Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, С. В. Конягин, Об оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 6, 31–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:47:28

УДК 517.518.4

А. С. Белов, С. В. Конягин

Об оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами

Через $M_Z^\downarrow(n)$ ($K_Z^\downarrow(n)$) обозначим наименьшее значение a_0 , которое может быть у неотрицательного тригонометрического полинома

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$$

с целыми неотрицательными коэффициентами $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$, удовлетворяющими условию $a_n \geq 1$ (соответственно $\sum_{k=1}^n a_k = n$).

В работе доказывается, что для всех натуральных $n \geq 3$ верны оценки

$$\frac{\ln^2 n}{\ln \ln n} \ll K_Z^\downarrow(n) \ll M_Z^\downarrow(n) \ll (\ln n)^3.$$

Библиография: 11 наименований.

Введение

Последовательность положительных действительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ называется *приемлемой*, если она удовлетворяет условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\lambda_n < \infty, \quad (0.1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\lambda_n) \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (0.2)$$

Если же, кроме того, выполнено условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\lambda_n) > 0, \quad x > 0, \quad (0.3)$$

то такую последовательность Λ будем называть *строго приемлемой*.

Это определение введено одним из авторов в работе [1]. Цель этой статьи состоит в изучении приемлемых последовательностей и в их применении к оценке свободного члена неотрицательного тригонометрического полинома с целыми коэффициентами. Для этого будет выявлена тесная связь, которая существует между

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований; проекты 96-01-00094 и 96-01-00378.

приемлемыми последовательностями и неотрицательными тригонометрическими полиномами с монотонными целыми коэффициентами.

Пусть $\alpha \in (0, 1)$ – единственный корень уравнения

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt = 0, \quad (0.4)$$

а $\beta \in (\alpha, 1)$ – единственный (см. [2]) корень уравнения

$$\pi^\beta \int_0^{3\pi/2} t^{-\beta} \cos t \, dt = 1. \quad (0.5)$$

Отметим, что $\alpha = 0.308\dots$, $\beta = 0.456\dots$

Примеры приемлемых последовательностей дает

ТЕОРЕМА 0.1. *Справедливы следующие четыре утверждения:*

1) *при всех $\gamma \in [\beta, 1)$ последовательность $\{n^{1/\gamma}\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой; более того, для любых $\gamma \in [1/2, 1)$ и $x \geq 1/2$ верна оценка*

$$\sum_{n=1}^\infty \sin \frac{\pi x}{n^{1/\gamma}} > \frac{x^\gamma}{20(1-\gamma)}; \quad (0.6)$$

2) *при всех $\gamma \in [\alpha, 1)$ последовательность $\{(n+1)^{1/\gamma}\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой;*

3) *при всех $q > 1$ и $\lambda \geq 3q^q$ последовательность $\{(n+\lambda-1)^q\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой;*

4) *если последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ лакунарна по Адамару, т. е. $\inf\{\lambda_{n+1}/\lambda_n : n \geq 1\} > 1$, то она не является приемлемой; в частности, при каждом $\lambda > 1$ последовательность $\{\lambda^n\}_{n=1}^\infty$ не является приемлемой.*

Доказательству теоремы 0.1 посвящен § 1. Поскольку $1/2 > \beta$, то из утверждения 1) теоремы 0.1 вытекает, что последовательность $\{n^2\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой. Это простейший, хотя и не очевидный пример строго приемлемой последовательности.

В § 1 будет также доказана теорема 1.1, которая обобщает утверждение 4) теоремы 0.1. В частности (см. следствие 1.1), будет доказано, что при всех $\lambda > 1$, $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ последовательность

$$\{\lambda^{[\delta(n-1)^\gamma]}\}_{n=1}^\infty \quad (0.7)$$

не является приемлемой. (Квадратные скобки здесь и всюду далее, как обычно, обозначают целую часть числа.)

Отметим, что определение приемлемой (строго приемлемой) последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ не зависит от порядка нумерации, поскольку условия (0.1)–(0.3) не зависят от порядка слагаемых. Из условия (0.1) вытекает, что $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому приемлемую последовательность Λ всегда можно занумеровать так, что

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \quad (0.8)$$

Подставляя в (0.1), (0.2) и (0.3) вместо x величину x/ε , видим, что если последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой (строго приемлемой), то для любого положительного ε последовательность $\{\varepsilon\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является приемлемой (строго приемлемой).

Для любой стремящейся к бесконечности последовательности положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и каждого действительного числа t через $\varphi_{\Lambda}(t)$ будем обозначать число членов последовательности Λ , которые не превосходят t , т. е.

$$\varphi_{\Lambda}(t) = \sum_{n:\lambda_n \leq t} 1. \quad (0.9)$$

В этом случае также пользуемся обозначением $\min \Lambda = \min\{\lambda_n: n \geq 1\}$. Если выполнено (0.8), то, очевидно, $\min \Lambda = \lambda_1$, $\varphi_{\Lambda}(t) = 0$ при $t < \lambda_1$, $\varphi_{\Lambda}(t) = k$ при $t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$, где k пробегает все натуральные числа.

Если последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (0.1), то при действительных x будем далее использовать обозначения

$$f_{\Lambda}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(x/\lambda_n) \quad (0.10)$$

и

$$\Phi_{\Lambda}(x) = x \int_x^{\infty} t^{-2} \varphi_{\Lambda}(t) dt, \quad x > 0. \quad (0.11)$$

Ясно, что

$$\Phi_{\Lambda}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \min \left\{ 1, \frac{x}{\lambda_n} \right\} = \int_0^x \left(\sum_{n:\lambda_n > t}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right) dt, \quad x > 0. \quad (0.12)$$

Легко также видеть, что функция (0.11) непрерывна, положительна, вогнута, строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$ и

$$\Phi_{\Lambda}(x_1)/x_1 \geq \Phi_{\Lambda}(x_2)/x_2, \quad 0 < x_1 \leq x_2 < \infty. \quad (0.13)$$

Если $\mathfrak{T} = \{\gamma(n): n \geq 1\}$ – счетное множество, то, называя счетное семейство положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_{\gamma}\}_{\gamma \in \mathfrak{T}}$ *приемлемой (строго приемлемой) последовательностью*, мы будем под этим понимать, что последовательность $\Lambda = \{\lambda_{\gamma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ приемлема (строго приемлема). Ясно, что это определение не зависит от способа нумерации множества $\mathfrak{T}$. Обозначения (0.9)–(0.11) будем применять и в этом случае.

Важная роль в работе отводится следующим двум функциям:

$$\Phi(x) = \inf \{ \Phi_{\Lambda}(x): \Lambda \text{ приемлемая, } \min \Lambda = 1 \}, \quad (0.14)$$

$$\Phi_0(x) = \inf \left\{ \Phi_{\Lambda} \left(\frac{x}{\Phi_{\Lambda}(1)} \right) : \Lambda \text{ приемлемая, } \min \Lambda = 1 \right\}, \quad (0.15)$$

которые определены при всех $x > 0$. Отметим (см. лемму 2.3), что функции (0.14) и (0.15) непрерывны, положительны, вогнуты, строго возрастают на промежутке $(0, +\infty)$ и

$$\Phi_0(x) \leq \Phi(x), \quad x > 0. \quad (0.16)$$

Для каждого натурального n через W_n^Z будем обозначать совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx), \quad (0.17)$$

у которых коэффициенты $a_1, \dots, a_n$ являются натуральными числами. Через $W_n^{\downarrow Z}$ обозначается совокупность всех полиномов $T_n \in W_n^Z$, коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n. \quad (0.18)$$

Пусть (см. [2])

$$M_Z^{\downarrow}(n) = \min\{a_0: T_n \in W_n^{\downarrow Z}\} \quad (0.19)$$

и, аналогично,

$$M_Z(n) = \min\{a_0: T_n \in W_n^Z\}.$$

Ясно, что $M_Z(n) \leq M_Z^{\downarrow}(n)$.

Через U_n^Z будем далее обозначать совокупность всех неотрицательных тригонометрических полиномов вида

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx), \quad (0.20)$$

у которых коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ являются целыми неотрицательными числами и удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = n. \quad (0.21)$$

Через $U_n^{\downarrow Z}$ обозначается совокупность всех полиномов $T \in U_n^Z$, у которых коэффициенты удовлетворяют условию

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \quad (0.22)$$

Пусть (см. [2])

$$K_Z^{\downarrow}(n) = \inf\{\alpha_0: T \in U_n^{\downarrow Z}\} \quad (0.23)$$

и, аналогично,

$$K_Z(n) = \inf\{\alpha_0: T \in U_n^Z\}.$$

Ясно, что $K_Z(n) \leq K_Z^{\downarrow}(n)$ и

$$K_Z(n) = \inf\left\{-\min_x \sum_{j=1}^n \cos(k_j x): k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Здесь и далее буква $\mathbb{N}$, как обычно, обозначает множество всех натуральных чисел.

А. Одлжко [3] получил оценку $K_Z(n) = O(n^{1/3}(\ln n)^{1/3})$. М. Колунтзакис [4] несколько улучшил ее, показав, что логарифмический множитель можно отбросить. Один из авторов [2] (см. там теоремы 0.4 и 1.2) доказал оценки $M_Z^{\downarrow}(n) < 8 \exp(\sqrt{2 \ln n \ln \ln n})$ и $K_Z^{\downarrow}(n) < 60 \exp(\sqrt{2 \ln n \ln \ln n})$ при всех $n \geq 3$.

В § 2 по заданной приемлемой последовательности строятся неотрицательные тригонометрические полиномы с целыми коэффициентами, которые обладают определенными свойствами. В частности (см. теорему 2.2), доказывается, что если последовательность положительных чисел Λ является приемлемой и $\min \Lambda = 1$, то для каждого натурального n полином

$$T_n(\Lambda; x) = \frac{11}{10} \Phi_\Lambda(2n) + \sum_{k=1}^n \varphi_\Lambda\left(\frac{n}{k}\right) \cos(kx) \quad (0.24)$$

принадлежит совокупности $W_n^{\downarrow Z}$. Отсюда получается оценка сверху для величины (0.19).

В § 3 по заданному неотрицательному тригонометрическому полиному с монотонными целыми коэффициентами строится приемлемая последовательность, обладающая определенными свойствами. Конструкции, которые изложены в § 2 и § 3, непосредственным образом связаны с методом работы [2] и являются фундаментом этой статьи. Они позволяют получать соотношения между функциями (0.14), (0.15), (0.19) и (0.23).

В частности, из результатов § 2 и § 3 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 0.2. *При всех натуральных n справедливы соотношения*

$$\frac{1}{28} \Phi(n) \leq \frac{1}{28} \Phi(2n) < M_Z^\downarrow(n) \leq \frac{11}{10} \Phi(2n) \leq \frac{11}{5} \Phi(n), \quad (0.25)$$

$$\frac{1}{28} \Phi\left(\frac{5n}{8\Phi(n)}\right) < K_Z^\downarrow(n) \leq \frac{16}{5} \Phi(n), \quad (0.26)$$

$$\frac{1}{28} \Phi_0(n) \leq \frac{1}{28} \Phi_0(2n) < K_Z^\downarrow(n) < 7\Phi_0(n), \quad (0.27)$$

$$K_Z^\downarrow(n) < 58M_Z^\downarrow(n). \quad (0.28)$$

Более того, при всех натуральных $m \leq n$ верны неравенства

$$M_Z^\downarrow(m) < 30M_Z^\downarrow(n), \quad (0.29)$$

$$K_Z^\downarrow(m) < 58K_Z^\downarrow(n). \quad (0.30)$$

Из (0.25) и (0.27) имеем порядковые соотношения

$$M_Z^\downarrow(n) \asymp \Phi(n), \quad K_Z^\downarrow(n) \asymp \Phi_0(n), \quad n \geq 1. \quad (0.31)$$

В соотношениях (0.31) наглядным образом проявляется связь между приемлемыми последовательностями и неотрицательными тригонометрическими полиномами с монотонными целыми коэффициентами, о которой мы говорили выше.

В § 2 и § 3 также доказывается

СЛЕДСТВИЕ 0.1. *Справедливы соотношения*

$$\Phi_0(x) = x = \Phi(x)/\Phi(1), \quad x \in (0, 1], \quad (0.32)$$

и

$$\frac{1}{196} \Phi\left(\frac{5}{16} \frac{x}{\Phi(x)}\right) < \Phi_0(x) \leq \Phi(x), \quad x \geq 1. \quad (0.33)$$

По любой заданной приемлемой последовательности теорема 0.2 немедленно позволяет получить для величин (0.19) и (0.23) оценки сверху. В частности (см. следствие 2.3), из теоремы 0.2 и третьего утверждения теоремы 0.1 легко вывести оценки, аналогичные оценкам из работы [2] (см. [2, теоремы 0.4, 1.2]).

В § 4 статьи доказывается

ТЕОРЕМА 0.3. При всех $q \geq 2^9$ последовательность

$$\Lambda = \{1\} \cup \left\{ \frac{2^j p}{2k-1} \right\}_{(j,p,k) \in D}, \quad (0.34)$$

где D – множество всех (j, p, k) таких, что

$$j \in \mathbb{N}, \quad p \in P_1, \quad p \leq qj^2, \quad k = 1, 2, \dots, p(1 + [\ln j]), \quad (0.35)$$

а P_1 – множество всех нечетных простых чисел, является строго приемлемой и, более того,

$$\min \Lambda = 1, \quad f_\Lambda(\pi x) > q(1 + \ln x)^4, \quad x \geq 1/2, \quad (0.36)$$

$$\Phi_\Lambda(x) < 2^{11} q^2 (1 + \ln x)^5, \quad x \geq 1. \quad (0.37)$$

Из этой теоремы и свойств полинома (0.24) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 0.2. Для каждого натурального n можно вполне определенным образом построить неотрицательные тригонометрические полиномы с целыми коэффициентами $T_1(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos(kx)$ и $T_2(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kx)$ так, что $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 1$, $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_n \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n$ и $a_0 < 2^{31}(1 + \ln n)^5$, $\alpha_0 < 2^{32}(1 + \ln n)^5$.

В частности, справедливы оценки

$$M_Z^\perp(n) < 2^{31}(1 + \ln n)^5, \quad K_Z^\perp(n) < 2^{32}(1 + \ln n)^5. \quad (0.38)$$

В § 5 получаются более точные по порядку оценки, чем (0.38). Там изучаются случайные приемлемые последовательности. В частности, доказывается, что верна

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин.

Тогда справедливы следующие два утверждения.

