Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Е. Иванов, М. В. Балашов, Липшицевы параметризации многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 6, 47–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/im941>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:09:00

УДК 517.982.252 + 517.982.256

Г. Е. Иванов, М. В. Балашов

Липшицевы параметризации многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями

Продолжены исследования слабо выпуклых множеств и многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями, начатые в работах [1]–[4]. Получены достаточные условия существования липшицевой параметризации многозначного отображения с телесно-гладкими (вообще говоря, невыпуклыми) значениями. Также показано, что многозначная ε -проекция на слабо выпуклое множество удовлетворяет условию Липшица, а единичный вектор внешней нормали телесно-гладкого множества удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ как функции множества относительно метрики Хаусдорфа.

Библиография: 13 наименований.

§ 1. Введение и определения

Пусть E – метрическое, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространства. Будем рассматривать многозначное отображение $F: E \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ со слабо выпуклыми (по Виалю) значениями, удовлетворяющее условию Липшица в смысле метрики Хаусдорфа. Изучается вопрос о возможности липшицевой параметризации многозначного отображения F , т. е. о существовании липшицевой функции $f: E \times U \rightarrow \mathcal{H}$ такой, что $f(x, u) = F(x)$ для любого $x \in E$, где U – единичный шар в $\mathcal{H}$.

Параметризация многозначного отображения F позволяет представить это многозначное отображение через семейство его селекторов:

$$F(x) = \{f(x, u)\}_{u \in U}.$$

Проблема параметризации многозначных отображений возникает, в частности, при исследовании взаимосвязи управляемых динамических систем

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \quad (1)$$

и дифференциальных включений $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ (см., например, [5], [6]). В связи с вопросом существования и единственности решения дифференциального уравнения (1) важны свойства непрерывности и липшицевости функции f .

Для многозначных отображений с выпуклыми значениями задачи параметризации рассматривались в работах [6]–[11]. Настоящая работа продолжает

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 07-01-00156) и Программы Президента РФ “Молодые доктора” (грант МД-10079.2006.1).

исследования задачи параметризации многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями, начатые в работе [4]. В отличие от работы [4], где рассмотрен метод построения непрерывной параметризации, в данной работе получены достаточные условия существования липшицевой параметризации многозначных отображений.

Пусть задано многозначное отображение $F: E \rightarrow 2^{\mathcal{H}}$ и числа $r > 0$, $R > r$, $\sigma > 0$; пусть для любого $x \in E$ множество $F(x)$ замкнуто, слабо выпукло с константой R , является телесно-гладким с константой σ и содержится в шаре радиусом r с некоторым центром $a_x \in \mathcal{H}$. При этих условиях показано, что если пространство $\mathcal{H}$ конечномерно (теорема 4) или E – подмножество гильбертова пространства (теорема 8), то существует липшицева параметризация $f: E \times U \rightarrow \mathcal{H}$ многозначного отображения F . В первом случае для построения параметризации используется центр Штейнера, а во втором – теорема Киршбрауна–Валентайна о липшицевом продолжении функции на гильбертово пространство. Кроме того, предложен способ липшицевой параметризации многозначного отображения с выпуклыми замкнутыми значениями из гильбертова пространства (лемма 7).

В работе [4] было показано, что метрическая проекция на слабо выпуклое множество удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно множества и даже для выпуклых множеств показатель $1/2$ в данном условии не может быть улучшен. Поэтому метрическая проекция не задает липшицеву параметризацию многозначного отображения. В настоящей работе показано, что многозначная ε -проекция точки на слабо выпуклое множество, которая лежит в достаточно малой окрестности множества, как функция множества удовлетворяет условию Липшица в смысле метрики Хаусдорфа (теорема 2). Это свойство многозначной ε -проекции используется для построения липшицевой параметризации многозначного отображения.

Наряду с вопросами параметризации рассмотрен вопрос зависимости единичного вектора внешней нормали телесно-гладкого множества в гильбертовом пространстве от этого множества. Показано, что единичный вектор внешней нормали как функция множества удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $1/2$ относительно метрики Хаусдорфа (теорема 5). Последний результат используется при построении параметризации, а также имеет самостоятельное значение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть заданы число $R \geq 0$ и вектор a в нормированном пространстве E . Через $B_R(a)$ и B_R будем обозначать замкнутые шары радиусом R с центром в точке a и с центром в точке ноль соответственно:

$$B_R(a) = \{x \in E: \|x - a\| \leq R\}, \quad B_R = B_R(0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество A в нормированном пространстве E называется *сильно выпуклым* с константой $R > 0$, если существует непустое множество $A_1 \subset E$ такое, что

$$A = \bigcap_{a \in A_1} B_R(a).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть в нормированном пространстве E заданы две точки x_0, x_1 и число $R \geq \frac{\|x_1 - x_0\|}{2}$. Множество

$$D_R(x_0, x_1) = \bigcap_{a \in E: \{x_0, x_1\} \subset B_R(a)} B_R(a)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*.

В работе [1] Ж.-Ф. Виаль ввел следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Множество A в нормированном пространстве называется *слабо выпуклым* с константой $R > 0$, если для любых двух точек $x, y \in A$ таких, что $0 < \|x - y\| < 2R$, существует точка $z \in D_R(x, y) \cap A$, не совпадающая с точками x и y .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть E – нормированное пространство. *Расстоянием* от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. *Расстоянием Хаусдорфа* между двумя множествами A, B в нормированном пространстве E называется число

$$h(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Через $\text{int } A$, $\text{cl } A$, ∂A , A^c , со A будем обозначать соответственно *внутренность*, *замыкание*, *границу*, *дополнение* и *выпуклую оболочку* множества A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Диаметром* множества A в нормированном пространстве называется

$$\text{diam } A = \sup_{x, y \in A} \|x - y\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть в нормированном пространстве E заданы множество A и точка x_0 . *Нормальным конусом* к множеству A в точке x_0 называется множество $N_A(x_0)$ векторов $p \in E^*$ таких, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $x \in A \cap B_\delta(x_0)$ справедливо неравенство

$$\langle p, x - x_0 \rangle \leq \varepsilon \|x - x_0\|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Пусть заданы число $L > 0$ и множество A в нормированном пространстве E . Будем говорить, что множество A является *телесно-гладким* с константой L , если A телесно (т. е. выполнены равенства $\text{cl int } A = \text{cl } A$ и $\text{int cl } A = \text{int } A$), $A \neq E$ и для любых векторов $x_1, x_2 \in \partial A$, $p_1 \in N_A(x_1)$, $p_2 \in N_A(x_2)$ таких, что $\|p_1\| = \|p_2\| = 1$, выполнено неравенство

$$\|p_2 - p_1\| \leq L \|x_2 - x_1\|.$$

§ 2. Липшицевость многозначной ε -проекции

ТЕОРЕМА 1. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества F_1, F_2, G_1, G_2 . Пусть множества F_i замкнуты и слабо выпуклы с константами R_i , множества G_i сильно выпуклы с константами $r_i < R_i$, где $i = 1, 2$. Пусть для любого $i = 1, 2$ существуют вектор $a_i \in F_i$ и число $\varepsilon_i \in (0, 6(R_i - r_i))$ такие, что

$$B_{\varepsilon_i}(a_i) \subset G_i. \quad (2)$$

Тогда

$$h(F_1 \cap G_1, F_2 \cap G_2) \leq 16 \max\left\{\frac{r_1}{\varepsilon_1}, \frac{r_2}{\varepsilon_2}\right\} (h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $\sigma > 0$ и произвольный вектор $x_2 \in F_2 \cap G_2$. Обозначим

$$\delta = h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2) + 2\sigma. \quad (3)$$

Поскольку $x_2 \in F_2 \cap G_2$, то существуют векторы $y \in F_1, z \in G_1$ такие, что

$$\|y - x_2\| \leq h(F_1, F_2) + \sigma, \quad (4)$$

$$\|z - x_2\| \leq h(G_1, G_2) + \sigma. \quad (5)$$

Из неравенств (4), (5) следует, что

$$\|y - z\| \leq \|y - x_2\| + \|z - x_2\| \leq h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2) + 2\sigma = \delta. \quad (6)$$

Поскольку $z \in G_1, a_1 \in F_1$, то вследствие сильной выпуклости множества G_1 с константой r_1 справедливо неравенство

$$\|z - a_1\| \leq 2r_1. \quad (7)$$

Покажем, что существует вектор $x_1 \in F_1 \cap G_1$ такой, что

$$\|x_2 - x_1\| \leq L\delta, \quad (8)$$

где $L = 1 + 15 \max\left\{\frac{r_1}{\varepsilon_1}, \frac{r_2}{\varepsilon_2}\right\}$.

Если $\delta \geq \frac{\varepsilon_1}{6}$, то положим $x_1 = a_1$. Тогда в силу неравенств (5), (7) имеем

$$\|x_2 - x_1\| = \|x_2 - a_1\| \leq \|x_2 - z\| + \|z - a_1\| \leq h(G_1, G_2) + \sigma + 2r_1 < \delta + 2r_1.$$

Учитывая неравенство $\delta \geq \frac{\varepsilon_1}{6}$, получаем, что $\|x_2 - x_1\| \leq \delta\left(1 + \frac{12r_1}{\varepsilon_1}\right) < L\delta$. Поэтому для вектора $x_1 = a_1 \in F_1 \cap G_1$ выполнено неравенство (8).

