \vec{u}_2)|^2 &\leq (M_1^T \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2) (\mathcal{E} \vec{u}_2, \mathcal{E} \vec{u}_2) \\ &\leq n^3 (\vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2), \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_2)) \leq 2^{-12}\alpha^2 n^6. \end{aligned} \quad (53)$$

Отсюда $|(M_1^T \vec{u}_2, \delta\mathcal{E} \vec{u}_2)| \leq 2^{-6}\alpha n^3$. Аналогично, $|(\delta\mathcal{E} \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2)| \leq 2^{-6}\alpha n^3$ и $|(\delta\mathcal{E} \vec{u}_2, \delta\mathcal{E} \vec{u}_2)| \leq 2^{-6}\alpha n^3$. Тогда

$$\frac{\alpha}{2} n^3 \leq \mu_2 n = (T \vec{u}_2, \vec{u}_2) = (M^T \vec{u}_2, M^T \vec{u}_2) \leq (M_1^T \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2) + \frac{\alpha}{4} n^3. \quad (54)$$

Окончательно получаем

$$(M_1^T \vec{u}_2, M_1^T \vec{u}_2) \geq \frac{\alpha}{4} n^3. \quad (55)$$

Обозначим через a_{ij} элементы матрицы M_1^T , а через x_i элементы вектора $\vec{u}_2$. По неравенству Коши–Буняковского для любого $i = 1, \dots, n$ выполнено $|\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k| \leq n$. Используя (55), получаем

$$\frac{\alpha}{4} n^3 \leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|^2 \leq n \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \right|. \quad (56)$$

Легко видеть, что все элементы матрицы T ограничены по модулю числом n . Применим лемму 9 к матрице T и ее собственному вектору $\vec{u}_2$ с параметрами $D = n$ и $\xi = \alpha/16$. По этой лемме существуют множества $F_1, \dots, F_m$, $m \leq 2^{16} \alpha^{-4}$, и комплексные числа $c_1, \dots, c_m$, для которых выполнены условия 1)–3). Используя (56) и неравенство треугольника, получаем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left| \sum_{k \in F_j} a_{ik} x_k \right| \geq \frac{\alpha}{4} n^2. \quad (57)$$

Введем множество индексов

$$B = \{j : |F_j| < 2^{-28} \alpha^{10} n\}. \quad (58)$$

Из утверждений 2) и 3) леммы 9 вытекает, что $|x_k| \leq 4/\alpha$. Отсюда имеем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \in B} \left| \sum_{k \in F_j} a_{ik} x_k \right| < nm 2^{-28} \alpha^{10} n \cdot 4\alpha^{-1} \leq \frac{\alpha}{8} n^2. \quad (59)$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \notin B} \left| \sum_{k \in F_j} a_{ik} x_k \right| \geq \frac{\alpha}{8} n^2. \quad (60)$$

Используя свойства 2), 3) чисел c_j и множеств F_j из леммы 9, получаем

$$\frac{\alpha}{16} n^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin B} \left| \sum_{k \in F_j} a_{ik} c_j \right| \leq \frac{2}{\alpha} \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin B} \left| \sum_{k \in F_j} a_{ik} \right|. \quad (61)$$

Для $j \in B$ рассмотрим множества

$$J_j^+ = \left\{ i \mid \sum_{k \in F_j} a_{ik} \geq 0 \right\} \quad \text{и} \quad J_j^- = \left\{ i \mid \sum_{k \in F_j} a_{ik} < 0 \right\}. \quad (62)$$

Обозначим через C множество тех k , для которых $|\gamma_k - \delta| > \sqrt{\alpha_1}$. Из неравенства (31) вытекает, что $|C| \leq \alpha_1 n$. Обозначим через $\bar{C}$ дополнение до C в $\{1, \dots, n\}$. Заметим, что для всех $j \notin B$ выполняется двойное неравенство $|C| \leq \alpha_1 n \leq \sqrt{\alpha_1} |F_j|$. Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_i \sum_{k \in F_j} a_{ik} \right| &= \left| n \sum_{k \in F_j} (\gamma_k - \delta) \right| = n \left| \sum_{k \in F_j \cap C} (\gamma_k - \delta) + \sum_{k \in F_j \cap \bar{C}} (\gamma_k - \delta) \right| \\ &\leq |C|n + \sqrt{\alpha_1} |F_j|n \leq 2\sqrt{\alpha_1} |F_j|n \leq \frac{\alpha^2}{64} |F_j|n. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\left| \sum_{i \in J_j^+} \sum_{k \in F_j} a_{ik} + \sum_{i \in J_j^-} \sum_{k \in F_j} a_{ik} \right| = \left| \sum_i \sum_{k \in F_j} a_{ik} \right| \leq \frac{\alpha^2}{64} |F_j| n.$$

Значит, $\left| \sum_{i \in J_j^-} \sum_{k \in F_j} a_{ik} \right| \leq \sum_{i \in J_j^+} \sum_{k \in F_j} a_{ik} + \alpha^2 |F_j| n / 64$. Используя неравенство (61), имеем

$$\frac{\alpha^2}{128} n^2 \leq \sum_{j \notin B} \sum_{i \in J_j^+} \sum_{k \in F_j} a_{ik}. \quad (63)$$

Выберем точку $j_0 \notin B$, для которой сумма $\sum_{i \in J_{j_0}^+} \sum_{k \in F_{j_0}} a_{ik}$ максимальна. Тогда

$$\sum_{i \in J_{j_0}^+} \sum_{k \in F_{j_0}} a_{ik} \geq \frac{\alpha^2}{128m} n^2 \geq 2^{-18} \alpha^6 n^2. \quad (64)$$

Из (64) следует, что $|J_{j_0}^+| > 2^{-18} \alpha^6 n$. Пусть $G_1 = F_{j_0}$, а $G_2 = J_{j_0}^+$. Поскольку $j_0 \notin B$, то $|G_1| \geq 2^{-28} \alpha^{10} n$. Используя (64), получаем

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-18} \alpha^6) |G_1| |G_2|.$$

Мы видим, что для множеств G_1, G_2 условия (50) выполнены.

Случай 2. Пусть $\|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 > 2^{-12} \alpha^2 n$. Имеем

$$2^{-12} \alpha^2 n < \|\vec{u} - \vec{u}_1\|^2 = (\vec{u}, \vec{u}) - 2(\vec{u}, \vec{u}_1) + (\vec{u}_1, \vec{u}_1) = 2n - 2(\vec{u}, \vec{u}_1).$$

Кроме того, $(\vec{u}_1, \vec{u}) \geq 0$. Отсюда

$$0 \leq (\vec{u}_1, \vec{u}) \leq n - 2^{-13} \alpha^2 n. \quad (65)$$

Имеем $\mathcal{E}^2 = n\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}\vec{u}_1 = \vec{u}(\vec{u}, \vec{u}_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} (T_1 \vec{u}_1, \vec{u}_1) &= (T \vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta(\mathcal{E} M^T \vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta(M \mathcal{E} \vec{u}_1, \vec{u}_1) + \delta^2(\mathcal{E}^2 \vec{u}_1, \vec{u}_1) \\ &= (T \vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta(M^T \vec{u}_1, \mathcal{E} \vec{u}_1) - \delta(M \mathcal{E} \vec{u}_1, \vec{u}_1) + \delta^2 n |(\vec{u}_1, \vec{u})|^2 = \sigma. \end{aligned} \quad (66)$$

Вычислим член $(M^T \vec{u}_1, \mathcal{E} \vec{u}_1)$ в сумме (66). Имеем

$$(M^T \vec{u}_1, \mathcal{E} \vec{u}_1) = (\vec{u}, \vec{u}_1)(M^T \vec{u}_1, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}_1)(\vec{u}_1, M \vec{u}).$$

Пусть вектор $\vec{v}$ равен $\{(\delta_m - \delta)\}_{m=1}^n$. Тогда $M \vec{u} = \delta n \vec{u} + n \vec{v}$. Отсюда $(\vec{u}_1, M \vec{u}) = \delta n (\vec{u}, \vec{u}_1) + n (\vec{u}_1, \vec{v})$. Используя неравенство Коши–Буняковского и свойство (30), получаем

$$(\vec{u}_1, \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}_1\|_2^2 \|\vec{v}\|_2^2 = n \sum_m (\delta_m - \delta)^2 \leq \alpha_1^2 n^2.$$

Следовательно, $(M^T \vec{u}_1, \mathcal{E} \vec{u}_1) = \delta n (\vec{u}_1, \vec{u})^2 + \theta \alpha_1 n^3$, где $|\theta| \leq 1$. Аналогично, $(M \mathcal{E} \vec{u}_1, \vec{u}_1) = \delta n (\vec{u}_1, \vec{u})^2 + \theta_1 \alpha_1 n^3$, где $|\theta_1| \leq 1$. Значит,

$$\sigma \geq (T \vec{u}_1, \vec{u}_1) - \delta^2 n (\vec{u}_1, \vec{u})^2 - 2 \alpha_1 n^3. \quad (67)$$

По лемме 7 $\mu_1 \geq \delta^2 n^2$, следовательно, $(T\vec{u}_1, \vec{u}_1) = \mu_1(\vec{u}_1, \vec{u}_1) \geq \delta^2 n^3$. Используя эту оценку и неравенство (65), получаем

$$(T_1\vec{u}_1, \vec{u}_1) > 2^{-13}\alpha^2\delta^2 n^3. \quad (68)$$

Неравенство (68) отличается от неравенства (55) только тем, что вместо вектора $\vec{u}_2$ в нем присутствует вектор $\vec{u}_1$. Вектор $\vec{u}_1$, как и вектор $\vec{u}_2$, является собственным вектором матрицы T . Кроме того, собственное значение μ_1 , соответствующее вектору $\vec{u}_1$, больше чем собственное значение μ_2 , соответствующее вектору $\vec{u}_2$. Поэтому можно применить все преобразования, которые были проведены в формулах (55)–(68), и найти множества G_1 и G_2 , $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, такие, что $|G_1|, |G_2| > 2^{-200}\alpha^{60}n$ и

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-200}\alpha^{60})|G_1||G_2|.$$

Предложение доказано.

В предложении 2 множество $E_1 \times E_2$ представляет собой квадрат. Теперь мы докажем предложение 2 для прямоугольников.