1) Существует такая абсолютная положительная постоянная A , что если $q > 1$, $\lambda \geq Aq^3$, то с вероятностью, большей, чем $1/2$, случайная последовательность $\{(n + \lambda - 1)^q / \xi_n\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой и справедлива оценка

$$\sum_{n=1}^\infty \sin \left(\frac{\pi x \xi_n \lambda^q}{(n + \lambda - 1)^q} \right) \geq \frac{\lambda}{4\pi(q-1)} (2x)^{1/q}, \quad x \geq \frac{1}{2}. \quad (0.39)$$

2) Существует такая абсолютная постоянная $\nu_0 > 1$, что если $1 < \nu \leq \nu_0$, то с вероятностью, большей, чем $1/2$, случайная последовательность $\{\nu^{(n-1)^{1/3}} / \xi_n\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой и верна оценка

$$\sum_{n=1}^\infty \sin \left(\frac{\pi x \xi_n}{\nu^{(n-1)^{1/3}}} \right) \geq \frac{3(1 + (1 + \ln(2x))^2)}{4\pi(\ln \nu)^3}, \quad x \geq \frac{1}{2}. \quad (0.40)$$

Из теорем 0.2 и 0.4 получаются оценки сверху для функций (0.14), (0.15), (0.19) и (0.23), которые вместе с оценками снизу, приведенными в § 6, составляют содержание следующего основного результата этой статьи.

ТЕОРЕМА 0.5. 1) При всех $x \geq 3$ верны оценки

$$\frac{\ln^2 x}{\ln \ln x} \ll \Phi_0(x) \leq \Phi(x) \ll (\ln x)^3. \quad (0.41)$$

2) При всех натуральных $n \geq 3$ справедливы оценки

$$\frac{\ln^2 n}{\ln \ln n} \ll K_Z^\perp(n) \ll M_Z^\perp(n) \ll (\ln n)^3. \quad (0.42)$$

Известно, что величина $K_Z(n)$ связана со следующей задачей Эрдеша и Секе-реша [5] (см. [3]):

оценить величину

$$f(n) = \inf \left\{ \max_t \left| \prod_{j=1}^n (1 - e^{itk_j}) \right| : k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N} \right\},$$

где внутренний максимум берется по всем действительным t , а $n \in \mathbb{N}$. Эта связь заключается в оценке $\ln f(n) < K_Z(n)(1 + \ln n)$ (см. [3]).

Отсюда и из теоремы 0.5 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 0.3. Справедлива оценка $\ln f(n) = O(\ln^4 n)$.

Авторы благодарят А.В. Рождественского за содействие в работе.

§ 1. Примеры приемлемых последовательностей

Целью этого параграфа является доказательство теорем 0.1 и 1.1. Те конкретные постоянные, которые мы выписываем в оценках, не претендуют ни на какую близость к точным константам. Это те постоянные, которые получаются по ходу рассуждения без усложнения доказательств и вычислений. Обычно из приводимых доказательств непосредственно видно, что более тщательные вычисления приведут к лучшим постоянным.

ЛЕММА 1.1. При всех $\gamma \in [1/2, 1)$ верна оценка

$$\pi^\gamma \int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma} \cos t \, dt > \frac{1.11}{2(1-\gamma)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция

$$\begin{aligned} g(\gamma) &\equiv (1-\gamma)\pi^\gamma \int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma} \cos t \, dt \\ &= \pi^2 \left(\int_0^1 t^{1-\gamma} \sin(\pi t) \, dt - \int_1^{3/2} t^{1-\gamma} |\sin(\pi t)| \, dt \right) \end{aligned}$$

непрерывна и строго возрастает на интервале $(-\infty, 1)$ от $-\infty$ до π . Поэтому уравнение (0.4) имеет единственный корень $\alpha < 1$, $g(\gamma) > 0$ при $\gamma \in (\alpha, 1)$ и функция $g(\gamma)/(1-\gamma)$ строго возрастает на промежутке $[\alpha, 1)$ от 0 до $+\infty$. Следовательно, уравнение (0.5) имеет единственный корень $\beta \in (\alpha, 1)$.

Поскольку $t^{1/2} + (1-t)^{1/2} > (1+t)^{1/2}$ при $t \in (0, 1/2]$, то

$$\begin{aligned} 2g\left(\frac{1}{2}\right) &= 2\pi^2 \int_0^{1/2} (t^{1/2} + (1-t)^{1/2} - (1+t)^{1/2}) \sin(\pi t) dt \\ &> 4\pi^2 \int_0^{1/2} t(t^{1/2} + (1-t)^{1/2} - (1+t)^{1/2}) dt = \frac{\pi^2 \sqrt{2} (3\sqrt{3} - 4)}{15} > 1.11. \end{aligned}$$

Лемма 1.1 доказана.

Заметим, что вычисления на компьютере дают $2g(1/2) = 1.426\dots$

ЛЕММА 1.2. Пусть функция $a(t)$ определена, неотрицательна и не возрастает на интервале $(0, +\infty)$ и $0 < \int_0^1 a(t) dt < \infty$. Тогда верны неравенства

$$\int_0^\nu a(t) \cos t dt > 0, \quad \nu \in (0, \pi), \quad (1.1)$$

$$\int_0^\nu a(t) \cos t dt \geq \int_0^{3\pi/2} a(t) \cos t dt, \quad \nu \geq \pi/2. \quad (1.2)$$

Доказательство можно найти в работе [2] (см. там леммы 2.2 и 2.6 и оценку (2.16) при $x = 1$).

ЛЕММА 1.3. Пусть последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ является приемлемой. Тогда

$$(\min \Lambda) \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\lambda_n} \geq 1 + \max_{x>0} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) = 1.217\dots > 1 + \frac{2}{3\pi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что выполнено условие (0.8). Тогда при $x > 0$ в силу (0.2) имеем

$$\frac{\sin x}{x} + \sum_{n=2}^\infty \frac{\lambda_1}{\lambda_n} > \frac{1}{x} \sum_{n=1}^\infty \sin \left(\frac{x\lambda_1}{\lambda_n} \right) \geq 0.$$

Отсюда утверждение леммы 1.3 следует немедленно.

ЛЕММА 1.4. Пусть последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (0.1). Тогда (см. (0.9) и (0.10))

$$f_\Lambda(x) = \int_0^\infty \varphi_\Lambda \left(\frac{x}{t} \right) \cos t dt, \quad x > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что выполнено условие (0.8). Тогда при $x > 0$ имеем

$$f_\Lambda(x) = \sum_{n=1}^\infty n \int_{x/\lambda_{n+1}}^{x/\lambda_n} \cos t dt = \sum_{n=1}^\infty \int_{x/\lambda_{n+1}}^{x/\lambda_n} \varphi_\Lambda \left(\frac{x}{t} \right) \cos t dt.$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть $\gamma \in (0, 1)$, $q = 1/\gamma$ и $\Lambda = \{n^q\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда

$$\varphi_{\Lambda}(t) = [t^{\gamma}], \quad t \geq 0.$$

Если $x \in (0, 1/2]$, то

$$f_{\Lambda}(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{n^q}\right) > 2x \sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} > 0.$$

Если $x \in [1/2, 1]$, то

$$\begin{aligned} f_{\Lambda}(\pi x) &\geq \sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{n^q}\right) > 2x \sum_{n=2}^{\infty} n^{-q} > 2x \int_2^{\infty} t^{-q} dt \\ &= \frac{2x}{q(1-\gamma)} 2^{1-q} \geq \frac{(2x)^{\gamma}}{(1-\gamma)q} 2^{1-q} > 0. \end{aligned}$$

Если к тому же $\gamma \geq 1/2$, то $q \leq 2$ и

$$f_{\Lambda}(\pi x) > \frac{(2x)^{\gamma}}{(1-\gamma)q} 2^{1-q} \geq \frac{x^{\gamma} \sqrt{2}}{4(1-\gamma)}.$$

Поэтому оценка (0.6) при $x \in [1/2, 1]$ верна.

Пусть далее $x > 1$. Тогда по лемме 1.4 и неравенству (1.2), повторяя рассуждения из [2] (см. там доказательство теоремы 0.3), имеем

$$\begin{aligned} f_{\Lambda}(\pi x) &= \int_0^{\pi x} \left[\left(\frac{\pi x}{t}\right)^{\gamma}\right] \cos t \, dt \\ &\geq \int_0^{3\pi/2} \left[\left(\frac{\pi x}{t}\right)^{\gamma}\right] \cos t \, dt > \int_0^{\pi/2} \left(\left(\frac{\pi x}{t}\right)^{\gamma} - 1\right) \cos t \, dt \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \left(\frac{\pi x}{t}\right)^{\gamma} \cos t \, dt = x^{\gamma} \pi^{\gamma} \int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma} \cos t \, dt - 1. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсюда при $\gamma \in [\beta, 1)$ получаем $f_{\Lambda}(\pi x) > x^{\gamma} - 1 > 0$. Более того, при $\gamma \geq 1/2$ по лемме 1.1 имеем

$$f_{\Lambda}(\pi x) > \frac{1.1}{2(1-\gamma)} x^{\gamma} - 1 > x^{\gamma} \left(\frac{1.1}{2(1-\gamma)} - 1 \right) \geq \frac{x^{\gamma}}{20(1-\gamma)}.$$

Утверждение 1) теоремы 0.1 доказано.

Заметим, что несложные, но несколько более длинные вычисления показывают, что число 20 в правой части (0.6) можно заменить на число 4, но нельзя на 3, в чем легко убедиться, проведя вычисления при $x = 3/2$, $\gamma = 1/2$.

Если последовательность $\{n^q\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой, то из леммы 1.3 видим, что

$$1 + 2^{-q} + \frac{q+2}{q-1} 3^{-q} = 1 + 2^{-q} + 3^{-q} + \int_3^{\infty} t^{-q} dt > \sum_{n=1}^{\infty} n^{-q} > 1 + \frac{2}{3\pi}.$$

Отсюда получаем, что $q < 3.1$, $\gamma = 1/q > 0.32 > \alpha$. Из этого и оценки (1.3) легко вывести, что найдется $\gamma_0 \in (0.32, \beta)$, которое обладает свойством: при всех $\gamma \in (\gamma_0, 1)$ последовательность $\{n^{1/\gamma}\}_{n=1}^{\infty}$ является строго приемлемой, а при $\gamma = \gamma_0$ не является, оставаясь только приемлемой.

ЛЕММА 1.5. Пусть $\psi(t)$ – строго возрастающая непрерывная функция, определенная при $t \geq 1$, $\psi(1) \geq 1$, $\psi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\int_1^\infty t^{-2} \psi(t) dt < \infty$

$$\int_0^x \left[\psi \left(\frac{x}{t} \right) \right] \cos t dt > 0, \quad x > 0. \quad (1.4)$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\psi^{-1}(n) < \infty, \quad (1.5)$$

$$[\psi(1)] \sin x + \sum_{n=1+[\psi(1)]}^{\infty} \sin \left(\frac{x}{\psi^{-1}(n)} \right) > 0, \quad x > 0, \quad (1.6)$$

где ψ^{-1} – обратная к ψ функция. Если к тому же $\psi(1) = 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{x}{\psi^{-1}(n)} \right) > 0, \quad x > 0. \quad (1.7)$$

Более того, в неравенствах (1.4), (1.6) и (1.7) знак $>$ одновременно можно заменить на знак $\geq$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\psi^{-1}(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\psi^{-1}(n)}^{\psi^{-1}(n+1)} t^{-2} dt \leq \int_{\psi^{-1}(1)}^{\infty} t^{-2} \psi(t) dt.$$

Поэтому условие (1.5) выполнено. Положим

$$\lambda_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 1, \dots, [\psi(1)], \\ \psi^{-1}(n) & \text{при } n \geq 1 + [\psi(1)]. \end{cases} \quad (1.8)$$

Тогда для последовательности $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено условие (0.1) и (см. (0.9)) $\varphi_{\Lambda}(t) = [\psi(t)]$ при $t \geq 1$. Поэтому по лемме 1.4 при $x > 0$ имеем

$$f_{\Lambda}(x) = \int_0^x \left[\psi \left(\frac{x}{t} \right) \right] \cos t dt.$$

Отсюда и из (1.4) сразу вытекает (1.6). Из (1.6) немедленно следует (1.7). Лемма доказана.

Легко видеть, что утверждения (1.5) и (1.6) означают, что последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, определенная формулой (1.8), является строго приемлемой, т. е. выполнено (0.3).

ЛЕММА 1.6. При всех $\gamma \in [\alpha, 1)$, $b \geq 3/2$ и $x \geq 3\pi/2b$ верно неравенство

$$\int_0^{3\pi/2x} \left[\left(\frac{b}{t} \right)^{\gamma} - 1 \right] \cos(xt) dt > 0.$$

Доказательство леммы 1.6 приведено в [2] (см. там доказательство оценки (3.2)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2) ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть $b \geq 3/2$ и $\gamma \in [\alpha, 1)$. Тогда по лемме 1.6 верно неравенство

$$\int_0^{3\pi/2} \left[\left(\frac{bx}{t} \right)^\gamma - 1 \right] \cos(t) dt > 0, \quad x \geq \frac{3\pi}{2b}.$$

Отсюда и из неравенства (1.2) по лемме 1.2 получаем

$$\int_0^x \left[\left(\frac{bx}{t} \right)^\gamma - 1 \right] \cos(t) dt > 0, \quad x \geq \pi.$$

Если же $x < \pi$, то из (1.1) имеем

$$\int_0^x \left[\left(\frac{bx}{t} \right)^\gamma - 1 \right] \cos(t) dt > 0. \quad (1.9)$$

Таким образом, неравенство (1.9) верно при всех $x > 0$. По лемме 1.5, где $\psi(t) = (bt)^\gamma - 1$ при $t \geq 1$, $b = 2^{1/\gamma}$, получаем (1.5) и неравенство (1.7), которое означает, что последовательность $\{\psi^{-1}(n)\}_{n=1}^\infty$, где $\psi^{-1}(n) = (n+1)^{1/\gamma}/b$, является строго приемлемой. Утверждение 2) доказано.

ЛЕММА 1.7. Пусть

$$q > 1 \quad \text{и} \quad \lambda \geq 3(2/3)^{1/q} q^q. \quad (1.10)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\int_0^x \left[\lambda \left(\left(\frac{x}{t} \right)^{1/q} - 1 \right) + 1 \right] \cos(t) dt > 0, \quad x > 0.$$

Доказательство приведено в работе [2, лемма 4.3].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3) ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть выполнены условия (1.10) и $\psi(t) = \lambda(t^{1/q} - 1) + 1$ при $t \geq 1$. Тогда по лемме 1.5 в силу леммы 1.7 выполнено условие (1.5) и верно неравенство (1.7), т.е. последовательность $\{\psi^{-1}(n)\}_{n=1}^\infty$, где $\psi^{-1}(n) = ((n-1+\lambda)/\lambda)^q$, является строго приемлемой. Утверждение 3) доказано.

Если для некоторых $\lambda > 0$ и $q > 1$ последовательность

$$(n + \lambda - 1)^q \quad (1.11)$$

является приемлемой, то по лемме 1.3 имеем

$$1 + \frac{\lambda}{q-1} = 1 + \lambda^q \int_1^\infty (t + \lambda - 1)^{-q} dt > \lambda^q \sum_{n=1}^\infty (n + \lambda - 1)^{-q} > 1 + \frac{2}{3\pi}.$$

Поэтому $\lambda > \frac{2}{3\pi}(q-1)$.