Будем теперь предполагать, что $\delta < \frac{\varepsilon_1}{6}$. Поскольку по условию теоремы выполнено $\varepsilon_1 < 6(R_1 - r_1)$, то

$$\delta < R_1 - r_1. \quad (9)$$

Отсюда и из неравенств (6), (7) следует, что

$$\|y - a_1\| \leq \|y - z\| + \|z - a_1\| \leq \delta + 2r_1 < 2R_1. \quad (10)$$

Определим число

$$\lambda = \frac{2\delta}{\varepsilon_1}. \quad (11)$$

Из неравенства $\delta < \frac{\varepsilon_1}{6}$ следует, что $\lambda \in (0, 1)$.

Определим вектор $w = (1 - \lambda)y + \lambda a_1$.

В силу теоремы об относительной связности слабо выпуклого множества [2, теорема 4.1] множество $F_1 \cap D_{R_1}(a_1, y)$ линейно связно. Отсюда согласно свойству сильно выпуклого отрезка (см. [2, свойство 2.1]) существует вектор $x_1 \in F_1$ такой, что

$$\|x_1 - w\| \leq R_1 - \sqrt{R_1^2 - \lambda(1 - \lambda)\|y - a_1\|^2}. \quad (12)$$

Предположим, что $x_1 \notin G_1$. Тогда в силу определения 2 существует вектор $d \in \mathcal{H}$ такой, что $G_1 \subset B_{r_1}(d)$ и

$$\|x_1 - d\| > r_1. \quad (13)$$

Поскольку $B_{\varepsilon_1}(a_1) \subset G_1 \subset B_{r_1}(d)$, то

$$\|d - a_1\| \leq r_1 - \varepsilon_1, \quad (14)$$

и поскольку $z \in G_1 \subset B_{r_1}(d)$, то $\|z - d\| \leq r_1$. Отсюда и из (6) следует, что

$$\|y - d\| \leq \|z - d\| + \|y - z\| \leq r_1 + \delta. \quad (15)$$

Из равенства $w = (1 - \lambda)y + \lambda a_1$ следует, что

$$\|w - d\|^2 = (1 - \lambda)\|y - d\|^2 + \lambda\|a_1 - d\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|y - a_1\|^2.$$

Отсюда и из неравенств (14), (15) следует, что

$$\|w - d\|^2 \leq r_1^2 + \alpha - \beta, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \lambda)(r_1 + \delta)^2 + \lambda(r_1 - \varepsilon_1)^2 - r_1^2, \\ \beta &= \lambda(1 - \lambda)\|y - a_1\|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку согласно неравенству треугольника выполняется неравенство $\|x_1 - d\| - \|w - d\| \leq \|x_1 - w\|$, то в силу неравенств (12), (13), (16) имеем

$$r_1 - \sqrt{r_1^2 + \alpha - \beta} \leq R_1 - \sqrt{R_1^2 - \beta}. \quad (18)$$

В силу неравенства (9) имеем $r_1 + \delta < R_1$. Отсюда и из (17) следует, что

$$r_1^2 + \alpha < (1 - \lambda)R_1^2 + \lambda(r_1 - \varepsilon_1)^2 < R_1^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sqrt{R_1^2 - \beta} - \sqrt{r_1^2 + \alpha - \beta} &= \frac{R_1^2 - r_1^2 - \alpha}{\sqrt{R_1^2 - \beta} + \sqrt{r_1^2 + \alpha - \beta}} \\ &\geq \frac{R_1^2 - r_1^2 - \alpha}{R_1 + \sqrt{r_1^2 + \alpha}} = R_1 - \sqrt{r_1^2 + \alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (18) вытекают неравенства

$$R_1 - \sqrt{r_1^2 + \alpha} \leq \sqrt{R_1^2 - \beta} - \sqrt{r_1^2 + \alpha - \beta} \leq R_1 - r_1.$$

Следовательно, $\sqrt{r_1^2 + \alpha} \geq r_1$, т. е. $\alpha \geq 0$.

С другой стороны, в силу равенства (17) имеем

$$\alpha = (1 - \lambda)(2r_1\delta + \delta^2) + \lambda(-2r_1\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2).$$

Так как $B_{\varepsilon_1}(a_1) \subset G_1$, а множество G_1 сильно выпукло с константой r_1 , то $\varepsilon_1 \leq r_1$. Следовательно,

$$\alpha \leq (1 - \lambda)(2r_1\delta + \delta^2) - \lambda r_1\varepsilon_1.$$

Подставляя значение λ из равенства (11), получаем

$$\alpha \leq \left(1 - \frac{2\delta}{\varepsilon_1}\right)(2r_1\delta + \delta^2) - 2r_1\delta = \delta^2 - \frac{4r_1\delta^2}{\varepsilon_1} - \frac{2\delta^3}{\varepsilon_1} < \delta^2 \left(1 - \frac{4r_1}{\varepsilon_1}\right) < 0.$$

Последнее неравенство противоречит полученному ранее неравенству $\alpha \geq 0$. Поэтому $x_1 \in G_1$. Отсюда и из включения $x_1 \in F_1$ следует, что $x_1 \in F_1 \cap G_1$.

Из неравенства (12) следует, что $\|x_1 - w\| < \frac{\lambda(1-\lambda)\|y - a_1\|^2}{R_1}$. Отсюда и из неравенства (10) вытекает неравенство $\|x_1 - w\| < 2\lambda\|y - a_1\|$. Из равенства $w = (1 - \lambda)y + \lambda a_1$ следует, что $\|y - w\| = \lambda\|y - a_1\|$. Поэтому

$$\|x_1 - y\| \leq \|x_1 - w\| + \|y - w\| < 3\lambda\|y - a_1\|. \quad (19)$$

Отсюда и из неравенства (10) вытекает неравенство $\|x_1 - y\| < 3\lambda(\delta + 2r_1)$. Используя неравенства $\delta < \frac{\varepsilon_1}{6}$ и $\varepsilon_1 \leq r_1$, получаем $\|x_1 - y\| < \frac{15\lambda r_1}{2}$. Подставляя в это неравенство значение λ из равенства (11), получаем $\|x_1 - y\| \leq \frac{15\delta r_1}{\varepsilon_1}$. Из неравенства (4) следует, что $\|y - x_2\| < \delta$. Поэтому

$$\|x_2 - x_1\| \leq \|y - x_2\| + \|x_1 - y\| \leq \left(1 + \frac{15r_1}{\varepsilon_1}\right)\delta \leq L\delta.$$

Тем самым доказано неравенство (8).

Аналогично доказывается, что для любого вектора $x_1 \in F_1 \cap G_1$ существует вектор $x_2 \in F_2 \cap G_2$ такой, что выполняется (8). Поэтому

$$h(F_1 \cap G_1, F_2 \cap G_2) \leq L\delta \leq 16 \max\left\{\frac{r_1}{\varepsilon_1}, \frac{r_2}{\varepsilon_2}\right\} (h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2) + 2\sigma).$$

Отсюда в силу произвольности числа $\sigma > 0$ следует доказываемое утверждение.

Для выпуклых множеств результат, близкий к теореме 1, получен Е. С. Половинкиным [11, теорема 2.2.1] (см. также лемму 6).

ТЕОРЕМА 2 (липшицевость многозначной ε -проекции). Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества F_1, F_2 и векторы x_1, x_2 . Пусть множества F_1, F_2 замкнуты и слабо выпуклы с константами R_1, R_2 соответственно. Пусть справедливы соотношения

$$\varrho(x_i, F_i) = \varrho_i < R_i, \quad i = 1, 2. \quad (20)$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon < \frac{6}{7} \min \left\{ \frac{R_1 - \varrho_1}{\varrho_1}, \frac{R_2 - \varrho_2}{\varrho_2} \right\}. \quad (21)$$

Через $\tilde{F}_i$ обозначим многозначные ε -проекции векторов x_i на множества F_i :

$$\tilde{F}_i = F_i \cap B_{\varrho_i(1+\varepsilon)}(x_i), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Тогда справедливо неравенство (условие Липшица)

$$h(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) \leq \frac{16(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{\varepsilon} (\|x_1 - x_2\| + h(F_1, F_2)). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим множества $G_i = B_{\varrho_i(1+\varepsilon)}(x_i)$, $i = 1, 2$. Множества G_i сильно выпуклы с константами $r_i = \varrho_i(1+\varepsilon)$. Заметим, что

$$h(G_1, G_2) = \|x_1 - x_2\| + |\varrho_1 - \varrho_2|(1+\varepsilon).$$

Поскольку $|\varrho_1 - \varrho_2| = |\varrho(x_1, F_1) - \varrho(x_2, F_2)| \leq \|x_1 - x_2\| + h(F_1, F_2)$, то

$$h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2) \leq (2+\varepsilon)(\|x_1 - x_2\| + h(F_1, F_2)). \quad (24)$$