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – некоторые подмножества решетки $\mathbb{Z}_N^2$, причем $\mathcal{A}$ не пусто. Будем обозначать величину $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$ через $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть множество $A \subseteq E_1 \times E_2$ имеет мощность $|A| = \delta|E_1||E_2|$. Пусть $0 < \alpha \leq \delta/2$ – действительное число, A не α -равномерно относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geq 2^{500}\alpha^{-70}$. Тогда существуют множества $G_1 \subseteq E_1$ и $G_2 \subseteq E_2$, для которых выполнено

$$|A \cap (G_1 \times G_2)| > (\delta + 2^{-1000}\alpha^{140})|G_1||G_2|, \quad (69)$$

$$|G_1| > 2^{-1000}\alpha^{140}|E_1|, \quad |G_2| > 2^{-1000}\alpha^{140}|E_2|. \quad (70)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что неравенства (30), (31) выполнены при $\alpha_1 = \alpha/10$. Если это не так, то множества G_1, G_2 , удовлетворяющие (69) и (70), найдутся по лемме 11. Для любого $K \subseteq E_1 \times E_2$ положим $g_K(\vec{s}) = (\chi_A(\vec{s}) - \delta)\chi_K(\vec{s})$. Пусть

$$g = g_{E_1 \times E_2}, \quad \varepsilon(\vec{s}) = (\delta - \delta_m)\chi_{E_1 \times E_2}(\vec{s}),$$

а $f(\vec{s})$ – балансовая функция множества A . Тогда $f(\vec{s}) = g(\vec{s}) + \varepsilon(\vec{s})$. Поскольку множество A не α -равномерно относительно базиса, то $\|f\|^4 \geq \alpha|E_1|^2|E_2|^2$. По лемме 5 $\|f\| \leq \|g\| + \|\varepsilon\|$. Норма функции $\varepsilon(\vec{s})$ равна $(|E_1|^2 \sum_{m,i} ((\delta - \delta_m) \times (\delta - \delta_i))^2)^{1/4}$. По неравенству (30) при $\alpha_1 = \alpha/10$ получаем

$$\|\varepsilon(\vec{s})\| \leq \frac{\alpha}{10}(|E_1||E_2|)^{1/2}.$$

Отсюда $\|g\|^4 \geq \alpha|E_1|^2|E_2|^2/2$.

Пусть, для определенности, $|E_2| \leq |E_1|$.

Случай 1. Пусть $|E_1| < 2|E_2|$. Если $|E_1| \geq \frac{3}{2}|E_2|$, то разобьем $E_1 \times E_2$ на квадрат K и прямоугольник P так, что $|K| = |E_2|^2$, $P = P_1 \times P_2$, где $|P_2| = |E_2|$, $|P_1| = |E_1| - |E_2| \geq |E_2|/2$.

Пусть теперь $|E_2| \leq |E_1| < \frac{3}{2}|E_2|$. Если $|E_2|$ четное, то разобьем E_2 на две равные части, а E_1 на две части так, чтобы длина первой части была равна $|E_2|/2$. Тогда $E_1 \times E_2$ разбивается на два квадрата и прямоугольник. Длины сторон прямоугольника равны $|E_2|$ и $|E_1| - [|E_2|/2]$. Пусть $E_2 = \{p_1, p_2, \dots, p_{|E_2|}\}$. Если $|E_2|$ нечетное, то разобьем E_2 на две части длиной $[|E_2|/2]$ и точку $p_{|E_2|}$. Тогда $E_1 \times E_2$ разбивается на два квадрата, прямоугольник и “прямую” $E_1 \times \{p_{|E_2|}\}$. Снова длины сторон найденного прямоугольника равны $|E_2|$ и $|E_1| - [|E_2|/2]$.

В любом случае прямоугольники $P = P_1 \times P_2$, получающиеся при таком разбиении, обладают тем свойством, что $|P_1| \leq |P_2| \leq 2|P_1|$. Мы опять можем разбить любой такой прямоугольник P на части. Повторим эту процедуру k раз, $k = \lceil \log_2(2^{16}/\alpha^2) \rceil > 1$. Мы получим не более $2k$ квадратов K_i , не более k “прямых” и один прямоугольник. Обозначим этот прямоугольник через C , а объединение всех “прямых” через L . Количество точек в C не превосходит $(3/4)^k |E_1| |E_2|$. Отсюда имеем

$$\|g_C\| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{k/2} |E_1|^{1/2} |E_2|^{1/2} < \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} |E_1|^{1/2} |E_2|^{1/2}.$$

Применяя неравенство $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geq 2^{500} \alpha^{-70}$, получаем

$$\|g_L\| \leq 2k |E_1|^{1/2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} |E_1|^{1/2} |E_2|^{1/2}.$$

Имеем

$$\|g_{E_1 \times E_2}\| \geq \left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} |E_1|^{1/2} |E_2|^{1/2}, \quad g_{E_1 \times E_2} = \sum_i g_{K_i} + g_C + g_L.$$

По лемме 5 существует такое i_1 , что

$$\|g_{K_{i_1}}\| \geq \left(\frac{\alpha}{16}\right)^{1/4} \frac{|E_1|^{1/2} |E_2|^{1/2}}{4k}.$$

Пусть $F = K_{i_1}$ и $\bar{F} = \bigcup_{i \neq i_1} K_i \cup C$. Мы начали нашу процедуру с рассмотрения прямоугольника $E_1 \times E_2$, причем $|E_2| = \min\{|E_1|, |E_2|\}$. Затем мы получили новый прямоугольник, длины сторон которого не меньше чем $|E_2|/2$. Легко убедиться в том, что на k -м шаге процедуры мы получим прямоугольник, длины сторон которого не меньше чем $|E_2|/2^{k+1}$. Следовательно, на k -м шаге длины сторон всех квадратов будут не меньше чем $[|E_2|/2^{k+2}] \geq |E_2|/2^{k+3}$. Отсюда

$$|F| \geq 2^{-39} \alpha^4 |E_1| |E_2| \geq 2^{-39} \alpha^4 |\bar{F}|.$$

Если $\delta_{\bar{F}}(A) > \delta + 2^{-450} \alpha^{64}$, то плотность A в одном из квадратов K_i , $i \neq i_1$, или прямоугольнике C больше чем $\delta + 2^{-450} \alpha^{64}$. Возьмем в качестве G_1 , G_2 стороны этого квадрата или прямоугольника. Тогда для множеств G_1 , G_2 неравенство (69) выполнено. Длины сторон всех квадратов K_i и прямоугольника C

не меньше чем $2^{-(k+3)}|E_2|$. Следовательно, для G_1, G_2 неравенство (70) также выполнено.

Рассмотрим случай, когда $\delta_{\overline{F}}(A) \leq \delta + 2^{-450}\alpha^{64}$. Пусть $A_1 = A \cap F$, $A_2 = A \cap \overline{F}$, $A_3 = A \cap L$. Поскольку $\min\{|E_1|, |E_2|\} \geq 2^{500}\alpha^{-70}$, то $|A_3| \leq |L| \leq 2^{-450}\alpha^{64}(|F| + |\overline{F}|)$. Имеем

$$\delta(|F| + |\overline{F}|) \leq \delta|E_1||E_2| = |A| = |A_1| + |A_2| + |A_3|.$$

Отсюда получаем

$$(\delta - 2^{-449}\alpha^{64})(|F| + |\overline{F}|) \leq |A_1| + |A_2| \leq \delta_F(A)|F| + (\delta + 2^{-450}\alpha^{64})|\overline{F}|. \quad (71)$$

Так как $|F| \geq 2^{-39}\alpha^4|\overline{F}|$, то из неравенства (71) получаем $\delta_F(A) \geq \delta - 2^{-410}\alpha^{60}$. Используя предложение 2 в случае, когда F – квадрат, находим множества G_1, G_2 , для которых выполнены (69) и (70). Неравенства (69), (70) можно заменить на более сильные, а именно

$$\begin{aligned} |A \cap (G_1 \times G_2)| &> (\delta + 2^{-490}\alpha^{68})|G_1||G_2|, \\ |G_1| &> 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|, \quad |G_2| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_2|. \end{aligned}$$

Случай 2. Пусть $|E_1| \geq 2|E_2|$. Тогда найдется натуральное число $t \geq 2$ такое, что $t|E_2| \leq |E_1| < (t+1)|E_2|$. Пусть $d = \text{diam } E_2$ и $\tilde{E}_2 = E_2 \sqcup (E_2 + d) \sqcup \dots \sqcup (E_2 + (t-1)d)$, $\tilde{A} = A \sqcup (A + d\vec{e}_2) \sqcup \dots \sqcup (A + (t-1)d\vec{e}_2)$. Тогда $\tilde{A} \subseteq E_1 \times \tilde{E}_2$ и $|\tilde{A}| = \delta|E_1||\tilde{E}_2|$. Пусть $\tilde{g}(\vec{s}) = (\chi_{\tilde{A}}(\vec{s}) - \delta)\chi_{E_1 \times \tilde{E}_2}(\vec{s})$. Легко видеть, что $\|\tilde{g}\|^4 = t^2\|g\|^4$. Отсюда $\|\tilde{g}\|^4 \geq \alpha|E_1|^2|\tilde{E}_2|^2/2$. Имеем $|\tilde{E}_2| \leq |E_1| < 2|\tilde{E}_2|$. Применяя рассуждения, использованные в случае 1, к множествам $E_1, \tilde{E}_2$ и $\tilde{A}$, находим множества $\tilde{G}_1 \subseteq E_1, \tilde{G}_2 \subseteq \tilde{E}_2$ такие, что $|\tilde{G}_1| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|$, $|\tilde{G}_2| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_2|$ и $|\tilde{A} \cap (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2)| > (\delta + 2^{-490}\alpha^{68})|\tilde{G}_1||\tilde{G}_2|$. Имеем $\tilde{G}_2 = \bigsqcup_{i=1}^t \tilde{G}_2^{(i)}$, где $\tilde{G}_2^{(i)} \subseteq E_2 + (i-1)d$. Пусть $\zeta = 2^{-490}\alpha^{68}$. Обозначим через B множество тех i , для которых $|\tilde{G}_2^{(i)}| \leq \zeta^2|E_2|/2$. Тогда

$$\left| \bigsqcup_{i \in B} (\tilde{A} \cap (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2^{(i)})) \right| \leq \frac{\zeta^2}{2} |\tilde{G}_1||E_2||B| \leq \frac{\zeta^2}{2} |\tilde{G}_1||\tilde{E}_2| < \frac{\zeta}{2} |\tilde{G}_1||\tilde{G}_2|. \quad (72)$$

