Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. К. Бакиров, Асимптотика вероятности невыхода за криволинейную границу траектории гауссовского случайного блуждания, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 1, 49–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:29:05

УДК 519.21

Н. К. Бакиров

Асимптотика вероятности невыхода за криволинейную границу траектории гауссовского случайного блуждания

Получен поправочный член асимптотики вероятности неперевышения криволинейной границы траекторией гауссовского случайного блуждания. Получены оценки плотности распределения максимума некоторых гауссовских процессов.

Библиография: 11 наименований.

Ключевые слова: граничные задачи, случайные блуждания.

Введение

Пусть $w(t)$ – стандартный винеровский случайный процесс и $t_k = k/n$, $k = 1, 2, \dots, n$. Нас интересует асимптотика вероятности невыхода за некоторую криволинейную границу траектории гауссовского случайного блуждания. Интерес к подобным задачам возникает, например, при оценивании точности методов Монте-Карло при численном решении дифференциальных уравнений. Из результатов работ [1]–[3], в частности, вытекает следующее асимптотическое представление:

$$P\{w(t_k) \leq a(t_k) \quad \forall k \leq n\} = P\{w(t) \leq a(t) \quad \forall t \in [0, 1]\} + O(n^{-1/2}),$$

где $a(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция (см. также [4], [5]). В настоящей работе определен член асимптотики порядка $n^{-1/2}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a(t)$, $t \in [0, 1]$, – дважды непрерывно дифференцируемая функция, $a(0) > 0$. Тогда

$$P\{w(t_k) \leq a(t_k) \quad \forall k \leq n\} = P\{w(t) \leq a(t) \quad \forall t \in [0, 1]\} + C^* V n^{-1/2} + o(n^{-1/2}), \quad (1)$$

где

$$V = \frac{d}{dx} P\left\{ \sup_{t \in [0, 1]} (w(t) - a(t)) \leq x \right\} \Big|_{x=0}$$

и C^* – константа, определенная равенствами

$$C^* = C_1 - \sum_{i=2}^{\infty} C_i, \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-97924-р).

где

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Delta(x) \Delta(z) \exp\left\{-\frac{(x+z)^2}{2}\right\} dx dz, \\
 C_i &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Delta(x_0) \Delta(x_i) \exp\{-2x_0x_1 - 2x_{i-1}x_i\} \prod_{j=1}^{i-2} (1 - \exp\{-2x_jx_{j+1}\}) \\
 &\quad \times \prod_{j=0}^{i-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x_{j+1} - x_j)^2\right\} dx \quad \forall i > 1, \quad x = (x_0, x_1, \dots, x_i), \\
 \Delta(z) &= 1 + z \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}i} \exp\left\{-\frac{s^2 z^2}{2i}\right\} \varrho_i(s) ds, \\
 \varrho_i(z) &= P\left\{w\left(\frac{j}{i}\right) - \frac{j}{i} w(1) \leq \frac{j}{i} \frac{z}{i^{1/2}} \quad \forall j \leq i\right\}.
 \end{aligned}$$

Для доказательства теоремы 1 необходимо рассмотреть задачу о близости вероятностей вида

$$\beta_i = P\{w(t) \leq a_i(t) \quad \forall t \in [0, T]\}, \quad i = 1, 2,$$

где $a_i(t)$ – непрерывные функции. При различных дополнительных условиях такие оценки могут быть получены, например, с использованием результатов работ [6], [7] и др. Одна из наших целей состоит в нахождении явной верхней оценки для $\beta_2 - \beta_1$, которая в определенном смысле будет близка к некоторым нижним оценкам. Обозначим $x_+ = \max\{0, x\}$, а также

$$\begin{aligned}
 G(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x (x-z) e^{-z^2/2} dz, \quad a(t, s) = a_1(t)(1-s) + a_2(t)s, \\
 Q(f(t), g(t)) &= 2 \int_0^1 \int_0^T \frac{|a_2(t) - a_1(t)|}{\sqrt{t(T-t)}} G(f(t)\sqrt{T-t}) \\
 &\quad \times \frac{\exp\left\{-\frac{a^2(t,s)}{2t}\right\}}{\sqrt{2\pi t}} \left(\frac{a(t,s) - tg(t)}{\sqrt{t}}\right)_+ dt ds.
 \end{aligned}$$

Мы предполагаем далее, что $a_1(0), a_2(0) > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $a_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют неравенствам

$$K(t) \leq \frac{a_i(t) - a_i(u)}{t-u} \leq D(u) \quad \forall 0 \leq u < t \leq T$$

для некоторых непрерывных функций $K(\cdot)$, $D(\cdot)$. Тогда

$$\beta_2 - \beta_1 \leq Q(D(t), K(t)).$$

Если

$$K^*(u) \leq \frac{a_i(t) - a_i(u)}{t-u} \leq D^*(t) \quad \forall 0 \leq u < t \leq T$$

для некоторых непрерывных функций $K^*(\cdot)$, $D^*(\cdot)$, а также $a_2(t) - a_1(t) \geq 0$ при любом t , то справедливо противоположное неравенство

$$\beta_2 - \beta_1 \geq Q(K^*(t), D^*(t)).$$

Метод доказательства теоремы 2 можно распространить на некоторые другие гауссовские случайные процессы, в частности, в § 2, 3 даются оценки плотности распределения функционала максимума от некоторых гауссовских, марковских случайных процессов. Полученные оценки плотностей в рассмотренных специальных случаях лучше универсальной оценки плотности распределения максимума гауссовского случайного процесса из [7].

§ 1. Доказательство теоремы 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Для простоты изложения материала положим $T = 1$. Обозначим

$$t_k = \frac{k}{n}, \quad w_k = w(t_k), \quad a_k = a_1(t_k), \quad \Delta_k = a_1(t_k) - a_2(t_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

$$w = (w_1, \dots, w_n), \quad \Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n), \quad \delta = (\delta(t_1), \dots, \delta(t_n))$$

и определим функционал $P_n(\delta) = P\{w(t_j) \leq a_1(t_j) - \delta(t_j), j = 1, \dots, n\}$. Ясно, что

$$\beta_2 - \beta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n,$$

где $J_n = P_n(\Delta) - P_n(0)$. Для разности J_n имеем

$$J_n = \int_0^1 \frac{d}{ds} P_n(s\Delta) ds,$$

$$\frac{d}{ds} P_n(s\Delta) = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} \frac{d}{ds} \varphi(x - s\Delta) dx,$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\varphi(x)$ – плотность вероятностного распределения случайного вектора w . Производя дифференцирование плотности φ , получаем

$$\frac{d}{ds} \varphi(x - s\Delta) = - \sum_{j=1}^n \Delta_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x - s\Delta),$$

$$\frac{d}{ds} P_n(s\Delta) = - \sum_{j=1}^n \Delta_j \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi(x - s\Delta) dx = - \sum_{j=1}^n \Delta_j M_j p_j(a_j - s\Delta_j);$$
(3)

здесь

$$M_j = P\{\eta_k \leq a_k \quad \forall k \neq j \mid \eta_j = a_j\}, \quad \eta_k = w_k + s\Delta_k,$$

$P\{\cdot \mid \cdot\}$ – условная вероятность, $p_j(\cdot)$ – плотность распределения случайной величины w_j . Воспользуемся далее тем фактом, что случайный процесс $w(t)$: $M_j = A_j B_j$ является марковским, где

$$A_j = P\{\eta_k \leq a_k \quad \forall k > j \mid \eta_j = a_j\} \quad \forall j < n, \quad A_n \equiv 1,$$

$$B_j = P\{\eta_k \leq a_k \quad \forall k < j \mid \eta_j = a_j\} \quad \forall j > 1, \quad B_1 \equiv 1.$$
(4)

Ввиду гауссовости случайного процесса $w(t)$ мы можем выразить условные вероятности в (4) через соответствующие безусловные вероятности:

$$A_j = P\{w_k - c_{k,j} w_j \leq b_{k,j} \quad \forall k > j\}, \quad B_j = P\{w_k - c_{k,j} w_j \leq b_{k,j} \quad \forall k < j\},$$

$$c_{k,j} = \frac{E w_k w_j}{E w_j^2}, \quad b_{k,j} = a_k - s\Delta_k - c_{k,j}(a_j - s\Delta_j).$$
(5)

Отметим, что до сих пор мы использовали, по существу, лишь гауссовость и марковость случайного процесса $w(t)$. Обозначим

$$\begin{aligned} A(n, x) &= \sqrt{n} \mathbf{P}\{w_k \leq t_k x \quad \forall k \leq n\}, \\ B(n, x) &= \sqrt{n} \mathbf{P}\{w_k - t_k w(1) \leq t_k x \quad \forall k \leq n\}. \end{aligned}$$

Для винеровского процесса при любом $j < n$ имеем

$$\begin{aligned} A_j &= \mathbf{P}\{w_k - w_j \leq a_k - a_j - s(\Delta_k - \Delta_j) \quad \forall k > j\} \\ &\leq \mathbf{P}\{w_k - w_j \leq (t_k - t_j)D(t_j) \quad \forall k > j\} = \frac{A(n-j, D(t_j)\sqrt{1-t_j})}{\sqrt{n-j}}, \\ A_j &\geq \frac{A(n-j, K^*(t_j)\sqrt{1-t_j})}{\sqrt{n-j}}, \end{aligned}$$

и, аналогично, для любого $j > 1$

$$\begin{aligned} B_j &\leq \mathbf{P}\left\{w_k - \frac{t_k}{t_j} w_j \leq (t_j - t_k) \left(\frac{a(t_j, s)}{t_j} - K(t_j) \right) \quad \forall k < j\right\} \\ &= j^{-1/2} B(j, (a(t_j, s) - t_j K(t_j)) t_j^{-1/2}), \\ B_j &\geq j^{-1/2} B(j, (a(t_j, s) - t_j D^*(t_j)) t_j^{-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, получение асимптотических оценок в (3) можно свести к изучению асимптотики величин $A(n, x)$, $B(n, x)$. Обозначим через C положительные абсолютные константы, а через $C(z)$ – положительные величины, зависящие только от переменных z (не обязательно одни и те же).

ЛЕММА 1. *Справедливы следующие соотношения:*

- 1) $A(n, 0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A(0) \equiv \pi^{-1/2}$;
- 2) $A(n, x) \leq C(1 + |x|)$ для любых n, x ;
- 3) $B(n, x) \leq C(1 + |x|)$ для любых n, x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство 1) доказано, например, в [5, с. 122]. Свойство 2) доказано в [1], отметим только, что утверждение 2) остается справедливым, если величины $t_k = k/n$ в определении $A(n, x)$ заменить на такие t_k , для которых выполнены неравенства $C_1 \leq (t_{k+1} - t_k)n \leq C_2$ для любого k при некоторых положительных константах C_1, C_2 . Свойство 3) докажем, сводя его к 2): заметим, что корреляционная функция случайного процесса $w(t) - tw(1)$ не превосходит корреляционной функции случайного процесса $w(t)$, поэтому мы можем применить неравенство Слепяна [8, с. 10].