Из условий (20) в силу [4, теорема 1] следует существование метрических проекций a_i точек x_i на множество F_i при $i = 1, 2$. Поэтому выполнены условия (2) теоремы 1 для $\varepsilon_i = \varrho_i \varepsilon$. Из неравенства (21) следует, что $\varepsilon_i < 6(R_i - r_i)$ при $i = 1, 2$. В силу теоремы 1 и неравенства (24) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} h(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2) &\leq 16 \max \left\{ \frac{r_1}{\varepsilon_1}, \frac{r_2}{\varepsilon_2} \right\} (h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2)) \\ &= \frac{16(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (h(F_1, F_2) + h(G_1, G_2)) \\ &\leq \frac{16(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)}{\varepsilon} (\|x_1 - x_2\| + h(F_1, F_2)). \end{aligned}$$

§ 3. Первая теорема о липшицевой параметризации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Пусть в топологическом векторном пространстве E задано множество A . Через $s(p; A)$ будем обозначать значение *опорной функции* множества A на векторе $p \in E^*$:

$$s(p; A) = \sup_{x \in A} \langle p, x \rangle.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Центром Штейнера* выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ называется точка

$$s(A) = \frac{1}{V_n} \int_{p \in \mathbb{R}^n : \|p\|=1} s(p; A) p \, dp,$$

где через V_n обозначен объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$, $s(p; A)$ – значение опорной функции множества A на векторе p .

ТЕОРЕМА 3 [11, теорема 2.1.2]. *Центр Штейнера является липшицевым селектором выпуклых компактов из $\mathbb{R}^n$, т. е. для любого выпуклого компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливо включение $s(A) \in A$ и для любых выпуклых компактов $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$\|s(A_1) - s(A_2)\| \leq L_n h(A_1, A_2),$$

где константа Липшица выражается через гамма-функцию Эйлера следующим образом:

$$L_n = \frac{2\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n+1}{2})}. \quad (25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Константа Липшица в формуле (25) неуплучшаема [11, лемма 2.1.4]. Поскольку согласно формуле (25) константы Липшица стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, то центр Штейнера не может быть продолжен как липшицев селектор на случай бесконечномерного пространства.

ЛЕММА 1. Пусть заданы положительные числа r, R, σ такие, что $r < R$, $\sigma \leq R$. Определим число

$$\varepsilon = \frac{(R^2 - r^2)\sigma^2}{12R^4}. \quad (26)$$

Пусть множество $F \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

- (i) F замкнуто и слабо выпукло с константой R ;
- (ii) существует вектор $a \in \mathbb{R}^n$ такой, что $F \subset B_r(a)$;
- (iii) множество $\text{cl}(F^c)$ слабо выпукло с константой σ .

Для любого вектора $u \in \mathbb{R}^n$ определим

$$\begin{aligned} b(F, u) &= s(\text{co } F) + 2ru, & \mu(F, u) &= \varrho(b(F, u), \text{co } F), \\ G(F, u) &= (\text{co } F) \cap B_{2\mu(F, u)}(b(F, u)), & g(F, u) &= s(G(F, u)), \\ W(F, u) &= F \cap B_{(1+\varepsilon)\varrho(g(F, u), F)}(g(F, u)), & w(F, u) &= s(\text{co } W(F, u)), \\ f(F, u) &= w(F, u) + \frac{\sigma}{R}(w(F, u) - g(F, u)). \end{aligned}$$

Тогда функция $f(F, \cdot): B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает параметризацию множества F , т. е. $f(F, B_1) = F$. При этом для любых множеств $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям (i)–(iii), и для любых векторов $u_1, u_2 \in B_1$ справедливо неравенство

$$\|f(F_1, u_1) - f(F_2, u_2)\| \leq \frac{18000L_n^2 R^4}{(R^2 - r^2)\sigma^2} ((L_n + 1)h(F_1, F_2) + 2r\|u_1 - u_2\|), \quad (27)$$

где число L_n определено формулой (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем множество $F \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям (i)–(iii), и вектор $u \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что $f(F, u) \in F$.

Обозначим $g = g(F, u)$, $\varrho = \varrho(g, F)$, $W = W(F, u)$, $w = w(F, u)$, $f = f(F, u)$.

Из [4, лемма 4] следует неравенство $h(F, \text{co } F) \leq \frac{r^2}{R}$. Отсюда и из включения $g \in \text{co } F$ вытекает неравенство $\varrho \leq \frac{r^2}{R}$. Следовательно, $\varrho < R$, и согласно [4, теорема 1] существует метрическая проекция y вектора g на множество F . При этом $y \in F$, $\|y - g\| = \varrho$. Если $\varrho = 0$, то $W = \{g\}$, $w = g$, $f = g$, $y = g$ и, следовательно, $f \in F$. Рассмотрим случай $\varrho > 0$.

Определим единичный вектор $p = (g - y)/\varrho$. Из [2, лемма 6.1] следует, что вектор p принадлежит нормальному конусу $N_F(y)$. Отсюда и из опорного принципа [2, теорема 6.1] получаем включение

$$\text{int } B_R(y + Rp) \subset F^c. \quad (28)$$

В силу [3, теорема 3] множество F является телесно-гладким с константой $\max\{\frac{1}{R}, \frac{1}{\sigma}\}$. Поэтому справедливо включение $-n \in N_{F^c}(y)$. Отсюда и из опорного принципа [2, теорема 6.1] получаем включение

$$\text{int } B_\sigma(y - \sigma p) \subset F. \quad (29)$$

Пусть $z \in W$. Поскольку $W \subset B_{(1+\varepsilon)\varrho}(g)$, то $\|z - g\| \leq (1 + \varepsilon)\varrho$. Отсюда и из равенства $g = y + \varrho p$ следует неравенство $\|y - z + \varrho p\| \leq (1 + \varepsilon)\varrho$, т. е.

$$\|y - z\|^2 + 2\varrho\langle y - z, p \rangle \leq (1 + \varepsilon)^2\varrho^2 - \varrho^2 = (2\varepsilon + \varepsilon^2)\varrho^2. \quad (30)$$

Так как $z \in W \subset F$, то из включения (28) следует, что $z \notin \text{int } B_R(y + Rp)$, т. е. $\|y - z + Rp\| \geq R$, а значит,

$$\|y - z\|^2 + 2R\langle y - z, p \rangle \geq 0.$$

Отсюда и из неравенства (30) получаем

$$2(R - \varrho)\langle z - y, p \rangle \leq (2\varepsilon + \varepsilon^2)\varrho^2.$$

Итак, для любого вектора $z \in W$ справедливо неравенство

$$\langle z - y, p \rangle \leq \frac{(2\varepsilon + \varepsilon^2)\varrho^2}{2(R - \varrho)}.$$

Отсюда и из условия $w \in \text{co } W$ следует неравенство

$$\langle w - y, p \rangle \leq \frac{(2\varepsilon + \varepsilon^2)\varrho^2}{2(R - \varrho)} < \frac{3\varepsilon\varrho^2}{2(R - \varrho)}. \quad (31)$$

Так как $W \subset B_{(1+\varepsilon)\varrho}(g)$, то $w \in \text{co } W \subset B_{(1+\varepsilon)\varrho}(g)$. Поэтому $\|y - w + \varrho p\| = \|g - w\| \leq (1 + \varepsilon)\varrho$. Следовательно,

$$\|y - w\|^2 + 2\varrho\langle y - w, p \rangle \leq 3\varepsilon\varrho^2.$$

Отсюда и из неравенства (31) вытекает неравенство

$$\|y - w\|^2 < 3\varepsilon\varrho^2 + \frac{3\varepsilon\varrho^3}{R - \varrho} = 3\varepsilon\varrho^2 \frac{R}{R - \varrho}.$$

Поскольку $\varrho \leq \frac{r^2}{R}$, то $\frac{R}{R - \varrho} \leq \frac{R^2}{R^2 - r^2}$. Отсюда и из равенства (26) следует неравенство

$$\|y - w\|^2 < 3\varepsilon\varrho^2 \frac{R^2}{R^2 - r^2} = \frac{\varrho^2\sigma^2}{4R^2},$$

то есть

$$\|y - w\| < \frac{\varrho\sigma}{2R}. \quad (32)$$

Поскольку $f = w + \frac{\sigma}{R}(w - g)$, то

$$\left\| y - \frac{\varrho\sigma}{R}p - f \right\| = \left\| y + \frac{\sigma}{R}(y - g) - f \right\| = \|y - w\| \left(1 + \frac{\sigma}{R} \right) \leq 2\|y - w\|.$$

Отсюда и из неравенства (32) следует, что

$$\left\| y - \frac{\varrho\sigma}{R}p - f \right\| < \frac{\varrho\sigma}{R}.$$

Поэтому

$$\|y - \sigma p - f\| \leq \sigma - \frac{\varrho\sigma}{R} + \left\| y - \frac{\varrho\sigma}{R}p - f \right\| < \sigma,$$

т. е. $f \in \text{int } B_\sigma(y - \sigma p)$. Отсюда и из включения (29) следует, что $f \in F$.