Отсюда имеем

$$\left| \bigsqcup_{i \notin B} (\tilde{A} \cap (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2^{(i)})) \right| \geq (\delta + 2^{-491}\alpha^{68})|\tilde{G}_1||\tilde{G}_2|. \quad (73)$$

Из неравенства (73) вытекает, что найдется индекс $i_0 \notin B$, для которого

$$|\tilde{A} \cap (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2^{(i_0)})| \geq (\delta + 2^{-491}\alpha^{68})|\tilde{G}_1||\tilde{G}_2^{(i_0)}|. \quad (74)$$

Поскольку $\tilde{G}_2^{(i_0)} \subseteq E_2 + (i_0 - 1)d$, то $\tilde{G}_2^{(i_0)} = G'_2 + (i_0 - 1)d$, где $G'_2 \subseteq E_2$. Положим $G_1 = \tilde{G}_1$, $G_2 = G'_2$. Имеем $|G_1| > 2^{-490}\alpha^{68}|E_1|$. Так как $i_0 \notin B$, то $|G_2| = |\tilde{G}_2^{(i_0)}| > \zeta^2|E_2|/2$. Следовательно, для множеств G_1, G_2 неравенство (69) выполнено. Имеем $|\tilde{A} \cap (\tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2^{(i_0)})| = |A \cap (G_1 \times G_2)|$. Отсюда и из неравенства (74) вытекает, что для множеств G_1, G_2 неравенство (70) также выполнено. Предложение доказано.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Для доказательства теоремы 4 нам понадобятся несколько утверждений.

Будем говорить, что двумерная арифметическая прогрессия P есть *правильный квадрат*, если $P = P_1 \times P_2$, где P_1, P_2 – одномерные прогрессии с одинаковыми разностями и равными мощностями.

Пусть $P = \{a, a + d, \dots, a + (t - 1)d\} \times \{b, b + d, \dots, b + (t - 1)d\}$ – правильный квадрат и E – произвольное множество. Правильный квадрат P изоморфен квадрату $\{1, \dots, t\}^2$. Изоморфизм φ задается формулой $\varphi(a + kd, b + ld) = (k, l)$, где $k, l = 1, \dots, t$. Мы будем говорить, что E является α -равномерным в правильном квадрате P , если множество $\varphi(E \cap P)$ α -равномерно в правильном квадрате $\{1, \dots, t\}^2$. Другими словами, E является α -равномерным в правильном квадрате P , если для балансовой функции f множества $\varphi(E \cap P)$ справедливо неравенство (14).

Одномерный вариант следующей теоремы фактически содержится в работе [6] (см. также [14]).

Напомним, что для множеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, величина $\delta_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ равна $|\mathcal{A} \cap \mathcal{B}|/|\mathcal{A}|$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $0 < \varepsilon \leq \delta$ – некоторые числа и $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0, 1]$, $\rho \geq 4$. Пусть множество W содержится в $\{1, \dots, N\}^2$, $|W| = \delta N^2$, и $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$, а $\alpha = \alpha(\varepsilon)$. Тогда существуют правильные квадраты $P_1, \dots, P_M \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ и разбиение W на множества $W \cap P_1, \dots, W \cap P_M$ и B , для которых выполнено:

- 1) для любого i множество W является $\alpha(\delta_{P_i}(W))$ -равномерным в прогрессии P_i ;
- 2) для любого i выполнено $|W \cap P_i| \geq \varepsilon |P_i|$ и $|P_i| \geq N^{c_2^{1/\alpha}}$;
- 3) $|B| < 4\varepsilon N^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательству теоремы предположим несколько лемм.

ЛЕММА 12. Пусть s и N – натуральные числа, $2^{12}N^{1/2} \leq s \leq N$, а $\phi: \mathbb{Z}_N^2 \rightarrow \mathbb{Z}_N$ – некоторая функция вида $\phi(x, y) = r_1x + r_2y$, $(r_1, r_2) \neq \vec{0}$. Тогда $\mathbb{Z}_N$ может быть разбито на арифметические прогрессии $P_1, \dots, P_M$, $M \leq 8N^{4/3}/s^{2/3}$ с одинаковой разностью, длины которых отличаются друг от друга не более чем на 1, так что для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Длины прогрессий $P_1, \dots, P_M$ в лемме 12 не меньше чем $[N/M]$. Поскольку $s \geq 2^{12}N^{1/2}$, то $[N/M] \geq s^{2/3}/(16N^{1/3})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t = \lceil (N^2/s)^{1/3}/2 \rceil$. Рассмотрим $t^2 + 1$ вектор $\vec{0}, (r_1, r_2), 2(r_1, r_2), \dots, t^2(r_1, r_2) \in \mathbb{Z}_N^2$. Разобьем $\{1, \dots, N\}^2$ на t^2 квадратов со стороной N/t . По принципу Дирихле в один из квадратов попадут два вектора. Предположим, что в этот квадрат попали векторы $t_1(r_1, r_2)$ и $t_2(r_1, r_2)$, и пусть $t_2 > t_1$. Положим $u = t_2 - t_1$. Тогда $0 < u \leq t^2$ и $|ur_1|, |ur_2| \leq N/t$. Разобьем $\{1, \dots, N\}$ на классы вычетов по модулю u . Любой класс по модулю u имеет мощность между $[N/u]$ и $\lceil N/u \rceil$. Пусть P и Q – множества, состоящие из $[st/(2N)]$ последовательных элементов некоторых классов вычетов по

модулю u . Тогда диаметр $\phi(P \times Q)$ не превосходит

$$|ur_1||P| + |ur_2||Q| \leq \frac{N}{t} \frac{st}{2N} + \frac{N}{t} \frac{st}{2N} = s. \quad (75)$$

Имеем $[st/(2N)] \leq N/(3t^2) \leq (1/2)[N/u]$. Каждый класс вычетов может быть разбит не более чем на $4N^2/(ust)$ арифметических прогрессий, длины которых не превосходят $st/(2N)$ и отличаются друг от друга не более чем на 1. Докажем это.

Рассмотрим класс вычетов по модулю u минимальной длины. Обозначим этот класс через $\mathbf{U}$, а его длину через S . Пусть число k представляет собой результат деления S на $[st/(4N)]$ с остатком. Обозначим остаток деления через q . Разделив с остатком q на k , получим l и остаток d , $d < k$. Поскольку $[st/(2N)] \leq (1/2)[N/u]$, то $k \geq 2$ и, следовательно, $l \leq q/2 < [st/(4N)]/2$. Разобьем $\mathbf{U}$ на d прогрессий длиной $[st/(4N)] + l + 1$ и на $k - d$ прогрессий длиной $[st/(4N)] + l$. Так как $([st/(4N)] + l + 1)d + ([st/(4N)] + l)(k - d) = S$, то произвольный элемент $\mathbf{U}$ попадет в некоторую прогрессию, кроме того, длина произвольной прогрессии нашего разбиения не превосходит $[st/(4N)] + l + 1 \leq [st/(2N)] - 1$.

Множество $\mathbb{Z}_N$ можно разбить на арифметические прогрессии, длины которых не превосходят $[st/(2N)]$ и отличаются не более чем на 1. Действительно, мощности классов вычетов отличаются друг от друга не более чем на 1, следовательно, длина максимального класса вычетов по модулю u не превосходит $S + 1$. Разобьем все классы вычетов длиной S так же, как и класс $\mathbf{U}$. Если классов вычетов длиной $S + 1$ нет, то мы получим требуемое нам разбиение для всего $\mathbb{Z}_N$.

Рассмотрим произвольный класс вычетов $\mathbf{V}$ длиной $S + 1$. Обозначим через x элемент $\mathbf{V}$, у которого $|x|$ наибольший. Разобьем $\mathbf{V} \setminus \{x\}$ точно таким же образом, как и класс $\mathbf{U}$. Если длины прогрессий, на которые разбивается $\mathbf{V}$, равны, то, добавив x к последней прогрессии, мы получим необходимое нам разбиение. Если же длины прогрессий не равны, то, добавляя x к последней прогрессии, мы получим необходимое нам разбиение. Количество прогрессий при таком разбиении не превосходит $8N^{4/3}/s^{2/3}$. Кроме того, для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s . Лемма доказана.

ЛЕММА 13. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и $N \geq 2^{100}/\alpha^{10}$. Пусть множество A лежит в $\mathbb{Z}_N^2$, $|A| = \delta N^2$, и для некоторого $\vec{r} \neq \vec{0}$ выполнено $|\hat{\chi}_A(\vec{r})| \geq \alpha N^2$. Тогда существуют такое разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на правильные квадраты равной мощности $S_1, \dots, S_r$ и множество Ω , для которых выполнено $|S_i| \geq N^{1/2}$, $i = 1, \dots, r$, $|\Omega| < N^{11/6}$ и

$$\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |\delta_{S_j}(A) - \delta|^2 \geq \frac{\alpha^2}{16}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\vec{r} = (r_1, r_2)$ и $s = [\alpha N/(4\pi)]$. Так как $N \geq 2^{100}/\alpha^{10}$, то $s \neq 0$. Применим лемму 12 с параметрами s и N к функции $\phi(x, y) = r_1x + r_2y$. По этой лемме существует разбиение $\mathbb{Z}_N$ на арифметические прогрессии $P_1, \dots, P_M$, $M \leq 8N^{4/3}/s^{2/3}$, с одинаковой разностью, длины которых отличаются друг от друга не более чем на 1, так что для любых $i, j \in \{1, \dots, M\}$ диаметр $\phi(P_i \times P_j)$ не превосходит s .