ТЕОРЕМА А (Д. Слепян). Пусть $X_0(i), i = 1, \dots, n$, и $X_1(i), i = 1, \dots, n$, – пара гауссовских векторов с нулевыми средними и ковариациями $r_\nu(i, j) = EX_0(i)X_1(j)$, $\nu = 1, 2$, удовлетворяющими при любых i, j условиям

$$r_0(i, i) = r_1(i, i), \quad r_0(i, j) \leq r_1(i, j).$$

Тогда для любых $u(1), \dots, u(n)$ выполнено

$$\mathbf{P}\{X_0(k) \leq u(k) \quad \forall k \leq n\} \leq \mathbf{P}\{X_1(k) \leq u(k) \quad \forall k \leq n\}.$$

Пусть для определенности n – четное число; тогда по неравенству Слепяна

$$\begin{aligned} B(n, x) &\leq n^{1/2} \mathbf{P} \left\{ w_k - t_k w(1) \leq t_k x \quad \forall k \leq \frac{n}{2} \right\} \\ &\leq n^{1/2} \mathbf{P} \left\{ w_k \sqrt{1 - t_k} \leq t_k x \quad \forall k \leq \frac{n}{2} \right\} \leq \sqrt{2} A\left(\frac{n}{2}, x\right) \leq C(1 + |x|). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Ближайшая наша цель – определение асимптотики величины $B(n, x)$ при $n \rightarrow \infty$. Асимптотика величины $A(n, x)$ далее определяется через асимптотику $B(n, x)$. Зафиксируем n и обозначим

$$f_j(a) = \mathbf{P} \left\{ w_k - \frac{k}{j} w_j \leq \frac{k}{j} a \quad \forall k \leq j \right\},$$

через $U_n(t)$, $t \in [0, T]$, обозначим непрерывную функцию, линейную на отрезках $[t_j, t_{j+1}]$ и такую, что

$$U_n(t_j) = n^{1/2} f_j(a), \quad U_n(0) = 0.$$

Зафиксируем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и докажем, используя терему Арцела, что множество функций $\{U_n(t), n > 1\}$ на отрезке $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ компактно в пространстве $C[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$ непрерывных функций с равномерной метрикой. Равномерная ограниченность функций $U_n(t)$ следует из свойства 3) леммы 1:

$$U_n(t_j) = t_j^{-1/2} B(j, at_j^{-1/2}) \leq C t_j^{-1/2} (1 + at_j^{-1/2}) \leq C \cdot \frac{1 + a}{\varepsilon}.$$

Прежде чем доказывать равностепенную непрерывность системы функций $U_n(t)$, оценим производные функций $f_j(a)$.

ЛЕММА 2. *Для любых достаточно малых положительных ε равномерно по $n > 1$, $1 < j < n$ и $\varepsilon < a < 1/\varepsilon$ имеем*

$$\left| \frac{d}{da} f_j(a) \right| \leq C(\varepsilon) n j^{-3/2}, \quad (6)$$

$$\left| \frac{d^2}{da^2} f_j(a) \right| \leq C(\varepsilon) n^2 j^{-5/2}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $q_l(x)$ плотность распределения случайной величины

$$\Psi(l) \stackrel{\text{def}}{=} w_l - \frac{l}{j} w_j.$$

Имеем

$$\frac{d}{da} f_j(a) = \sum_{l=1}^{j-1} \frac{l}{j} q_l\left(\frac{l}{j} a\right) M_1(l) M_2(l),$$

где

$$q_l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \frac{l}{n} \left(1 - \frac{l}{j}\right),$$

$$M_1(l) = \mathbf{P} \left\{ \Psi(k) \leq \frac{k}{j} a \quad \forall k \leq l \mid \Psi(l) = \frac{l}{j} a \right\}, \quad M_1(1) = 1,$$

$$M_2(l) = \mathbf{P} \left\{ \Psi(k) \leq \frac{k}{j} a \quad \forall k \geq l \mid \Psi(l) = \frac{l}{j} a \right\}, \quad M_2(j-1) = 1.$$

Оценим сначала сомножитель $M_1(l)$. При $l \leq 10$ имеем $M_1(l) \leq 1$. Далее, учитывая независимость гауссовских случайных величин $\Psi(k) - kj^{-1}\Psi(l)$ и $\Psi(l)$, выразим условную вероятность $M_1(l)$ через соответствующую безусловную вероятность. Переходя опять к соответствующим условным распределениям, для $k^* = [l/2]$, $l > 10$, получаем

$$\begin{aligned} M_1(l) &= \mathbf{P} \left\{ w_k - \frac{k}{l} w_l \leq 0 \quad \forall k \leq l \right\} = \mathbf{P} \left\{ w \left(\frac{k}{l} \right) - \frac{k}{l} w(1) \leq 0 \quad \forall k \leq l \right\} \\ &= \int_{-\infty}^0 q^*(y) P(k^*, y) P(l - k^*, y) dy, \end{aligned}$$

где $q^*(y)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины

$$\nu = w \left(\frac{k^*}{l} \right) - \frac{k^*}{l} w(1)$$

и

$$P(m, y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P} \left\{ w \left(\frac{k}{l} \right) - \frac{k}{m} w \left(\frac{m}{l} \right) \leq -\frac{k}{m} y \quad \forall k \leq m \right\};$$

здесь мы использовали марковость винеровского моста $w(t) - tw(1)$ и свойство автомодельности: случайный процесс $w^*(t) = w(T-t) - w(T)$, $t \in [0, T]$, является винеровским. Используя еще раз свойство 3) леммы 1, мы можем получить оценку

$$P(k^*, y) P(l - k^*, y) \leq C \cdot \frac{1 + y^2}{l},$$

поэтому для некоторой константы C_3 имеем

$$M_1(l) \leq \frac{C}{l} (1 + \mathbf{E} \nu^2) \leq \frac{C_3}{l}.$$

Вероятность $M_2(l)$ так же, как и выше вероятность $M_1(l)$, выразим через соответствующую безусловную вероятность, в результате находим

$$M_2(l) = f_{j-l}(a) \leq C \left(1 + a \sqrt{\frac{n}{j-l}} \right) \frac{1}{\sqrt{j-l}};$$

здесь также использовано свойство 3) леммы 1. Из полученных оценок следует неравенство (6). Докажем теперь неравенство (7). Имеем

$$\frac{d}{da} f_j(a) = \sum_{l=1}^{j-1} \frac{l}{j} q \left(\frac{l}{j} a \right) M_1(l) f_{j-l}(a);$$

здесь величина $M_1(l)$ не зависит от a . Дифференцируя последнее равенство по a и используя (6), получаем (7). Необходимые оценки сверху возникающих здесь сумм мы опускаем ввиду их достаточной стандартности и громоздкости. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ равномерно по $\varepsilon < a < 1/\varepsilon$ и $n\varepsilon \leq j \leq n(T - \varepsilon)$ имеем

$$|f_{j+1}(a) - f_j(a)| \leq C(\varepsilon) n^{-3/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Psi^*(k) = w_k - \frac{k}{j+1} w_{j+1}$. Ввиду неравенства (6) имеем

$$f_{j+1}(a) = \mathbf{P} \left\{ \Psi^*(k) \leq \frac{k}{j+1} a \quad \forall k \leq j \right\} = L_1 + O(n^{-3/2}),$$

$$L_1 = \mathbf{P} \left\{ \Psi^*(k) \leq \frac{k}{j} a \quad \forall k \leq j \right\}.$$

Далее, нетрудно заметить, что

$$L_1 = L_2 + O \left(\exp \left\{ -\frac{na^2}{2} \right\} \right), \quad L_2 = \mathbf{P} \left\{ \Psi^*(k) \leq \frac{k}{j} a \quad \forall k \leq j-1 \right\}.$$

Обозначим через ξ $(0, 1)$ -нормальную случайную величину, не зависящую от случайного процесса $w(t)$, и через $\varphi(x)$ – ее плотность. Ясно, что в силу неравенств (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} L_2 &= \mathbf{P} \left\{ \Psi(k) \leq \frac{k}{j} \left(a + \xi n^{-1/2} \sqrt{\frac{j}{j+1}} \right) \quad \forall k \leq j-1 \right\} \\ &= O(n^{-2}) + \int_{-\ln n}^{\ln n} \varphi(y) \mathbf{P} \left\{ \Psi(k) \leq \frac{k}{j} (a + n^{-1/2} y + O(n^{-3/2}) y) \quad \forall k \leq j-1 \right\} dy \\ &= O(n^{-2}) + \int_{-\ln n}^{\ln n} \varphi(y) \left(f_j(a) + \frac{d}{da} f_j(a) y n^{-1/2} + O \left(\frac{1+y^2}{n^{3/2}} \right) \right) dy \\ &= f_j(a) + O(n^{-3/2}). \end{aligned}$$

Тем самым лемма доказана.

Из леммы 3 следует равностепенная непрерывность (более того, равномерная липшицевость) системы функций $U_n(t)$, $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Таким образом, эта система функций компактна. Из свойств 2), 3) леммы 1 также нетрудно получить, что

$$\beta_2 - \beta_1 = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sum_{j=[n\varepsilon]}^{[n(1-\varepsilon)]} \Delta_j M_j p_j(a_j - s \Delta_j) ds.$$

Минуя стандартные рассуждения, использующие компактность множества функций $U_n(t)$, $t \in [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$, и рассуждения от противного, будем считать, что $U_n(t) \rightarrow U(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом отрезке вида $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. Представление для разности J_n , соотношения (3) и доказанные свойства системы функций $U_n(t)$, очевидно, справедливы и для произвольных отрезков $[0, T]$. Для того чтобы определить функцию $U(t)$, выберем изначально в качестве $a_j(t)$ постоянные функции $a_1(t) = a > 0$ и $a_2(t) = c < a$, $t \in [0, T]$. Тогда, с одной стороны, очевидно, что

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int_c^a \exp \left\{ -\frac{x^2}{2T} \right\} dx,$$

с другой стороны, рассматривая в (5) асимптотику вероятностей A_j и B_j , в изучаемом случае при $n - j \rightarrow \infty$ имеем

$$(n - j)^{1/2} A_j = A(n - j, 0) \longrightarrow A(0),$$

а при $j \rightarrow \infty$, $j/n \rightarrow t$, $c \rightarrow a$ имеем

$$j^{1/2} B_j = j^{1/2} \mathbf{P} \left\{ w_k - \frac{k}{j} w_j \leq \frac{k}{j} (a(1-s) + cs) \quad \forall k \leq j \right\} \longrightarrow t^{1/2} U(t) \stackrel{\text{def}}{=} V(t).$$

Деля равенство (3) на $a-c$ и переходя к пределу при $c \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \exp \left\{ -\frac{a^2}{2T} \right\} \\ &= A(0) \int_0^T \frac{V(t)}{(t(T-t))^{1/2}} \frac{\exp \left\{ -\frac{a^2}{2t} \right\}}{(2\pi t)^{1/2}} dt \quad \forall a > 0, T > 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При фиксированном a интегральное уравнение (8) является уравнением Абеля [9, с. 107].

ТЕОРЕМА Б. Пусть $f(t)$ – непрерывная функция и

$$\int_0^T \frac{f(t)}{(T-t)^{1/2}} dt = g(T) \quad \forall T > 0.$$

Тогда

$$f(T) = \pi^{-1} \frac{d}{dT} \int_0^T \frac{g(t)}{(T-t)^{1/2}} dt \quad \forall T > 0$$

(производная существует для любого $T > 0$).

Из теоремы Б следует единственность решения $V(t)$ уравнения (8) в классе непрерывных функций, и его можно получить по формуле

$$\frac{\exp \left\{ -\frac{a^2}{2T} \right\}}{T} A(0) V(T) = \pi^{-1} \frac{d}{dT} \int_0^T \frac{2 \exp \left\{ -\frac{a^2}{2t} \right\}}{(t(T-t))^{1/2}} dt \quad \forall T > 0,$$

откуда после замены переменных $t = T/(1+s^2)$, дифференцирования по T и ряда элементарных преобразований определяем, что

$$V(T) = 2^{1/2} a T^{-1/2} \quad \forall a > 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} B(n, a) = V(1) = 2^{1/2} a. \quad (9)$$

Из свойств неотрицательности и монотонности по a функции $V(T)$ и соотношения (9) выводим равенство $V(T) = 2^{1/2} a_+ T^{-1/2}$, где $a_+ = \max\{0, a\}$. Используя теперь лемму 1, теорему Лебега об ограниченной сходимости, независимость случайного процесса $w(t) - tw(1)$ и случайной величины $w(1)$, находим при $n \rightarrow \infty$, что

$$A(n, x) = \mathbf{E} B(n, x - w(1)) \longrightarrow 2^{1/2} G(x).$$

Неравенства теоремы 2 получаются:

1) переходом к пределу при $n \rightarrow \infty$ в формуле (3) и соответствующем интегральном представлении для J_n ;

2) получением оценок снизу и сверху в (5) величины $b_{k,j}$;

3) использованием полученных выше асимптотик для функций $A(n, x)$ и $B(n, x)$.