Тем самым доказано включение $f(F, B_1) \subset F$. Докажем обратное включение. Так как $F \subset B_r(a)$, то $s(\text{co } F) \in \text{co } F \subset B_r(a)$. Следовательно, $F \subset B_r(a) \subset B_{2r}(s(\text{co } F))$. Пусть $y \in F$. Тогда в силу включения $F \subset B_{2r}(s(\text{co } F))$ существует вектор $u \in B_1$ такой, что $y = s(\text{co } F) + 2ru = b(F, u)$. Поскольку $b(F, u) = y \in F$, то $\mu(F, u) = 0$ и, следовательно, $G(F, u) = \{b(F, u)\} = \{y\}$, $g(F, u) = y$, $W(F, u) = \{y\}$, $w(F, u) = y$, $f(F, u) = y$. Поэтому $y \in f(F, B_1)$, т. е. $F \subset f(F, B_1)$. Итак, доказано равенство $f(F, B_1) = F$, т. е. функция $f(F, \cdot): B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает параметризацию множества F .

Зафиксируем произвольные множества $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условиям (i)–(iii), и векторы $u_1, u_2 \in B_1$. Обозначим $b_i = b(F_i, u_i)$, $G_i = G(F_i, u_i)$, $g_i = g(F_i, u_i)$, $W_i = W(F_i, u_i)$, $w_i = w(F_i, u_i)$, $f_i = f(F_i, u_i)$ при $i = 1, 2$.

Из теоремы 3 следуют неравенства

$$\|b_1 - b_2\| \leq L_n h(F_1, F_2) + 2r\|u_1 - u_2\|, \quad (33)$$

$$\|g_1 - g_2\| \leq L_n h(G_1, G_2), \quad (34)$$

$$\|w_1 - w_2\| \leq L_n h(W_1, W_2). \quad (35)$$

Так как $h(\text{co } F_1, \text{co } F_2) \leq h(F_1, F_2)$, то в силу [11, теорема 2.2.2] справедливо неравенство

$$h(G_1, G_2) \leq 19(h(F_1, F_2) + \|b_1 - b_2\|). \quad (36)$$

Поскольку из равенства (26) следует неравенство (21), то в силу теоремы 2 справедливо неравенство

$$h(W_1, W_2) \leq \frac{16(1 + \varepsilon)(2 + \varepsilon)}{\varepsilon} (\|g_1 - g_2\| + h(F_1, F_2)).$$

Из равенства (26) и неравенства $\sigma \leq R$ следует, что $\varepsilon \leq \frac{1}{12}$. Поэтому

$$h(W_1, W_2) \leq \frac{37}{\varepsilon} (\|g_1 - g_2\| + h(F_1, F_2)). \quad (37)$$

Так как $\|f_1 - f_2\| \leq (1 + \frac{\sigma}{R})\|w_1 - w_2\| + \frac{\sigma}{R}\|g_1 - g_2\|$, $\sigma \leq R$, то, используя неравенства (33)–(37), получаем

$$\begin{aligned} \|f_1 - f_2\| &\leq 2\|w_1 - w_2\| + \|g_1 - g_2\| \leq 2L_n h(W_1, W_2) + \|g_1 - g_2\| \\ &\leq \left(\frac{74L_n}{\varepsilon} + 1\right)\|g_1 - g_2\| + \frac{74L_n}{\varepsilon} h(F_1, F_2) \\ &\leq \frac{75L_n^2}{\varepsilon} h(G_1, G_2) + \frac{75L_n}{\varepsilon} h(F_1, F_2) \\ &\leq \frac{19 \cdot 75L_n^2}{\varepsilon} (h(F_1, F_2) + \|b_1 - b_2\|) + \frac{75L_n}{\varepsilon} h(F_1, F_2) \\ &\leq \frac{1500L_n^2}{\varepsilon} ((L_n + 1)h(F_1, F_2) + 2r\|u_1 - u_2\|). \end{aligned}$$

Отсюда и из равенства (26) вытекает неравенство (27).

Согласно [3, теорема 3] совокупность условий (i), (iii) леммы 1 эквивалентна замкнутости и телесной гладкости множества F . Отсюда и из леммы 1 вытекает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 4 (первая теорема о липшицевой параметризации). Пусть E – метрическое пространство. Пусть задано многозначное отображение $F: E \rightarrow 2^{\mathbb{R}^n}$, удовлетворяющее условию Липшица относительно метрики Хаусдорфа и принимающее замкнутые слабо выпуклые с константой R и телесно-гладкие с константой C значения. Пусть $r \in (0, R)$ и для любого $x \in E$ существует вектор $a_x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $F(x) \subset B_r(a_x)$. Тогда существует функция $f: E \times B_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, задающая параметризацию многозначного отображения F и удовлетворяющая условию Липшица.

§ 4. Зависимость вектора единичной нормали от множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Пусть в линейном пространстве E заданы множества $A, B \subset E$. Геометрическими суммой и разностью, или, что то же самое, суммой и разностью Минковского множеств A и B называются соответственно множества

$$A + B = \{x + y: x \in A, y \in B\}, \quad A * B = \{x \in E: x + B \subset A\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ заданы множества A_1, A_2 , замкнутые и телесно-гладкие с константой $L > 0$. Пусть n_1, n_2 – единичные векторы внешних нормалей к A_1, A_2 в граничных точках $x_1 \in \partial A_1$, $x_2 \in \partial A_2$, т. е. $n_1 \in N_{A_1}(x_1)$, $n_2 \in N_{A_2}(x_2)$, $\|n_1\| = \|n_2\| = 1$. Тогда

$$\|n_1 - n_2\| \leq 2\sqrt{Lh(A_1, A_2)} + L\|x_1 - x_2\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [3, теорема 3] множества A_i и $\text{cl}(A_i^c)$ слабо выпуклы с константой $R = \frac{1}{L}$. Поэтому согласно опорному принципу [2, теорема 6.1] справедливы включения

$$\text{int } B_R(x_i + Rn_i) \subset A_i^c, \quad \text{int } B_R(x_i - Rn_i) \subset A_i, \quad i = 1, 2.$$

Если $h(A_1, A_2) \geq R$, то доказываемое неравенство тривиально выполнено. Поэтому будем предполагать, что $h(A_1, A_2) < R$. Зафиксируем произвольное число h такое, что $h(A_1, A_2) < h < R$. По определению расстояния Хаусдорфа справедливо включение $A_1 \subset A_2 + B_h$. Следовательно, в силу телесной гладкости множества A_2 имеем

$$A_1 \overset{*}{\subset} B_h \subset A_2 + B_h \overset{*}{\subset} B_h = A_2.$$

Отсюда вытекает включение $A_2^c \subset (A_1 \overset{*}{\subset} B_h)^c = A_1^c + B_h$. Поэтому в силу включения $\text{int } B_R(x_2 + Rn_2) \subset A_2^c$ получаем $\text{int } B_R(x_2 + Rn_2) \subset A_1^c + B_h$, а значит, в силу телесной гладкости множества A_1 имеем

$$\text{int } B_{R-h}(x_2 + Rn_2) \subset A_1^c + B_h \overset{*}{\subset} B_h = A_1^c.$$

Отсюда и из включения $\text{int } B_R(x_1 + Rn_1) \subset A_1$ следует, что $\text{int } B_{R-h}(x_2 + Rn_2) \cap \text{int } B_R(x_1 + Rn_1) = \emptyset$. Поэтому

$$\|x_2 - x_1 + R(n_2 + n_1)\| \geq 2R - h.$$

Аналогично,

$$\|x_1 - x_2 + R(n_2 + n_1)\| \geq 2R - h.$$

Возводя в квадрат и суммируя последние неравенства, получаем

$$\|x_1 - x_2\|^2 + R^2\|n_1 + n_2\|^2 \geq (2R - h)^2.$$

Поскольку векторы n_1, n_2 единичные, то

$$\|n_1 - n_2\|^2 = 4 - \|n_1 + n_2\|^2 \leq 4 - \left(2 - \frac{h}{R}\right)^2 + \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{R^2} \leq \frac{4h}{R} + \frac{\|x_1 - x_2\|^2}{R^2}.$$

Следовательно, $\|n_1 - n_2\| \leq 2\sqrt{\frac{h}{R}} + \frac{\|x_1 - x_2\|}{R}$. Переходя к пределу при $h \rightarrow h(A_1, A_2)$, получаем доказываемое неравенство.