Пусть $\vec{s} = k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2$ и $f(\vec{s}) = \chi_A(\vec{s}) - \delta$. Поскольку $\vec{r} \neq \vec{0}$, то $\hat{f}(\vec{r}) = \hat{\chi}_A(\vec{r})$.
Имеем

$$\left| \sum_{k,m} f(k,m) e(-(r_1 k + r_2 m)) \right| \geq \alpha N^2. \quad (76)$$

Рассмотрим разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на M^2 множеств вида $P_{ij} = P_i \times P_j$. По неравенству треугольника имеем

$$\sum_{i,j=1}^M \left| \sum_{(k,m) \in P_{ij}} f(k,m) e(-(r_1 k + r_2 m)) \right| \geq \alpha N^2. \quad (77)$$

Пусть i, j – произвольные числа от 1 до M и w_{ij} – некоторый элемент P_{ij} . По лемме 12 диаметр $\phi(P_{ij})$ не больше $\alpha N/(4\pi)$. Следовательно, для любого $w \in P_{ij}$ имеем $|e(-\phi(w)) - e(-\phi(w_{ij}))| \leq \alpha/2$. Из неравенства (77) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^M \left| \sum_{(k,m) \in P_{ij}} f(k,m) \right| &= \sum_{i,j=1}^M \left| \sum_{(k,m) \in P_{ij}} f(k,m) e(-\phi(w_{ij})) \right| \\ &\geq \sum_{i,j=1}^M \left| \sum_{(k,m) \in P_{ij}} f(k,m) e(-\phi(k,m)) \right| \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^M \left| \sum_{(k,m) \in P_{ij}} f(k,m) (e(-\phi(k,m)) - e(-\phi(w_{ij}))) \right| \\ &\geq \alpha N^2 - \sum_{i,j=1}^M \frac{\alpha}{2} |P_{ij}| = \frac{\alpha N^2}{2}. \end{aligned} \quad (78)$$

Возьмем произвольное множество P_{ij} и найдем правильный квадрат $S \subseteq P_{ij}$, $|S| \geq N^{1/2}$. Длины прогрессий P_i и P_j отличаются не более чем на 1. Если $|P_i| = |P_j|$, то положим $S = P_{ij}$. Так как $|P_i|, |P_j| \geq \alpha^{2/3}/(16(4\pi)^{2/3})N^{1/3}$, то $|S| \geq \alpha^{4/3}/(2^8(4\pi)^{4/3})N^{2/3}$. Отсюда по условию $N \geq 2^{100}/\alpha^{10}$ имеем $|S| \geq N^{1/2}$. Пусть длины прогрессий P_i и P_j не равны. Пусть, для определенности, $|P_i| = |P_j| + 1$. Исключив одну из крайних точек в P_i , получим прогрессию Q . Пусть мы исключили точку $x \in P_i$. Положим $S = Q \times P_j$ и $\Omega_{ij} = A \cap (\{x\} \times P_j)$. Тогда $|S| \geq N^{1/2}$ и $|\Omega_{ij}| \leq |P_j|$.

Применив эту операцию для произвольного множества P_{ij} , мы получим семейство Λ правильных квадратов $S_1, \dots, S_r$, $r = M^2$, равной мощности. Пусть Ω – объединение всех Ω_{ij} , $i, j = 1, \dots, M$. Тогда

$$|\Omega| \leq 2M^2 N/M < N^{11/6}.$$

Пользуясь этой оценкой и неравенством (78), получаем

$$\sum_{S \in \Lambda} \left| \sum_{(k,m) \in S} f(k,m) \right| \geq \frac{\alpha N^2}{4}. \quad (79)$$

Пусть $\delta_j = \delta_{S_j}(A)$. Обозначим количество элементов в произвольном квадрате семейства Λ через t . Из неравенства (79) находим

$$\sum_{j=1}^r |\delta_j - \delta| \geq \frac{\alpha N^2}{4t} \geq \frac{\alpha r}{4}. \quad (80)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\sum_{j=1}^r |\delta_j - \delta|^2 \geq \frac{\alpha^2 r}{16}. \quad (81)$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 9. Сопоставим каждому набору Σ непесекающихся множеств $C_1, \dots, C_m$, $C_i \subseteq \mathbb{Z}_N^2$, $i = 1, \dots, m$, функцию

$$E(\Sigma)(\vec{x}) = \sum_{j=1}^m \delta_{C_j}(W) \chi_{C_j}(\vec{x}).$$

Ясно, что для любого набора множеств Σ выполнено $|E(\Sigma)(\vec{x})| \leq 1$. Отсюда

$$\|E(\Sigma)(\vec{x})\|_2^2 = \sum_{\vec{x}} E(\Sigma)(\vec{x})^2 \leq N^2.$$

Доказательство теоремы представляет собой индуктивный процесс. На i -м индуктивном шаге этого процесса мы построим семейство $\Sigma^{(i)}$ непесекающихся правильных квадратов $C_1, \dots, C_{\nu_i}$ и множество $\Omega^{(i)} \supseteq \Omega^{(i-1)}$. При этом

$$|C_i| \geq N^{(1/4)^i}, \quad (82)$$

$$\|E(\Sigma^i)\|_2^2 \geq \|E(\Sigma^{i-1})\|_2^2 + 2^{-6} \alpha(\varepsilon) N^2, \quad (83)$$

$$|\Omega^{(i)} \setminus \Omega^{(i-1)}| < 2^{-6} \alpha(\varepsilon) \varepsilon N^2. \quad (84)$$

Проведем первый шаг индукции. Положим $\Sigma^{(1)} = \{\mathbb{Z}_N^2\}$ и $\Omega^{(1)} = \emptyset$. Неравенства (82)–(84) для $\Sigma^{(1)}$ и $\Omega^{(1)}$ выполнены. Пусть $E_1(\vec{x}) = E(\Sigma^{(1)})(\vec{x})$. Тогда $E_1(\vec{x}) = \delta$ и $\|E_1\|_2^2 = \delta^2 N^2$.

Проведем второй шаг индукции. Если множество $W \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ является $\alpha(\delta)$ -равномерным, то доказывать нечего и наш процесс заканчивается. Пусть W не $\alpha(\delta)$ -равномерно. Пусть $f(\vec{s}) = \chi_W(\vec{s}) - \delta$. По лемме 1' существует ненулевой вектор $\vec{r}$, для которого $|\hat{f}(\vec{r})| \geq \alpha^{1/2}(\delta) N^2$. Поскольку $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $N \geq 2^{100}/\alpha^5(\delta)$. По лемме 13 существуют такое разбиение $\mathbb{Z}_N^2$ на правильные квадраты $S_1, \dots, S_r$ равной мощности и множество Ω , для которых выполнено $|S_i| \geq N^{1/2}$, $i = 1, \dots, r$, $|\Omega| < N^{11/6}$ и

$$\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r |\delta_{S_j}(W) - \delta|^2 \geq \frac{\alpha(\delta)}{16}. \quad (85)$$

Положим $\Sigma^{(2)} = \{S_1, \dots, S_r\}$ и $\Omega^{(2)} = \Omega$. Так как $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $\Omega^{(2)} < 2^{-6} \alpha(\varepsilon) \varepsilon N^2$. Пусть f и g – произвольные функции из $\mathbb{Z}_N^2$ в $\mathbb{R}$. Обозначим через (f, g) скалярное произведение функций f и g , $(f, g) = \sum_{\vec{x}} f(\vec{x})g(\vec{x})$. Пусть $E_2(\vec{x}) = E(\Sigma^{(2)})(\vec{x})$. Тогда

$$\|E_2\|_2^2 = (E_2, E_2) = (E_1, E_1) + \|E_2 - E_1\|_2^2 + 2(E_1, E_2 - E_1). \quad (86)$$

Оценим третий член в (86). Имеем

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\vec{x} \in S_i} E_2(\vec{x}) = \left| W \cap \left(\bigcup_{i=1}^r S_i \right) \right| = \delta N^2 - |\Omega|.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |(E_1, E_2 - E_1)| &= \left| \sum_{\vec{x}} \delta(E_2(\vec{x}) - \delta) \right| = \left| \delta \sum_{\vec{x}} E_2(\vec{x}) - \delta^2 N^2 \right| \\ &= \left| \delta \sum_{i=1}^r \sum_{\vec{x} \in S_i} E_2(\vec{x}) - \delta^2 N^2 \right| = \delta |\Omega| \leq N^{11/6}. \end{aligned} \quad (87)$$

Найдем теперь второй член (86). Множества $S_1, \dots, S_r$, Ω представляют собой разбиение $\mathbb{Z}_N^2$. Так как $|\Omega| \leq N^{11/6}$, то для любого $t = 1, \dots, r$ имеем $|S_t| \geq N^2/(2r)$. Из неравенства (85) получаем

$$\begin{aligned} \|E_2 - E_1\|_2^2 &= \sum_{\vec{x}} |E_2(\vec{x}) - \delta|^2 \geq \sum_{t=1}^r \sum_{\vec{x} \in S_i} |E_2(\vec{x}) - \delta|^2 = \sum_{t=1}^r |S_i| |\delta_i - \delta|^2 \\ &\geq \frac{N^2}{2} \frac{1}{r} \sum_{t=1}^r |\delta_i - \delta|^2 \geq 2^{-5} \alpha(\delta) N^2. \end{aligned} \quad (88)$$

Используя соотношения (87), (88) и оценку $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, находим

$$\|E_2\|_2^2 \geq \|E_1\|_2^2 + 2^{-6} \alpha(\delta) N^2 \geq \|E_1\|_2^2 + 2^{-6} \alpha(\varepsilon) N^2. \quad (89)$$

Неравенства (82)–(84) для $\Sigma^{(2)}$ и $\Omega^{(2)}$ выполнены.

Пусть мы провели i шагов итерационной процедуры $i \leq 2^6/\alpha(\varepsilon)$. Пусть на i -м шаге мы построили семейство $\Sigma^{(i)}$ непересекающихся правильных квадратов $C_1, \dots, C_{\nu_i}$ и множество $\Omega^{(i)} \supseteq \Omega^{(i-1)}$, для которых выполнены неравенства (82)–(84). Из неравенства (84) вытекает, что $|\Omega^{(i)}| < \varepsilon N^2$. Пусть $\delta_j = \delta_{C_j}(W)$. Обозначим через H множество тех правильных квадратов C_j семейства $\Sigma^{(i)}$, для которых $|C_j| < 2^{200} \alpha^{-10}(\delta_j)$, и пусть $\tilde{H}$ – объединение всех квадратов из H . Разобьем оставшиеся множества семейства $\Sigma^{(i)}$ на два класса U_1 и U_2 . Пусть U_1 состоит из квадратов $C_j \in \Sigma^{(i)}$, в которых W является $\delta_{C_j}(W)$ -равномерным, а U_2 – из квадратов, в которых W не является $\delta_{C_j}(W)$ -равномерным.