С другой стороны, условия (1.10), как только что доказано, достаточны для того, чтобы последовательность (1.11) была строго приемлемой. Задача нахождения необходимых и достаточных условий на λ и q , при которых последовательность (1.11) является приемлемой, представляется нам очень интересной.

ЛЕММА 1.8. Для каждого $\lambda > 1$ можно указать две постоянные, $A_1(\lambda) > \pi$ и $A_2(\lambda) \geq 1$, такие, что для любой последовательности положительных чисел $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, которая удовлетворяет условию

$$\lambda_{n+1} \geq \lambda \cdot \lambda_n, \quad n \geq 1, \quad (1.12)$$

любых последовательностей действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, которые удовлетворяют условию $\sum |a_n| < \infty$, и любого сегмента I , длина которого удовлетворяет условию $|I| \geq A_1(\lambda)\lambda_1^{-1}$, справедливо неравенство

$$\max_{x \in I} \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(\lambda_n x + \varphi_n) \geq \frac{1}{A_2(\lambda)} \sum_{n=1}^\infty |a_n|.$$

Лемма 1.8 – это известное неравенство Сидона–Зигмунда. Его доказательство см., например, в [6, теорема 1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4) ТЕОРЕМЫ 0.1. Пусть $\lambda > 1$ и последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (1.12). Пусть $A_1(\lambda)$ и $A_2(\lambda)$ – постоянные из леммы 1.8. Возьмем произвольное натуральное $m > A_1(\lambda)A_2(\lambda)/(\lambda - 1)$. По лемме 1.8

$$\max_{v \in [0, A_1(\lambda)]} \sum_{n=1}^m \sin\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1-n}}v + \pi\right) \geq \frac{m}{A_2(\lambda)}.$$

Поэтому найдется такое $v_0 \in [0, A_1(\lambda)]$, что

$$-\sum_{n=1}^m \sin\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1-n}}v_0\right) \geq \frac{m}{A_2(\lambda)}.$$

Ясно, что $v_0 > 0$. Положим $x = \lambda_m v_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) &= \sum_{n=1}^m \sin\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1-n}}v_0\right) + \sum_{n=m+1}^\infty \sin\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_n}v_0\right) \\ &\leq -\frac{m}{A_2(\lambda)} + \sum_{n=m+1}^\infty \frac{\lambda_m}{\lambda_n}v_0 \leq -\frac{m}{A_2(\lambda)} + v_0 \sum_{k=1}^\infty \lambda^{-k} \\ &\leq -\frac{m}{A_2(\lambda)} + \frac{A_1(\lambda)}{(\lambda - 1)} < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность Λ не является приемлемой. Теорема 0.1 полностью доказана.

Пусть $\lambda > 1$ и $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел. Будем писать $\Lambda \in E_\lambda$, если существуют такие последовательности положительных чисел $\{\nu_k\}_{k=1}^\infty$ и целых неотрицательных чисел $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, что

$$\frac{\nu_{k+1}}{\nu_k} \geq \lambda, \quad k \geq 1, \quad \nu_1 = 1, \quad m_1 > 0, \quad (1.13)$$

и последовательность Λ состоит только из чисел ν_k , причем каждое ν_k встречается в последовательности Λ ровно m_k раз ($m_k = 0$ означает, что ν_k не встречается в Λ). Из (1.13) следует, что $\min \Lambda = 1$.

Следующая теорема обобщает утверждение 4) теоремы 0.1.

ТЕОРЕМА 1.1. Для каждого $\lambda > 1$ существует такая постоянная $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) \in (0, 1)$, что если последовательность положительных чисел $\Lambda \in E_\lambda$ является приемлемой, то (см. (0.11) и (0.12))

$$\Phi_\Lambda(x) > \frac{1}{8} \Phi_\Lambda(1)x^\varepsilon, \quad x \geq 1. \quad (1.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A_1(\lambda) > \pi$ и $A_2(\lambda) \geq 1$ — постоянные из леммы 1.8 и $A(\lambda) = A_1(\lambda)A_2(\lambda)$. Положим $\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = (\ln \lambda)^{-1} \ln \left(\frac{\lambda + A(\lambda)}{1 + A(\lambda)} \right)$. Тогда $\varepsilon \in (0, 1)$ и

$$\lambda^\varepsilon = (\lambda + A(\lambda)) / (1 + A(\lambda)). \quad (1.15)$$

При $w \geq \lambda$ имеем

$$-w \ln \left(1 - \frac{(\lambda - 1)}{w} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - 1)^k}{k w^{k-1}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda - 1)^k}{k \lambda^{k-1}} = \lambda \ln \lambda.$$

Полагая здесь $w = \lambda + A(\lambda)$, получим

$$\lambda \ln \lambda \geq -(\lambda + A(\lambda)) \ln \left(1 - \frac{\lambda - 1}{\lambda + A(\lambda)} \right) = \varepsilon (\ln \lambda) (\lambda + A(\lambda)).$$

Поэтому

$$\lambda(1 - \varepsilon) \geq A(\lambda)\varepsilon. \quad (1.16)$$

Отсюда при $w \geq \lambda$ имеем

$$(w^{1-\varepsilon} + A(\lambda)w^{-\varepsilon})'_w = ((1 - \varepsilon)w - \varepsilon A(\lambda))w^{-1-\varepsilon} \geq 0.$$

Значит,

$$w^{1-\varepsilon} + A(\lambda)w^{-\varepsilon} \geq \lambda^{1-\varepsilon} + A(\lambda)\lambda^{-\varepsilon}, \quad w \geq \lambda. \quad (1.17)$$

Пусть последовательности $\{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ таковы, как описано перед формулировкой теоремы 1.1. Тогда при всех натуральных n и $t \geq 0$ из определения приемлемой последовательности имеем

$$-\sum_{k=1}^n m_k \sin \left(\frac{\nu_n t}{\nu_k} \right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} m_k \sin \left(\frac{\nu_n t}{\nu_k} \right) \leq t \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{m_k}{\nu_k}.$$

Возьмем здесь от обеих частей максимум по $t \in [0, A_1(\lambda)]$. В силу (1.13) по лемме 1.8 получим

$$\frac{1}{A_2(\lambda)} \sum_{k=1}^n m_k \leq A_1(\lambda) \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{m_k}{\nu_k}.$$

Это неравенство в обозначениях

$$s_n = \sum_{k=1}^n m_k, \quad \delta_n = \nu_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{m_k}{\nu_k}, \quad v_n = s_n + \delta_n,$$

где $n \in \mathbb{N}$, выглядит следующим образом:

$$s_n \leq A(\lambda)\delta_n, \quad n \geq 1. \quad (1.18)$$

Поскольку $s_n(\nu_n^{-1} - \nu_{n+1}^{-1}) = v_n/\nu_n - v_{n+1}/\nu_{n+1}$, $\delta_n(\nu_n^{-1} - \nu_{n+1}^{-1}) = (v_{n+1} - v_n)/\nu_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$, то неравенства (1.18) эквивалентны неравенствам

$$(A(\lambda) + 1)v_{n+1} \geq (A(\lambda) + \nu_{n+1}/\nu_n)v_n, \quad n \geq 1.$$

Отсюда, из (1.13), (1.17) при $w = \nu_{n+1}/\nu_n$ и (1.15) при всех натуральных n имеем

$$\begin{aligned} v_{n+1}\nu_{n+1}^{-\varepsilon} &\geq (A(\lambda) + 1)^{-1} \left(A(\lambda) \left(\frac{\nu_n}{\nu_{n+1}} \right)^\varepsilon + \left(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_n} \right)^{1-\varepsilon} \right) v_n\nu_n^{-\varepsilon} \\ &\geq (A(\lambda) + 1)^{-1} (A(\lambda)\lambda^{-\varepsilon} + \lambda^{1-\varepsilon}) v_n\nu_n^{-\varepsilon} = v_n\nu_n^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_n\nu_n^{-\varepsilon} \geq v_1\nu_1^{-\varepsilon} = v_1, \quad n \geq 1. \quad (1.19)$$

При каждом натуральном n и $x \in [\nu_n, \lambda\nu_n]$ из (0.12) получаем

$$x^{-\varepsilon}\Phi_\Lambda(x) = x^{-\varepsilon}(s_n + x\delta_n/\nu_n) \geq s_n(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon} + \delta_n\nu_n^{-\varepsilon} = (s_n + \lambda^\varepsilon\delta_n)(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon}.$$

Если $x \geq \lambda\nu_n$, то из (1.16) и (1.18) находим

$$\begin{aligned} (s_n x^{-\varepsilon} + x^{1-\varepsilon}\delta_n/\nu_n)'_x &= ((1-\varepsilon)x\delta_n/\nu_n - \varepsilon s_n)x^{-1-\varepsilon} \\ &\geq ((1-\varepsilon)\lambda\delta_n - \varepsilon s_n)x^{-1-\varepsilon} \geq \varepsilon(A(\lambda)\delta_n - s_n)x^{-1-\varepsilon} \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, при $x \in [\lambda\nu_n, \nu_{n+1}]$ будет

$$x^{-\varepsilon}\Phi_\Lambda(x) = (s_n + x\delta_n/\nu_n)x^{-\varepsilon} \geq (s_n + \lambda\delta_n)(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon} \geq (s_n + \lambda^\varepsilon\delta_n)(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon}.$$

Таким образом, при $x \in [\nu_n, \nu_{n+1}]$ верна оценка

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda(x)x^{-\varepsilon} &\geq (s_n + \lambda^\varepsilon\delta_n)(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon} \\ &= (A(\lambda) + 1)^{-1}(\lambda\nu_n)^{-\varepsilon}((A(\lambda) + \lambda^\varepsilon)v_n + (\lambda^\varepsilon - 1)(A(\lambda)\delta_n - s_n)) \\ &\geq (A(\lambda) + \lambda^\varepsilon)(A(\lambda) + 1)^{-1}\lambda^{-\varepsilon}v_n\nu_n^{-\varepsilon} \geq (A(\lambda) + \lambda^\varepsilon)(A(\lambda) + 1)^{-1}\lambda^{-\varepsilon}v_1, \end{aligned}$$

где использованы (1.15), (1.18) и (1.19). Следовательно,

$$\frac{\Phi_\Lambda(x)}{x^\varepsilon} \geq \frac{A(\lambda) + \lambda^\varepsilon}{A(\lambda) + 1} \lambda^{-\varepsilon} v_1, \quad x \geq 1. \quad (1.20)$$

Если $\lambda < 225$, то в силу (1.15)

$$\frac{A(\lambda) + 1}{A(\lambda) + \lambda^\varepsilon} \lambda^\varepsilon = 1 + (\lambda - 1) \left(A(\lambda) + \frac{\lambda}{A(\lambda)} + 2 \right)^{-1} \leq 1 + \frac{\lambda - 1}{2\sqrt{\lambda} + 2} = \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda} + 1) < 8.$$

Пусть $\lambda \geq 225$. Тогда (см. [6, доказательство теоремы 1]) можно взять $A_1(\lambda) = 2\pi\lambda/(\lambda - 1)$, $A_2(\lambda) = (\cos(\pi/(\lambda - 1)))^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} A(\lambda) &\leq \frac{2\pi\lambda}{(\lambda - 1)\cos(\pi/(\lambda - 1))} \leq \frac{2\pi(1 + 1/224)}{\cos(\pi/224)} < 7, \\ \frac{A(\lambda) + 1}{A(\lambda) + \lambda^\varepsilon} \lambda^\varepsilon &< A(\lambda) + 1 < 8. \end{aligned}$$

Значит, всегда $\frac{A(\lambda) + 1}{A(\lambda) + \lambda^\varepsilon} \lambda^\varepsilon < 8$, и из (1.20) получаем (1.14), поскольку $v_1 = \Phi_\Lambda(1)$. Теорема 1.1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть последовательность целых чисел $\{\nu(n)\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает и при некотором натуральном $q > 1$ выполнено условие

$$\nu(q^{j+1}) - \nu(q^j) \rightarrow +\infty, \quad j \rightarrow \infty. \quad (1.21)$$

Тогда ни для какого $\lambda > 1$ последовательность $\{\lambda^{\nu(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ не является приемлемой. В частности, при всех $\lambda > 1$, $\delta > 0$ и $\gamma > 0$ последовательность (0.7) не является приемлемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при некотором $\lambda > 1$ последовательность $\Lambda = \{\lambda^{\nu(n)-\nu(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой. Тогда $\Lambda \in E_{\lambda}$ и для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$ по теореме 1.1 $\Phi_{\Lambda}(x) > x^{\varepsilon}/8$ при $x \geq 1$. Отсюда при всех натуральных n имеем

$$n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda^{\nu(n)-\nu(k)} = \Phi_{\Lambda}(\lambda^{\nu(n)-\nu(1)}) > \frac{1}{8} \lambda^{\varepsilon(\nu(n)-\nu(1))}.$$

Пусть натуральное τ таково, что

$$q \lambda^{\nu(q^j)-\nu(q^{j+1})} \leq 1/2, \quad j \geq \tau.$$

Тогда для каждого натурального $m \geq \tau$ и $n = q^m$ имеем

$$\begin{aligned} 3n &> n + \sum_{j=m}^{\infty} q^j \lambda^{\nu(n)-\nu(q^j)} \\ &\geq n + \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=q^j+1}^{q^{j+1}} \lambda^{\nu(n)-\nu(k)} (q-1)^{-1} > \frac{1}{8(q-1)} \lambda^{\varepsilon(\nu(n)-\nu(1))}. \end{aligned}$$

Значит, $\ln(24(q-1)n) > \varepsilon \ln \lambda(\nu(n)-\nu(1))$ при $n = q^m$, где $m \geq \tau$. Отсюда сразу вытекает, что последовательность $\{\nu(q^m)/m\}_{m=1}^{\infty}$ ограничена, а это, очевидно, противоречит условию (1.21). Следовательно, для $\lambda > 1$ последовательность Λ не является приемлемой.

Функция $\nu(n) = [\delta(n-1)^{\gamma}]$ удовлетворяет условию (1.21) при $q = 2$. Следовательно, последовательность (0.7) не является приемлемой.

Теоремы 0.1, 1.1, 0.3–0.5 и следствие 1.1 показывают, что между ростом последовательности, ее структурой и приемлемостью связь довольно сложная.

§ 2. Построение неотрицательных тригонометрических полиномов с целыми коэффициентами по заданной приемлемой последовательности

Важной для всего дальнейшего изложения является

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть не равная тождественно нулю функция φ определена, неотрицательна, не убывает на интервале $(0, +\infty)$ и $\int_1^{\infty} t^{-2} \varphi(t) dt < \infty$. Тогда если для некоторого $\nu \geq 1$ выполнено условие

$$\int_0^v \varphi\left(\frac{v}{t}\right) \cos t dt \geq 0, \quad v \in (\pi, \pi\nu), \quad (2.1)$$

то

$$\frac{11}{5} \nu \int_{2\nu}^{\infty} \varphi(t) t^{-2} dt + \sum_{k=1}^{[\nu]} \varphi\left(\frac{\nu}{k}\right) \cos(kx) > 0 \quad \text{при всех } x. \quad (2.2)$$

Доказательство имеется в работе [2] (там это теорема 2.3).