Теорема 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $a(t)$ – абсолютно непрерывная функция, приращения которой удовлетворяют условиям теоремы 2. Из теоремы 2 следует абсолютная непрерывность распределений случайной величины $\eta = \sup_{[0,T]}(w(t) - a(t))$, более того, соответствующая плотность распределения $p(x)$ удовлетворяет для любого $x > -a(0)$ неравенствам

$$p(x) \leq \int_0^T G(\sqrt{T-t} D(t)) \frac{\exp\left\{-\frac{(a(t,s)+x)^2}{2t}\right\}}{\sqrt{2\pi t}} \left(\frac{a(t) + x - tK(t)}{\sqrt{t}}\right)_+ \\ \times \frac{dt}{(t(T-t))^{1/2}} \stackrel{\text{def}}{=} Z(D(t), K(t)), \quad p(x) \geq Z(K^*(t), D^*(t)),$$

и, разумеется, $p(x) = 0$ для любого $x < -a(0)$.

Действительно, достаточно выбрать $a_2(t) = a_1(t) + \delta$, $a_1(t) = a(t) + x$ и перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в оценках для $\delta^{-1}(\beta_2 - \beta_1)$, полученных в теореме 2.

Приведем в отдельном утверждении асимптотическое представление для величин $A(n, x)$ и $B(n, x)$:

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть ξ_i , $i \geq 1$, – последовательность независимых $(0, 1)$ -нормальных случайных величин, $S_k = n^{-1/2} \sum_{i=1}^k \xi_i$. Тогда для всех x выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \mathbf{P}\left\{S_k - \frac{k}{n} S_n \leq \frac{k}{n} x \quad \forall k \leq n\right\} = 2^{1/2} x_+, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} \mathbf{P}\left\{S_k \leq \frac{k}{n} x \quad \forall k \leq n\right\} = 2^{1/2} G(x). \quad (10)$$

Метод доказательства теоремы 2 может быть распространен на некоторые другие марковские гауссовские случайные процессы. По существу, доказательства здесь сводятся:

А) к оцениванию в (5) сверху и снизу величин A_j и B_j через функции вида $A(n, x)$, $B(n, x)$ (для которых асимптотика при $n \rightarrow \infty$ уже определена);

Б) к наложению условий, позволяющих должным образом оценить сверху и снизу величину $b_{k,j}$ из (5).

Ниже мы рассматриваем некоторый класс гауссовских марковских случайных процессов, а также процесс Орнштейна–Уленбека, в обоих случаях определяются оценки плотности распределения максимума случайных процессов.

§ 2. Гауссовский марковский случайный процесс

Пусть $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, – гауссовский центрированный марковский случайный процесс с непрерывной ковариационной функцией $R(t, s)$. Используя теорему 2, найдем оценку сверху $p(x)$ – плотности вероятностного распределения максимума случайного процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0, 1]$. Для этого оценим вероятности A_j , B_j из (5). Мы будем считать, что $a_2(t) = a_1(t) = x$. Фиксируя j , имеем

$$A_j = \mathbf{P}\{\tau_k \leq x v_{k,j} \quad \forall k \geq j\},$$

где

$$v_{k,j} = \left(1 - \frac{R(t_k, t_j)}{R(t_j, t_j)}\right) \frac{1}{\sqrt{R(t_k, t_k)}}, \quad \tau_k = \widehat{\xi}(t_k) - \widehat{R}(t_k, t_j) \widehat{\xi}(t_j),$$

$$\widehat{\xi}(t) = \frac{\xi(t)}{\sqrt{R(t, t)}}, \quad \widehat{R}(t, s) = E \widehat{\xi}(t) \widehat{\xi}(s).$$

Обозначим

$$s_k = E \tau_k^2 = d^2 \left(1 - \frac{d^2}{4}\right), \quad d^2 = d^2(t_k, t_j) = E(\widehat{\xi}(t_k) - \widehat{\xi}(t_j))^2. \quad (11)$$

ЛЕММА 4. Для всех $j \leq m \leq k$ имеем:

- 1) $s_m \leq s_k$;
- 2) корреляционная функция случайной последовательности τ_k , $k \geq j$, совпадает с корреляционной функцией случайной последовательности $w_0(s_k)$, $k \geq j$, где $w_0(\cdot)$ – стандартный винеровский мост.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является простым следствием марковости случайного процесса $\xi(t)$, точнее, равенства $\widehat{R}(t, s) = \widehat{R}(t, u) \widehat{R}(u, s)$ для любого u , $t < u < s$. Лемма доказана.

Предположим теперь, что выполнены условия:

C1) $v_{k,j} \leq C s_k (1 - s_k)^{1/2}$ для любых k, j ;

C2) $n|s_{k+1} - s_k| \leq C$ для любых k, j, n ;

C3) $1 - d^2(t, s) \geq C > 0$ для любых t, s .

Условие C1) выполнено, например, если $R(t_k, t_j) \geq C$ для любых k, j и $R(t_k, t_k) = 1$ для любого k . Условие C2) выполнено, если $d(t, s) \leq C|t - s|$ для всех t, s .

В силу леммы 4 возможно применить неравенство Слепяна:

$$A_j \leq P\{w(s_k) \leq x v_{k,j} (1 - s_k)^{-1/2} \quad \forall k \geq j\} \\ \leq P\{w(s_k) \leq C x s_k \quad \forall k \geq j\}; \quad (12)$$

здесь во втором неравенстве мы использовали условие C1). Далее, множество точек s_k прореживается так, чтобы расстояния между оставшимися точками имели порядок малости C/n (вероятность в правой части (12) при этом увеличится). Ясно, что количество остающихся точек с учетом (11) и условий C2), C3) не меньше $C_0(s_n - s_j)n \geq C_1 n d^2(t_j, 1)$ для некоторых положительных констант C_0, C_1 . Применяя лемму 1, получаем неравенство $A_j n^{1/2} d(t_j, 1) \leq C(1 + |x|)$, аналогично, неравенство $B_j n^{1/2} d(t_j, 0) \leq C(1 + |x|)$. Окончательно, для любого x имеем

$$p(x) \leq C \int_0^1 \frac{1 + x^2}{d(t, 1) d(t, 0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi R(t, t)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R(t, t)}\right\} dt.$$

§ 3. Случайный процесс Орнштейна–Уленбека

Пусть теперь $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, – гауссовский центрированный марковский случайный процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) = R(t - s) = \exp\{-|t - s|\}.$$

Пусть $a_1(t) = x$, $a_2(t) = x + \delta$. Тогда $b_{k,j} = (x + s\delta)(1 - R(t_k - t_j))$. Для вероятностей из (5) имеем

$$A_j = P\{\mu_k \leq b_{k,j} \quad \forall k \geq j\} = B_{N-j+1},$$

где $\mu_k = \xi(t_k) - R(t_k - t_j)\xi(t_j)$, $N = [Tn]$. Справедлива следующая простая

ЛЕММА 5. *Корреляционная функция случайной последовательности μ_k , $k \geq j$, не больше корреляционной функции случайной последовательности $w_k - w_j$, $k \geq j$, и при $T \leq 1$ не меньше корреляционной функции случайной последовательности $w_0(t_k - t_j)$, $k \geq j$, где $w_0(t) = w(t) - tw(1)$ – стандартный винеровский мост.*

Отметим, что $w_0(t) = w_1(t) + tZ$ при $t \leq T^* - t_j$, $T \leq 1$, где

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{[nT]}{n}, \quad w_1(t) = w(t) - \frac{t}{T^* - t_j} w(T^* - t_j), \\ Z &= \frac{1}{T^* - t_j} w(T^* - t_j) - w(1), \end{aligned} \quad (13)$$

при этом случайная величина Z и случайный процесс $w_1(t)$ некоррелированы, стало быть, независимы, кроме того, при $t \in [t_j, T^*]$

$$\frac{b_{k,j}}{t - t_j} \left(\frac{Dw_0(t - t_j)}{D\mu_k} \right)^{1/2} \geq 0.67(x + s\delta)(1 - T + t_j)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} x^*. \quad (14)$$

Используя (13), (14), лемму 5 и неравенство Слепяна, находим

$$\begin{aligned} A_j &\leq P\{w_k - w_j \leq (x + s\delta)(t - t_j) \quad \forall k \geq j\} \\ &= (N - j)^{-1/2} A(n - j, (x + s\delta)(T - t_j)^{1/2}), \\ A_j &\geq P\{w_0(t_k - t_j) \leq (t_k - t_j)x^* \quad \forall k \geq j\} \\ &= P\{w_1(t_k) \leq t_k(x^* - Z) \quad \forall k \leq N - j\} \\ &= (N - j)^{-1/2} E_Z B(n - j, (x^* - Z)(T^* - t_j)^{1/2}); \end{aligned}$$

здесь $N = [nT]$, E_Z – оператор математического ожидания по распределению случайной величины Z (аналогичные соотношения справедливы и для вероятностей B_j). Таким образом, с учетом асимптотики функций $A(n, x)$ и $B(n, x)$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} (N - j)^{1/2} A_j &\leq 2^{1/2} G((x + s\delta)(T - t_j)^{1/2}) \quad \forall T, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} (N - j)^{1/2} A_j &\geq 2^{1/2} (T - t_j)^{1/2} E_Z (x^* - Z)_+ \\ &\geq 2^{1/2} (1 - T + t_j)^{1/2} G(0.67(x + s\delta)(T - t_j)^{1/2}) \quad \forall T \leq 1. \end{aligned}$$

Оценки сверху и снизу разности вероятностей $\beta_2 - \beta_1$ в результате имеют (с небольшими и очевидными изменениями) такой же вид, как и в теореме 2. Как следствие, в частности, получаем оценки для $p(x)$ – плотности максимума

случайного процесса $\xi(t)$ на отрезке $[0, T]$ для любого x :

$$\begin{aligned} p(x) &\leq 2\varphi(x) \int_0^T G(x(T-t)^{1/2}) G(xt^{1/2}) \frac{dt}{(t(T-t))^{1/2}} & \forall T > 0, \\ p(x) &\geq 2\varphi(x) \int_0^T G(0.67x(T-t)^{1/2}) G(0.67xt^{1/2}) \\ &\quad \times \frac{(1-T+t)^{1/2}(1-t)^{1/2}}{(t(T-t))^{1/2}} dt & \forall T \leq 1; \end{aligned}$$

здесь $\varphi(x)$ – плотность стандартной гауссовской случайной величины. В частности, ввиду оценок

$$G(x) = x\Phi(x) + \varphi(x) \leq \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + x, & x > 0, \\ \varphi(x), & x < 0, \end{cases}$$

получаем, что для любого $T > 0$

$$p(x) \leq \begin{cases} 2\varphi(x)(x\sqrt{T} + 1)^2, & x > 0, \\ \varphi(x) \exp\left\{-\frac{x^2 T}{2}\right\}, & x < 0. \end{cases}$$

Полученные оценки плотностей в рассмотренных специальных случаях лучше универсальной оценки плотности распределения максимума гауссовского случайного процесса из работы [7], в чем нетрудно убедиться, подсчитав асимптотику в нуле интеграла Дадли (фигурирующего в оценке из [7]) для рассматриваемых гауссовских случайных процессов, кроме того, наши оценки, в отличие от оценки из [7], справедливы на всей числовой оси.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Мы сохраняем обозначения $w_k = w(t_k)$, $a_k = a(t_k)$, $k = 1, \dots, n$. Ниже нам понадобится следующее представление для величины V из (1). Рассуждая так же, как и в теореме 2 для $a_1(t) = a(t)$, $a_2(t) = a(t) + x$, и устремляя x к нулю, получаем

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi t_j}} \exp\left\{-\frac{a_j^2}{2t_j}\right\} P\{w_k \leq a_k \quad \forall k \leq n \mid w_j = a_j\}. \quad (15)$$

Далее нам потребуется для любых a_{k-1} , a_k следующая формула:

$$\begin{aligned} O_k &\stackrel{\text{def}}{=} P\{w(t) \leq a_{k-1} + (a_k - a_{k-1})n(t - t_{k-1}) \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k] \mid w_{k-1}, w_k\} \\ &= \begin{cases} 1 - \exp\{-2n(a_{k-1} - w_{k-1})(a_k - w_k)\}, & w_{k-1} \leq a_{k-1}, w_k \leq a_k, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \end{aligned}$$