Если $|W \cap \bigsqcup_{C_j \in U_2} C_j| < \varepsilon N^2$, то теорема доказана. Действительно, возьмем в качестве искомым квадратов $P_1, \dots, P_M$ квадраты семейства $\Sigma^{(i)}$, принадлежащие U_1 , плотность W в которых не меньше ε . Для этих квадратов выполнены условия 1), 2) теоремы. Обозначим через V оставшиеся в $U_1 \sqcup U_2$ квадраты. Легко видеть, что мощность $V \cap W$ не больше $2\varepsilon N^2$.

Оценим мощность множества $\tilde{H} \cap W$. Пусть C_j – произвольный квадрат из H . Тогда $|C_j| < 2^{200} \alpha^{-10}(\delta_j)$. С другой стороны, из (82) имеем $|C_j| \geq N^{(1/4)^i} \geq N^{c_2^{1/\alpha}}$. Отсюда выполнено неравенство $\delta_j < (2^{20}/K) N^{-(1/10\rho)c_2^{1/\alpha}}$. Поскольку $\sum_{S_j \in H} |S_j| \leq N^2$, то

$$|\tilde{H} \cap W| = \sum_{S_j \in H} \delta_j |S_j| < \frac{2^{20}}{K} N^2 N^{-(1/10\rho)c_2^{1/\alpha}}.$$

Из условия $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$ вытекает $|\tilde{H} \cap W| < 2^{-7} \varepsilon \alpha(\varepsilon) N^2 < \varepsilon N^2/2$. Положим $B = (V \cap W) \sqcup (\tilde{H} \cap W) \sqcup \Omega^{(i)}$. Тогда $|B| < 4\varepsilon N^2$ и условие 3) теоремы выполнено.

Пусть теперь $|W \cap \bigsqcup_{C_j \in U_2} C_j| \geq \varepsilon N^2$. Будем считать, что в U_2 попали квадраты $C_1, \dots, C_l$. Этого можно добиться после надлежащей перенумеровки квадратов семейства $\Sigma^{(i)}$. Из условия (82) вытекает, что $l \leq N^2 N^{-(c_2)^{1/\alpha}}$. Возьмем произвольный правильный квадрат C_j из U_2 . Пусть $f_j(\vec{s}) = \chi_{W \cap C_j}(\vec{s}) - \delta_j$. По лемме 1' существует ненулевой вектор $\vec{p}_j$, для которого $|\hat{f}_j(\vec{p}_j)| \geq \alpha^{1/2}(\delta_j)|C_j|$. Так как $C_j \notin H$, то $|C_j| \geq 2^{200}/\alpha^{10}(\delta_j)$. По лемме 13 существуют такое разбиение C_j на правильные квадраты равной мощности $S_1^{(j)}, \dots, S_{r(j)}^{(j)}$ и множество Ω_j , для которых выполнено $|S_t^{(j)}| \geq |C_j|^{1/4}$, $t = 1, \dots, r(j)$, $|\Omega_j| < |C_j|^{11/12}$ и

$$\frac{1}{r(j)} \sum_{t=1}^{r(j)} |\delta_{S_t^{(j)}}(W) - \delta_j|^2 \geq \frac{\alpha(\delta_j)}{16}. \quad (90)$$

Положим

$$\Sigma^{(i+1)} = \{C_1, \dots, C_b\}_{C_j \in U_1} \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^l \bigsqcup_{t=1}^{r(j)} S_t^{(j)} \right),$$

$$\Omega^{(i+1)} = \Omega^{(i)} \sqcup (\tilde{H} \cap W) \bigsqcup_{j=1}^l |\Omega_j|.$$

Ясно, что для всех элементов семейства $\Sigma^{(i+1)}$ неравенство (82) выполнено. Поскольку квадраты $C_j \subseteq \mathbb{Z}_N^2$ не пересекаются, то $\sum_{j=1}^l |C_j| \leq N^2$. Пусть $Y = \bigsqcup_{j=1}^l \Omega_j$. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$|Y| \leq \sum_{j=1}^l |C_j|^{\frac{11}{12}} \leq \left(\sum_{j=1}^l |C_j| \right)^{\frac{11}{12}} l^{\frac{1}{12}} \leq N^2 N^{-\frac{1}{12} c_2^{1/\alpha}}.$$

Так как $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, то $|Y| < 2^{-8}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2$. Следовательно,

$$|\Omega^{(i+1)} \setminus \Omega^{(i)}| = |\tilde{H} \cap W| + |Y| < 2^{-7}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2 + 2^{-7}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2 = 2^{-6}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2.$$

Таким образом, для $\Omega^{(i+1)}$ неравенство (84) выполнено.

Проверим выполнение неравенства (83). Пусть $E_i(\vec{x}) = E(\Sigma^{(i)})(\vec{x})$, а $E_{i+1}(\vec{x}) = E(\Sigma^{(i+1)})(\vec{x})$. Тогда

$$\|E_{i+1}\|_2^2 = (E_{i+1}, E_{i+1}) = (E_i, E_i) + \|E_{i+1} - E_i\|_2^2 + 2(E_i, E_{i+1} - E_i). \quad (91)$$

Оценим третий член в (91). Для любого $C_j \in U_1$ выполнено $E_{i+1}(\vec{x}) = E_i(\vec{x})$. Отсюда $\sum_{\vec{x} \in C_j} (E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})) = 0$. Для любого $C_j \in U_2$ имеем $|\sum_{\vec{x} \in C_j} (E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x}))| \leq |\Omega_j|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |(E_i, E_{i+1} - E_i)| &= \left| \sum_{\vec{x}} E_i(\vec{x})(E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})) \right| \\ &= \left| \sum_{C \in \Sigma^{(i)}} \sum_{\vec{x} \in C} E_i(\vec{x})(E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})) \right| \\ &= \left| \sum_{C \in \Sigma^{(i)}} \delta_C(W) \sum_{\vec{x} \in C} (E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})) \right| \leq |Y| < 2^{-8}\alpha(\varepsilon)\varepsilon N^2. \end{aligned} \quad (92)$$

Найдем теперь второй член (91). Напомним, что $U_2 = \{C_1, \dots, C_l\}$. Для любого $j = 1, \dots, l$ множества $S_1^{(j)}, \dots, S_{r(j)}^{(j)}$ и Ω_j представляют собой разбиение C_j . Так как $|\Omega_j| \leq |C_j|^{11/12}$, то для всех $t = 1, \dots, r(j)$ имеем $|S_t^{(j)}| \geq |C_j|/(2r(j))$. Пусть $\delta_{jt} = \delta_{S_t^{(j)}}(W)$. Применяя неравенство (90), получаем

$$\begin{aligned} \|E_{i+1} - E_i\|_2^2 &= \sum_{\vec{x}} |E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})|^2 \geq \sum_{j=1}^l \sum_{\vec{x} \in C_j} |E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})|^2 \\ &\geq \sum_{j=1}^l \sum_{t=1}^{r(j)} \sum_{\vec{x} \in S_t^{(j)}} |E_{i+1}(\vec{x}) - E_i(\vec{x})|^2 = \sum_{j=1}^l \sum_{t=1}^{r(j)} |S_t^{(j)}| |\delta_{jt} - \delta_j|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l |C_j| \frac{1}{r(j)} \sum_{t=1}^{r(j)} |\delta_{jt} - \delta_j|^2 \geq 2^{-5} \sum_{j=1}^l |C_j| \alpha(\delta_j). \end{aligned} \quad (93)$$

Поскольку $|W \cap \bigsqcup_{C_j \in U_2} C_j| \geq \varepsilon N^2$, то $\sum_{j=1}^l \delta_j |C_j| \geq \varepsilon N^2$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon N^2 &\leq \sum_{j=1}^l \delta_j |C_j| = \sum_{j=1}^l (\delta_j |C_j|^{1/\rho}) |C_j|^{1-1/\rho} \leq \left(\sum_{j=1}^l \delta_j^\rho |C_j| \right)^{1/\rho} \left(\sum_{j=1}^l |C_j| \right)^{1-1/\rho} \\ &\leq N^{2(1-1/\rho)} \left(\sum_{j=1}^l \delta_j^\rho |C_j| \right)^{1/\rho}. \end{aligned} \quad (94)$$

Отсюда имеем

$$\sum_{j=1}^l |C_j| \alpha(\delta_j) = K \sum_{j=1}^l \delta_j^\rho |C_j| \geq K \varepsilon^\rho N^2 = \alpha(\varepsilon) N^2. \quad (95)$$

Вследствие неравенств из (93) получаем

$$\|E_{i+1} - E_i\|_2^2 \geq 2^{-5} \alpha(\varepsilon) N^2. \quad (96)$$

Используя (92), (96) и оценку $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$, находим

$$\|E_{i+1}\|_2^2 \geq \|E_i\|_2^2 + 2^{-6} \alpha(\varepsilon) N^2. \quad (97)$$

Итак, для $\Sigma^{(i+1)}$ и $\Omega^{(i+1)}$ все неравенства (82)–(84) выполнены.