§ 5. Вторая теорема о липшицевой параметризации

ТЕОРЕМА 6 [12], [13]. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $M \subset \mathcal{H}_1$, функция $u: M \rightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяет условию Липшица с константой L . Тогда существует функция $v: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица с константой L и такая, что $v(x) = u(x)$ для любого $x \in M$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $X \subset \mathcal{H}_1$. Пусть заданы числа $L > 0, \varepsilon > 0$ и функция $w: X \rightarrow \mathcal{H}_2$ такая, что

$$\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, L\|x_1 - x_2\|\right\} \quad \forall x_1, x_2 \in X. \quad (38)$$

Тогда существует функция $v: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица с константой L и такая, что $\|v(x) - w(x)\| \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множества $M \subset X$, удовлетворяющие условию

$$\|x_1 - x_2\| > \frac{\varepsilon}{2L} \quad \forall x_1, x_2 \in M. \quad (39)$$

Пусть $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – произвольная система подмножеств множества X , удовлетворяющих условию (39), такая, что для любых двух множеств этой системы одно из множеств содержится в другом. Иными словами, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ является цепью, где отношение порядка задается включением множеств. Множество $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ является верхней гранью этой цепи и удовлетворяет условию (39). Отсюда в силу леммы Цорна следует существование максимального элемента M_0 среди всех множеств $M \subset X$, удовлетворяющих условию (39). В силу максимальной множества M_0 для любого $x \in X \setminus M_0$ множество $M = M_0 \cup \{x\}$ не удовлетворяет условию (39). Поэтому

$$\forall x \in X \quad \exists x_1 \in M_0 : \quad \|x - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (40)$$

В силу условий (38), (39) для любых двух различных векторов $x_1, x_2 \in M_0$ справедливо неравенство $\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$, т. е. сужение функции w на множество M_0 удовлетворяет условию Липшица с константой L . По теореме 6 существует функция $v: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица с константой L и такая, что $v(x) = w(x)$ для любого $x \in M_0$.

Пусть $x \in X$; тогда в силу условия (40) найдется вектор $x_1 \in M_0$ такой, что $\|x - x_1\| \leq \frac{\varepsilon}{2L}$. Так как $v(x_1) = w(x_1)$, то

$$\begin{aligned} \|v(x) - w(x)\| &\leq \|v(x) - v(x_1)\| + \|w(x) - w(x_1)\| \\ &\leq L\|x - x_1\| + \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, L\|x - x_1\|\right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства и $X \subset \mathcal{H}_1$ – выпуклое множество. Пусть задана равномерно непрерывная функция $w: X \rightarrow \mathcal{H}_2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $v: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $\|v(x) - w(x)\| \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Из равномерной непрерывности функции w следует существование числа $\delta > 0$ такого, что

$$\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x_1, x_2 \in X : \quad \|x_1 - x_2\| \leq \delta. \quad (41)$$

Обозначим $L = \frac{\varepsilon}{\delta}$. Покажем, что для любых векторов $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство

$$\|w(x_1) - w(x_2)\| \leq \max\left\{\frac{\varepsilon}{2}, L\|x_1 - x_2\|\right\}. \quad (42)$$

В случае $\|x_1 - x_2\| \leq \delta$ неравенство (42) следует из условия (41). Рассмотрим случай $\|x_1 - x_2\| > \delta$. Определим натуральное число N из условий $(N-1)\delta < \|x_1 - x_2\| \leq N\delta$. Обозначим $y_k = x_1 + \frac{k}{N}(x_2 - x_1)$ при $k \in \{0, \dots, N\}$. Так как множество X выпукло, то $y_k \in X$ для любого $k \in \{0, \dots, N\}$. Поскольку

$\|y_{k+1} - y_k\| = \frac{\|x_1 - x_2\|}{N} \leq \delta$, то в силу условия (41) имеем $\|w(y_{k+1}) - w(y_k)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Следовательно,

$$\|w(x_2) - w(x_1)\| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \|w(y_{k+1}) - w(y_k)\| \leq \frac{N\varepsilon}{2}.$$

Так как $(N-1)\delta < \|x_1 - x_2\|$, $\|x_1 - x_2\| > \delta$, то $N < 1 + \frac{\|x_1 - x_2\|}{\delta} < \frac{2\|x_1 - x_2\|}{\delta}$, а значит,

$$\|w(x_2) - w(x_1)\| \leq \frac{\|x_1 - x_2\|\varepsilon}{\delta} = L\|x_1 - x_2\|.$$

Следовательно, и в этом случае неравенство (42) выполнено. Из неравенства (42) в силу леммы 2 получаем доказываемое утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Чебышевским центром* выпуклого замкнутого ограниченного множества в гильбертовом пространстве называется центр шара с минимальным радиусом, содержащего данное множество.

Согласно [11, леммы 2.1.1, 2.1.2] для любого выпуклого замкнутого ограниченного множества в гильбертовом пространстве чебышевский центр существует, единствен и содержится в этом множестве.

ЛЕММА 4. *Пусть A_1, A_2 – выпуклые замкнутые множества в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ такие, что $A_i \subset B_r(a_i)$, $a_i \in \mathcal{H}$, $i = 1, 2$; $r > 0$. Тогда если c_i – чебышевский центр множества A_i , $i = 1, 2$, то*

$$\|c_1 - c_2\| \leq 2\sqrt{6rh(A_1, A_2)} + h(A_1, A_2). \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $h = h(A_1, A_2)$. Из включения $A_1 \subset B_r(a_1)$ и определения метрики Хаусдорфа следует, что $A_2 \subset B_{r+h}(a_1)$.

Пусть $h \leq r$. Тогда множества A_1 и A_2 содержатся в шаре $B_{2r}(a_1)$ и в силу [11, теорема 2.1.1] справедливо неравенство (43). Если $h > r$, то $c_1 \in A_1 \subset B_r(a_1)$, $c_2 \in A_2 \subset B_{r+h}(a_1)$. Поэтому $\|c_1 - c_2\| \leq 2r + h$ и неравенство (43) также выполнено.

ТЕОРЕМА 7 (о липшицевом ε -селекторе). *Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства и $X \subset \mathcal{H}_1$ – выпуклое множество. Пусть задано равномерно непрерывное (в смысле метрики Хаусдорфа) многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$. Пусть заданы числа $r > 0$, $R > r$ и для любого вектора $x \in X$:*

- (i) *множество $F(x)$ замкнуто и слабо выпукло с константой R ;*
- (ii) *существует вектор $a_x \in \mathcal{H}_2$ такой, что $F(x) \subset B_r(a_x)$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $v: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $\varrho(v(x), F(x)) \leq \varepsilon$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in X$ обозначим $G(x) = \text{clso } F(x)$. Пусть $c(x)$ – чебышевский центр множества $G(x)$. Поскольку для любых $x_1, x_2 \in X$ справедливо неравенство $h(G(x_1), G(x_2)) \leq h(F(x_1), F(x_2))$, то из равномерной непрерывности многозначного отображения F следует равномерная непрерывность многозначного отображения G . Отсюда в силу леммы 4 получаем равномерную непрерывность функции $c: X \rightarrow \mathcal{H}_2$.

В силу [4, лемма 4] справедливо неравенство $h(G(x), F(x)) \leq \frac{r^2}{R} < R$. Отсюда и из включения $c(x) \in G(x)$ получаем, что $\varrho(c(x), F(x)) \leq h(G(x), F(x)) < R$ для любого $x \in X$. Следовательно, согласно [4, теорема 1] для любого $x \in X$ существует и единственная метрическая проекция $w(x)$ чебышевского центра $c(x)$ на множество $F(x)$. В силу [4, теорема 2] функция $w: X \rightarrow \mathcal{H}_2$ равномерно непрерывна. Применяя лемму 3, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 5. Пусть A_1, A_2 – выпуклые замкнутые ограниченные множества в нормированном пространстве E . Пусть существуют число $\sigma > 0$ и векторы $a_1, a_2 \in E$ такие, что $B_\sigma(a_i) \subset A_i$ при $i = 1, 2$. Пусть $\beta \in (0, \sigma)$. Тогда

$$h(A_1 \dot{*} B_\beta, A_2 \dot{*} B_\beta) \leq \gamma h(A_1, A_2), \quad \gamma = \frac{d}{\sigma - \beta}, \quad d = \max\{\text{diam } A_1, \text{diam } A_2\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное число $h > h(A_1, A_2)$. Обозначим $\tilde{A}_i = A_i \dot{*} B_\beta$, $i = 1, 2$. Покажем, что

$$\tilde{A}_1 \subset \tilde{A}_2 + B_{\gamma h}. \quad (44)$$

Рассмотрим сначала случай $h \leq \beta$. Из определения метрики Хаусдорфа следует, что $A_1 \subset A_2 + B_h$. Поэтому $\tilde{A}_1 \subset A_2 + B_h \dot{*} B_\beta = A_2 \dot{*} B_{\beta-h}$. Обозначим $A = A_2 \dot{*} B_{\beta-h}$. Так как $B_\sigma(a_2) \subset A_2$, то $B_{\sigma-\beta}(a_2) \subset A_2 \dot{*} B_\beta \subset A$. Поэтому в силу [11, лемма 2.8.2] справедливо неравенство

$$h(A \dot{*} B_h, A) \leq \frac{d - (\sigma - \beta)}{\sigma - \beta} h < \gamma h.$$

Следовательно, $A \subset A \dot{*} B_h + B_{\gamma h}$, а значит, $\tilde{A}_1 \subset A \subset A_2 \dot{*} B_\beta + B_{\gamma h} = \tilde{A}_2 + B_{\gamma h}$. Итак, в случае $h < \beta$ включение (44) справедливо.