вытекающая из [10, формула Дуба (4.2.1)]:

$$\begin{aligned} &P\{w(t) - tw(1) \leq a + bt \quad \forall t \in [0, 1]\} \\ &= 1 - \exp\{-2a(a + b)\} \quad \forall a > 0, a + b > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Применяя теорему 2 и учитывая марковость случайного процесса $w(t)$, мы можем теперь вероятность в правой части (1) записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P\{w(t) \leq a(t) \quad \forall t \in [0, 1]\} &= P\{w(t) \leq a_n(t) \quad \forall t \in [0, 1]\} + o(n^{-1/2}) \\ &= EP\{w(t) \leq a_n(t) \quad \forall t \in [0, 1] \mid \vec{w}\} + o(n^{-1/2}) = o(n^{-1/2}) + E \prod_{k=1}^n O_k \\ &= o(n^{-1/2}) + \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} p(y) \prod_{k=1}^n (1 - b_k) dy, \\ b_k &= \exp\{-2n(a_{k-1} - y_{k-1})(a_k - y_k)\}, \quad y_0 = 0, \end{aligned}$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $p(y)$ – плотность распределения случайного вектора $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$, $a_n(t)$ – непрерывная функция, линейная на участках вида $[t_{k-1}, t_k]$, $a_n(t_k) = a_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Далее, обозначим $A_0 = \{w_k \leq a_k \quad \forall k \leq n\}$, $n^* = [\ln n]^{100}$. Справедлива

ЛЕММА 6. *Найдется случайное событие $A_1 \subseteq A_0$ такое, что $P\{A_0 \setminus A_1\} = o(n^{-1/2})$ и для достаточно больших n при справедливости события A_1 выполнено неравенство*

$$\left| \prod_{k=1}^n (1 - b_k^*) - 1 - \sum_{i=1}^{n^*} (-1)^i S_i \right| \leq \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n^*} S_i \right),$$

где

$$\begin{aligned} b_k^* &= \exp\{-2n(a_{k-1} - w_{k-1})(a_k - w_k)\}, \quad S_1 = \sum_{k=1}^n b_k^*, \\ S_i &= \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n \\ |j_1 - j_i| \leq n^*}} b_{j_1}^* \dots b_{j_i}^* \quad \forall i > 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать равенство $P\{A_0 A\} = o(n^{-1/2})$, где для $\mu = \exp\{-2 \ln^2 n\}$

$$A = \{\exists k, r \mid |k - r| > n^*, b_k^* > \mu, b_r^* > \mu\}.$$

Действительно, на $A_1 = A_0 \setminus (A_0 A)$ не более n^* величин b_k^* превосходят уровень μ . Пусть при фиксированном элементарном событии $\omega \in A_1$ без ограничения общности и для определенности $b_k^* \leq \mu$ при $k > n^*$; тогда для этого ω , если $n \geq n_0$ (для достаточно большого n_0 , не зависящего от ω), выполнено

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n (1 - b_k^*) - \prod_{k=1}^{n^*} (1 - b_k^*) \right| &\leq n^{-1}, \\ \left| S_i - \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} b_{j_1}^* \dots b_{j_i}^* \right| &\leq \frac{1}{n^2} \left(1 + \sum_{i=1}^{n^*} S_i \right) \quad \forall i \leq n^*, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство леммы.

Далее, обозначим $\gamma = n^{-1/2} \ln n$ и получим оценку

$$\begin{aligned} P\{AA_0\} &\leq 4 \sum_{r=1+n^*}^n \sum_{k=1}^{r-n^*} P\{w_j \leq a_j \ \forall j, \ w_k \geq a_k - \gamma, \ w_r \geq a_r - \gamma\} \\ &\leq 4\gamma^2 \sum_{r=1+n^*}^n \sum_{k=1}^{r-n^*} u_{k,r} P_1 P_2 P_3; \end{aligned}$$

здесь во втором неравенстве мы перешли к условным вероятностям и учли, что совместная плотность распределения случайных величин (w_k, w_r) на множестве $[a_k - \gamma, a_k] \times [a_r - \gamma, a_r]$ не превосходит $u_{k,r}$:

$$\begin{aligned} u_{k,r} &= C(a) n k^{-1/2} (r-k)^{-1/2} \exp\left\{-C(a) \frac{n}{k}\right\}, \\ P_1 &= P\left\{w_j - \frac{j}{k} w_k \leq a_j - \frac{j}{k} a_k + \frac{j}{k} \gamma \ \forall j \leq k\right\}, \\ P_2 &= P\{w_j - w_r \leq a_j - a_r + \gamma \ \forall j \geq r\}, \\ P_3 &= P\left\{w_j - \frac{r-j}{r-k} w_k - \frac{j-k}{r-k} w_r \leq a_j - \frac{r-j}{r-k} a_k - \frac{j-k}{r-k} a_r + \gamma \ \forall j \in [k, r]\right\} \\ &\leq P\left\{w_j - \frac{j}{r-k} w_{r-k} \leq C(a) \left(\gamma + \frac{j(r-k-j)}{n^2}\right) \ \forall j \leq r-k\right\} \stackrel{\text{def}}{=} P_3^0. \end{aligned}$$

Из лемм 7, 8 и следствия 3, приведенных ниже, вытекают неравенства

$$\begin{aligned} P_1 &\leq C(a, \varepsilon) n k^{-3/2} \ln^6 n \quad \forall k > n^{1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \\ P_2 &\leq C(a) (n-r+1)^{-1/2} \ln^7 n. \end{aligned}$$

Рассуждая далее, как и в предложении 1 (см. ниже), также получаем неравенство

$$P_3^0 \leq C(a) (r-k)^{-1} \ln(r-k) \ln^4 n.$$

Дальнейшие оценки сумм не приводим ввиду их стандартности, отметим только, что для $k \geq n^{1-\varepsilon}$ при оценивании сверху величины $u_{k,r}$ мы пользуемся неравенством $\exp\{-Cn/k\} \leq Ck^2 n^{-2}$, а при $k \leq n^{1-\varepsilon}$ оцениваем $P_1 \leq 1$. Таким образом, $P\{A_0 A\} = o(n^{-1/2})$. Лемма доказана.

Итак,

$$\begin{aligned} &\left| P\{w(t_k) \leq a(t_k) \ \forall k \leq n\} - P\{w(t) \leq a(t) \ \forall t \in [0, 1]\} - \sum_{i=1}^{n^*} (-1)^{i+1} \bar{S}_i \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \left(1 + \sum_{i=1}^{n^*} \bar{S}_i \right) + o(n^{-1/2}), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{S}_1 &= \sum_{k=1}^n Q_k, \quad Q_k = \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} p(y) b_k dy, \\ \bar{S}_i &= \int_{-\infty}^{a_1} \dots \int_{-\infty}^{a_n} p(y) \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n \\ |j_1 - j_i| \leq n^*}} b_{j_1} \dots b_{j_i} dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала сумму $\bar{S}_1$ и величины Q_k . Используя свойства условного математического ожидания и замену переменных $y_{k-1} = a_{k-1} - xn^{-1/2}$, $y_k = a_k - zn^{-1/2}$, для любого $1 < k < n$ имеем

$$\begin{aligned} Q_k &= \int_{-\infty}^{a_{k-1}} \int_{-\infty}^{a_k} \mathbf{P}\{w_j \leq a_j \quad \forall j \leq k-1 \mid w_{k-1} = y_{k-1}\} \\ &\quad \times \mathbf{P}\{w_j \leq a_j \quad \forall j \geq k \mid w_k = y_k\} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{n}{t_{k-1}} \right)^{1/2} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{y_{k-1}^2}{2t_{k-1}} - \frac{n}{2} (y_k - y_{k-1})^2 \right\} b_k dy_{k-1} dy_k \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_k^1(x) J_k^2(z)}{2\pi (nt_{k-1})^{1/2}} \exp \left\{ -2xz - \frac{1}{2t_{k-1}} \left(a_{k-1} - \frac{x}{n^{1/2}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(x - z + n^{1/2} (a_k - a_{k-1}) \right)^2 \right\} dx dz, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_k^1(x) &= \mathbf{P} \left\{ w_j \leq a_j \quad \forall j \leq k-1 \mid w_{k-1} = a_{k-1} - \frac{x}{n^{1/2}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ w_j - \frac{j}{k-1} w_{k-1} \leq a_j - \frac{j}{k-1} a_{k-1} + \frac{j}{k-1} \frac{x}{n^{1/2}} \quad \forall j \leq k-1 \right\}, \\ J_k^2(z) &= \mathbf{P} \left\{ w_j \leq a_j \quad \forall j \geq k \mid w_k = a_k - \frac{z}{n^{1/2}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ w_j - w_k \leq a_j - a_k + \frac{z}{n^{1/2}} \quad \forall j \geq k \right\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогичные представления справедливы для вероятностей Q_1 и Q_n , где $J_1^1(x) \equiv 1$, $J_n^2(z) \equiv 1$.

Ниже в леммах 7, 8 дается асимптотика величин $J_k^1(x)$ и $J_k^2(z)$. Доказательство каждой из них сводится к доказательству ряда утверждений.

ЛЕММА 7. Для некоторого $\delta > 0$ равномерно по $k < n$, $z > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} J_k^2(0) &\leq C(a)(n-k)^{-1/2}, \\ |J_k^2(z) - J_k^2(0)\Delta(z)| &\leq C(a)(1+z^5)(n-k)^{-\delta-1/2} \ln^2 n \stackrel{\text{def}}{=} U, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= 1 + z \int_0^1 \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \exp \left\{ -\frac{s^2 z^2}{2i} \right\} \varrho_i(sz) ds, \\ \varrho_i(z) &= \mathbf{P} \left\{ w \left(\frac{j}{i} \right) - \frac{j}{i} w(1) \leq \frac{j}{i} \frac{z}{i^{1/2}} \quad \forall j \leq i \right\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое из неравенств получаем сразу, применяя лемму 1:

$$J_k^2(0) \leq \mathbf{P}\{w_j - w_k \leq C(a)(t_j - t_k) \quad \forall j \geq k\} \leq C(a)(n-k+1)^{-1/2}.$$

Далее, рассуждая так же, как и в § 1 при выводе интегрального представления для величины J_n и формулы (3), запишем

$$J_k^2(z) - J_k^2(0) = \frac{z}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=k+1}^n p_{i-k} \left(a_i - a_k + \frac{sz}{n^{1/2}} \right) A_i B_i(a) ds, \quad (19)$$

где $p_{i-k}(\cdot)$ – плотность распределения случайной величины $w_i - w_k$. Кроме того, отметим, что

$$\begin{aligned} A_i &= \mathbf{P} \left\{ w_j - w_k \leq a_j - a_k + \frac{sz}{n^{1/2}} \quad \forall j \geq i \mid w_i - w_k \leq a_i - a_k + \frac{sz}{n^{1/2}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \{ w_j - w_i \leq a_j - a_i \quad \forall j \geq i \} = J_i^2(0) \leq \frac{C(a)}{\sqrt{n-i+1}}, \\ B_i(a) &= \mathbf{P} \left\{ w_j - w_k \leq a_j - a_k + \frac{sz}{n^{1/2}} \quad \forall k \leq j \leq i \mid w_i - w_k \leq a_i - a_k + \frac{sz}{n^{1/2}} \right\} \\ &= \mathbf{P} \left\{ w_{j-k} - \frac{j-k}{i-k} w_{i-k} \right. \\ &\quad \left. \leq a_j - a_k - \frac{j-k}{i-k} (a_i - a_k) + \frac{i-j}{i-k} \frac{sz}{n^{1/2}} \quad \forall k < j \leq i \right\}, \end{aligned}$$

при этом $A_n \equiv 1$, $B_{k+1}(a) \equiv 1$.