Мы видим, что условие $N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/\alpha}}$ позволяет провести $2^6/\alpha(\varepsilon)$ шагов индуктивной процедуры. Если до этого времени алгоритм закончится, то теорема будет доказана. Но условие (83) гарантирует, что количество шагов будет меньше $2^6/\alpha(\varepsilon)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{Z}_N$ – некоторые множества, $|W_1| = \beta_1 N$, $|W_2| = \beta_2 N$, $\zeta \in (0, 1)$ – некоторое число, $\alpha(s) = Ks^\rho$, $K \in (0, 1]$, $\rho \geq 4$ и $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. Предположим, что множество A содержится в $W_1 \times W_2$,

$$|A| = \delta |W_1| |W_2|, \quad N \geq (C\alpha^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}},$$

где $C = 2^{1000\rho}$, $c_1 = 100\rho$ и $c_2 = 2^{-128}$. Тогда существуют такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \geq N^{c_2^{1/a}}$, и множества R_1, R_2 , $R_1 \subseteq (W_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (W_2 \cap P_2)$, $|R_1 \times R_2| \geq \zeta \beta_1 \beta_2 |P|$, обладающие следующими свойствами: R_1, R_2 являются $\alpha(\delta_{P_1}(R_1))^{1/2}$ - и $\alpha(\delta_{P_2}(R_2))^{1/2}$ -равномерными соответственно в P_1 и P_2 и $\delta_{R_1 \times R_2}(A) \geq \delta - 4\zeta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon = \zeta \beta_1 \beta_2$. Применим теорему 9 к множеству $W = W_1 \times W_2$. Множество $A_1 = A \setminus B$ имеет плотность в W не меньше чем $\delta - 4\zeta$, следовательно, существует правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, в котором W является $\alpha(\delta_P(E))$ -равномерным, $|W \cap P| \geq \varepsilon |P|$, $|P| \geq N^{c_2^{1/\alpha}}$, $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\delta_{P \cap W}(A) \geq \delta - 4\zeta$. Пусть $W \cap P = R_1 \times R_2$ и $R_1 = \gamma_1 |P_1|$, $R_2 = \gamma_2 |P_2|$. Тогда $|W \cap P| = \gamma_1 \gamma_2 |P|$. Обозначим через f, f_1 и f_2 балансовые функции множеств W, R_1 и R_2 соответственно. Для любых r_1, r_2 , одновременно не равных нулю, выполнено

$$|\hat{f}(r_1, r_2)| \leq (K \gamma_1^\rho \gamma_2^\rho)^{1/4} |P|.$$

Если $r_1 \neq 0$, $r_2 = 0$, то $\hat{f}(r_1, r_2) = \gamma_2 |P_2| \hat{f}_1(r_1)$ и $|\hat{f}_1(r_1)| \leq K^{1/4} \gamma_1^{\rho/4} |P_1|$. Аналогично, $|\hat{f}_2(r)| \leq K^{1/4} \gamma_2^{\rho/4} |P_2|$ для всех $r \in \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$. Применяя лемму 1 к множествам R_1, R_2 , получаем, что R_1 является $(K^{1/2} \gamma_1^{\rho/2})$ -равномерным в P_1 , а R_2 является $(K^{1/2} \gamma_2^{\rho/2})$ -равномерным в P_2 . Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $N_1 \in \mathbb{N}$ и $J_1, J_2 \subseteq \mathbb{Z}_{N_1}$ – некоторые множества, $|J_1| = \omega_1 N_1$, $|J_2| = \omega_2 N_1$. Предположим, что множество A принадлежит $J_1 \times J_2$, не содержит уголков и имеет мощность $|A| = \delta |J_1| |J_2|$. Предположим также, что J_1, J_2 являются $(10^{-330} \omega_1^{24} \omega_2^{24} \delta^{132})$ -равномерными и $N_1 \geq 10^{10} (\delta^4 \omega_1 \omega_2)^{-1}$. Мы докажем, что при этих условиях множества J_1 и J_2 имеют подмножества I_1 и I_2 , а множество A имеет подмножество A' такие, что:

- 1) $A' \subseteq I_1 \times I_2$;
- 2) $|A'| \geq (\delta + 10^{-20000} \delta^{7000}) |I_1| |I_2|$;
- 3) $|I_1| \geq 10^{-20000} \delta^{7000} \omega_1 N_1$, $|I_2| \geq 10^{-20000} \delta^{7000} \omega_2 N_1$.

Пусть для $\alpha_1 = 10^{-108} \delta^{44}$ одно из неравенств (30) или (31) не выполнено. Тогда по лемме 11 у множеств J_1, J_2 найдутся подмножества I_1, I_2 , которые удовлетворяют (47), (48). Положим $A' = A \cap (I_1 \times I_2)$. Для множеств I_1, I_2 и A' условия 1)–3) выполнены.

Таким образом, мы можем считать, что неравенства (30), (31) верны при $\alpha_1 = 10^{-108} \delta^{44}$. Если множество A является $(10^{-108} \delta^{44})$ -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то по теореме 7 A содержит уголок. Если множество A не является $(10^{-108} \delta^{44})$ -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то по предложению 3 множества J_1 и J_2 имеют подмножества I_1, I_2 , а множество A – подмножество $A' = A \cap (I_1 \times I_2)$, для которых выполнены свойства 1)–3). Свойство 2) можно даже заменить на более сильное, а именно $|A'| \geq (\delta + 10^{-19000} \delta^{7000}) |I_1| |I_2|$.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы.

Пусть множество $A \subseteq \{1, \dots, N\}^2$ имеет мощность δN^2 и не содержит уголков. Пусть $E_1 = \{1, \dots, N\}$, $E_2 = \{1, \dots, N\}$. Тогда E_1 и E_2 являются 0-равномерными множествами. Кроме того, по условию теоремы $N \geq 10^{10} \delta^{-4}$. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы, находим в A подмножества A' и $G_1 \subseteq E_1$, $G_2 \subseteq E_2$, удовлетворяющие условиям 1)–3). Пусть

$\beta_1 = |G_1|/N$, $\beta_2 = |G_2|/N$. Множество A' так же, как и A , не содержит уголков и имеет плотность δ_1 в $G_1 \times G_2$ не меньше чем $\delta + 10^{-19000}\delta^{7000}$.

Пусть $\zeta = 10^{-20000}\delta^{7000}$. Рассмотрим функцию $\alpha(s) = 10^{-660}(\zeta\beta_1\beta_2)^{48}\delta^{264}s^{48}$, и пусть $a = \alpha(\zeta\beta_1\beta_2)$. По условию теоремы $N \geq (Ca^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a}}$, значит, мы можем применить следствие 1 к множествам G_1 , G_2 и A' . По этому следствию существуют такой правильный квадрат $P = P_1 \times P_2$, $|P| \geq N^{c_2^{1/a}}$, и множества R_1 , R_2 , $R_1 \subseteq (G_1 \cap P_1)$, $R_2 \subseteq (G_2 \cap P_2)$, $|R_1| = \gamma_1|P_1|$, $|R_2| = \gamma_2|P_2|$, $|R_1 \times R_2| \geq \zeta\beta_1\beta_2|P|$, обладающие следующими свойствами: R_1 , R_2 являются $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132})$ -равномерными соответственно в P_1 и P_2 и, кроме того, $\delta_{R_1 \times R_2}(A') \geq \delta_1 - 4\zeta$. Плотность A в $R_1 \times R_2$ не меньше чем $\delta_1 - 4 \cdot 10^{-20000}\delta^{7000} \geq \delta + 10^{-20000}\delta^{7000}$.

Применим те же рассуждения к правильному квадрату P , $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24} \times \delta^{132})$ -равномерным множествам R_1 , R_2 , $R_1 \times R_2 \subseteq P$, и множеству $A'' = A' \cap (R_1 \times R_2)$. Мы можем повторить наши рассуждения несколько раз.

Пусть на i -м шаге алгоритма мы получили правильный квадрат $P^{(i)} = P_1^{(i)} \times P_2^{(i)}$, множества $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$, $R_1^{(i)} = \gamma_1^{(i)}|P_1^{(i)}|$, $R_2^{(i)} = \gamma_2^{(i)}|P_2^{(i)}|$ и множество $A_i \subseteq R_1^{(i)} \times R_2^{(i)}$, $|A_i| = \delta_i|R_1^{(i)}||R_2^{(i)}|$, так что множества $R_1^{(i)}$, $R_2^{(i)}$ являются $(10^{-330}(\gamma_1^{(i)})^{24}(\gamma_2^{(i)})^{24}\delta^{132})$ -равномерными соответственно в $P_1^{(i)}$ и $P_2^{(i)}$.

Если

$$|P_1^{(i)}| = |P_2^{(i)}| \geq (\delta^4 \gamma_1^{(i)} \gamma_2^{(i)})^{-1}, \quad (98)$$

то, рассуждая, как в начале доказательства теоремы, находим в A_i подмножества A'_i и $G_1^{(i)} \subseteq R_1^{(i)}$, $G_2^{(i)} \subseteq R_2^{(i)}$, удовлетворяющие условиям 1)–3), $G_1^{(i)} = \beta_1^{(i)}|P_1^{(i)}|$, $G_2^{(i)} = \beta_2^{(i)}|P_2^{(i)}|$. При этом множество A'_i так же, как и A , не содержит уголков и имеет плотность δ'_i в $G_1^{(i)} \times G_2^{(i)}$ не меньше чем $\delta_i + 10^{-19000}\delta^{7000}$. Из условия 3) вытекает

$$\beta_1^{(i)} \geq 10^{-20000}\delta^{7000}\gamma_1^{(i)}, \quad \beta_2^{(i)} \geq 10^{-20000}\delta^{7000}\gamma_2^{(i)}. \quad (99)$$

Пусть $\zeta = 10^{-20000}\delta^{7000}$. Рассмотрим функцию $\alpha_i(s) = 10^{-660}(\zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)})^{48} \times \delta^{264}s^{48}$, и пусть $a_i = \alpha_i(\zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)})$. Если

$$|P_1^{(i)}| \geq (Ca_i^{c_1})^{-(1/c_2)^{1/a_i}}, \quad (100)$$

то мы можем применить следствие 1 к множествам $G_1^{(i)}$, $G_2^{(i)}$ и A'_i . По этому следствию существуют такой правильный квадрат $P^{(i+1)} = P_1^{(i+1)} \times P_2^{(i+1)}$, $|P_1^{(i+1)}| \geq |P^{(i)}|^{c_2^{1/a}}$, и множества $R_1^{(i+1)}$, $R_2^{(i+1)}$, $R_1^{(i+1)} \subseteq (G_1^{(i)} \cap P_1^{(i+1)})$, $R_2^{(i+1)} \subseteq (G_2^{(i)} \cap P_2^{(i+1)})$, $R_1^{(i+1)} = \gamma_1^{(i+1)}|P_1^{(i+1)}|$, $R_2^{(i+1)} = \gamma_2^{(i+1)}|P_2^{(i+1)}|$, $|R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}| \geq \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}|P^{(i+1)}|$, обладающие следующими свойствами: $R_1^{(i+1)}$, $R_2^{(i+1)}$ являются $(10^{-330}(\gamma_1^{(i+1)})^{24}(\gamma_2^{(i+1)})^{24}\delta^{132})$ -равномерными в $P_1^{(i+1)}$, $P_2^{(i+1)}$ и $\delta_{R_1 \times R_2}(A'_i) \geq \delta'_i - 4\zeta$. Плотность A'_i в $R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}$ не меньше чем $\delta'_i - 4 \cdot 10^{-20000}\delta^{7000} \geq \delta_i + 10^{-20000}\delta^{7000}$.