Рассмотрим теперь случай $h > \beta$. Поскольку $B_\sigma(a_2) \subset A_2$, то в силу [11, лемма 2.8.2] справедливо неравенство

$$h(A_2 \dot{*} B_\beta, A_2) \leq \frac{(d - \sigma)\beta}{\sigma} < \eta,$$

где $\eta = \frac{(d - \sigma)h}{\sigma}$. Следовательно, $A_2 \subset A_2 \dot{*} B_\beta + B_\eta$. Поэтому $\tilde{A}_1 \subset A_1 \subset A_2 + B_h \subset A_2 \dot{*} B_\beta + B_{\eta+h} = \tilde{A}_2 + B_{\eta+h}$. Так как $\eta + h = \frac{dh}{\sigma} < \gamma h$, то в данном случае включение (44) также справедливо.

Аналогично, справедливо включение $\tilde{A}_2 \subset \tilde{A}_1 + B_{\gamma h}$. Поэтому $h(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) \leq \gamma h$. Переходя к пределу при $h \rightarrow h(A_1, A_2) + 0$, получаем требуемое утверждение.

ЛЕММА 6 [11, теорема 2.2.1]. Пусть многозначные отображения F_1 и F_2 , действующие из метрического пространства E_1 в банахово пространство E_2 , имеют выпуклые замкнутые значения и удовлетворяют условию Липшица с константами L_1, L_2 соответственно. Пусть $d(x) = \min\{\text{diam } F_1(x), \text{diam } F_2(x)\} < +\infty$ для всех $x \in E_1$. Пусть существуют функция $\gamma: E_1 \rightarrow [0, +\infty)$ и число $\alpha > 0$ такие, что для всех $x \in E_1$ выполняются условия

$$B_{\gamma(x)} \subset F_2(x) + (-F_1(x)), \quad d(x) \leq \alpha \gamma(x).$$

Тогда многозначное отображение $x \mapsto Q(x) = F_1(x) \cap F_2(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_Q = \max\{L_1, L_2\} + \alpha(L_1 + L_2)$.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $X \subset \mathcal{H}_1$. Пусть многозначное отображение $G: X \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_G в метрике Хаусдорфа. Пусть $r > 0, \sigma > 0$ и для любого $x \in X$ выполнено:

- (i) множество $G(x)$ замкнуто и выпукло;
- (ii) существует вектор $b_0(x) \in \mathcal{H}_2$ такой, что $B_\sigma(b_0(x)) \subset G(x)$, т. е. внутренность множества $G(x)$ равномерно непуста;
- (iii) существует вектор $a(x) \in \mathcal{H}_2$ такой, что $G(x) \subset B_r(a(x))$.

Тогда существует функция $g: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $g(x, B_1) = G(x)$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $x \in X$ через $c(x)$ обозначим чебышевский центр множества $G(x)$. Из условия (iii) следует, что $G(x) \subset B_{2r}(c(x))$. В силу леммы 4 для любых x_1, x_2 справедливо неравенство

$$\|c(x_1) - c(x_2)\| \leq 2\sqrt{6rL_G\|x_1 - x_2\|} + L_G\|x_1 - x_2\|.$$

Поскольку для любых неотрицательных чисел α, β справедливо неравенство $\sqrt{\alpha\beta} \leq \max\{\alpha, \beta\}$, то $2\sqrt{6rL_G\|x_1 - x_2\|} \leq \max\{\frac{24r}{25}, 25L_G\|x_1 - x_2\|\}$. Отсюда и из неравенства $L_G\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{25} \max\{\frac{24r}{25}, 25L_G\|x_1 - x_2\|\}$ следует, что

$$\|c(x_1) - c(x_2)\| \leq \frac{26}{25} \max\left\{\frac{24r}{25}, 25L_G\|x_1 - x_2\|\right\} \leq \max\{r, 26L_G\|x_1 - x_2\|\}.$$

В силу леммы 2 существует функция $b: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица с константой $L_b = 26L_G$ и такая, что $\|b(x) - c(x)\| \leq 2r$ для любого $x \in X$. Следовательно, $G(x) \subset B_{4r}(b(x))$ для любого $x \in X$.

Для любого $x \in X$ определим множество $W(x) = G(x) \overset{*}{\setminus} B_{\sigma/2}$. В силу леммы 5 многозначное отображение $W: X \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_W = \frac{4rL_G}{\sigma}$.

Для любых $x \in X, u \in B_1$ определим $s(x, u) = b(x) + 4ru$. Через $w(x, u)$ обозначим метрическую проекцию точки $s(x, u)$ на множество $W(x)$. Так как $W(x) \subset G(x) \subset B_{4r}(b(x))$, то $\varrho(b(x), W(x)) \leq 4r$ и, следовательно, $\varrho(s(x, u), W(x)) \leq 8r$. В силу [4, теорема 1] для любых векторов $x_1, x_2 \in X, u_1, u_2 \in B_1$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|w(x_1, u_1) - w(x_2, u_2)\| &\leq \|s(x_1, u_1) - s(x_2, u_2)\| + 4\sqrt{rh(W(x_1), W(x_2))} \\ &\leq L_b\|x_1 - x_2\| + 4r\|u_1 - u_2\| + 4\sqrt{rL_W\|x_1 - x_2\|} \\ &= 26L_G\|x_1 - x_2\| + 4r\|u_1 - u_2\| + 8r\sqrt{\frac{L_G\|x_1 - x_2\|}{\sigma}} \leq 30\Delta + 8r\sqrt{\frac{\Delta}{\sigma}}, \end{aligned}$$

где $\Delta = \sqrt{L_G^2\|x_1 - x_2\|^2 + r^2\|u_1 - u_2\|^2}$. Заметим, что

$$8r\sqrt{\frac{\Delta}{\sigma}} \leq \max\left\{\frac{\sigma}{10}, \frac{10 \cdot 8^2 r^2 \Delta}{\sigma^2}\right\}, \quad 30\Delta \leq \frac{30r^2 \Delta}{\sigma^2} \leq \frac{3}{64} \max\left\{\frac{\sigma}{10}, \frac{10 \cdot 8^2 r^2 \Delta}{\sigma^2}\right\}.$$

Следовательно,

$$\|w(x_1, u_1) - w(x_2, u_2)\| \leq \frac{67}{64} \max\left\{\frac{\sigma}{10}, \frac{10 \cdot 8^2 r^2 \Delta}{\sigma^2}\right\} \leq \max\left\{\frac{\sigma}{8}, \frac{670r^2 \Delta}{\sigma^2}\right\}. \quad (45)$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, в котором скалярное произведение векторов (x_1, u_1) и (x_2, u_2) определяется через скалярные произведения в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ формулой $L_G^2 \langle x_1, x_2 \rangle + r^2 \langle u_1, u_2 \rangle$.

В силу неравенства (45) согласно лемме 2 существует функция $v: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $\|v(x, u) - w(x, u)\| \leq \frac{\sigma}{4}$.

Поскольку для любых $x \in X$, $u \in B_1$ справедливо включение $w(x, u) \in W(x) = G(x) \stackrel{*}{B}_{\sigma/2}$, то $B_{\sigma/2}(w(x, u)) \subset G(x)$ и, следовательно, имеет место включение $B_{\sigma/4}(v(x, u)) \subset G(x)$.

Через $g(x, u)$ обозначим ближайшую к точке $s(x, u)$ точку множества $[s(x, u), v(x, u)] \cap G(x)$.

Покажем, что $g(x, B_1) = G(x)$ для любого $x \in X$. Пусть $x \in X$. Так как $g(x, u) \in G(x)$ для любого $u \in B_1$, то $g(x, B_1) \subset G(x)$. Пусть $y \in G(x)$. Поскольку $G(x) \subset B_{4r}(b(x)) = b(x) + 4rB_1$, то существует вектор $u \in B_1$ такой, что $y = b(x) + 4ru = s(x, u)$. Так как $s(x, u) = y \in G(x)$, то $g(x, u) = s(x, u) = y$. Следовательно, $G(x) \subset g(x, B_1)$.

Осталось доказать, что функция $g: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяет условию Липшица.

Применим лемму 6 к многозначным отображениям $F_1, F_2: X \times B_1 \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$, определяемым формулами $F_1(x, u) = [0, v(x, u) - s(x, u)]$, $F_2(x, u) = G(x, u) - s(x, u)$, к функции $\gamma(x, u) = \frac{\sigma}{4}$ и числу $\alpha = \frac{32r}{\sigma}$. Так как $B_{\sigma/4}(v(x, u)) \subset G(x)$, то

$$B_{\gamma(x, u)} = B_{\sigma/4} \subset G(x) - v(x, u) \subset F_2(x, u) + (-F_1(x, u)).$$

Кроме того,

$$d(x, u) = \min\{\text{diam } F_1(x, u), \text{diam } F_2(x, u)\} \leq \text{diam } G(x) \leq 8r = \alpha\gamma(x, u).$$

Отсюда и из липшицевости многозначных отображений F_1, F_2 в силу леммы 6 получаем липшицевость многозначного отображения $(x, u) \mapsto Q(x, u) = F_1(x, u) \cap F_2(x, u)$.

Для любых $x \in X$, $u \in B_1$ обозначим $q(x, u) = g(x, u) - s(x, u)$. Из определения вектора $g(x, u)$ следует, что $q(x, u)$ является ближайшей к точке 0 точкой множества $Q(x, u)$. Поэтому $Q(x, u) \subset \{tq(x, u) : t \geq 1\}$.