Далее в этом параграфе будут использоваться функции (0.9) и (0.11).

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой и $\min \Lambda = 1$. Тогда при всех $\nu \geq 1$ и всех x верно неравенство

$$\frac{11}{10}\Phi_{\Lambda}(2\nu) + \sum_{k=1}^{[\nu]} \varphi_{\Lambda}\left(\frac{\nu}{k}\right) \cos(kx) > 0. \quad (2.3)$$

В частности, при всех натуральных n и всех x верно неравенство

$$T_n(\Lambda; x) = \frac{11}{10}\Phi_{\Lambda}(2n) + \sum_{k=1}^n \varphi_{\Lambda}\left(\frac{n}{k}\right) \cos(kx) > 0. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что выполнено условие (0.8) и $\lambda_1 = 1$. Положим $\varphi(t) = \varphi_{\Lambda}(t) = k$ при $t \in [\lambda_k, \lambda_{k+1})$ и всех $k \geq 1$, $\varphi(t) = \varphi_{\Lambda}(t) = 0$ при $t < 1$. Тогда в силу (0.1) $\int_1^{\infty} t^{-2} \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} < \infty$ и при всех $v > 0$ из (0.2) и леммы 1.4 имеем $\int_0^v \varphi(v/t) \cos t dt = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(v/\lambda_n) \geq 0$. Поэтому условие (2.1) выполнено при всех $\nu \geq 1$. По теореме 2.1 справедливо неравенство (2.2), которое в рассматриваемом случае совпадает с (2.3). Возьмем произвольное натуральное n и в неравенстве (2.3) положим $\nu = n$. Получим неравенство (2.4).

ЛЕММА 2.1. Пусть φ – неубывающая функция на $[1, +\infty)$, $\varphi(1) \geq 1$,

$$b_m = \sum_{k=1}^m \left[\varphi\left(\frac{m}{k}\right) \right], \quad m \geq 1, \quad (2.5)$$

$\{a_0(m)\}_{m=1}^{\infty}$ – неубывающая последовательность положительных чисел такая, что при всех натуральных m и всех действительных x справедливо неравенство

$$a_0(m) + \sum_{k=1}^m \left[\varphi\left(\frac{m}{k}\right) \right] \cos(kx) \geq 0. \quad (2.6)$$

Тогда для любых натуральных n и m таких, что

$$b_m \leq n < b_{m+1}, \quad (2.7)$$

можно построить неотрицательный тригонометрический полином $T(x)$ вида (0.20) такой, что $T \in U_n^{\downarrow Z}$ и

$$K_Z^{\downarrow}(n) \leq \alpha_0 \leq a_0(m) + n - b_m \leq \begin{cases} a_0(m) + [\varphi(m+1)] - 1 & \text{при } n > b_m, \\ a_0(m) & \text{при } n = b_m. \end{cases} \quad (2.8)$$

В частности, для каждого натурального n можно построить неотрицательный тригонометрический полином $T(x)$ вида (0.20) такой, что $T \in U_n^{\downarrow Z}$ и

$$K_Z^{\downarrow}(n) \leq \alpha_0 \leq a_0(n) + [\varphi(n)] - 1 \leq 3a_0(n) - 1. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.5) при всех натуральных m получаем, что

$$\begin{aligned} b_1 &= [\varphi(1)] \geq 1, \quad b_m \geq m, \\ b_{m+1} &= [\varphi(1)] + \sum_{k=1}^m \left[\varphi\left(\frac{m+1}{k}\right) \right] \geq 1 + b_m \end{aligned}$$

и

$$b_{m+1} = [\varphi(m+1)] + \sum_{k=1}^m \left[\varphi\left(\frac{m+1}{k+1}\right) \right] \leq [\varphi(m+1)] + b_m,$$

поскольку $(m+1)/k > m/k \geq (m+1)/(k+1)$ при $k = 1, \dots, m$. Таким образом,

$$1 + b_m \leq b_{m+1} \leq [\varphi(m+1)] + b_m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Отметим, что из (2.6) следует оценка

$$[\varphi(m)] \leq 2a_0(m), \quad m \geq 1. \quad (2.11)$$

Возьмем теперь произвольные натуральные n и m , которые удовлетворяют условию (2.7). Поскольку $b_m \geq m$, то $n \geq m$. Положим

$$T(x) = a_0(m) + (n - b_m) + (n - b_m) \cos x + \sum_{k=1}^m \left[\varphi\left(\frac{m}{k}\right) \right] \cos(kx) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cos(kx), \quad (2.12)$$

где $\alpha_0 = a_0(m) + (n - b_m)$, $\alpha_1 = (n - b_m) + [\varphi(m)]$, $\alpha_k = [\varphi(m/k)]$ при $k = 2, \dots, m$, $\alpha_k = 0$ при $k > m$. Легко видеть, что условия (0.21) и (0.22) выполнены. Из (2.6) следует, что $T(x) \geq (n - b_m)(1 + \cos x) \geq 0$ при всех x , поэтому $T \in U_n^{\perp Z}$.

Если $n > b_m$, то из (2.7) и (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0(m) + n - b_m \leq a_0(m) + b_{m+1} - b_m - 1 \\ &\leq a_0(m) + [\varphi(m+1)] - 1 \leq a_0(n) + [\varphi(n)] - 1, \end{aligned}$$

поскольку тогда $m \leq b_m < n$. Отсюда и из (2.11) получаем (2.8) и (2.9).

Если $n = b_m$, то $n = b_m \geq m$ и $\alpha_0 = a_0(m) \leq a_0(n)$. Таким образом, оценки (2.8) и (2.9) доказаны при условии (2.7). Если $n \geq b_1$, то (2.7) верно при некотором m и, следовательно, справедлива оценка (2.9). Если $n < b_1$, то полином вида (0.20)

$$T(x) = n + n \cos x \quad (2.13)$$

принадлежит $U_n^{\perp Z}$ и $K_Z^{\perp}(n) \leq \alpha_0 = n \leq b_1 - 1 = [\varphi(1)] - 1$. В силу (2.11) оценка (2.9) опять справедлива. Следовательно, оценка (2.9) верна при всех $n \in \mathbb{N}$. Лемма доказана.

Обратим внимание на то, что полином (2.12) или (2.13) по заданному n и полиномам (2.6) строится вполне определенным образом.

Заметим также, что если все частные суммы полинома (2.6) неотрицательны, то и все частные суммы полинома $T(x)$, построенного в доказательстве леммы 2.1, также будут неотрицательны.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел и выполнено условие (0.1). Тогда функция $\Phi_{\Lambda}(x)$ положительна, непрерывна, вогнута, строго возрастает на интервале $(0, +\infty)$, удовлетворяет условию (0.13), $\varphi_{\Lambda}(x) \leq \Phi_{\Lambda}(x)$ при всех $x > 0$ и

$$\frac{\Phi_{\Lambda}(x)}{x} = \frac{\Phi_{\Lambda}(\min \Lambda)}{\min \Lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}, \quad x \in (0, \min \Lambda].$$

Доказательство сразу вытекает из представлений (0.12).

Основной результат этого параграфа – это следующая

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть последовательность положительных чисел Λ является приемлемой и $\min \Lambda = 1$. Тогда при всех натуральных n верны оценки

$$M_Z^{\downarrow}(n) < \frac{11}{10} \Phi_{\Lambda}(2n) \leq \frac{11}{5} \Phi_{\Lambda}(n), \quad (2.14)$$

$$1 + K_Z^{\downarrow}(n) \leq \Phi_{\Lambda}(n) + \frac{11}{10} \Phi_{\Lambda}(2n) \leq \frac{16}{5} \Phi_{\Lambda}(n), \quad (2.15)$$

$$K_Z^{\downarrow}(n) < 6.9 \Phi_{\Lambda} \left(\frac{n}{\Phi_{\Lambda}(1)} \right). \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку последовательность Λ является приемлемой, то по теореме 2.2 в силу (2.4) полином (0.24) положителен и принадлежит $W_n^{\downarrow Z}$. Следовательно,

$$M_Z^{\downarrow}(n) \leq \max_x \left\{ - \sum_{k=1}^n \varphi_{\Lambda} \left(\frac{n}{k} \right) \cos(kx) \right\} < \frac{11}{10} \Phi_{\Lambda}(2n)$$

и (2.14) в силу (0.13) доказано. Функция $a_0(\nu) = 1.1 \Phi_{\Lambda}(2\nu)$ как функция от ν по лемме 2.2 возрастает на интервале $(0, +\infty)$. Пусть $\varphi(t) \equiv \varphi_{\Lambda}(t)$. Поскольку (2.4) верно при всех натуральных n , то (2.6) верно при всех $m \in \mathbb{N}$. По лемме 2.1 верно (2.9), т. е.

$$1 + K_Z^{\downarrow}(n) \leq a_0(n) + \varphi(n) = \varphi(n) + 1.1 \Phi_{\Lambda}(2n)$$

при всех натуральных n . Поскольку $\varphi(n) \leq \Phi_{\Lambda}(n)$, то оценки (2.15) доказаны.

Теперь перейдем к доказательству (2.16). Пусть n – произвольное натуральное число. Очевидно, что $K_Z^{\downarrow}(n) \leq n$; достаточно рассмотреть полином (2.13). Если $n \leq 2\Phi_{\Lambda}(1)$, то в силу (0.13)

$$\Phi_{\Lambda} \left(\frac{n}{\Phi_{\Lambda}(1)} \right) \geq \frac{\Phi_{\Lambda}(2)}{2} \cdot \frac{n}{\Phi_{\Lambda}(1)} > \frac{n}{2} \geq \frac{1}{2} K_Z^{\downarrow}(n)$$

и (2.16) в этом случае верно.

Пусть далее $n > 2\Phi_{\Lambda}(1)$, и пусть τ – наименьшее натуральное число такое, что $\tau \Phi_{\Lambda}(1) \geq 2n$. Тогда

$$\tau \leq 1 + \left\lceil \frac{2n}{\Phi_{\Lambda}(1)} \right\rceil < \frac{2n}{\Phi_{\Lambda}(1)} + \frac{n}{2\Phi_{\Lambda}(1)} = \frac{5n}{2\Phi_{\Lambda}(1)}.$$

В силу (0.13)

$$\Phi_{\Lambda}(\tau) \leq \Phi_{\Lambda}\left(\frac{5n}{2\Phi_{\Lambda}(1)}\right) \leq \frac{5}{2}\Phi_{\Lambda}\left(\frac{n}{\Phi_{\Lambda}(1)}\right).$$

Поэтому если $\Phi_{\Lambda}(\tau) \geq n$, то $\Phi_{\Lambda}(\tau) \geq n \geq K_Z^{\downarrow}(n)$ и (2.16) в этом случае также верно. Поэтому далее будем предполагать, что $\Phi_{\Lambda}(\tau) < n$. Тогда

$$2n \leq \tau\Phi_{\Lambda}(1) = \Phi_{\Lambda}(\tau) + \int_1^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{t}\right) dt < n + \sum_{k=1}^{\tau-1} \int_k^{k+1} \varphi\left(\frac{\tau}{t}\right) dt < n + \sum_{k=1}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{k}\right).$$

Поэтому $n < \sum_{k=1}^{\tau} \varphi(\tau/k)$. Поскольку $n > 2\Phi_{\Lambda}(1)$, то существует наибольшее натуральное m такое, что $\sum_{k=1}^m \varphi(m/k) \leq n$. Тогда в обозначении (2.5) верно (2.7) и, очевидно, $m < \tau$. По теореме 2.2 и лемме 2.1 в силу (2.4) полином (2.12) из $U_n^{\downarrow Z}$ и верна оценка (2.8). Поэтому по определению числа τ имеем

$$\begin{aligned} 1 + K_Z^{\downarrow}(n) &\leq a_0(m) + \varphi(\tau) \leq 1.1\Phi_{\Lambda}(2(\tau-1)) + \Phi_{\Lambda}(\tau) \\ &\leq 1.1\Phi_{\Lambda}\left(\frac{4n}{\Phi_{\Lambda}(1)}\right) + \Phi_{\Lambda}\left(\frac{5n}{2\Phi_{\Lambda}(1)}\right) \leq \left(\frac{44}{10} + \frac{5}{2}\right)\Phi_{\Lambda}\left(\frac{n}{\Phi_{\Lambda}(1)}\right). \end{aligned}$$

Оценка (2.16), а значит, и теорема 2.3, полностью доказаны.

Отметим, что в доказательстве теорем 2.2 и 2.3 и леммы 2.1 изложена конструкция, тесно связанная с методом работы [2], которая по заданной приемлемой последовательности Λ позволяет вполне определенным образом построить неотрицательные тригонометрические полиномы (2.4) и (2.12), или (2.13), из $W_n^{\downarrow Z}$ и $U_n^{\downarrow Z}$ соответственно, реализующие оценки (2.14), (2.15) и (2.16).

Из теоремы 2.3 и из определений (0.14) и (0.15) немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *При всех натуральных n верны оценки*

$$\begin{aligned} M_Z^{\downarrow}(n) &\leq \frac{11}{10}\Phi(2n) \leq \frac{11}{5}\Phi(n), \\ 1 + K_Z^{\downarrow}(n) &\leq \frac{16}{5}\Phi(n), \quad K_Z^{\downarrow}(n) \leq 6.9\Phi_0(n). \end{aligned}$$

Следствие 2.1 и результаты следующего параграфа приведут нас к порядковым соотношениям (0.31). Пока же мы докажем, что верна

ЛЕММА 2.3. *Функции Φ и Φ_0 положительны, непрерывны, вогнуты, строго возрастают на интервале $(0, +\infty)$,*

$$1 + 2/(3\pi) \leq \Phi(1) \leq \pi^2/6, \quad (2.17)$$

$$\Phi(x) = \Phi(1)x, \quad x \in (0, 1], \quad (2.18)$$

$$\Phi_0(x) = x, \quad x \in (0, \Phi(1)], \quad (2.19)$$

$$\Phi(\nu x) \leq \nu\Phi(x), \quad \Phi_0(\nu x) \leq \nu\Phi_0(x), \quad \nu \geq 1, \quad x > 0, \quad (2.20)$$

и справедливо неравенство (0.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой и удовлетворяет условию $\min \Lambda = 1$, то по лемме 1.3 из (0.12) имеем

$$\Phi_{\Lambda}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} > 1 + \frac{2}{3\pi}.$$

Отсюда сразу получается первая оценка (2.17). Из леммы 2.2 и определений (0.14) и (0.15) последовательно выводим (2.18), (2.19), (0.16), из (0.13) выводим (2.20); из свойств функции Φ_{Λ} видим, что функции Φ и Φ_0 не убывают, положительны, вогнуты и непрерывны на интервале $(0, +\infty)$. Поскольку (см., например, [2]) функции (0.19) и (0.23) стремятся к бесконечности (не медленнее $\ln n$), то по следствию 2.1 функции Φ и Φ_0 строго возрастают на интервале $(0, +\infty)$. По теореме 0.1 последовательность $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой. Поэтому $\Phi(1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6$. Лемма полностью доказана.