Из неравенств $|R_1^{(i+1)} \times R_2^{(i+1)}| \geq \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)}|P^{(i+1)}|$ и (99) вытекает

$$\gamma_1^{(i+1)}\gamma_2^{(i+1)} \geq \zeta\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)} \geq 10^{-60000}\delta^{21000}\gamma_1^{(i)}\gamma_2^{(i)}. \quad (101)$$

Кроме того,

$$|P_1^{(i+1)}| \geq |P^{(i)}|^{c_2^{1/a_i}}. \quad (102)$$

Предположим, что на каждом шаге нашего алгоритма условия (98) и (100) были выполнены. Поскольку плотность A в множествах $R_1^{(i)} \times R_2^{(i)}$ на каждом шаге i возрастает на величину $10^{-20000}\delta^{7000}$, то через некоторое число шагов мы найдем правильный квадрат $\mathbf{P} = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2$ и $(10^{-330}\gamma_1^{24}\gamma_2^{24}\delta^{132})$ -равномерные множества $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$, $|\mathbf{R}_1| = \gamma_1|\mathbf{P}_1|$, $|\mathbf{R}_2| = \gamma_2|\mathbf{P}_2|$ такие, что $A \cap (\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)$ будет $(10^{-108}\delta^{44})$ -равномерным относительно базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$, и неравенства (30), (31) будут выполнены для $\alpha_1 = 10^{-108}\delta^{44}$. Если $|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2| \geq 10^{10}(\delta^4\gamma_1\gamma_2)^{-1}$, то по теореме 7 множество A содержит уголок.

Итак, если на каждом шаге алгоритма выполняются условия (98) и (100), то теорема 4 доказана. Проверим выполнение условий (98), (100).

Оценим общее количество шагов этой итеративной процедуры. Из свойства 2) вытекает, что для увеличения плотности A от δ до 1 необходимо не более $10^{20000}/\delta^{7000}$ шагов.

На первом шаге плотности множеств $R_1^{(1)}, R_2^{(1)}$ в $\mathbb{Z}_N$ равны 1. Из неравенства (101) вытекает, что на i -м шаге алгоритма $\gamma_1^{(i)} \times \gamma_2^{(i)} \geq (10^{-60000}\delta^{21000})^i$. Следовательно, на последнем шаге итеративной процедуры плотность $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$ в $\mathbf{P}$ будет не меньше $C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}$, где $C_1, C_2, \bar{c}$ – некоторые эффективные константы.

Общее количество шагов алгоритма не больше $O(\delta^{-\bar{c}})$. На i -м шаге алгоритма плотности $\beta_1^{(i)}, \beta_2^{(i)}$ не меньше $C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}$, $\zeta = O(\delta^g)$, $g > 0$ и $a_i = \delta^w(\beta_1^{(i)}\beta_2^{(i)})^q$, $w, q > 1$. Используя эти оценки и неравенство (102), получаем $|P^{(i)}| \geq |P^{(i-1)}|^{\kappa_0^{(1/\delta)\delta^{-C_3}}}$, где $0 < \kappa_0 < 1$, $C_3 > 0$. Следовательно, на последнем шаге нашей итеративной процедуры выполняется оценка $|\mathbf{P}| \geq N^{\kappa^{(1/\delta)\delta^{-b}}}$, где $0 < \kappa < 1$, $b > 1$. По условию теоремы $N \geq \exp \exp \exp(\delta^{-c})$, $c > 0$. Отсюда имеем

$$|\mathbf{P}| \geq N^{\kappa^{(1/\delta)\delta^{-b}}} \geq (10^{10}\delta^4(C_1\delta^{C_2\delta^{-\bar{c}}}))^{-2} \geq 10^{10}(\delta^4\gamma_1\gamma_2)^{-2}. \quad (103)$$

Значит, на последнем шаге итеративной процедуры неравенство (98) выполнено. Ясно, что это условие было выполнено и на промежуточных шагах. Проверим выполнение условия (100) на последнем шаге алгоритма. Нам необходимо проверить неравенство

$$|\mathbf{P}| \geq N^{\kappa^{(1/\delta)\delta^{-b}}} \geq ((1/\delta)^{\delta^{-C_4}})^{(1/c_2)^{(1/\delta)\delta^{-C_5}}}, \quad (104)$$

где $C_4 > 0$, $C_5 > 0$ – некоторые эффективные константы. Но неравенство (104) легко вытекает из условия $N \geq \exp \exp \exp(\delta^{-c})$. Теорема 4 доказана.

§ 5. О возвращаемости

В настоящем параграфе приведены приложения теоремы 4 к динамическим системам.

Пусть X – метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$ и борелевской сигма-алгеброй измеримых множеств Φ . Пусть T – сохраняющее меру μ отображение X в себя. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$.

Хорошо известная теорема Пуанкаре о возвращении [17] утверждает, что почти каждая точка X возвращается, т. е. для почти всех $x \in X$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall K > 0 \exists t > K: d(T^t x, x) < \varepsilon.$$

Рассмотрим меру $H_h(\cdot)$ на X , определенную следующим образом:

$$H_h(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_h^\delta(E),$$

где $h(t)$ – неотрицательная ($h(0) = 0$) непрерывная возрастающая функция, а $H_h^\delta(E) = \inf\{\sum h(\delta_j)\}$, где инфимум берется по не более чем счетным покрытиям E открытыми множествами $\{B_j\}$, $\text{diam}(B_j) = \delta_j < \delta$. Если $h(t) = t^\alpha$, то получаем обычную меру Хаусдорфа $H_\alpha(\cdot)$.

Внешняя мера $H_h(\cdot)$ является сигма-аддитивной на сигма-алгебре множеств, измеримых по Каратеодори (более подробные сведения можно найти, например, в [19]). Хорошо известно, что эта сигма-алгебра содержит все борелевские множества.

Будем говорить, что меры μ и H_h согласованы, если любое μ -измеримое множество является H_h -измеримым (в смысле измеримости по Каратеодори).

Следующие ниже теоремы были доказаны в [21] (см. также [19], [20]).

ТЕОРЕМА 10. Пусть X – метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, а T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Будем считать, что μ и H_h согласованы. Тогда функция

$$C(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{n h(d(T^n x, x))\}$$

интегрируема по мере μ и для любого μ -измеримого A выполнено неравенство

$$\int_A C(x) d\mu \leq H_h(A).$$

Если $H_h(A) = 0$, то $\int_A C(x) d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть G – вполне ограниченное подмножество в X ; ε -энтропией множества G (следуя [5]) называется величина $H_\varepsilon(G, X) = \log_2 N_\varepsilon(G, X)$, где $N_\varepsilon(G, X)$ – наименьшее количество точек, которое может быть в ε -сети этого множества. Обозначим $N_\varepsilon(X) = N_\varepsilon(X, X)$.

Если X вполне ограничено, то $N_\delta(X)$ конечно для любого δ и имеет место неравенство $\sum h(\delta_j) \leq N_\delta(X)h(\delta)$. Следовательно, если $N_\delta(X) \leq C/h(\delta)$ (h – функция из определения H_h), то $H_h(X) \leq C$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Рассмотрим произвольное натуральное число N . Функцию $C_N(x) = \min\{d(T^n x, x) \mid 1 \leq n \leq N\}$ назовем N -константой возвращаемости точки x .

ТЕОРЕМА 11. Пусть X – вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\text{diam}(X) = 1$, и T – отображение X в себя, сохраняющее меру μ . Пусть $A \subseteq X$ – любое μ -измеримое множество и $g(x)$ – действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0, 1]$, такая, что для любого $t \in (0, 1]$ существует интеграл Стильтеса

$\int_t^1 N_A(z) dg(z)$, где $N_A(z) = \min(\mu(A), N_z(A, X)/N)$. Тогда выполнено следующее неравенство:

$$\int_A g(C_N(x)) d\mu \leq \inf_t \left\{ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z) dg(z) \right\}.$$

Пусть теперь на X действуют два коммутирующих отображения, сохраняющие меру μ . Основным результатом этого параграфа содержится в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 12. Пусть X – метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, а S, R – коммутирующие отображения X в себя, сохраняющие меру μ . Будем считать, что μ и H_h согласованы. Тогда функция

$$C_{S,R}(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{ L^{-1}(n) \max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\} \},$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$ и $L(n)$ определено формулой (3), интегрируема по мере μ и для любого μ -измеримого A выполнено неравенство

$$\int_A C_{S,R}(x) d\mu \leq H_h(A).$$

Если $H_h(A) = 0$, то $\int_A C_{S,R}(x) d\mu = 0$ без условия согласованности мер μ и H_h .

По аналогии с определением 5 мы приведем определение константы возвращаемости точки под действием двух коммутирующих операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Возьмем произвольное натуральное N . Функцию

$$C_N^{S,R}(x) = \min\{\max\{d(S^n x, x), d(R^n x, x)\} \mid 1 \leq n \leq N\}$$

назовем N -константой одновременной возвращаемости точки x .

ТЕОРЕМА 13. Пусть X – вполне ограниченное метрическое пространство с метрикой $d(\cdot, \cdot)$, функцией $N(z) = N_z(X)$, $\text{diam}(X) = 1$, и S, R – отображения X в себя, сохраняющие меру μ . Пусть $A \subseteq X$ – любое μ -измеримое множество и $g(x)$ – действительная неубывающая функция, ограниченная на $[0, 1]$, такая, что для любого $t \in (0, 1]$ существует интеграл Стильтьеса $\int_t^1 N_A(z) dg(z)$, где $N_A(z) = \min\{\mu(A), N_z(A, X)L(N)\}$. Тогда для достаточно больших N выполнено следующее неравенство:

$$\int_A g(C_N^{S,R}(x)) d\mu \leq \inf_t \left\{ g(t)\mu(A) + \int_t^1 N_A(z) dg(z) \right\}.$$

Нам понадобятся несколько лемм.