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$. Покажем, что

$$\|q(x_1, u_1) - q(x_2, u_2)\| \leq h(Q(x_1, u_1), Q(x_2, u_2)). \quad (46)$$

Обозначим $q_i = q(x_i, u_i)$, $Q_i = Q(x_i, u_i)$, где $i = 1, 2$. Для определенности будем предполагать, что $\|q_2\| \leq \|q_1\|$. Тогда в силу неравенства Коши–Буняковского $\langle q_1, q_2 \rangle \leq \|q_1\|^2$ и, следовательно, $\langle q_1, q_1 - q_2 \rangle \geq 0$. Пусть $\tilde{q}_1 \in Q_1$. Из включения $Q(x_1, u_1) \subset \{tq(x_1, u_1) : t \geq 1\}$ следует, что $\tilde{q}_1 = tq_1$, где $t \geq 1$. Отсюда и из неравенства $\langle q_1, q_1 - q_2 \rangle \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}_1 - q_2\|^2 &= \|\tilde{q}_1 - q_1\|^2 + 2\langle \tilde{q}_1 - q_1, q_1 - q_2 \rangle + \|q_1 - q_2\|^2 \\ &\geq 2\langle \tilde{q}_1 - q_1, q_1 - q_2 \rangle + \|q_1 - q_2\|^2 \\ &= 2(t-1)\langle q_1, q_1 - q_2 \rangle + \|q_1 - q_2\|^2 \geq \|q_1 - q_2\|^2. \end{aligned}$$

Итак, для любого вектора $\tilde{q}_1 \in Q_1$ справедливо неравенство $\|\tilde{q}_1 - q_2\| \geq \|q_1 - q_2\|$. Поэтому $\|q_1 - q_2\| = \varrho(q_2, Q_1) \leq h(Q_1, Q_2)$, т. е. выполнено неравенство (46). Из неравенства (46) и липшицевости многозначного отображения Q вытекает липшицевость функции $q: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$. Поскольку функции q и s удовлетворяют условию Липшица, то и функция $(x, u) \mapsto g(x, u) = q(x, u) + s(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица.

ТЕОРЕМА 8 (вторая теорема о липшицевой параметризации). Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ – гильбертовы пространства, $X \subset \mathcal{H}_1$. Пусть многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$ удовлетворяет условию Липшица с константой L_F в метрике Хаусдорфа. Пусть $R > r > 0$, $R \geq \sigma > 0$ и для любого $x \in X$ выполнено:

- (i) множество $F(x)$ замкнуто и слабо выпукло с константой R ;
- (ii) множество $\text{cl}(F(x)^c)$ слабо выпукло с константой σ ;
- (iii) существует вектор $a(x) \in \mathcal{H}_1$ такой, что $G(x) \subset B_r(a(x))$.

Тогда существует функция $f: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица и такая, что $f(x, B_1) = F(x)$ для любого $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, в котором скалярное произведение векторов (x_1, u_1) и (x_2, u_2) определяется через скалярные произведения в пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ формулой $L_F^2 \langle x_1, x_2 \rangle + r^2 \langle u_1, u_2 \rangle$.

Для любого вектора $x \in X$ определим множество $G(x) = \text{cl} \text{co } F(x)$. Поскольку многозначное отображение F удовлетворяет условию Липшица с константой L_F , то многозначное отображение $G: X \rightarrow 2^{\mathcal{H}_2}$ удовлетворяет условию Липшица с той же константой L_F . Применяя лемму 7 для многозначного отображения G , получаем функцию $g: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ такую, что $g(x, B_1) = \text{cl} \text{co } F(x)$ для любого $x \in X$. При этом функция g удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой L_g относительно евклидовой нормы пространства $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$ справедливо неравенство

$$\|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| \leq L_g \Delta, \quad \Delta = \sqrt{L_F^2 \|x_1 - x_2\|^2 + r^2 \|u_1 - u_2\|^2}. \quad (47)$$

В силу [4, лемма 4] справедливо неравенство $h(G(x), F(x)) \leq \frac{r^2}{R}$. Поэтому имеет место соотношение $\varrho(g(x, u), F(x)) \leq \frac{r^2}{R} < R$.

Для любых $x \in X$, $u \in B_1$ через $\pi(x, u)$ обозначим метрическую проекцию вектора $g(x, u)$ на множество $F(x)$. Существование и единственность этой метрической проекции следуют из [4, теорема 1]. Согласно [4, теорема 2] для любых $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$ справедливо неравенство

$$\|\pi(x_1, u_1) - \pi(x_2, u_2)\| \leq \frac{R^2}{R^2 - r^2} \|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| + \sqrt{\frac{2r^2 R h(F(x_1), F(x_2))}{R^2 - r^2}}. \quad (48)$$

Для любых $x \in X$, $u \in B_1$ определим

$$\nu(x, u) = \frac{g(x, u) - \pi(x, u)}{\|g(x, u) - \pi(x, u)\|}, \quad w(x, u) = \pi(x, u) - \gamma \nu(x, u), \quad \gamma = \frac{\sigma}{18}.$$

В силу [2, лемма 6.1] справедливо включение $\nu(x, u) \in N_{F(x)}(\pi(x, u))$. Согласно [3, теорема 3] для любого $x \in X$ множество $F(x)$ является телесно-гладким с константой $\frac{1}{\sigma}$. В силу теоремы 5 для любых $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$

справедливо неравенство

$$\|\nu(x_1, u_1) - \nu(x_2, u_2)\| \leq \frac{\|\pi(x_1, u_1) - \pi(x_2, u_2)\|}{\sigma} + 2\sqrt{\frac{h(F(x_1), F(x_2))}{\sigma}}.$$

Отсюда и из соотношений (47), (48) для любых $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$ получаем

$$\begin{aligned} & \|w(x_1, u_1) - w(x_2, u_2)\| \\ & \leq \|\pi(x_1, u_1) - \pi(x_2, u_2)\| \left(1 + \frac{\gamma}{\sigma}\right) + 2\gamma\sqrt{\frac{h(F(x_1), F(x_2))}{\sigma}} \\ & \leq \frac{2R^2}{R^2 - r^2} \|g(x_1, u_1) - g(x_2, u_2)\| + \frac{2R^{3/2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sqrt{h(F(x_1), F(x_2))} \\ & \leq \frac{2R^2 L_g}{R^2 - r^2} \Delta + \frac{2R^{3/2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sqrt{\Delta}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{2R^{3/2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} \sqrt{\Delta} \leq \max\left\{\frac{5\gamma}{52}, \frac{52 \cdot 4R^3}{5\gamma(R^2 - r^2)} \Delta\right\}$, то

$$\|w(x_1, u_1) - w(x_2, u_2)\| \leq \frac{L_v \Delta}{2} + \max\left\{\frac{5\gamma}{52}, \frac{L_v \Delta}{2}\right\} \leq \max\left\{\frac{5\gamma}{26}, L_v \Delta\right\},$$

где $L_v = 2 \max\left\{\frac{52 \cdot 4R^3}{5\gamma(R^2 - r^2)}, \frac{2R^2 L_g}{R^2 - r^2}\right\}$.

Согласно лемме 2 существует функция $v: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, удовлетворяющая условию Липшица с константой L_v и такая, что для любых $x \in X$, $u \in B_1$ справедливо неравенство

$$\|v(x, u) - w(x, u)\| \leq \frac{5}{13}\gamma. \quad (49)$$

В силу опорного принципа [2, теорема 6.1] справедливо включение $\text{int } B_\gamma(w(x, u)) \subset \text{int } F(x)$. Отсюда и из неравенства (49) следует, что $v(x, u) \in F(x)$ для любых $x \in X$, $u \in B_1$.

Через $f(x, u)$ обозначим точку множества $[v(x, u), g(x, u)] \cap F(x)$, ближайшую к точке $g(x, u)$.

Поскольку вектор $\pi(x, u)$ является метрической проекцией вектора $g(x, u)$ на множество $F(x)$, то $\|g(x, u) - \pi(x, u)\| \leq \|g(x, u) - f(x, u)\|$. Отсюда и из соотношений

$$\begin{aligned} & \|g(x, u) - f(x, u)\| + \|f(x, u) - v(x, u)\| = \|g(x, u) - v(x, u)\| \\ & \leq \|g(x, u) - \pi(x, u)\| + \|\pi(x, u) - v(x, u)\| \end{aligned}$$

следует, что $\|f(x, u) - v(x, u)\| \leq \|\pi(x, u) - v(x, u)\|$. Поэтому для любых $x \in X$, $u \in B_1$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \|f(x, u) - \pi(x, u)\| \leq \|f(x, u) - v(x, u)\| + \|\pi(x, u) - v(x, u)\| \\ & \leq 2\|\pi(x, u) - v(x, u)\| \\ & \leq 2(\|\pi(x, u) - w(x, u)\| + \|w(x, u) - v(x, u)\|) \\ & \leq 2\left(\gamma + \frac{5}{13}\gamma\right) = \frac{2}{13}\sigma < \sigma\sqrt{\frac{2}{13}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Пусть заданы векторы $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$.