Далее, в предложениях 1–3, мы изучаем величины A_i , $B_i(a)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Равномерно по s , k , $i \geq k+1$, $z > 0$ имеем*

$$B_i(a) \leq C(a)(1+z^3) \frac{\ln(i-k+1)}{i-k}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $i' = i - k$, $j' = j - k$, $\psi(i, j) = w(\frac{j}{i}) - \frac{j}{i}w(1)$. В силу гладкости функции $a(t)$ мы можем получить оценку

$$\begin{aligned} B_i(a) &\leq \mathbf{P} \left\{ \psi(i', j') \left(\frac{i'}{n} \right)^{1/2} \leq C(a) \frac{j'(i' - j')}{n^2} + \frac{z}{\sqrt{n}} \frac{i' - j'}{i'} \quad \forall j' \leq i' \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ \psi(i', j') \leq C(a) \frac{i' - j'}{i'} \left(\frac{z}{\sqrt{i'}} + \frac{j'}{i'} \right) \quad \forall j' \leq i' \right\} = R. \end{aligned}$$

Так же, как и ранее при рассмотрении вероятности $M_1(l)$, запишем для $v = 0.5C(a)(0.5 + z(i')^{-1/2})$ равенство

$$R = \int_{-\infty}^v q_0(u) P_1(u) P_2(u) du,$$

где $q_0(u)$ – плотность распределения случайной величины $\psi(i', i'/2) = w(0.5) - 0.5w(1)$ (здесь без ограничения общности i' – четное число),

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \mathbf{P} \left\{ \psi(i', j') \leq C(a) \frac{i' - j'}{i'} \left(\frac{z}{\sqrt{i'}} + \frac{j'}{i'} \right) \quad \forall j' \leq \frac{i'}{2} \mid \psi\left(i', \frac{i'}{2}\right) = u \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ w\left(\frac{j'}{i'}\right) - 2\frac{j'}{i'} w(0.5) \leq C(a) \left(\frac{z}{\sqrt{i'}} + \frac{j'}{i'} (1 + |u|) \right) \quad \forall j' \leq \frac{i'}{2} \right\} \\ &\leq (1 + K) \Lambda(i') + R_1, \\ R_1 &= \mathbf{P} \left\{ w(t) - 2tw(0.5) \leq C(a) \left(\frac{z}{\sqrt{i'}} + t(1 + |u|) \right) \quad \forall t \in [0, 0.5] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь в последнем неравенстве использован классический результат Комлопа–Майора–Тупнади, в соответствии с которым для множеств $B \subseteq C[0, 1]$ с липшицевой границей выполнено неравенство

$$|\mathbf{P}\{w_n(t) \subseteq B\} - \mathbf{P}\{w(t) \subseteq B\}| \leq \Lambda(n)(1 + K),$$

где K – константа Липшица множества B , $w_n(t)$ – случайный процесс с непрерывными кусочно линейными траекториями $w_n(t_k) = w(t_k)$, $\Lambda(n)$ – расстояние Леви–Прохорова между распределениями случайных процессов $w(t)$ и $w_n(t)$ (см. [11]). Как известно [11], $\Lambda(n) = O(\ln n / \sqrt{n})$. С другой стороны, из формулы (16) можно вывести липшицевость рассматриваемого множества B с $K \leq C(a)(1 + |z| + z)$, а также оценку $R_1 \leq C(a)z(i')^{-1/2}(1 + |u| + z)$. Итак,

$$P_1(z) \leq C(a)(1 + |u| + z) \left(\frac{\ln(i' + 1)}{\sqrt{i'}} + \frac{z}{\sqrt{i'}} \right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} P_2(z) &= \mathbf{P} \left\{ \psi(i', j') \leq C(a) \frac{i' - j'}{i'} \left(\frac{z}{\sqrt{i'}} + \frac{j'}{i'} \right) \quad \forall j' \geq \frac{i'}{2} \mid \psi\left(i', \frac{i'}{2}\right) = u \right\} \\ &\leq \mathbf{P} \left\{ w\left(\frac{j' - i'/2}{i'}\right) + \frac{i' - 2j'}{i'} w(0.5) \right. \\ &\quad \left. \leq C(a) \left((1 + z + |u|) \frac{i' - j'}{i'} \right) \quad \forall j' \geq \frac{i'}{2} \right\} \leq C(a) \frac{1 + z + |u|}{\sqrt{i'}}; \end{aligned}$$

здесь мы использовали лемму 1. Из полученных оценок следует требуемое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Применение предложения 1 с $a(t) = \text{const}$ к величинам $\rho_i(z)$ для любого $x > 0$ влечет оценку $\Delta(x) \leq C(1 + x^4)$ (указанные величины определены в формулировке леммы 7).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Аналогичными рассуждениями можно доказать неравенство

$$\mathbf{P}\{w_j - t_j w(1) \leq a n^{-1/2} \quad \forall j \leq n\} \leq C \cdot \frac{1 + a^4}{n} \ln^2 n \quad \forall a, n.$$

Пусть величина $B_i(0)$ получается из $B_i(a)$ подстановкой $a(t) \equiv 0$. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Равномерно по $s, k, i \geq k + 1, z > 0$ имеем*

$$\delta^* = |B_i(a) - B_i(0)| \leq C(a)(i')^{5/2} n^{-3/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в (3) мы могли бы оценить $M_j \leq 1$, $p_j(a_j - s\Delta_j) \leq p_j(0)$, так что

$$J_N \leq \sum |\Delta_j| p_j(0).$$

Преобразуя разность δ^* , как в (3), и учитывая замечание 1, получим оценку

$$\delta^* \leq C(a) \sum_{j=k+1}^i \frac{j'(i' - j')}{n^2} \left(\frac{j'}{n} \frac{i' - j'}{i'} \right)^{-1/2},$$

откуда сразу следует требуемое неравенство. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Равномерно по $k < n$, $k < i \leq (n+k)/2$ имеем

$$|A_k - A_i| \leq C(a) \left(\frac{(i-k)^{1/4}}{(n-k)^{3/4}} + \frac{i-k}{n} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем

$$\begin{aligned} A_k - A_i &= [\mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+k} - a_k \quad \forall j \in [0, n-k]\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+k} - a_k \quad \forall j \in [0, n-i]\}] \\ &\quad + [\mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+k} - a_k \quad \forall j \in [0, n-i]\} \\ &\quad - \mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+i} - a_i \quad \forall j \in [0, n-i]\}] = Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

Оценим отдельно первое и второе слагаемые. Заметим, что величина Q_2 аналогична величине J_N из доказательства теоремы 2, и мы можем, используя представление, аналогичное (3), и лемму 1, вывести неравенство

$$\begin{aligned} |Q_2| &\leq C \left(1 + \sup_t |a'(t)| \right)^2 \sum_{j=1}^{n-i} |a_{j+k} - a_{j+i} + a_i - a_k| (j(n-i-j))^{-1/2} \left(\frac{j}{n} \right)^{-1/2} \\ &\leq C(a) \frac{i-k}{n}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь величину Q_1 . Обозначим через $p_{n-i}(z)$ плотность распределения случайной величины w_{n-i} , $\tau = a_{n-i+k} - a_k$, и запишем

$$0 < -Q_1 = \int_0^\infty p_{n-i}(\tau - z) A(z) B(z) dz,$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 - \mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+k} - a_k \quad \forall j \in [n-i, n-k] \mid w_{n-i} = \tau - z\} \\ &= 1 - \mathbf{P}\{w_j - w_{n-i} \leq z + a_{j+k} - a_{n-i+k} \quad \forall j \in [n-i, n-k] \mid w_{n-i} = \tau - z\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{ \sup_{j \leq i-k} w_j \geq z - C(a) \frac{i-k}{n} \right\} \\ &\leq 2\mathbf{P}\left\{ w(1) \geq z \left(\frac{n}{i-k} \right)^{1/2} - C(a) \left(\frac{i-k}{n} \right)^{1/2} \right\}, \\ B(z) &= \mathbf{P}\{w_j \leq a_{j+k} - a_k \quad \forall j \in [0, n-i] \mid w_{n-i} = \tau - z\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ w_j - \frac{j}{n-i} w_{n-i} \leq \frac{j}{n-i} z + a_{j+k} - a_k \right. \\ &\quad \left. - \frac{j}{n-i} (a_{n-i+k} - a_k) \quad \forall j \in [0, n-i] \right\} \\ &\leq C(a) (n-i)^{-1/2} \left(1 + z \left(\frac{n}{n-i} \right)^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Здесь при оценивании $B(z)$ мы использовали лемму 1 и дифференциальные свойства функции $a(t)$. Обозначим $\gamma = \lambda((i-k)/n)^{1/2}$, величину λ выберем

позднее. Используя оценки для функций $A(z)$, $B(z)$, при достаточно больших λ находим, что

$$\begin{aligned} (n-i)^{1/2}|Q_1| &\leq C(a) \int_0^\gamma p_{n-i}(0) \left(1 + z \left(\frac{n}{n-i}\right)^{1/2}\right) dz \\ &\quad + C(a) \int_\gamma^\infty p_{n-i}(\tau - z) \left(1 + z \left(\frac{n}{n-i}\right)^{1/2}\right) dz \mathbf{P}\{w(1) \geq \lambda - C(a)\} \\ &\leq C(a) \left(\frac{i-k}{n-i}\right)^{1/2} (\lambda + \lambda^2) + C(a) \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4}\right\} \leq C(a) \left(\frac{i-k}{n-i}\right)^{1/4}; \end{aligned}$$

здесь мы выбрали $\lambda = C(a)[(n-i)/(i-k)]^{1/8}$. Предложение доказано.

Рассмотрим теперь формулу (19). Наша ближайшая цель – изучить сумму, стоящую под знаком интеграла в (19). Учитывая элементарные соотношения

$$|a_k - a_i| \leq C \cdot \frac{i-k}{n}, \quad |\exp\{-a\} - \exp\{-b\}| \leq |a-b| \quad \forall a, b > 0$$

и оценки величин A_i , $B_i(a)$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^n \left| p_{i-k} \left(a_i - a_k + \frac{sy}{\sqrt{n}} \right) - p_{i-k} \left(\frac{sy}{\sqrt{n}} \right) \right| A_i B_i(a) \\ \leq C(a)(1+y^4)(n-k)^{-1/2} \ln^2 n. \end{aligned}$$

Далее, в силу предложений 1, 2 для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$n^{-1/2} \sum_{i=k+1}^n p_{i-k} \left(\frac{sy}{\sqrt{n}} \right) A_i |B_i(a) - B_i(0)| \leq C(a)(1+y^3)(n-k)^{-1/2-\delta};$$

здесь разность $|B_i(a) - B_i(0)|$ при $i > k + (n-k)^{1/2-\nu}/2$, $\nu > 0$, оценена в соответствии с предложением 1.

Наконец, рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} n^{-1/2} \sum_{i=k+1}^n p_{i-k} \left(\frac{sy}{\sqrt{n}} \right) B_i(0) |A_i - A_k| &= n^{-1/2} \sum_{i=k+1}^\gamma p_{i-k} \left(\frac{sy}{\sqrt{n}} \right) B_i(0) |A_i - A_k| \\ &\quad + n^{-1/2} \sum_{i=\gamma+1}^n p_{i-k} \left(\frac{sy}{\sqrt{n}} \right) B_i(0) |A_i - A_k|, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\gamma = k + (n-k)^{1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, достаточно мало. Второе слагаемое в (20) не превосходит для некоторого $\delta > 0$ величины

$$\begin{aligned} C(a)(1+y^3) \sum_{\gamma}^n \frac{\ln(i-k)}{(i-k)^{3/2}} ((n-i+1)^{-1/2} + (n-k+1)^{-1/2}) \\ \leq C(a)(1+y^3)(n-k)^{-1/2-\delta}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценим, используя предложение 3:

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^\gamma &\leq C(a)(1+y^3) \sum_{i=k+1}^\gamma \frac{\ln(i-k)}{(i-k)^{3/2}} \left(\frac{i-k}{n} + \frac{(i-k)^{1/4}}{(n-k)^{3/4}} \right) \\ &\leq C(a)(1+y^3)(n-k)^{-1/2-\delta}. \end{aligned}$$

Таким образом, заменяя в (19) A_i на A_k , $B_i(a)$ на $B_i(0)$ и $p_i(a_i - a_k + \frac{sy}{\sqrt{n}})$ на $p_i(\frac{sy}{\sqrt{n}})$, получаем утверждение леммы 7.