Теорема 2.3 и следствие 2.1 применяются в работе для получения оценок для функций (0.19) и (0.23). Как это делается, ясно на примере следующих двух следствий. Из теоремы 2.3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Если при некоторых $\lambda > 0$ и $q > 1$ последовательность $\{(n + \lambda - 1)^q\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой, то при всех натуральных n верны оценки*

$$\begin{aligned} M_Z^{\downarrow}(n) &< \frac{11}{5} \left(\frac{\lambda q}{q-1} n^{1/q} - \lambda + 1 \right), \\ K_Z^{\downarrow}(n) &< \frac{16}{5} \left(\frac{\lambda q}{q-1} n^{1/q} - \lambda + 1 \right). \end{aligned}$$

В частности, если $\lambda \geq 1$ и $q \geq 2$, то при всех натуральных n справедливы оценки

$$M_Z^{\downarrow}(n) < \frac{22}{5} \lambda n^{1/q}, \quad K_Z^{\downarrow}(n) < \frac{32}{5} \lambda n^{1/q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть при некоторых $\lambda > 0$ и $q > 1$ последовательность $\Lambda = \{(n + \lambda - 1)^q / \lambda^q\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой. Тогда $\varphi_{\Lambda}(t) = [\lambda t^{1/q} - \lambda + 1] \leq \lambda t^{1/q} - \lambda + 1$ при $t \geq 1$. Поэтому при каждом натуральном n из (0.11) имеем

$$\Phi_{\Lambda}(n) \leq n \int_n^{\infty} t^{-2} (\lambda t^{1/q} - \lambda + 1) dt = \frac{\lambda q}{q-1} n^{1/q} - \lambda + 1.$$

Отсюда и из (2.14) и (2.15) по теореме 2.3 сразу получаем все оценки из следствия 2.2.

Из третьего утверждения теоремы 0.1 и следствия 2.2, где $\lambda = 3q^q$, немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.3. *При всех $q > 1$ и всех натуральных n верны оценки*

$$M_Z^{\downarrow}(n) < \frac{33}{5} \frac{q}{q-1} q^q n^{1/q}, \quad K_Z^{\downarrow}(n) < \frac{48}{5} \frac{q}{q-1} q^q n^{1/q}.$$

Естественно, что полученные в следствии 2.3 оценки аналогичны оценкам (1.23) и (0.18) из работы [2]. Применение теоремы 2.3 к приемлемым последовательностям из теорем 0.3 и 0.4 приведет нас к более точным по порядку оценкам.

**§ 3. Построение приемлемой последовательности
по заданному неотрицательному тригонометрическому полиному
с целыми монотонными коэффициентами**

Основной в этом параграфе является следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть n и $\{b_k\}_{k=1}^n$ — произвольные натуральные числа такие, что

$$b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 1, \quad (3.1)$$

b_0 — действительное число, и пусть

$$b_0 \geq b_1 \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^n b_k \cos(kx) \geq 0 \quad \text{при всех } x. \quad (3.2)$$

Тогда для каждого $\gamma \in [0.89, 1)$ можно построить такую строго приемлемую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, что

$$\lambda_k = 1, \quad k = 1, \dots, b_n, \quad \lambda_{k+1} > \lambda_k, \quad k \geq b_n, \quad (3.3)$$

$$\varphi_\Lambda(n/k) = b_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

и верны неравенства

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda(x) &\leq (1 - \gamma)^{-1}(b_0 + 1) \left(\frac{x}{2n}\right)^\gamma, & x \geq 2n, \\ f_\Lambda(nx) &\geq \frac{b_0 + 1}{2(1 - \gamma)} \left(\frac{11}{10} - 5(1 - \gamma)2^\gamma\right) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma, & x \geq \pi. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию g на сегменте $[1/2, n]$ следующим образом: $g(1/2) = b_0 + 1$, $g(k) = b_k + (k + 1)^{-1} - (n + 1)^{-1}$ при $k = 1, \dots, n$, функция g линейна между точками $1/2, 1, \dots, n$. В силу (3.1) и (3.2) $g(1/2) > g(1) > \dots > g(n) = b_n \geq 1$. Поэтому функция g непрерывна, строго убывает на сегменте $[1/2, n]$ и $[g(k)] = b_k$ при $k = 1, \dots, n$. Пусть $a(t) = [g(1/2)]$ при $t \in [0, 1/2]$, $a(t) = [g(t)]$ при $t \in [1/2, n]$, $a(t) = 0$ при $t > n$. По лемме 2.1 из работы [2] при всех $x > 0$ верна оценка

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\sin(x/2)}{x/2} \sum_{k=1}^n b_k \cos(kx) - \int_{1/2}^n [g(t)] \cos(tx) dt \right| \\ &= \left| \frac{\sin(x/2)}{x/2} \sum_{k=1}^n a(k) \cos(kx) - \int_{1/2}^n a(t) \cos(tx) dt \right| \\ &\leq \int_{1/2}^1 a(t) dt \leq \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\sin(x/2)}{x/2} \sum_{k=0}^n b_k \cos(kx) \leq b_0 \frac{\sin(x/2)}{x/2} + \frac{1}{2} \left[g\left(\frac{1}{2}\right) \right] + \int_{1/2}^n [g(t)] \cos(tx) dt$$

при всех $x > 0$. Отсюда и из (3.2) получаем оценку

$$b_0 \frac{\sin(x/2)}{x/2} + \frac{1}{2} \left[g \left(\frac{1}{2} \right) \right] + \int_{1/2}^n [g(t)] \cos(tx) dt \geq 0, \quad x \in (0, 2\pi). \quad (3.6)$$

Возьмем и зафиксируем любое $\gamma \in [0.89, 1)$. Положим $g(t) = g(1/2)(2t)^{-\gamma}$ при $t \in (0, 1/2]$. Функция g определена, непрерывна и строго убывает на промежутке $(0, n]$, $g(1/2) = b_0 + 1 \geq 2$. Докажем, что

$$\int_0^n [g(t)] \cos(tx) dt > 0 \quad (3.7)$$

при всех $x > 0$. Действительно, при $x \in (0, \pi]$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} [g(t)] \cos(tx) dt &> \int_0^{1/2} (g(t) - 1) \cos(tx) dt \\ &= (b_0 + 1) \int_0^{1/2} (2t)^{-\gamma} \cos(tx) dt - \frac{1}{x} \sin \left(\frac{x}{2} \right) \\ &= b_0 \frac{\sin(x/2)}{x} + (b_0 + 1) \gamma 2^{-\gamma} x^{\gamma-1} \int_0^{x/2} t^{-\gamma-1} \sin t dt \\ &> b_0 \frac{\sin(x/2)}{x} + (b_0 + 1) \gamma 2^{-\gamma} x^{\gamma-1} \int_0^{x/2} \frac{2}{\pi} t^{-\gamma} dt \\ &= b_0 \frac{\sin(x/2)}{x} + \frac{\gamma(b_0 + 1)}{\pi(1-\gamma)} > b_0 \frac{\sin(x/2)}{x} + b_0 + 1 \\ &> 2b_0 \frac{\sin(x/2)}{x} + \frac{b_0 + 1}{2} \geq b_0 \frac{\sin(x/2)}{x/2} + \frac{1}{2} \left[g \left(\frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.6) сразу получаем (3.7) при всех $x \in (0, \pi]$. Пусть теперь $x \geq \pi$. Тогда по лемме 1.2 в силу неравенства (1.2)

$$\begin{aligned} x \int_0^{1/2} [g(t)] \cos(tx) dt &= \int_0^{x/2} \left[g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2t} \right)^\gamma \right] \cos t dt \\ &\geq \int_0^{3\pi/2} \left[g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2t} \right)^\gamma \right] \cos t dt > \int_0^{\pi/2} \left(g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2t} \right)^\gamma - 1 \right) \cos t dt \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2t} \right)^\gamma \cos t dt = g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^\gamma \int_0^{3\pi/2} t^{-\gamma} \cos t dt - 1. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 1.1 получаем

$$x \int_0^{1/2} [g(t)] \cos(tx) dt > g \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{2\pi} \right)^\gamma \frac{1.1}{2(1-\gamma)} - 1. \quad (3.8)$$

Также верна оценка

$$\begin{aligned} \left| x \int_{1/2}^n [g(t)] \cos(tx) dt \right| &= \left| \int_{1/2}^n [g(t)] d \sin(tx) \right| \\ &= \left| [g(n)] \sin(nx) - [g(1/2)] \sin(x/2) - \int_{1/2}^n \sin(tx) d[g(t)] \right| \\ &\leq [g(n)] + [g(1/2)] + |[g(1/2)] - [g(n)]| = 2[g(1/2)]. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.8) выводим, что

$$\begin{aligned}
x \int_0^n [g(t)] \cos(tx) dt &> g\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma \frac{1.1}{2(1-\gamma)} - 1 - 2g\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma \left(\frac{1.1}{1-\gamma} - 4\left(\frac{2\pi}{x}\right)^\gamma - \frac{2}{b_0+1} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^\gamma\right) \\
&\geq \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma \left(\frac{1.1}{1-\gamma} - 4 \cdot 2^\gamma - 2^\gamma\right) \\
&= \frac{g(1/2)}{2(1-\gamma)} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma (1.1 - 5(1-\gamma)2^\gamma).
\end{aligned}$$

Но $5(1-\gamma)2^\gamma < 10(1-\gamma) < 1.1$. Поэтому оценка (3.7) верна при всех $x > 0$ и, более того,

$$x \int_0^n [g(t)] \cos(tx) dt > \frac{g(1/2)}{2(1-\gamma)} (1.1 - 5(1-\gamma)2^\gamma) \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma, \quad x \geq \pi.$$

Положим $\psi(t) = g(n/t)$ при $t \geq 1$. Тогда функция ψ непрерывна и строго возрастает на промежутке $[1, +\infty)$, $\psi(1) = b_n$, $[\psi(n/k)] = b_k$ при $k = 1, \dots, n$,

$$\psi(t) = (b_0 + 1) \left(\frac{t}{2n}\right)^\gamma, \quad t \geq 2n, \quad (3.9)$$

и в силу (3.7)

$$\int_0^{nx} \left[\psi\left(\frac{nx}{t}\right)\right] \cos t dt = x \int_0^n [g(t)] \cos(tx) dt > 0, \quad x > 0.$$

Следовательно, выполнено условие (1.4). По лемме 1.5 последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, задаваемая формулами $\lambda_k = 1$ при $k = 1, \dots, [\psi(1)]$, $\lambda_k = \psi^{-1}(k)$ при $k \geq 1 + [\psi(1)]$, является строго приемлемой, $\min \Lambda = 1$ и $\varphi_\Lambda(t) = [\psi(t)]$ при $t \geq 1$. Отсюда сразу получаем (3.3), (3.4) и в силу (3.9) $\varphi_\Lambda(t) = [(b_0 + 1) \left(\frac{t}{2n}\right)^\gamma]$ при $t \geq 2n$. Следовательно, при $x \geq 2n$ из (0.11) имеем

$$\Phi_\Lambda(x) = x \int_x^\infty t^{-2} \left[(b_0 + 1) \left(\frac{t}{2n}\right)^\gamma\right] dt \leq (b_0 + 1)x \int_x^\infty t^{-2} \left(\frac{t}{2n}\right)^\gamma dt,$$

т. е. получена оценка (3.5). Наконец, при $x \geq \pi$ по лемме 1.4 имеем

$$\begin{aligned}
f_\Lambda(nx) &= \int_0^\infty \varphi_\Lambda\left(\frac{nx}{t}\right) \cos t dt = \int_0^{nx} \left[\psi\left(\frac{nx}{t}\right)\right] \cos t dt \\
&= x \int_0^n [g(t)] \cos(tx) dt \geq \frac{g(1/2)}{2(1-\gamma)} \left(\frac{x}{2\pi}\right)^\gamma (1.1 - 5(1-\gamma)2^\gamma).
\end{aligned}$$

Теорема 3.1 полностью доказана.

Всюду далее в этом параграфе будем считать, что

$$\gamma = 0.89. \quad (3.10)$$

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть n – натуральное число и тригонометрический полином (0.17) таков, что $T_n \in W_n^{\downarrow Z}$. Тогда можно построить такую строго приемлемую последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$, что

$$1 = \lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \varphi_\Lambda(1) = 1, \quad (3.11)$$

$\varphi_\Lambda(n/k) = a_k$ при $k = 1, \dots, n-1$ и (см. (3.10))

$$\Phi_\Lambda(x) \leq \frac{3}{1-\gamma} a_0 \left(\frac{x}{2n}\right)^\gamma, \quad x \geq 2n. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неотрицательности полинома (0.17) следует, что $a_0 \geq a_n$ и $2a_0 \geq a_1$. Значит, положительный полином

$$1 + (a_0 - a_n) + (a_n - 1)(1 - \cos(nx)) + T_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cos(kx),$$

где $b_0 = 2a_0$, $b_k = a_k$ при $k = 1, \dots, n-1$, $b_n = 1$, удовлетворяет в силу (0.18) условиям (3.1) и (3.2). По теореме 3.1 можно построить такую строго приемлемую последовательность Λ , которая удовлетворяет требованиям (3.3)–(3.5). Отсюда сразу получаем все утверждения следствия 3.1, поскольку $b_0 + 1 \leq 3a_0$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть n – натуральное число и тригонометрический полином (0.17) таков, что $T_n \in W_n^{\downarrow Z}$. Тогда можно построить такую строго приемлемую последовательность Λ , что $\min \Lambda = 1$, $\varphi_\Lambda(n/k) = a_k$ при $k = 1, \dots, n$, и (см. (3.10)) справедлива оценка (3.12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $b_0 = 2a_0$, $b_k = a_k$ при $k = 1, \dots, n$. Тогда в силу (0.18) и неотрицательности полинома (0.17) условия (3.1) и (3.2) выполнены. По теореме 3.1 в случае (3.10) можно построить строго приемлемую последовательность Λ , которая удовлетворяет всем требованиям следствия 3.2.