Обозначим $f_i = f(x_i, u_i)$, $g_i = g(x_i, u_i)$, $v_i = v(x_i, u_i)$, $\nu_i = \nu(x_i, u_i)$, $w_i = w(x_i, u_i)$, $\pi_i = \pi(x_i, u_i)$, $F_i = F(x_i)$, где $i = 1, 2$. Пусть для определенности $\|f_2 - g_2\| \leq \|f_1 - g_1\|$. Через f_{12} обозначим ближайшую к f_2 точку отрезка $[v_1, g_1]$. Так как $f_2 \in [v_2, g_2]$, то $\|f_{12} - f_2\| \leq \max\{\|v_1 - v_2\|, \|g_1 - g_2\|\}$. Поскольку функции $g: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ и $v: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_g и $L_v \geq L_g$ соответственно, то

$$\|f_{12} - f_2\| \leq L_v \Delta, \quad (51)$$

где величина Δ определена формулой (47).

Рассмотрим случай $\|f_{12} - g_1\| \geq \|f_1 - g_1\|$. Поскольку $\|f_2 - g_2\| \leq \|f_1 - g_1\|$ и $\|f_{12} - g_1\| \leq \|f_{12} - f_2\| + \|f_2 - g_2\| + \|g_2 - g_1\|$, то $\|f_{12} - g_1\| \leq \|f_{12} - f_2\| + \|g_2 - g_1\| + \|f_1 - g_1\|$. Следовательно, в силу неравенства (51) имеем

$$\|f_{12} - g_1\| \leq (L_v + L_g)\Delta + \|f_1 - g_1\|.$$

Отсюда, из неравенства $\|f_{12} - g_1\| \geq \|f_1 - g_1\|$ и из того, что векторы f_{12} , f_1 лежат на отрезке $[g_1, v_1]$, следует, что

$$\|f_{12} - f_1\| \leq (L_v + L_g)\Delta \leq 2L_v \Delta. \quad (52)$$

Рассмотрим теперь случай $\|f_{12} - g_1\| < \|f_1 - g_1\|$.

Так как вектор f_1 лежит на границе множества F_1 , телесно-гладкого с константой $\frac{1}{\sigma}$, то существует единичный вектор $n_1 \in N_{F_1}(f_1)$. В силу определения телесно-гладкого множества и неравенства (50) получаем

$$\|n_1 - \nu_1\| \leq \frac{1}{\sigma} \|f_1 - \pi_1\| \leq \sqrt{\frac{2}{13}}.$$

Поэтому угол между векторами n_1 и ν_1 не превосходит числа $\alpha = \arccos \frac{12}{13}$.

Из неравенства (49) следует, что $\|w_1 - v_1\| \leq \frac{5\gamma}{13}$. Отсюда и из соотношений $\|w_1 - g_1\| \geq \|w_1 - \pi_1\| = \gamma$ следует, что угол между векторами $g_1 - w_1$ и $g_1 - v_1$ не превосходит $\arcsin \frac{5}{13} = \alpha$. Векторы $g_1 - w_1$ и ν_1 сонаправлены. Поэтому угол между векторами n_1 и $g_1 - v_1$ не превосходит $2\alpha = \arccos \frac{119}{169} < \arccos \frac{2}{3}$, т. е. $\langle n_1, g_1 - v_1 \rangle \geq \frac{2}{3} \|g_1 - v_1\|$. Так как векторы $g_1 - v_1$ и $f_{12} - f_1$ сонаправлены, то

$$\langle n_1, f_{12} - f_1 \rangle \geq \frac{2}{3} \|f_{12} - f_1\|. \quad (53)$$

В силу опорного принципа [2, теорема 6.1] имеем $\text{int } B_R(f_1 + Rn_1) \cap F_1 = \emptyset$. Следовательно, $\|f_1 + Rn_1 - f_{12}\| \geq R - \varrho(f_{12}, F_1)$, т. е.

$$2R\langle n_1, f_{12} - f_1 \rangle - \|f_{12} - f_1\|^2 \leq R^2 - (R - \varrho(f_{12}, F_1))^2 \leq 2R\varrho(f_{12}, F_1).$$

Отсюда и из неравенства (53) получаем

$$\left(\frac{4}{3}R - \|f_{12} - f_1\|\right)\|f_{12} - f_1\| \leq 2R\varrho(f_{12}, F_1).$$

В силу неравенства (50) имеем $\|\pi_1 - f_1\| \leq \frac{2}{13}\sigma \leq \frac{2}{13}R$. Следовательно, $\|f_{12} - f_1\| \leq \|g_1 - f_1\| \leq \|g_1 - \pi_1\| + \|\pi_1 - f_1\| \leq \frac{15}{13}R$. Поэтому $\frac{4}{3}R - \|f_{12} - f_1\| \geq \frac{1}{6}R$ и, следовательно,

$$\|f_{12} - f_1\| \leq 12\varrho(f_{12}, F_1).$$

Из включения $f_2 \in F_2$ и неравенства (51) следует, что

$$\varrho(f_{12}, F_1) \leq \|f_{12} - f_2\| + h(F_1, F_2) \leq L_v\Delta + L_F\|x_1 - x_2\| \leq (L_v + 1)\Delta.$$

Поэтому в случае $\|f_{12} - g_1\| < \|f_1 - g_1\|$ имеем

$$\|f_{12} - f_1\| \leq 12(L_v + 1)\Delta. \quad (54)$$

Отсюда и из неравенства (52) следует, что неравенство (54) выполнено в любом случае. Поэтому в силу неравенства (51) для любых $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in B_1$ получаем неравенство

$$\|f(x_1, u_1) - f(x_2, u_2)\| \leq (13L_v + 12)\Delta.$$

Следовательно, функция $f: X \times B_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ удовлетворяет условию Липшица. Поскольку согласно определению вектора $f(x, u)$ для любых $x \in X$, $u \in B_1$ справедливо включение $f(x, u) \in F(x)$, то $f(x, B_1) \subset F(x)$ для любого $x \in X$. Докажем обратное включение. Пусть $x \in X$, $y \in F(x)$. В силу равенства $g(x, B_1) = \text{cls } F(x)$ найдется вектор $u \in B_1$ такой, что $g(x, u) = y$. Так как $g(x, u) \in F(x)$, то согласно определению вектора $f(x, u)$ справедливы равенства $f(x, u) = g(x, u) = y$. Поэтому $F(x) \subset f(x, B_1)$.

Авторы благодарят И. Г. Царькова за полезное обсуждение рассмотренных в работе вопросов.

Список литературы

1. J.-P. Vial, "Strong and weak convexity of sets and functions", *Math. Oper. Res.*, **8**:2 (1983), 231–259.
2. Г. Е. Иванов, "Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 35–60; англ. пер.: G. E. Ivanov, "Weak convexity in the senses of Vial and Efimov–Stechkin", *Izv. Math.*, **69**:6 (2005), 1113–1135.
3. Г. Е. Иванов, "Слабо выпуклые множества и их свойства", *Матем. заметки*, **79**:1 (2006), 60–86; англ. пер.: G. E. Ivanov, "Weakly convex sets and their properties", *Math. Notes*, **79**:1–2 (2006), 55–78.
4. М. В. Балашов, Г. Е. Иванов, "Свойства метрической проекции на множество, слабо выпуклое по Виалю, и параметризация многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями", *Матем. заметки*, **80**:4 (2006), 483–489; англ. пер.: M. V. Balashov, G. E. Ivanov, "Properties of the metric projection on weakly vial-convex sets and parametrization of set-valued mappings with weakly convex images", *Math. Notes*, **80**:3–4 (2006), 461–467.
5. Ф. Кларк, *Оптимизация и негладкий анализ*, Наука, М., 1988; пер. с англ.: F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, Wiley, New York, 1983.
6. J.-P. Aubin, A. Cellina, *Differential inclusions*, Grundlehren Math. Wiss., **264**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

7. J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Systems Control Found. Appl., **2**, Birkhäuser, Boston, 1990.
8. A. D. Ioffe, "Representation of set-valued mappings. II. Application to differential inclusions", *SIAM J. Control Optim.*, **21**:4 (1983), 641–651.
9. A. Le Donne, M. V. Marchi, "Representation of Lipschitz compact-convex valued mappings", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), **68**:4 (1980), 278–280.
10. A. Ornelas, "Parametrization of Carathéodory multifunctions", *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **83** (1990), 33–44.
11. Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
12. M. D. Kirszbraun, "Über die zusammenziehende und Lipschitzsche Transformationen", *Fundam. Math.*, **22** (1934), 77–108.
13. F. A. Valentine, "A Lipschitz condition preserving extension for a vector function", *Amer. J. Math.*, **67**:1 (1945), 83–93.

Г. Е. ИВАНОВ (G. E. IVANOV)

Московский физико-технический институт
(технический университет)

E-mail: givanov@mail.mipt.ru

Поступило в редакцию

15.03.2006

М. В. БАЛАШОВ (M. V. BALASHOV)

Московский физико-технический институт
(технический университет)

E-mail: balashov@mail.mipt.ru