Рассмотрим теперь величину $J_k^1(x)$. Справедлива

ЛЕММА 8. Для некоторого $\delta > 0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ равномерно по $n^{1-\varepsilon} < k < n$, $x > 0$ имеем

$$J_k^1(0) \leq C(a) \frac{n^{1/2}}{k},$$

$$|J_k^1(x) - J_k^1(0)\Delta(x)| \leq C(a)(1+x^6)k^{-\delta-1/2} \frac{n}{k} \stackrel{\text{def}}{=} U_1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 7. Обозначим

$$\psi_j = w_j - \frac{j}{k-1} w_{k-1}, \quad \bar{a}_i = a_i - \frac{j}{k-1} a_{k-1} + \frac{j}{k-1} \frac{sx}{\sqrt{n}},$$

$$\bar{b}_j = a_j - a_i - \frac{j-i}{k-1-i} (a_{k-1} - a_i) + \frac{j-i}{k-1-i} \frac{sx}{\sqrt{n}}.$$

В силу гладкости функции $a(t)$ и леммы 1 имеем

$$J_k^1(0) \leq \mathbf{P} \left\{ \psi_j \leq \frac{k-1-j}{k-1} C(a) \quad \forall j \leq k-1 \right\} \leq C(a) \frac{n^{1/2}}{k}.$$

Далее, действуя так же, как и в лемме 7, и используя представление, аналогичное (3), запишем:

$$J_k^1(x) - J_k^1(0) = \frac{x}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \bar{p}_i(\bar{a}_i) \bar{A}_i \bar{B}_i(a) ds,$$

где $\bar{p}_i(\cdot)$ – плотность распределения случайной величины ψ_i ,

$$\bar{A}_i = \mathbf{P}\{\psi_j \leq \bar{a}_j \quad \forall j < i \mid \psi_i = \bar{a}_i\} = J_{i+1}^1(0) \leq C(a) \frac{\sqrt{n}}{i}, \quad \bar{A}_1 \equiv 1,$$

$$\bar{B}_i(a) = \mathbf{P}\{\psi_j \leq \bar{a}_j \quad \forall j > i \mid \psi_i = \bar{a}_i\}$$

$$= \mathbf{P}\left\{ w_{j-i} - \frac{j-i}{k-1-i} w_{k-1-i} \leq \bar{b}_j \quad \forall j \in [i+1, k-1] \right\}, \quad \bar{B}_{k-2}(a) \equiv 1.$$

Применяя предложения 1, 2, сразу получаем

$$\bar{B}_i(a) \leq C(a)(1+x^3) \frac{\ln(k-i)}{k-i},$$

$$|\bar{B}_i(a) - \bar{B}_i(0)| \leq C(a)(k-i)^{5/2} n^{-3/2}.$$

Далее нам потребуется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для некоторых $C_1(a) > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по $k > n^{1-\varepsilon}$, $i < k$, $(k-i)/k \leq C_1(a)$, выполнено неравенство

$$|\bar{A}_i - \bar{A}_{k-1}| \leq C(a)(\beta^2 + \beta n^{1/2} i^{-1});$$

здесь $\beta = ((k-1-i)/(k-1))^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим рассматриваемую разность аналогично тому, как это делалось ранее: $\bar{A}_{k-1} - \bar{A}_i = Q_1 + Q_2$, где

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mathbf{P}\{\psi_j \leq \hat{a}_j \quad \forall j < k\} - \mathbf{P}\{\psi_j \leq \hat{a}_j \quad \forall j \in (k-1-i, k)\}, \\ Q_2 &= \mathbf{P}\{\psi_j \leq \hat{a}_j \quad \forall j \in (k-1-i, k)\} - \mathbf{P}\left\{w_j - \frac{j}{i} w_i \leq a_j - \frac{j}{i} a_i \quad \forall j < i\right\}, \\ \hat{a}_j &= a_j - \frac{j}{k-1} a_{k-1}. \end{aligned}$$

Величину Q_1 оценим, используя неравенство $\mathbf{P}\{B\} - \mathbf{P}\{AB\} \leq 1 - \mathbf{P}\{A\}$, справедливое для любых случайных событий A, B . В силу условия $a(0) > 0$ при $(k-i)/k \leq C$ для достаточно малых $C = C(a)$ имеем $\inf_{j \leq k-i} \hat{a}_j \geq C > 0$, значит, рассуждая, как и в доказательстве леммы 7, мы можем получить, что

$$\begin{aligned} |Q_1| &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{j \leq k-i} (\psi_j - \hat{a}_j) \geq 0\right\} \leq \mathbf{P}\left\{\sup_{j \leq k-i} \psi_j \geq C\right\} \\ &\leq \mathbf{P}\left\{\sup_{j \leq k-i} |w_j| \geq C\right\} + \mathbf{P}\left\{\frac{k-i}{k} |w_{k-1}| \geq C\right\} \leq C(a) \frac{k-i}{\sqrt{nk}} \leq C(a) \beta^2. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим слагаемое Q_2 . Обозначим через ξ $(0, 1)$ -нормальную случайную величину, не зависящую от случайного процесса $w(t)$, а также

$$\psi(m, j) = w\left(\frac{j}{m}\right) - \frac{j}{m} w(1), \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_m),$$

$$\begin{aligned} Q(x, m) &= \mathbf{P}\left\{\psi(m, j) \leq \frac{m-j}{m} x_j \quad \forall j \leq m\right\}, \\ x_j &= \sqrt{\frac{n}{i}} a_j - \sqrt{\frac{i}{n}} \int_0^1 a'\left(\frac{j}{n} + \frac{s(i-j)}{n}\right) ds, \\ y_j &= \frac{\sqrt{ni}}{k-1} a_{k-1} - \sqrt{\frac{i}{n}} \int_0^1 a'\left(\frac{k-1-i+j}{n} + \frac{s(i-j)}{n}\right) ds \end{aligned}$$

и отметим, что в новых обозначениях $\bar{A}_i = Q(x, i)$.

После элементарных преобразований имеем $Q_2 = Q_2^1 + Q_2^2$, где

$$Q_2^1 = Q(y + \xi\beta, i) - Q(y, i), \quad Q_2^2 = Q(y, i) - Q(x, i);$$

здесь в первом равенстве мы учли, что $\hat{a}_j \sqrt{n/i} = y_p(i-p)/i$, $p = j - (k-1-i)$ и что случайные величины $\psi_j \sqrt{n/i}$ и $\psi(i, p) + \xi\beta(p-i)/i$ одинаково распределены. Оценим сначала Q_2^2 , используя формулы, аналогичные (3):

$$|Q_2^2| \leq \int_0^1 \sum_{j=1}^i \frac{j}{i} |x_{i-j} - y_{i-j}| \hat{p}_j\left(\frac{j}{i} z_j\right) K_j L_j ds,$$

где $z_j = (1-s)x_{i-j} + sy_{i-j}$, $\hat{p}_j(\cdot)$ – плотность распределения случайной величины $\psi(i, j)$,

$$\begin{aligned} K_j &= \mathbf{P}\left\{\psi(i, k) \leq \frac{k}{i} z_k \quad \forall k \leq j \mid \psi(i, j) = \frac{j}{i} z_j\right\} \\ &= \mathbf{P}\left\{w\left(\frac{k}{i}\right) - \frac{k}{j} w\left(\frac{j}{i}\right) \leq \frac{k}{i} (z_k - z_j) \quad \forall k \leq j\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_j &= \mathbf{P} \left\{ \psi(i, k) \leq \frac{k}{i} z_k \quad \forall k \geq j \mid \psi(i, j) = \frac{j}{i} z_j \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ w \left(\frac{k-j}{i} \right) - \frac{k-j}{i-j} w \left(\frac{i-j}{i} \right) \leq \frac{k}{i} z_k - z_j \frac{j}{i} \frac{k-j}{i-j} \quad \forall j \in [j, i] \right\}.
\end{aligned}$$

Применяя, далее, оценку $|z_k - z_j| \leq C(a) \sqrt{i/n} \sqrt{(k-j)/n}$ и рассуждения, использованные ранее при оценке величины $M_1(l)$, мы можем заключить, что $K_j \leq C(a)j^{-1}$, а применяя лемму 1, можно получить оценку

$$L_j \leq C(a)(i-j)^{-1/2} \left(1 + |z_j| \sqrt{\frac{i}{i-j}} \right).$$

Наконец, нетрудно получить оценки

$$\begin{aligned}
|x_{i-j} - y_{i-j}| &\leq C(a)\beta^2 \sqrt{\frac{n}{i}}, \\
\left(1 + |z_j| \sqrt{\frac{i}{i-j}} \right) \widehat{p}_j \left(\frac{j}{i} z_j \right) &\leq C(a)i^{3/2}j^{-1}(i-j)^{-1/2},
\end{aligned}$$

поэтому окончательно имеем

$$|Q_2^2| \leq C(a)\beta^2 \frac{\sqrt{n}}{i} \sum_{j=1}^i \frac{j}{i} \frac{1}{j} \frac{1}{\sqrt{i-j}} \frac{i^{3/2}}{j\sqrt{i-j}} \leq C(a)\beta^2 \sqrt{n} i^{-1} \ln(i+1).$$

Рассмотрим второе слагаемое

$$Q_2^1 = \mathbf{E} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{j}{i} \xi \beta \int_0^1 \widehat{p}_j \left(\frac{j}{i} (y_{i-j} + s\xi\beta) \right) \widehat{A}_j \widehat{B}_j(\xi) ds;$$

здесь

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_j &= \mathbf{P} \left\{ \psi(j, k) \leq \frac{k}{j} \left(\frac{j}{i} \right)^{1/2} (y_{i-k} - y_{i-j}) \quad \forall k \leq j \right\} \leq \frac{C(a)}{j}, \\
\widehat{B}_j(\xi) &= \mathbf{P} \left\{ w \left(\frac{k-j}{i} \right) - \frac{k-j}{i-j} w \left(\frac{i-j}{i} \right) \leq \frac{k}{i} (y_{i-k} - y_{i-j}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{k-j}{i-j} (s\xi\beta + y_{i-j}) \quad \forall k \geq j \right\} \leq C(a) \left(|\xi|\beta + \frac{\sqrt{n}}{i} \right) \frac{i^{1/2}}{i-j}.
\end{aligned}$$

Ясно, что $|Q_2^1| \leq \Sigma_1 + \Sigma_2$, где

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= C(a) \mathbf{E} \sum_{j=1}^{i-k\varepsilon} \frac{j}{i} |\xi|\beta \frac{i}{\sqrt{j(i-j)}} \frac{1}{j} \left(|\xi|\beta + \sqrt{\frac{n}{i}} \right) \frac{i^{1/2}}{i-j} \\
&\leq C(a) \mathbf{E} \sum_{j=1}^{i-k\varepsilon} \beta \sqrt{n} \frac{1 + \xi^2}{\sqrt{j(i-j)^3}} \leq C(a, \varepsilon) \beta \frac{\sqrt{n}}{i}, \\
\Sigma_2 &= C(a) \mathbf{E} \sum_{j=i-k\varepsilon}^{i-1} \beta \sqrt{n} \frac{1 + \xi^2}{\sqrt{j(i-j)^{3/2}}} \exp \left\{ -\frac{j(y_{i-j} - s\xi\beta)^2}{2(i-j)} \right\}.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $E(1+\xi^2)\chi(s|\xi|\beta > C(n/i)^{1/2}) \leq C\beta(i/n)^{1/2}$ и что для достаточно малых ε выполнено $y_{i-j} \geq C(n/i)^{1/2}$ (в силу условия $a(0) > 0$), мы можем получить $\Sigma_2 \leq C(a)(\beta^2 + \beta n^{-1/2})$. Предложение доказано.