ТЕОРЕМА 3.2. Для каждого натурального n можно построить такую строго приемлемую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, что выполнено условие (3.11) и (см. (3.10)) верна оценка

$$\Phi_\Lambda(x) \leq \frac{3}{1-\gamma} M_Z^{\downarrow}(n) \left(\frac{x}{2n}\right)^\gamma, \quad x \geq 2n. \quad (3.13)$$

В частности,

$$\Phi_\Lambda(2n) \leq \frac{300}{11} M_Z^{\downarrow}(n). \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого натурального n , очевидно, существует такой тригонометрический полином (0.17), что $T_n \in W_n^{\downarrow Z}$ и (см. (0.19)) $a_0 = M_Z^{\downarrow}(n)$. По следствию 3.1 строим строго приемлемую последовательность Λ такую, что выполнены требования (3.11) и (3.12). В этом случае (3.12) совпадает с (3.13). При $x = 2n$ из (3.13) получаем (3.14). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.3. Для каждого натурального n можно указать такое натуральное число τ и построить такую строго приемлемую последовательность $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, что

$$n/K_Z^{\downarrow}(n) \leq \tau \leq n, \quad (3.15)$$

$$\min \Lambda = 1, \quad \sum_{k=1}^{\tau} \varphi_{\Lambda}\left(\frac{\tau}{k}\right) = n \quad (3.16)$$

и верна оценка (см. (3.10))

$$\Phi_{\Lambda}(x) \leq \frac{3}{1-\gamma} K_Z^{\downarrow}(n) \left(\frac{x}{2\tau}\right)^{\gamma}, \quad x \geq 2\tau. \quad (3.17)$$

В частности,

$$\Phi_{\Lambda}(2\tau) \leq \frac{300}{11} K_Z^{\downarrow}(n). \quad (3.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого натурального n , очевидно, существует неотрицательный тригонометрический полином (0.20) такой, что $T \in U_n^{\downarrow Z}$ и $\alpha_0 = K_Z^{\downarrow}(n)$, т. е. в (0.23) нижнюю грань можно заменить на минимум. Из (0.21) и (0.22) следует, что найдется натуральное τ , для которого $\alpha_{\tau} \geq 1$ и $\alpha_k = 0$ при всех $k > \tau$. Из (0.21) имеем очевидную оценку $\tau \leq n$. Ясно, что $T \in W_{\tau}^{\downarrow Z}$. По следствию 3.2 для полинома (0.20) можно построить такую строго приемлемую последовательность Λ , что $\min \Lambda = 1$, $\varphi_{\Lambda}(\tau/k) = \alpha_k$ при $k = 1, \dots, \tau$ и справедлива оценка $\Phi_{\Lambda}(x) \leq \frac{3}{1-\gamma} \alpha_0 \left(\frac{x}{2\tau}\right)^{\gamma}$ при всех $x \geq 2\tau$. Отсюда и из (0.21) сразу получаем (3.16) и (3.17). Из (3.17) и (3.10) при $x = 2\tau$ выводим (3.18). Поскольку

$$\tau K_Z^{\downarrow}(n) - n = \tau \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\tau} \alpha_k = \sum_{k=0}^{\tau} \alpha_k \sum_{j=1}^{\tau} \cos\left(\frac{2\pi k j}{\tau+1}\right) = \sum_{j=1}^{\tau} T\left(\frac{2\pi j}{\tau+1}\right) \geq 0,$$

то оценки (3.15) также доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. 1) Для каждого натурального n верны (см. (3.10)) оценки

$$\Phi(x)x^{-\gamma} \leq \frac{300}{11} M_Z^{\downarrow}(n)(2n)^{-\gamma} \leq 30\Phi(2n)(2n)^{-\gamma}, \quad x \geq 2n, \quad (3.19)$$

$$\Phi(2n) \leq \frac{300}{11} M_Z^{\downarrow}(n), \quad (3.20)$$

$$K_Z^{\downarrow}(n) < 58M_Z^{\downarrow}(n). \quad (3.21)$$

2) Для любых натуральных $m \leq n$ справедливы оценки

$$M_Z^{\downarrow}(m) < 30M_Z^{\downarrow}(n), \quad (3.22)$$

$$K_Z^{\downarrow}(m) < 58M_Z^{\downarrow}(n), \quad (3.23)$$

$$n^{-\gamma} M_Z^{\downarrow}(n) < 30m^{-\gamma} M_Z^{\downarrow}(m). \quad (3.24)$$

3) Функция Φ обладает свойством

$$x_2^{-\gamma} \Phi(x_2) \leq 120x_1^{-\gamma} \Phi(x_1), \quad x_2 \geq x_1 \geq 1. \quad (3.25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное натуральное n и по теореме 3.2 построим приемлемую последовательность Λ такую, что $\min \Lambda = 1$ и верны оценки (3.13) и (3.14), из которых в силу определения (0.14) сразу получаем первую оценку (3.19) и оценку (3.20). Вторая оценка (3.19) немедленно вытекает из следствия 2.1. Если $m \leq n$, то по теореме 2.3 из (2.14) и (3.14) имеем

$$M_Z^\downarrow(m) < \frac{11}{10} \Phi_\Lambda(2m) \leq \frac{11}{10} \Phi_\Lambda(2n) \leq 30 M_Z^\downarrow(n).$$

Оценка (3.22) доказана. Аналогично, из (2.15) и (3.14) выводим

$$1 + K_Z^\downarrow(m) \leq \left(1 + \frac{11}{10}\right) \Phi_\Lambda(2m) \leq \frac{21}{10} \Phi_\Lambda(2n) \leq \frac{21}{11} 30 M_Z^\downarrow(n).$$

Этим доказана оценка (3.23), из которой при $m = n$ сразу получаем оценку (3.21). Если $k \geq n$, то из (2.14) и (3.13) следует, что

$$M_Z^\downarrow(k) < \frac{11}{10} \Phi_\Lambda(2k) \leq \frac{33}{10(1-\gamma)} M_Z^\downarrow(n) \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma = 30 M_Z^\downarrow(n) \left(\frac{k}{n}\right)^\gamma.$$

Отсюда, заменяя числа k и n на n и m соответственно, получаем (3.24). Наконец, если $x_2 \geq x_1 \geq 1$, то при $n = [x_1]$ и $x = 2x_2$ из (3.19) имеем

$$\frac{\Phi(x_2)}{2x_2^\gamma} \leq \frac{\Phi(2x_2)}{(2x_2)^\gamma} \leq 30 \frac{\Phi(2n)}{(2n)^\gamma} \leq 30 \frac{\Phi(2x_1)}{x_1^\gamma} \leq 60 \frac{\Phi(x_1)}{x_1^\gamma}.$$

Свойство (3.25), а значит, и следствие 3.3 доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 3.4. 1) Для каждого натурального n верны (см. (3.10)) оценки

$$\Phi\left(\frac{5n}{8\Phi(n)}\right) \leq \Phi\left(\frac{2n}{K_Z^\downarrow(n)}\right) \leq \frac{300}{11} K_Z^\downarrow(n), \quad (3.26)$$

$$\Phi_0(2\nu n) \leq \frac{300}{11} K_Z^\downarrow(n) \nu^\gamma, \quad \nu \geq 1, \quad (3.27)$$

$$\Phi_0(2n) \leq \frac{300}{11} K_Z^\downarrow(n). \quad (3.28)$$

2) Для любых натуральных $m \leq n$ справедливы оценки

$$K_Z^\downarrow(m) < 58 K_Z^\downarrow(n), \quad (3.29)$$

$$n^{-\gamma} K_Z^\downarrow(n) < 189 m^{-\gamma} K_Z^\downarrow(m). \quad (3.30)$$

3) Функция Φ_0 обладает свойством

$$\Phi_0(\nu x) < 189 \nu^\gamma \Phi_0(x), \quad x \geq 1, \quad \nu \geq 1. \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное натуральное n и по теореме 3.3 найдем натуральное число τ и приемлемую последовательность Λ такие, что выполнены условия (3.15), (3.16) и верны оценки (3.17) и (3.18). Из (3.18) и (3.15) сразу имеем

$$\Phi_{\Lambda}\left(\frac{2n}{K_Z^{\downarrow}(n)}\right) \leq \Phi_{\Lambda}(2\tau) \leq \frac{300}{11} K_Z^{\downarrow}(n).$$

Отсюда в силу (0.14) немедленно получаем вторую оценку (3.26). Первая оценка (3.26) вытекает из неравенства $K_Z^{\downarrow}(n) < \frac{16}{5} \Phi(n)$, которое справедливо по следствию 2.1. В силу (3.16)

$$\tau \Phi_{\Lambda}(1) = \int_0^{\tau} \varphi_{\Lambda}\left(\frac{\tau}{t}\right) dt \geq \sum_{j=1}^{\tau} \varphi_{\Lambda}\left(\frac{\tau}{j}\right) = n.$$

Поэтому $\tau \geq n/\Phi_{\Lambda}(1)$. Отсюда, из (0.15) и (3.17) при $\nu \geq 1$ имеем

$$\Phi_0(2\nu n) \leq \Phi_{\Lambda}\left(\frac{2\nu n}{\Phi_{\Lambda}(1)}\right) \leq \Phi_{\Lambda}(2\nu\tau) \leq \frac{3}{1-\gamma} K_Z^{\downarrow}(n) \nu^{\gamma},$$

а это в силу (3.10) приводит к оценке (3.27), из которой при $\nu = 1$ получаем оценку (3.28).

Положим $\varphi(x) \equiv \varphi_{\Lambda}(x)$. Тогда в обозначении (2.5) из (3.16) имеем $b_{\tau} = n$. Пусть $a_0(m) = 1.1\Phi_{\Lambda}(2m)$ при $m \geq 1$. По теореме 2.2 из неравенства (2.4) получаем, что $T_m(\Lambda; x) > 0$ при всех x и натуральных m , т.е. верно условие (2.6). Пусть натуральное n_0 таково, что $\varphi(1) \leq n_0 < n$. Тогда существует такое натуральное $m \leq \tau - 1$, что $b_m \leq n_0 < b_{m+1}$. По лемме 2.1 в силу (2.8) получаем оценку

$$\begin{aligned} 1 + K_Z^{\downarrow}(n_0) &\leq a_0(m) + \varphi(m+1) \leq a_0(\tau-1) + \varphi(\tau) \\ &\leq 1.1\Phi_{\Lambda}(2(\tau-1)) + \Phi_{\Lambda}(\tau) \leq 2.1\Phi_{\Lambda}(2\tau). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$1 + K_Z^{\downarrow}(n_0) \leq 2.1\Phi_{\Lambda}(2\tau). \quad (3.32)$$

Последняя оценка верна и при натуральных $n_0 < \varphi(1)$. Действительно, в этом случае

$$1 + K_Z^{\downarrow}(n_0) \leq 1 + n_0 \leq \varphi(1) \leq \Phi_{\Lambda}(1) \leq \Phi_{\Lambda}(2\tau).$$

Следовательно, оценка (3.32) верна при всех натуральных $n_0 < n$. Из (3.32) и (3.18) вытекает, что $1 + K_Z^{\downarrow}(n_0) \leq \frac{21}{10} \frac{300}{11} K_Z^{\downarrow}(n)$ при всех натуральных $n_0 < n$. Поэтому справедлива оценка (3.29).

Если $k \geq n$, то по следствию 2.1 из (3.27) выводим

$$K_Z^{\downarrow}(k) \leq 6.9\Phi_0(k) \leq 6.9\Phi_0\left(2\frac{k}{n}n\right) \leq 69 \cdot \frac{30}{11} K_Z^{\downarrow}(n) \left(\frac{k}{n}\right)^{\gamma}.$$

Заменяя здесь k и n на n и m соответственно, получаем (3.30). Из следствия 2.1 и оценки (3.27) при $\nu \geq 1$, $x \geq 1$ и $n = [x]$ имеем

$$\Phi_0(\nu x) \leq \Phi_0(2\nu n) \leq \frac{300}{11} K_Z^{\downarrow}(n) \nu^{\gamma} \leq 69 \cdot \frac{30}{11} \Phi_0(n) \nu^{\gamma} < 189\Phi_0(x) \nu^{\gamma}.$$

Этим доказано свойство (3.31), а значит, и следствие 3.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.2. Из следствия 2.1 и оценки (3.20) в силу леммы 2.3 сразу получаем оценки (0.25). Оценки (0.26) немедленно вытекают из следствия 2.1 и оценок (3.26). Оценки (0.27) следуют из оценки (3.28), леммы 2.3 и следствия 2.1. Оценки (0.28), (0.29), (0.30) совпадают соответственно с оценками (3.21), (3.22) и (3.29). Теорема 0.2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 0.1. По лемме 2.3 из (2.18), (2.19) и (2.17) сразу получаем равенства (0.32). Из неравенства (0.16), которое верно по лемме 2.3, и оценок

$$\Phi\left(\frac{5x}{16\Phi(x)}\right) \leq \Phi\left(\frac{10n}{16\Phi(x)}\right) \leq \Phi\left(\frac{5n}{8\Phi(n)}\right) < 28K_Z^\downarrow(n) < 28 \cdot 7\Phi_0(n) \leq 196\Phi_0(x),$$

верных в силу (0.26) и (0.27) при всех $x \geq 1$ и $n = [x]$, немедленно вытекают оценки (0.33). Следствие 0.1 доказано.

§ 4. Конкретный пример приемлемой последовательности, считающая функция которой имеет порядок $\ln^5 t$

Основная цель этого параграфа состоит в доказательстве теоремы 0.3. Пусть далее p_n — n -е простое число, $P = \{p_1, p_2, \dots\}$ — множество всех простых чисел, $P_1 = \{p_2, p_3, \dots\}$ — множество всех нечетных простых чисел, $\langle t \rangle = \min\{|t - k| : k \in \mathbb{Z}\}$ — расстояние до ближайшего целого от действительного числа t . Напомним, что квадратные скобки всюду обозначают целую часть числа.

ЛЕММА 4.1. При любых действительных a и $y > 1/2$ и целых $j \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{p \in K(a, y, j)} \ln p < 2 \ln(2y), \quad (4.1)$$

где

$$K(a, y, j) = \{p \in P : p \leq a, \quad p < y, \quad [p\langle y/p \rangle] = j\}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S сумму в левой части неравенства (4.1). Если $S = 0$, то неравенство (4.1) очевидно. Поэтому будем далее считать, что $S > 0$. Тогда множество (4.2) не пусто, $a \geq 2$ и $y > 2$. Пусть m — наибольшее целое число такое, что $p_m \leq a$, $p_m < y$. При этих условиях $K(a, y, j) = \{p \in P : p \leq p_m, [p\langle y/p \rangle] = j\}$ и $j \leq p_m/2$. Если $p \in K(a, y, j)$, то найдется знак $s = \pm 1$ и целое число k такие, что $p\langle y/p \rangle = sy - pk$. Тогда $j = [p\langle y/p \rangle] = [sy] - pk$. Следовательно, число p является делителем числа $[sy] - j$. Ясно, что

$$0 \leq [y] - p_m < [y] - p_m/2 \leq |[sy] - j| \leq [y] + 1 + j \leq [y] + 1 + p_m/2 < 2y.$$

Если целое число n не равно 0, то $\sum_{p \mid n} \ln p \leq \ln |n|$, где суммирование производится по всем простым делителям числа n . Значит, $S \leq \ln |[y] - j| + \ln |-y] - j| < 2 \ln(2y)$ и неравенство (4.1) доказано.

Ясно, что параметр a введен в неравенство (4.1) только для удобства дальнейшего изложения, поскольку правая часть (4.1) не зависит от a , а левая не уменьшается с возрастанием a , достигая при $a = y$ своего максимального значения.