ЛЕММА 14. Пусть $\{M_1, \dots, M_n\}$ – некоторое семейство измеримых множеств. Пусть также известно, что любая точка $x \in X$ принадлежит не более чем l множествам из этого семейства. Тогда

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n M_i\right) \geq \frac{1}{l} \sum_{i=1}^n \mu(M_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Λ объединение всех M_i . Для $j = 1, \dots, \dots, l$ введем множества “уровней”

$$\Lambda_j = \{x \in \Lambda \mid \text{существует } j \text{ множеств } M_k, \text{ содержащих } x\}.$$

Имеем $\sum_{i=1}^n \mu(M_i) = \sum_{j=1}^l \mu(\Lambda_j)$. Поскольку для любого j выполнено $\mu(\Lambda_j) \leq \mu(\Lambda)$, то $\sum_{i=1}^n \mu(M_i) \leq l\mu(\Lambda)$. Лемма доказана.

Теоремы 12 и 13 вытекают из следующей ключевой леммы. Доказательство отличается от доказательств теорем 10, 11 несущественными деталями (более подробно см. [21]).

ЛЕММА 15. Пусть Y – μ -измеримое множество, $t \geq 1$,

$$Y(t) := \{x \in Y \mid S^i x \notin Y \text{ или } R^i x \notin Y \text{ для всех натуральных } i, 1 \leq i \leq t\}.$$

Тогда существует такое t_0 , что для всех $t \geq t_0$ выполнено $\mu(Y(t)) \leq L(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простоты будем считать число t натуральным. Пусть

$$M_{k_1, k_2} = S^{-k_1} R^{-k_2}(Y(t)), \quad 1 \leq k_1, k_2 \leq t.$$

Рассмотрим точку $x \in X$. Обозначим через $A(x)$ множество тех индексов (k_1, k_2) , для которых $x \in M_{k_1, k_2}$. Тогда $A(x) \subseteq [1, t]^2$. Если t достаточно большое и $|A(x)| > t^2 L(t)$, то по теореме 4 в $A(x)$ есть уголок. Значит, существуют точки $u_1, u_2, u_3 \in Y(t)$ и натуральные числа k, m, d такие, что

$$x = S^{-k} R^{-m} u_1 = S^{-k-d} R^{-m} u_2 = S^{-k} R^{-k-d} u_3.$$

Пользуясь коммутативностью S и R , получаем $u_1 = S^{-d} u_2 = R^{-d} u_3$. Отсюда для $u_1 \in Y(t)$ имеем $S^d u_1 \in Y(t)$ и $R^d u_1 \in Y(t)$, $d \leq t$, что противоречит определению множества $Y(t)$. Значит, точка x принадлежит не более $t^2 L(t)$ множествам M_{k_1, k_2} . По лемме 14

$$1 \geq \mu\left(\bigcup_{k_1, k_2} M_{k_1, k_2}\right) \geq \frac{1}{t^2 L(t)} \sum_{k_1, k_2} \mu(M_{k_1, k_2}) = \frac{\mu(Y(t))}{L(t)}, \quad (105)$$

откуда следует, что $\mu(Y(t)) \leq L(t)$. Лемма доказана.

Мы получим приложение теоремы 12 для случая непрерывных коммутирующих отображений.

Следующая лемма может быть найдена, например, в [24]. Мы приводим ее здесь для полноты изложения.

ЛЕММА 16. Пусть X – компактное метрическое пространство. Пусть также $T_1, \dots, T_l$ – непрерывные коммутирующие отображения X в себя. Тогда существует конечная мера μ , которая инвариантна относительно всех этих отображений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проводить доказательство индукцией по числу отображений. Если отображение одно, то существование инвариантной меры следует из теоремы Боголюбова–Крылова (см., например, [22]). Пусть мы

доказали лемму для k отображений, $k \geq 1$. Докажем ее для набора из $k + 1$ отображений. Пусть ν – общая инвариантная мера для отображений $T_1, \dots, T_k$. Пусть мера $\nu \circ T_{k+1}^{-i}$, $i \in \mathbb{N}$, определена для произвольного борелевского множества E по формуле $(\nu \circ T_{k+1}^{-i})(E) = \nu(T_{k+1}^{-i}E)$. Рассмотрим последовательность мер

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \nu \circ T_{k+1}^{-i}. \quad (106)$$

Рассмотрим банахово пространство $C(X)$ непрерывных неотрицательных функций. Каждой мере μ сопоставим функционал $L_\mu(f)$ по формуле $L_\mu(f) = \int f d\mu$. Множество всех таких функционалов обозначим $M(X)$, $M(X) \subseteq (C(X))^*$. Как известно (см., например, [23]), $M(X)$ является компактом в $*$ -слабой топологии, значит, последовательность (106) имеет подпоследовательность ν_{n_j} , сходящуюся к некоторой мере μ . Докажем, что μ – искомая мера. Ясно, что $\mu(X) = 1$. Поскольку отображения $T_1, \dots, T_{k+1}$ коммутирующие, то меры ν_n будут инвариантны относительно $T_1, \dots, T_k$. Значит, предельная мера μ также будет инвариантна относительно $T_1, \dots, T_k$.

Докажем, что мера μ является T_{k+1} -инвариантной. Пусть $\varepsilon > 0$ и $f(x)$ – произвольная неотрицательная непрерывная функция на X . По условию X – компактное метрическое пространство, следовательно, $\|f\|_\infty < \infty$. Так как мера μ является $*$ -слабым пределом мер ν_{n_j} , то найдется такое натуральное J_1 , что для всех $j \geq J_1$ выполнено $|L_\mu(f) - L_{\nu_{n_j}}(f)| < \varepsilon/3$. Аналогично, существует такое натуральное J_2 , что для всех $j \geq J_2$ выполнено $|L_\mu(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1})| < \varepsilon/3$. Имеем

$$|L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n_j}.$$

Поскольку последовательность n_j возрастает и $\|f\|_\infty < \infty$, то найдется такое натуральное J_3 , что для всех $j \geq J_3$ выполнено $|L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)| \leq \varepsilon/3$. Следовательно, для всех $j \geq \max(J_1, J_2, J_3)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |L_\mu(f) - L_\mu(f \circ T_{k+1})| &\leq |L_\mu(f) - L_{\nu_{n_j}}(f)| + |L_\mu(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1})| \\ &\quad + |L_{\nu_{n_j}}(f \circ T_{k+1}) - L_{\nu_{n_j}}(f)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \quad (107)$$

Значит, мера μ является T_{k+1} -инвариантной. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X – компактное метрическое пространство, имеющее меру $H_h(X) < \infty$, S, R – непрерывные коммутирующие отображения X в себя. Тогда существует $x \in X$ такое, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \{L^{-1}(n) \max\{h(d(S^n x, x)), h(d(R^n x, x))\}\} \leq H_h(X),$$

где $L^{-1}(n) = 1/L(n)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю доктору физ.-матем. наук Н. Г. Мошечитину за непрестанный интерес к работе и долготерпение.

Список литературы

1. Van der Waerden B. L., “Beweis einer Baudetschen Vermutung”, *Nieuw Arch. Wisk.*, **15** (1927), 212–216.
2. Erdős P., Turán P., “On some sequences of integers”, *J. London Math. Soc.*, **11** (1936), 261–264.
3. Roth K. F., “On certain sets of integers”, *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 204–209.
4. Bourgain J., “On triples in arithmetic progression”, *Geom. Funct. Anal.*, **9** (1999), 968–984.
5. Szemerédi E., “On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression”, *Acta Arith.*, **27** (1975), 199–245.
6. Gowers W. T., “A new proof of Szemerédi’s theorem”, *Geom. Funct. Anal.*, **11** (2001), 465–588.
7. Gowers W. T., “Rough structure and classification”, *Geom. Funct. Anal.*, Special Volume – GAFA2000 “Visions in Mathematics” (Tel Aviv, 1999), Part I, 79–117.
8. Rankin R. A., “Sets of Integers Containing not more than a Given Number of Terms in Arithmetic Progression”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, **65**:4 (1961), 332–344.
9. Ajtai M., Szemerédi E., “Sets of lattice points that form no squares”, *Stud. Sci. Math. Hungar.*, **9** (1975), 9–11.
10. Chung F. R. K., Graham R. L., Wilson R. M., “Quasi-random graphs”, *Combinatorica*, **9**:4 (1989), 345–362.
11. Behrend F. A., “On sets of integers which contain no three terms in arithmetic progression”, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **32** (1946), 331–332.
12. Vu V. H., “On a question of Gowers”, *Ann. of Combinatorics*, **6** (2002), 229–233.
13. Solymosi J., “Note on a generalization of Roth’s theorem”, *Discrete and computational geometry*, **25** (2003), 825–827.
14. Green B., Tao T., *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, [math.NT/0404188](https://arxiv.org/abs/math.NT/0404188).
15. Фрейман Г. А., *Основания структурной теории сложения множеств*, Казанский гос. пед. ин-т, Казань, 1966.
16. Ланкастер П., *Теория матриц*, Наука, М., 1982.
17. Пуанкаре А., *Новые методы небесной механики. Избранные труды*, **2**, Наука, М., 1972.
18. Furstenberg H., *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton, N. J., 1981.
19. Boshernitzan M., “Quantitative recurrence results”, *Invent. math.*, **113** (1993), 617–631.
20. Мощевитин Н. Г., “Об одной теореме Пуанкаре”, *УМН*, **53**:1 (1998), 219–220.
21. Шкредов И. Д., “О возвращаемости в среднем”, *Матем. заметки*, **72**:4 (2002), 625–632.
22. Каток А. Б., Хасселблат Б., *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
23. Халмош П. Р., *Теория меры*, ИЛ, М., 1953.
24. Богачев В. И., *Основы теории меры*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, М.–Ижевск, 2003.

И. Д. ШКРЕДОВ (I. D. SHKREDOV)
 Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
 E-mail: ishkredov@rambler.ru

Поступило в редакцию
 15.06.2004