Далее рассуждаем так же, как и в доказательстве леммы 7:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \left| \bar{p}_i(\bar{a}_i) - \bar{p}_i\left(\frac{isx}{(k-1)n^{1/2}}\right) \right| \bar{A}_i \bar{B}_i(a) ds \\ & \leq C(a) \frac{x}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \tau^{-3/2} \left| \bar{a}_i^2 - \frac{(isx)^2}{(k-1)^2 n} \right| ds \\ & \quad \times \min\left(1, \frac{\sqrt{n}}{i}\right) (1+x^3)(k-i)^{-1} \ln n \leq CU_1, \end{aligned}$$

где U_1 – величина, определенная в формулировке леммы 8, $\tau = D\psi_i = i(k-1-i)n^{-1}(k-1)^{-1}$. Справедлива также оценка

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \bar{p}_i\left(\frac{isx}{(k-1)n^{1/2}}\right) \bar{A}_i |\bar{B}_i(a) - \bar{B}_i(0)| ds \\ & \leq C(a) \frac{1+x^4}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \tau^{-1/2} \min\left(1, \frac{\sqrt{n}}{i}\right) \min\left(\frac{\ln(k-i)}{k-i}, \frac{(k-i)^{5/2}}{n^{3/2}}\right) \\ & \leq CU_1, \end{aligned}$$

и, наконец, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{x}{n^{1/2}} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \bar{p}_i\left(\frac{isx}{(k-1)n^{1/2}}\right) |\bar{A}_i - \bar{A}_{k-1}| \bar{B}_i(0) ds \\ & \leq C(a) \frac{1+x^4}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{k-2} \frac{i}{k-1} \tau^{-1/2} |\bar{A}_i - \bar{A}_{k-1}| \frac{\ln n}{k-i} \leq CU_1; \end{aligned}$$

здесь разность $|\bar{A}_i - \bar{A}_{k-1}|$ при $(k-i)/k \leq k^{-\nu}$ для некоторого достаточно малого $\nu > 0$ мы оцениваем в соответствии с предложением 4, для остальных i она не превосходит $C(a) \min(1, \sqrt{n}/i)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} J_k^1(x) &= J_k^1(0) \left(1 + x \int_0^1 \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{i}{(k-1)(k-1-i)} \right)^{1/2} \right. \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{is^2x^2}{2(k-1)(k-1-i)} \right\} \varrho_{k-1-i}(sx) dx \Big) + O(U_1) \\ &= J_k^1(0) \Delta(x) + O(U_1). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Леммы 7 и 8 позволяют оценить разность

$$\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} Q_k - C_1 J_k^1(0) J_k^2(0) p(t_{k-1}, a_{k-1}) n^{-1/2},$$

где $p(t, x)$ – плотность распределения случайной величины $w(t)$,

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \Delta(x) \Delta(z) \exp\left\{-\frac{(x+z)^2}{2}\right\} dx dz. \quad (21)$$

Пусть сначала $1 < k < n^{1-\varepsilon}$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. В этом случае

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n^{1-\varepsilon}} |\delta_k| &\leq \sum_{k=1}^{n^{1-\varepsilon}} \left(\mathbb{E} b_k^* \chi(w_k \leq a_k, w_{k-1} \leq a_{k-1}) + C_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-C(a)n^\varepsilon\} \right) \\ &\leq C(a)n \exp\{-C(a)n^\varepsilon\}, \end{aligned}$$

где $\chi(A)$ – индикатор случайного множества A . При $k = 1$, очевидно, $Q_1 \leq \mathbb{E} b_k^* \chi(w_1 \leq a_1) = o(n^{-1/2})$ и, стало быть, этот член дает пренебрежимо малый вклад в асимптотику суммы $\bar{S}_1 = \sum_{k=1}^n Q_k$. Пусть теперь $n^{1-\varepsilon} < k < n$; обозначим

$$\begin{aligned} G_k^1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_k^1(x) J_k^2(z)}{\sqrt{2\pi n}} p(t_{k-1}, a_{k-1}) \exp\left\{-\frac{(x+z)^2}{2}\right\} dx dz, \\ G_k^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_k^1(0) J_k^2(0) \Delta(x) \Delta(z)}{\sqrt{2\pi n}} p(t_{k-1}, a_{k-1}) \exp\left\{-\frac{(x+z)^2}{2}\right\} dx dz. \end{aligned}$$

Из лемм 7, 8 для достаточно малых $\varepsilon > 0$ выводим неравенства

$$\begin{aligned} J_k^1(x) &\leq C(a)(1+x^6)n^{1/2}k^{-1}, \\ |\nu_k| &\stackrel{\text{def}}{=} |J_k^1(x)J_k^2(z) - J_k^1(0)J_k^2(0)\Delta(x)\Delta(z)| \\ &\leq C(a)(1+x^6)(1+z^5)((n-k)^{-1/2}nk^{-3/2-\delta} \\ &\quad + n^{1/2}k^{-1}(n-k)^{-1/2-\delta_1} \ln^2 n), \\ J_k^2(z) &\leq C(a)(1+z^5)(n-k)^{-1/2}(1+(n-k)^{-\delta} \ln^2 n), \end{aligned}$$

поэтому ввиду интегрального представления для величины Q_k и неравенства $|1 - \exp\{b-a\}| \leq |b-a| \exp\{b\}$ при $a, b > 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n |Q_k - G_k^1| &= o(n^{-1/2}), \\ \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n |G_k^1 - G_k^2| &\leq C(a)n^{-1/2} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n t_{k-1}^{-1/2} \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{Cn}{k}\right\} \int_0^\infty \int_0^\infty |\nu_k| \exp\left\{-\frac{(x+z)^2}{2}\right\} dx dz = o(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^n \delta_k = \sum_{k=1}^n (Q_k - G_k^2) = o(n^{-1/2})$, и окончательно, с учетом (21) имеем

$$\bar{S}_1 = \sum_{k=1}^n Q_k = \sum_{k=1}^n G_k^2 + o(n^{-1/2}) = C_1 V n^{-1/2} + o(n^{-1/2}).$$

Здесь мы использовали представление

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n J_{k-1}^1(0) J_k^2(0) p(t_k a_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n J_{k-1}^1(0) J_k^2(0) p(t_{k-1} a_{k-1});$$

первое равенство эквивалентно (15), а второе нетрудно вывести, используя свойства величин $J_k^1(0)$, $J_k^2(0)$.

Итак, мы определили асимптотику слагаемого $\bar{S}_1$ (см. (17) и лемму 6). Рассмотрим теперь остальные суммы $\bar{S}_i$, $i > 1$. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ запишем

$$\bar{S}_i = \int_{-\infty}^{a_1} \cdots \int_{-\infty}^{a_n} p(y) \sum_{\substack{n^{1-\varepsilon} \leq j_1 < \cdots < j_i \leq n \\ |j_1 - j_i| \leq n^*}} b_{j_1} \cdots b_{j_i} dy + R_i,$$

где остаток R_i может быть оценен, как и ранее:

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq n^{n^*} \sum_{k=1}^{n^{1-\varepsilon}} \mathbb{E} b_k^* \chi(w_k \leq a_k, w_{k-1} \leq a_{k-1}) \\ &\leq C(a) n^{1+n^*} \exp\{-C(a)n^\varepsilon\} = O(n^{-100}). \end{aligned} \quad (22)$$

Для завершения доказательства теоремы нам осталось в (17) оценить сумму $\sum_{i=1}^{n^*} \bar{S}_i$ и определить асимптотику суммы $\sum_{i=1}^{n^*} (-1)^{i+1} \bar{S}_i$.

ЛЕММА 9. *Справедлива оценка $\sum_{i=1}^{n^*} \bar{S}_i \leq C(a)(n^*)^{10}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (22) после элементарной перегруппировки членов имеем

$$\sum_{i=1}^{n^*} \bar{S}_i \leq C(a) + \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^{n-n^*} D(k, k+n^*),$$

где

$$D(k, m) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \chi(A_0) b_k^* \prod_{j=k+1}^m (1 + b_j^*), \quad A_0 = \{w_k \leq a_k \quad \forall k \leq n\}.$$

Следующие неравенства вытекают непосредственно из лемм 7, 8: для некоторых $\delta > 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$ равномерно по $n^{1-\varepsilon} \leq k \leq n$ имеем

$$\begin{aligned} J_k^1(x) &\leq C(a)(1 + x^6) \delta_k^1, & J_k^2(y) &\leq C(a)(1 + y^6) \delta_k^2, \\ \delta_k^1 &= \frac{\sqrt{n}}{k} + \frac{n}{k^{\delta+3/2}}, & \delta_k^2 &= (n-k)^{-1/2} (1 + (n-k)^{-\delta} \ln^2 n). \end{aligned} \quad (23)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \xi(k) &= n^{1/2}(a_k - w_k), \\ \Psi(k) &= (1 + b_k^*) \chi(w_{k+1} \leq a_{k+1}) = (1 + \exp\{\xi(k)\xi(k+1)\}) \chi(\xi(k+1) \geq 0), \\ B_k^* &= \{\xi(k) \geq 0, \xi(k+1) \geq 0\}. \end{aligned}$$

Переходя к условным математическим ожиданиям и учитывая (23), получаем

$$\begin{aligned} D(k, m) &= \mathbb{E} J_{k+1}(\xi(k)) \chi(B_k^*) b_k^* \prod_{j=k+1}^m \Psi(j) J_{m+1}^2(\xi(m+1)) \\ &\leq C(a) \delta_{k+1}^1 \delta_{m+1}^2 \mathbb{E} (1 + \xi^6(k)) \chi(B_k^*) b_k^* \prod_{j=k+1}^m \Psi(j) (1 + \xi^6(m+1)). \end{aligned}$$

Дальнейшие оценки связаны с получением некоторых рекуррентных формул. Во-первых, для $\lambda = n^{1/2}(a_{j+1} - a_j)$, $\xi_0 = n^{1/2}(w_j - w_{j+1})$ и любого $z > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\Psi(j) \mid \xi(j) = z) &= \mathbb{E}(1 + \exp\{-2z(z + \lambda + \xi_0)\})\chi(z + \lambda + \xi_0 \geq 0) \\ &= \Phi(z + \lambda) + e^{-2z\lambda}\Phi(-z + \lambda) \leq 1 + C(a)n^{-1/4}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $\Phi(\cdot)$ – функция распределения $(0, 1)$ -нормальной случайной величины. Последнее неравенство выполнено, если $\lambda > 0$, так как тогда

$$\Phi(z + \lambda) + e^{-2z\lambda}\Phi(-z + \lambda) \leq \Phi(z) + \Phi(-z) + C\lambda = 1 + C\lambda \leq 1 + C(a)n^{-1/4}.$$

При $\lambda < 0$ и $0 < z < |\lambda|^{-1/2}$ доказательство аналогично. Если же $\lambda < 0$, $z \geq |\lambda|^{-1/2}$, то в силу стандартной оценки $\Phi(-z) \leq |z|^{-1}\varphi(z)$ при $z > 0$, где $\varphi(z)$ – плотность распределения $(0, 1)$ -нормальной случайной величины, имеем

$$\begin{aligned} \Phi(z + \lambda) + e^{-2z\lambda}\Phi(-z + \lambda) &\leq 1 + \exp\{-2z\lambda - (z - \lambda)^2/2\}(2\pi)^{-1/2}(z - \lambda)^{-1} \\ &\leq 1 + C(a)n^{-1/4}. \end{aligned}$$

Итак, для фиксированного k и $m = k + n^*$, последовательно применяя (24), получаем

$$\begin{aligned} G_0(m) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(1 + \xi^6(k))\chi(B_k^*)b_k^* \prod_{j=k+1}^m \Psi(j) \\ &\leq C(a)(1 + C(a)n^{-1/4})^{m-k} \leq C(a). \end{aligned} \quad (25)$$

Рассуждая аналогично, получаем

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\Psi(j)\xi^i(j+1) \mid \xi(j) = z) - z^i \mathbb{E}(\Psi(j) \mid \xi(j) = z) \\ &= \mathbb{E}(1 + \exp\{-2z(z + \lambda + \xi_0)\})\chi(z + \lambda + \xi_0 \geq 0) \sum_{p=0}^{i-1} C_i^p z^p (\lambda + \xi_0)^{i-p} \\ &\leq 2 \sum_{p=0}^{i-1} C_i^p z^p \mathbb{E}|\lambda + \xi_0|^{i-p}, \end{aligned}$$

поэтому для всех $1 \leq i \leq 6$, $m > k$ имеем

$$\begin{aligned} G_i(m) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(1 + \xi^6(k))\chi(B_k^*)b_k^* \prod_{j=k+1}^m \Psi(j)\xi^i(m+1) \\ &\leq G_i(m-1) + C(a) \sum_{p=0}^{i-1} G_p(m). \end{aligned}$$

Отсюда и из (25) следуют оценки

$$\begin{aligned} G_i(m) &\leq C(a)(m - k + 1)^i, \\ D(k, m) &\leq C(a)\delta_k^1 \delta_{m+1}^2 (G_0(m) + G_6(m)) \leq C(a)(n^*)^6 \delta_k^1 \delta_{m+1}^2. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения очевидны. Лемма доказана.