ЛЕММА 4.2. При всех действительных $a > 1/2$ и $y > 1/2$ справедливы неравенства

$$\sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{\ln p}{2[p\langle y/p \rangle]} < \ln(2a) \ln(2y), \quad (4.3)$$

$$\sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{p}{2[p\langle y/p \rangle]} < 2a \ln(2y), \quad (4.4)$$

где $K_1(a, y) = \bigcup_{j \geq 1} K(a, y, j) = \{p \in P: p \leq a, p < y, [p\langle y/p \rangle] \geq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $a < 2$ левые части (4.3) и (4.4) равны нулю. Поэтому будем далее считать, что $a \geq 2$. Тогда левая часть неравенства (4.3) равна

$$\sum_{j=1}^{[a/2]} \frac{1}{2j} \sum_{p \in K(a, y, j)} \ln p < \ln(2y) \sum_{j=1}^{[a/2]} \frac{1}{j} \leq \ln(2y) \left(1 + \int_1^{a/2} \frac{dt}{t}\right) < \ln(2y) \ln(2a),$$

где использована оценка (4.1). Неравенство (4.3) доказано. Если $p \in [2, a]$, то $p/\ln p \leq 2a/\ln(2a)$. Следовательно, в силу (4.3) имеем

$$\sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{p}{2[p\langle y/p \rangle]} \leq \frac{2a}{\ln(2a)} \sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{\ln p}{2[p\langle y/p \rangle]} < 2a \ln(2y).$$

Неравенство (4.4) также доказано.

ЛЕММА 4.3. При всех действительных $a > 1$ и $y > 1/2$ верны (см. (4.2)) оценки

$$\sum_{p \in K(a, y, 0)} p < \frac{2a}{\ln a} \ln(2y), \quad (4.5)$$

$$\sum_{p \in K(a, y, 0)} p[\ln p] < 2a \ln(2y). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть далее $a \geq 2$, $y > 2$, иначе оценки (4.5) и (4.6) очевидны. Если $a \leq 4$, то левая часть (4.5) не превосходит $5 < 2e \ln 4 < \frac{2a}{\ln a} \ln(2y)$. Пусть $a > 4$. Тогда $\frac{p}{\ln p} \leq \frac{a}{\ln a}$ при $p \in [2, a]$. Поэтому в силу (4.1) имеем

$$\sum_{p \in K(a, y, 0)} p \leq \frac{a}{\ln a} \sum_{p \in K(a, y, 0)} \ln p < \frac{2a}{\ln a} \ln(2y).$$

Оценка (4.5) доказана. Левая часть (4.6) не больше, чем $a \sum_{p \in K(a, y, 0)} \ln p < 2a \ln(2y)$, где опять использовано неравенство (4.1). Лемма 4.3 доказана.

При натуральных p и ν и действительных t будем обозначать

$$S_{p, \nu}(t) = \sum_{k=0}^{\nu p - 1} \sin \left(\frac{\pi t}{p} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\sin^2(\pi t \nu / 2)}{\sin(\pi t / 2p)}. \quad (4.7)$$

Основные оценки, которые используются при доказательстве теоремы 0.3, содержит в себе следующая

ЛЕММА 4.4. При всех натуральных p и ν и действительных t верны утверждения:

- 1) $|S_{p,\nu}(t)| \leq p\nu$;
- 2) если $t/2p \in [0, 1]$, то $S_{p,\nu}(t) \geq 0$;
- 3) если $t\nu \in (0, 1]$, то $S_{p,\nu}(t) \geq \frac{2}{\pi}\nu^2 pt$;
- 4) если $p\langle t/2p \rangle \geq 1$, то $|S_{p,\nu}(t)| \leq p/(2[p\langle t/2p \rangle])$;
- 5) при всех $a > 1$ и $t > 1$ справедливы оценки

$$\sum_{p \in P: p \leq a, 2p < t} |S_{p,\nu}(t)| < 2 \left(\frac{\nu}{\ln a} + 1 \right) a \ln t, \quad (4.8)$$

$$\sum_{p \in P_1: p \leq a, 2p < t} |S_{p, [\ln p]}(t)| < 4a \ln t. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения 1) и 2) сразу вытекают из (4.7). Если $t\nu \in (0, 1]$, то из (4.7) имеем $S_{p,\nu}(t) \geq \frac{(t\nu)^2}{\pi t/(2p)}$, а это и есть утверждение 3). Если $p\langle t/2p \rangle \geq 1$, то из (4.7) получаем

$$|S_{p,\nu}(t)| \leq \frac{1}{|\sin(\pi t/2p)|} = \frac{1}{\sin(\pi \langle t/2p \rangle)} \leq \frac{1}{2\langle t/2p \rangle} \leq \frac{p}{2[p\langle t/2p \rangle]},$$

т. е. доказано утверждение 4).

При $a > 1$, $t > 1$, $y = t/2$ левая часть (4.8) равна

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in K(a, y, 0)} |S_{p,\nu}(t)| + \sum_{p \in K_1(a, y)} |S_{p,\nu}(t)| \\ & \leq \sum_{p \in K(a, y, 0)} p\nu + \sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{p}{2[p\langle y/p \rangle]} < \nu \frac{2a}{\ln a} \ln(2y) + 2a \ln(2y), \end{aligned}$$

где использованы утверждения 1) и 4) и оценки (4.5) и (4.4). Этим оценка (4.8) доказана. Аналогично, левая часть (4.9) равна

$$\begin{aligned} & \sum_{p \in K(a, y, 0) \cap P_1} |S_{p, [\ln p]}(t)| + \sum_{p \in K_1(a, y) \cap P_1} |S_{p, [\ln p]}(t)| \\ & \leq \sum_{p \in K(a, y, 0)} p[\ln p] + \sum_{p \in K_1(a, y)} \frac{p}{2[p\langle y/p \rangle]} < 4a \ln(2y), \end{aligned}$$

где использованы утверждения 1) и 4) и оценки (4.6) и (4.4). Оценка (4.9) также доказана.

ЛЕММА 4.5. Пусть θ – наибольшая из возможных постоянных такая, что при всех натуральных $n \geq 2$ верна оценка

$$\sum_{k=2}^n p_k \geq \theta n p_n.$$

Тогда $0.3 < \theta < 0.5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\delta_n = (np_n)^{-1} \sum_{k=2}^n p_k$ при $n \geq 2$. Тогда, проведя простые вычисления, видим, что

$$\min\{\delta_n: n = 2, \dots, 20\} = \delta_{17} = 438/1003 = 0.436 \dots < 1/2.$$

Из асимптотического закона распределения простых чисел (см., например, [7, с. 165, 174]) очевидно, что $\delta_n \rightarrow 1/2$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому $\theta = \min\{\delta_n: n \geq 2\} \in (0, 1/2)$. Известно [8], что $p_n > n \ln n$ при $n \geq 1$ и $p_n < n(\ln n + \ln \ln n)$ при $n \geq 6$. Поэтому при $n \geq 20$ имеем

$$\sum_{k=2}^n p_k > \sum_{k=2}^n k \ln k > \int_1^n t \ln t dt = \frac{1}{4}(2n^2 \ln n - n^2 + 1)$$

и

$$\delta_n > \frac{2 \ln n - 1}{4(\ln n + \ln \ln n)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\ln \ln n}{\ln n}\right)^{-1} - \frac{1}{4(\ln n + \ln \ln n)} \equiv g_1(n) - g_2(n),$$

где функция $g_1(n)$ возрастает, а функция $g_2(n)$ убывает при $n \geq 20$. Значит, $\inf\{\delta_n: n \geq 20\} > g_1(20) - g_2(20) > 0.3$. Поэтому $\theta > 0.3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.3. Сначала рассмотрим последовательность несколько более общего вида, чем (0.34). Пусть заданы неубывающие последовательности натуральных чисел $\{m(j)\}_{j=1}^\infty$ и $\{\nu(j)\}_{j=1}^\infty$ и последовательность натуральных чисел $\{N(j)\}_{j=1}^\infty$, которые при некотором действительном $\lambda > 1$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} m(1) > 1, \quad \nu(1) = N(1), \quad \nu(j)/N(j) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow \infty, \\ \nu(j) \leq N(j), \quad N(j+1)/N(j) \leq \lambda \text{ при всех } j \geq 1, \\ \sum_{j=1}^\infty \nu^2(j) m(j) p_{m(j)} / N(j) < \infty. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Изучим на приемлемость последовательность

$$\Lambda = \{1\} \cup \left(\bigcup_{j \geq 1} \bigcup_{p \in P(j)} \left\{ \frac{pN(j)}{k-1/2} \right\}_{k=1}^{p\nu(j)} \right),$$

где $P(j) = \{p \in P_1: p \leq p_{m(j)}\} = \{p_n: n = 2, \dots, m(j)\}$.

При $j \geq 1$, $p \in P(j)$ и $k = 1, \dots, \nu(j)p$ из (4.10) имеем $pN(j)/(k-1/2) > N(j)/\nu(j) \geq 1$. Поэтому $\min \Lambda = 1$. Поскольку

$$\sum_{j=1}^\infty \sum_{p \in P(j)} \sum_{k=1}^{\nu(j)p} \frac{k-1/2}{pN(j)} = \sum_{j=1}^\infty \frac{\nu^2(j)}{2N(j)} \sum_{n=2}^{m(j)} p_n \leq \sum_{j=1}^\infty \frac{\nu^2(j)}{2N(j)} m(j) p_{m(j)} < \infty,$$

то семейство Λ можно перенумеровать в последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ так, что $1 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ и выполнено условие (0.1).

При $x > 0$ обозначим через $\tau(x)$ наименьшее натуральное число τ такое, что

$$N(j)/\nu(j) \geq x \quad \text{при всех } j \geq \tau, \quad (4.11)$$

и пусть

$$\Delta(x) = \frac{x}{\pi} \sum_{j=\tau(x)}^{\infty} \frac{\nu^2(j)}{N(j)} \sum_{p \in P(j)} p. \quad (4.12)$$

Напомним, что буква θ обозначает постоянную из леммы 4.5. В силу (4.10) при натуральных τ по лемме 4.5 имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{\nu^2(j)}{N(j)} \sum_{p \in P(j)} p &= \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{\nu^2(j)}{N(j)} \sum_{n=2}^{m(j)} p_n \geq \theta \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{\nu^2(j)}{N(j)} m(j) p_{m(j)} \\ &\geq \theta \nu^2(\tau) m(\tau) p_{m(\tau)} \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{1}{N(j)} \geq \frac{\theta \nu^2(\tau)}{N(\tau)} m(\tau) p_{m(\tau)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-k}. \end{aligned}$$

Поэтому при $x > 0$ для функции (4.12) верна оценка

$$\Delta(x) \geq \frac{\theta \lambda}{(\lambda - 1)\pi} x \frac{\nu^2(\tau)}{N(\tau)} m(\tau) p_{m(\tau)}, \quad \tau \geq \tau(x). \quad (4.13)$$

Теперь докажем, что если выполнены условия

$$\frac{1}{p_{m(n)}} + 2(n-1) \ln \left(\frac{N(n)}{\nu(n)} \right) \left(1 + \frac{\nu(n)}{\ln p_{m(n)}} \right) \leq \frac{\theta}{(\lambda - 1)\pi} \nu(n) m(n), \quad n \geq 2, \quad (4.14)$$

то последовательность Λ является строго приемлемой. Действительно, в силу (0.10) и (4.7) при действительных x имеем

$$f_{\Lambda}(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi x}{\lambda_n} \right) = \sin(\pi x) + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} S_{p, \nu(j)} \left(\frac{x}{N(j)} \right).$$

Если $x \in (0, 1]$, то $\tau(x) = 1$ и из утверждения 3) леммы 4.4 получаем

$$f_{\Lambda}(\pi x) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} \frac{2}{\pi} \nu^2(j) p \frac{x}{N(j)} = 2\Delta(x).$$

Пусть $x > 1$. Тогда в силу (4.10) и (4.11) $\tau = \tau(x) > 1$ и

$$N(\tau - 1)/\nu(\tau - 1) < x. \quad (4.15)$$

В этом случае

$$f_{\Lambda}(\pi x) = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \sin(\pi x) + \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{p \in P(j), 2p < x/N(j)} S_{p, \nu(j)}(x/N(j)), \\ J_2 &= \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{p \in P(j), 2p \geq x/N(j)} S_{p, \nu(j)}(x/N(j)), \\ J_3 &= \sum_{j=\tau}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} S_{p, \nu(j)}(x/N(j)). \end{aligned}$$

По утверждению 2) леммы 4.4 сумма J_2 не меньше 0, поскольку в ней все слагаемые неотрицательны. Из утверждения 3) леммы 4.4 в силу (4.11) имеем

$$J_3 \geq \sum_{j=\tau}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} \frac{2}{\pi} \nu^2(j) p \frac{x}{N(j)} = 2\Delta(x). \quad (4.16)$$

Отсюда в силу (4.10), (4.13) и (4.15) получаем

$$(\lambda - 1)\pi\Delta(x) \geq \theta x \frac{\nu^2(\tau)m(\tau)}{N(\tau - 1)} p_{m(\tau)} \geq \frac{\theta\nu^2(\tau)m(\tau)}{\nu(\tau - 1)} p_{m(\tau)} \geq \theta\nu(\tau)m(\tau)p_{m(\tau)}.$$

Следовательно,

$$\Delta(x) \geq \frac{\theta}{(\lambda - 1)\pi} \nu(\tau)m(\tau)p_{m(\tau)}. \quad (4.17)$$

В силу (4.8) для любого натурального ν и действительных $a > 1$ и $t > 0$ справедлива оценка

$$\sum_{p \in P: p \leq a, 2p < t} |S_{p,\nu}(t)| \leq 2a(1 + \nu/\ln a) \ln^+ t,$$

где $\ln^+ t = 0$ при $t \leq 1$, $\ln^+ t = \ln t$ при $t > 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{p \in P(j), 2p < x/N(j)} \left| S_{p,\nu(j)} \left(\frac{x}{N(j)} \right) \right| \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} 2p_{m(j)} \cdot \left(1 + \frac{\nu(j)}{\ln p_{m(j)}} \right) \ln^+ \left(\frac{x}{N(j)} \right) \\ &\leq 1 + 2(\tau - 1) \left(p_{m(\tau)} + \frac{\nu(\tau)p_{m(\tau)}}{\ln p_{m(\tau)}} \right) \ln x. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (4.11), (4.14), где $n = \tau$, и (4.17) получаем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 1 + 2(\tau - 1) \ln \left(\frac{N(\tau)}{\nu(\tau)} \right) \left(1 + \frac{\nu(\tau)}{\ln p_{m(\tau)}} \right) p_{m(\tau)} \\ &\leq \frac{\theta\nu(\tau)p_{m(\tau)}m(\tau)}{\pi(\lambda - 1)} \leq \Delta(x). \end{aligned}$$

Из этой оценки и (4.16) выводим, что $f_{\Lambda}(\pi x) \geq J_3 - |J_1| \geq \Delta(x)$. Следовательно,

$$f_{\Lambda}(\pi x) \geq \begin{cases} 2\Delta(x) & \text{при } x \in (0, 1], \\ \Delta(x) & \text{при всех } x > 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Этим, в частности, доказано, что последовательность Λ при выполнении условий (4.14) является строго приемлемой.

Теперь возьмем любое $q \geq 6$ и при всех натуральных j положим $N(j) = 2^{j-1}$, $\nu(j) = 1 + [\ln j]$, $m(j)$ – наибольшее натуральное число такое, что $p_{m(j)} \leq qj^2$. Тогда $\nu(j) \leq j \leq N(j)$ при всех натуральных j . Поэтому при $\lambda = 2$ условия (4.10) выполнены. В этом случае последовательность Λ в силу (0.35) превращается в последовательность (0.34). Ее далее мы и будем изучать.