Таким образом, правая часть (17) есть $o(n^{-1/2})$. Справедлива

ЛЕММА 10. При $n \rightarrow \infty$ справедлива оценка

$$-\sum_{i=2}^{n^*} (-1)^{i+1} \bar{S}_i = V n^{-1/2} \sum_{i=2}^{\infty} C_i + o(n^{-1/2}),$$

где C_i – константы, определенные в формулировке теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (22) после элементарной перегруппировки членов имеем

$$-\sum_{i=2}^{n^*} (-1)^{i+1} \bar{S}_i = o(n^{-99}) + \sum_{i=2}^{n^*} L_i,$$

где

$$L_i = \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^{n-i+1} D^*(k, k+i-1), \quad D^*(k, m) \stackrel{\text{def}}{=} E\chi(A_0) b_k^* \prod_{j=k+1}^{m-1} (1 - b_j^*) b_m^*.$$

Рассуждая далее, как и в доказательстве леммы 9, получаем

$$\begin{aligned} D^*(k, m) &= E J_k(\xi(k)) \chi(B_k) b_k^* \prod_{j=k+1}^{m-1} \Psi^*(j) b_m^* J_{m+1}^2(\xi(m+1)) \\ &\quad \times J_{m+1}^2(\xi(m+1)) \chi(\xi(m+1) \geq 0), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\Psi^*(j) = (1 + \exp\{\xi(j)\xi(j+1)\}) \chi(\xi(j+1) \geq 0) \leq 1.$$

Пусть величина $D^{**}(k, m)$ получается из $D^*(k, m)$ в результате замены $J_k^1(x)$ и $J_{m+1}^2(z)$ в (26) соответственно на (“главные члены их разложений”) $J_k^1(0)\Delta(x)$ и $J_{m+1}^2(0)\Delta(z)$. Соответствующую погрешность оценим, пользуясь леммами 7, 8:

$$|D^*(k, m) - D^{**}(k, m)| \leq C(a) (\delta_k^1 \ln^2 n (n-k)^{-\delta-1/2} + \delta_{m+1}^2 n k^{-\delta-3/2}) \Delta(k, m),$$

где $\delta_k^1, \delta_{m+1}^2$ – величины, определенные ранее, в лемме 9,

$$\begin{aligned} \Delta(k, m) &= E(1 + \xi^6(k))(1 + \xi^6(m+1)) b_k^* b_m^* \chi(\xi(j) \geq 0 \quad \forall j \in [k, m+1]) \\ &\leq C(a) \frac{\ln(m-k+1)}{m-k} E\Psi^*(k, m), \end{aligned}$$

$$\Psi^*(k, m) = (1 + \xi^6(k))(1 + \xi^6(m+1)) b_k^* b_m^* \chi(B_k^* B_m^*) (1 + \xi^4(k) + \xi^4(m));$$

неравенство здесь получено в результате использования замечания 1 для вероятности

$$P\{\xi(j) \geq 0 \quad \forall j \in [k+1, m] \mid \xi(k) = z, \xi(m+1) = s\}.$$

Далее, обозначим $A^* = \{\xi(k) \geq 2n^* \cup \xi(m) \geq 2n^*\}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} A^* &\subseteq \{\xi(k) \geq 2n^*, \xi(k+1) \geq n^* \cup |\xi(k) - \xi(k+1)| \geq n^* \cup \\ &\quad \cup \xi(m) \geq 2n^*, \xi(m+1) \geq n^* \cup |\xi(m) - \xi(m+1)| \geq n^*\}, \end{aligned}$$

поэтому, используя конечность момента $E(\Psi^*(k, m))^2$ и неравенство Коши–Буняковского, можно получить оценку

$$E(\Psi^*(k, m))\chi(A^*) \leq C(P^{1/2}\{|\xi(k) - \xi(k+1)| \geq n^*\} + P^{1/2}\{|\xi(m) - \xi(m+1)| \geq n^*\} + \exp\{-C(n^*)^2\}) \leq C \exp\{-C(n^*)^2\}.$$

Кроме того, используя оценку сверху из доказательства леммы 6 для совместной плотности распределения гауссовского случайного вектора (w_k, w_m) на соответствующем множестве, для дополнения $\bar{A}^*$ получаем

$$\begin{aligned} E(\Psi^*(k, m))\chi(\bar{A}^*) &\leq (n^*)^C P\{\bar{A}^*\} + C \exp\{-C(n^*)^2\} = C \exp\{-C(n^*)^2\} \\ &\quad + (n^*)^C P\{w_k \in [a_k - 2n^*n^{-1/2}, a_k], w_m \in [a_m - 2n^*n^{-1/2}, a_m]\} \\ &\leq (n^*)^C (2n^*n^{-1/2})^2 n k^{-1/2} (m-k)^{-1/2} \exp\{-Cn/k\} + C \exp\{-C(n^*)^2\} \\ &\leq C n^{-1/2} (n^*)^C (m-k)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Суммируя все полученные оценки, заключаем, что для $m = k + i - 1$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено

$$\sum_{i=2}^{n^*} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n |D^*(k, m) - D^{**}(k, m)| = o(n^{-1/2}).$$

Далее, производя замену переменных $y_q = a_q - x_q n^{-1/2}$, для $q = k, k+1, \dots, m+1$ получаем

$$\begin{aligned} D^{**}(k, m) &= n^{-1/2} J_k^1(0) J_{m+1}^2(0) \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Delta(x_k) \Delta(x_{m+1}) \\ &\quad \times \exp\{-2x_k x_{k+1} - 2x_m x_{m+1}\} \prod_{j=k+1}^{m-1} (1 - \exp\{-2x_k x_{k+1}\}) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi t_k}} \exp\left\{-\frac{1}{2t_k} \left(a_k - \frac{x_k}{n^{1/2}}\right)^2\right\} \Pi(x, a) dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Pi(x, a) &= \prod_{j=k}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{n}{2} (a_j - a_{j+1} + (x_{j+1} - x_j) n^{-1/2})^2\right\}, \\ x &= (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{m+1}). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} C_{k,m} &= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \Delta(x_k) \Delta(x_{m+1}) \exp\{-2x_k x_{k+1} - 2x_m x_{m+1}\} \\ &\quad \times \prod_{j=k+1}^{m-1} (1 - \exp\{-2x_j x_{j+1}\}) \Pi(x, 0) dx = C_{m-k+1} \end{aligned} \quad (27)$$

и $p(t, x)$ – плотность распределения случайной величины $w(t)$. Ясно, что константа $C_{k,m}$ зависит только от разности $m - k$. Оценим разность:

$$\begin{aligned} & |(n^{-1/2} J_k^1(0) J_{m+1}^2(0) p(t_k, a_k))^{-1} D^*(k, m) - C_{k,m}| \\ & \leq C(a) \int_0^\infty \dots \int_0^\infty (1 + x_k^4)(1 + x_{m+1}^4) \exp\{-2x_k x_{k+1} - 2x_m x_{m+1}\} \\ & \quad \times \Pi(x, 0) |\exp\{\tilde{A}(x)\} - 1| dx, \end{aligned} \quad (28)$$

где при $k > n^{1-\varepsilon}$, $m - k \leq n^* + 1$, $\varepsilon \leq 0.25$,

$$\begin{aligned} |\tilde{A}(x)| & \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{n}{2} \sum_{j=k}^m \left(\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{n^{1/2}} \right)^2 - \left(a_j - a_{j+1} + \frac{x_{j+1} - x_j}{n^{1/2}} \right)^2 \right) - \frac{x_k^2}{2k} + \frac{x_k a_k}{tn^{1/2}} \right| \\ & \leq C(a) n^{-1/4} \left(1 + x_k^2 + \sum_{j=k}^m |x_{j+1} - x_j| \right) \end{aligned}$$

и использована оценка $\Delta(x) \leq C(1 + x^4)$ (см. следствие 1). Применяя неравенство $|e^x - 1| \leq |x|e^{|x|}$, получаем, что правая часть (28) не превосходит (с точностью до константы) величины

$$\begin{aligned} & n^{-1/4} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty (1 + x_k^4)(1 + x_{m+1}^4) \exp\{-2x_k x_{k+1} - 2x_m x_{m+1}\} \Pi(x, 0) \\ & \quad \times \left(1 + x_k^2 + \sum_{j=k}^m |x_{j+1} - x_j| \right) \\ & \quad \times \exp \left\{ C(a) n^{-1/4} \left(1 + x_k^2 + \sum_{j=k}^m |x_{j+1} - x_j| \right) \right\} dx \leq C(a)(m - k + 1) n^{-1/4}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство нетрудно получить, производя интегрирование последовательно по $x_{m+1}, x_m, \dots$. Итак, для $m = k + i - 1$ имеем

$$\sum_{i=2}^{n^*} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n |D^*(k, m) - n^{-1/2} J_k^1(0) J_{m+1}^2(0) p(t_k, a_k) C_{k,m}| = o(n^{-1/2})$$

и, окончательно, с учетом (15) (для $m = k + i - 1$) получаем

$$\begin{aligned} - \sum_{i=2}^{n^*} (-1)^{i+1} \bar{S}_i & = o(n^{-1/2}) + n^{-1/2} \sum_{i=2}^{n^*} \sum_{k=n^{1-\varepsilon}}^n J_k^1(0) J_{m+1}^2(0) p(t_k, a_k) C_{k,m} \\ & = o(n^{-1/2}) + n^{-1/2} V \sum_{i=2}^{\infty} C_i. \end{aligned}$$

Сходимость ряда из C_i следует из асимптотической формулы (1) и рассуждений от противного. Лемма доказана.

Применение леммы 6 завершает доказательство теоремы 1, при этом константа C^* определяется равенством (2).

Теорема 1 доказана.

Список литературы

1. С. В. Нагаев, “О скорости сходимости в одной граничной задаче. I”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **15**:2 (1970), 179–199; англ. пер.: S. V. Nagaev, “On the speed of convergence in a boundary problem. I”, *Theory Probab. Appl.*, **15** (1971), 163–186.
2. А. И. Саханенко, “О скорости сходимости в одной граничной задаче”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **19**:2 (1974), 416–421; англ. пер.: A. I. Sahanenko, “The rate of convergence in a boundary problem”, *Theory Probab. Appl.*, **19** (1975), 399–403.
3. К. А. Боровков, “Скорость сходимости в одной граничной задаче”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **27**:1 (1982), 141–142; англ. пер.: K. A. Borovkov, “Rate of convergence in a boundary problem”, *Theory Probab. Appl.*, **27** (1982), 148–149.
4. Ю. В. Прохоров, “Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **1** (1956), 177–238.
5. А. А. Боровков, *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания*, Наука, М., 1972; англ. пер.: A. A. Borovkov, *Stochastic processes in queueing theory*, Appl. Math., **4**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.
6. В. А. Дмитриевский, “Оценки распределения максимума гауссовского поля”, *Случайные процессы и поля*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1979, 22–31.
7. М. А. Лифшиц, “О распределении максимума гауссовского процесса”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **31**:1 (1986), 134–142; англ. пер.: M. A. Lifshits, “Distribution of the maximum of a Gaussian process”, *Theory Probab. Appl.*, **31**:1 (1986), 125–132.
8. В. И. Питербарг, *Асимптотические методы в теории гауссовских случайных процессов и полей*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1988; англ. пер.: V. I. Piterbarg, *Asymptotic methods in the theory of Gaussian processes and fields*, Transl. Math. Monogr., **148**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
9. А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов, *Интегральные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989.
10. П. Е. Баскакова, А. Н. Бородин, “Таблицы распределения функционалов от процесса броуновского движения”, *Проблемы теории вероятностных распределений*, Записки науч. семин. ПОМИ, **194**, ПОМИ, СПб., 1992, 8–20; англ. пер.: P. E. Baskakova, A. N. Borodin, “Tables of distributions of functionals of Brownian motion”, *J. Math. Sci.*, **75**:5 (1995), 1873–1883.
11. А. И. Саханенко, “Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных слагаемых с экспоненциальными моментами”, *Предельные теоремы для сумм случайных величин*, Тр. Ин-та матем. и мех., **3**, Наука, Новосибирск, 1984, 4–49.

Н. К. БАКИРОВ (N. K. BAKIROV)
 Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа
 E-mail: bakirovvnk@rambler.ru

Поступило в редакцию
 15.03.2006
 28.09.2007