Сначала найдем достаточные условия для q , при которых последовательность Λ удовлетворяет условиям (4.14). По известной (см. [7, с. 97]) теореме Чебышева (постулат Бертрона)

$$p_{m(j)} > qj^2/2 \quad \text{при всех} \quad j \geq 1. \quad (4.19)$$

Значит, $\ln p_{m(n)} > \ln(qn^2/2) \geq \ln(3n^2) > 1 + \ln n \geq \nu(n)$ при $n \geq 1$. Поэтому при $n \geq 2$ левая часть (4.14) меньше, чем

$$\frac{2}{qn^2} + 4(n-1) \ln \left(\frac{N(n)}{\nu(n)} \right) \leq \frac{1}{3n^2} + 4(n-1)^2 \ln 2 < 4n^2 \ln 2.$$

Поскольку $\nu(n) > \ln n$, то для выполнения условий (4.14) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$4n^2 \ln 2 \leq \frac{\theta}{\pi} m(n) \ln n, \quad n \geq 2. \quad (4.20)$$

Поскольку $q \geq 6$, то при $n \geq 2$ число qn^2 больше 17, и поэтому (см. [8, следствие 1]) $m(n) > qn^2 / \ln(qn^2)$. По лемме 4.5 $\theta > 0.3$. Следовательно, для выполнения условий (4.20) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$4\pi n^2 \ln 2 \leq 0.3 \ln n q n^2 / \ln(qn^2), \quad n \geq 2,$$

т. е. $\ln(qn^2) / \ln n \leq 3q / (40\pi \ln 2)$ при $n \geq 2$. Последнее условие достаточно проверить при $n = 2$. Таким образом, если

$$q \geq 6, \quad \ln(4q) \leq 3q / (40\pi), \quad (4.21)$$

то условия (4.20) и (4.14) выполнены и последовательность (0.34) является строго приемлемой. Очевидно, что при всех $q \geq 2^9$ условия (4.21) выполнены.

Далее будем считать, что число q удовлетворяет условиям (4.21). Тогда при $x \in (0, 1]$ из (4.13), где $\tau(x) = 1$, $\tau = 2$, и из (4.18)–(4.20) имеем

$$f_\Lambda(\pi x) \geq 2\Delta(x) \geq \frac{4\theta}{\pi} x \frac{\nu^2(2)m(2)}{N(2)} p_{m(2)} = \frac{2\theta x}{\pi} m(2) p_{m(2)} > 4qx \frac{\theta}{\pi} m(2) \geq 64qx.$$

Следовательно, $f_\Lambda(\pi x) \geq 32q$ при $x \in [1/2, 1]$, и оценка (0.36) в этом случае доказана. Пусть теперь $x > 1$ и $\tau = \tau(x)$. Тогда из (4.11) имеем $2^{\tau-1} \geq N(\tau) / \nu(\tau) \geq x$. Поэтому $\tau \geq 1 + \ln x / \ln 2$. Отсюда, из (4.18), (4.17), (4.19) и (4.20) получаем

$$\begin{aligned} f_\Lambda(\pi x) &\geq \Delta(x) \geq \frac{\theta}{\pi} \nu(\tau) m(\tau) p_{m(\tau)} > \frac{\theta}{2\pi} \nu(\tau) m(\tau) q \tau^2 \\ &\geq \frac{1}{2} q \tau^2 \nu(\tau) 4\tau^2 \frac{\ln 2}{\ln \tau} > 2q \tau^4 \ln 2 \geq 2q \ln 2 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln 2} \right)^4 > q(1 + \ln x)^4. \end{aligned}$$

Этим оценка (0.36) доказана полностью.

Перейдем к доказательству оценки (0.37). Пусть $x \geq 1$ и τ – любое натуральное число. Из (0.12) получаем

$$\begin{aligned}\Phi_{\Lambda}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \min \left\{ 1, \frac{x}{\lambda_n} \right\} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} \sum_{k=1}^{\nu(j)p} \min \left\{ 1, \frac{x(k-1/2)}{pN(j)} \right\} \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \sum_{p \in P(j)} \nu(j)p + \sum_{j=\tau}^{\infty} \sum_{p \in P(j)} \sum_{k=1}^{\nu(j)p} \frac{x(k-1/2)}{pN(j)} \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \nu(j) \sum_{n=2}^{m(j)} p_n + \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{x}{2N(j)} \nu^2(j) \sum_{n=2}^{m(j)} p_n \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{\tau-1} \nu(j)(m(j)-1)p_{m(j)} + \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{x}{2N(j)} \nu^2(j)(m(j)-1)p_{m(j)}.\end{aligned}$$

Из известных оценок числа простых чисел, не превосходящих заданное число (см. [8, следствие 1]), следует, что

$$m(j) < \frac{3}{2} \cdot \frac{qj^2}{\ln(qj^2)} \quad \text{при} \quad j \geq 1.$$

Значит,

$$\begin{aligned}\Phi_{\Lambda}(x) &\leq \tau \nu(\tau) m(\tau) p_{m(\tau)} + \sum_{j=\tau}^{\infty} \frac{x}{2N(j)} \nu^2(j) m(j) p_{m(j)} \\ &\leq \tau(1 + \ln \tau) m(\tau) q \tau^2 + \sum_{j=\tau}^{\infty} x 2^{-j} (1 + \ln j)^2 m(j) q j^2 \\ &< \frac{3}{2} q^2 \tau^5 \frac{1 + \ln \tau}{\ln(q \tau^2)} + \sum_{j=\tau}^{\infty} 3x 2^{-j-1} q^2 j^4 \frac{(1 + \ln j)^2}{\ln(q j^2)}.\end{aligned}$$

Мы предполагаем, что q удовлетворяет условию (4.21). Поэтому $q > e^2$. Следовательно,

$$\Phi_{\Lambda}(x) < \frac{3}{4} q^2 \tau^5 + \sum_{j=\tau}^{\infty} 3x 2^{-j-2} (1 + \ln j) q^2 j^4 < \frac{3}{4} q^2 \tau^5 + \sum_{j=\tau}^{\infty} 3x 2^{-j-2} q^2 j^5.$$

Таким образом, для любых $x \geq 1$ и $\tau \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\Phi_{\Lambda}(x) \leq \frac{3}{4} q^2 \left(\tau^5 + x \sum_{j=\tau}^{\infty} 2^{-j} j^5 \right).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\sum_{j=\tau}^{\infty} 2^{-j} j^5 = \tau^5 2^{-\tau} \left(2 + \frac{10}{\tau} + \frac{60}{\tau^2} + \frac{260}{\tau^3} + \frac{750}{\tau^4} + \frac{1082}{\tau^5} \right) < 136 \tau^5 2^{-\tau}$$

при $\tau \geq 2$. Поэтому для любых $x \geq 1$ и любого натурального $\tau \geq 2$ верна оценка $\Phi_\Lambda(x) < \frac{3}{4}q^2\tau^5(1 + 17x2^{3-\tau})$.

Положим здесь $\tau = 2 + \lfloor \ln x / \ln 2 \rfloor$. Тогда $x < 2^{\tau-1}$ и

$$\Phi_\Lambda(x) < \frac{3}{4}q^2\tau^5 69 < 52q \left(2 + \frac{\ln x}{\ln 2}\right)^5 \leq 52 \cdot 2^5 q^2 (1 + \ln x)^5.$$

Оценка (0.37), а вместе с ней и теорема 0.3 доказаны.

В силу леммы 2.2 неравенство (0.37) дает такую же оценку сверху для считающей функции $\varphi_\Lambda(x)$. Для примера (0.34) нетрудно доказать, что в действительности

$$\varphi_\Lambda(t) \asymp \Phi_\Lambda(t) \asymp (1 + \ln t)^5, \quad t \geq 1. \quad (4.22)$$

Используя оценку (4.9) вместо (4.8) и повторяя с соответствующими изменениями доказательство теоремы 0.3, несложно доказать, что при всех достаточно больших q последовательность

$$\Lambda = \{1\} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{p \in P_1, p \leq qj^2} \left\{ \frac{qp2^j}{2k-1} \right\}_{k=1}^{p[\ln p]} \right)$$

является строго приемлемой и для нее верны оценки, аналогичные по порядку оценкам (0.36) и (0.37). Для этой последовательности также справедлива оценка (4.22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 0.2. Пусть Λ – последовательность, построенная в теореме 0.3 при $q = 2^9$. По теореме 2.2 полином (0.24) положителен. Возьмем произвольное натуральное n и положим $a_k = \varphi_\Lambda(n/k)$ при $k = 1, \dots, n$, $a_0 = 1 + \lfloor \frac{11}{5}\Phi_\Lambda(n) \rfloor$. Тогда $a_0 > a_1$, в силу (0.13) $a_0 > \frac{11}{10}\Phi_\Lambda(2n)$ и в силу (0.37) $a_0 \leq 1 + \frac{11}{5}\Phi_\Lambda(n) < 1 + \frac{11}{5}2^{29}(1 + \ln n)^5 < 2^{31}(1 + \ln n)^5$. Поэтому соответствующий полином T_1 удовлетворяет всем требованиям следствия 0.2.

При доказательстве оценок (2.9) и (2.15) построен неотрицательный тригонометрический полином вида

$$T(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kx) \in U_n^{\downarrow Z}$$

и (см. (2.12), где $a_0(m) = 1.1\Phi_\Lambda(2m)$, $\varphi(t) \equiv \varphi_\Lambda(t)$) $\alpha_1 \leq \alpha_0 \leq 3.3\Phi_\Lambda(2n) - 1$. Заменим в полиноме $T(x)$ свободный член α_0 на $1 + \lfloor \alpha_0 \rfloor$. Получим положительный тригонометрический полином T_2 . Поскольку в силу (0.13) и (0.37) $1 + \lfloor \alpha_0 \rfloor \leq 3.3\Phi_\Lambda(2n) \leq 6.6\Phi_\Lambda(n) < 8\Phi_\Lambda(n) < 2^{32}(1 + \ln n)^5$, то построенный таким образом полином T_2 удовлетворяет всем утверждениям следствия 0.2. Этим следствие полностью доказано.

§ 5. Случайные приемлемые последовательности

Основной целью этого параграфа является доказательство теоремы 5.1, из которой, как частный случай, будет затем получена теорема 0.4.

Пусть далее буквы **P**, **M**, **D** обозначают соответственно вероятность, математическое ожидание и дисперсию.

Если η – случайная величина на вероятностном пространстве Ω , то $\|\eta\|_\infty = \text{ess sup}_{\omega \in \Omega} |\eta(\omega)|$.

ЛЕММА 5.1. Пусть $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность независимых случайных величин такая, что для некоторой постоянной $B \geq 1$ выполнены условия

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\eta_n &= 0, & \mathbf{D}\eta_n &= 1, \\ \|\eta_n\|_\infty &\leq B & \text{при всех } n &\geq 1. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда если последовательность действительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию $\sum a_n^2 < \infty$, то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n \eta_n$ сходится почти наверное и для любого $\delta \geq 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^\infty a_n \eta_n > \delta \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2\right)^{1/2}\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2}{4B^2}\right). \quad (5.2)$$

Доказательство этой леммы можно найти в [9, с. 39–44] (см. там теорему 9 и оценку (43) в доказательстве теоремы 5, где достаточно лишь перейти к пределу).

ЛЕММА 5.2. Существуют такие абсолютные постоянные $C_1 > 0$, $C_2 \geq 2$ и $B \geq 1$, что для функции

$$g(\gamma) = \int_0^1 \left| \sin\left(\frac{t}{\gamma}\right) - \gamma \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right) \right|^2 dt, \quad \gamma > 0, \quad (5.3)$$

верны оценки

$$C_1 \leq g(\gamma) (\max\{\pi\gamma, 2\})^2 \leq C_2, \quad \gamma > 0, \quad (5.4)$$

$$\left| \frac{\gamma(1 - \cos(1/\gamma)) - \sin(t/\gamma)}{\sqrt{g(\gamma)}} \right| \leq B, \quad t \in [0, 1], \quad \gamma > 0. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что функция (5.3)

$$\begin{aligned} g(\gamma) &= \int_0^1 \sin^2\left(\frac{t}{\gamma}\right) dt - \left(\gamma \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(2 - \gamma \sin\left(\frac{2}{\gamma}\right)\right) - \left(\gamma \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right)\right)^2 \\ &= 2\gamma^{-2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+4)!} (n2^{2n+1} + 1) \gamma^{-2n} \end{aligned}$$

непрерывна на интервале $\gamma \in (0, +\infty)$ и $g(\gamma) \rightarrow 1/2$ при $\gamma \rightarrow +0$, $\gamma^2 g(\gamma) \rightarrow 1/12$ при $\gamma \rightarrow +\infty$. Из (5.3) следует, что $g(\gamma) > 0$ при всех $\gamma > 0$. Поэтому функция

$g(\gamma)(\max\{\pi\gamma, 2\})^2$ непрерывна и положительна на интервале $(0, +\infty)$ и имеет конечные положительные пределы 2 и $\pi^2/12$ в концах этого интервала. Следовательно, есть такие два числа, $C_1 > 0$ и $C_2 \geq 2$, что выполнены оценки (5.4). Поскольку

$$\begin{aligned}\gamma(1 - \cos(1/\gamma)) &> \sin(1/\gamma) - \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) > 0, & \gamma \geq \frac{2}{\pi}, \\ \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) &> 1 - \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) > 0, & \gamma \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right], \\ \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) - \sin(1/\gamma) &> 1 - \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) > 0, & \gamma \in \left[\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{\pi}\right],\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}h(\gamma) &\equiv \max_{t \in [0,1]} |\gamma(1 - \cos(1/\gamma)) - \sin(t/\gamma)| \\ &= \begin{cases} 1 + \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) & \text{при } \gamma \in (0, \frac{2}{3\pi}], \\ \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) - \sin(1/\gamma) & \text{при } \gamma \in [\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{\pi}], \\ \gamma(1 - \cos(1/\gamma)) & \text{при } \gamma \geq \frac{1}{\pi}. \end{cases}\end{aligned}$$

Следовательно, $h(\gamma) \leq 1 + 2\gamma$ при $\gamma \in (0, 1/\pi]$, $h(\gamma) \leq \sin(1/(2\gamma))$ при $\gamma \geq 1/\pi$. Отсюда и из (5.4) получаем оценки

$$\begin{aligned}h(\gamma)/\sqrt{g(\gamma)} &\leq 2h(\gamma)/\sqrt{C_1} \leq 2(1 + \frac{2}{\pi})/\sqrt{C_1}, & \gamma \in (0, \frac{2}{\pi}], \\ h(\gamma)/\sqrt{g(\gamma)} &\leq \pi\gamma h(\gamma)/\sqrt{C_1} \leq (\frac{\pi}{2})/\sqrt{C_1}, & \gamma \geq \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Поэтому при $B = (2 + \frac{4}{\pi})/\sqrt{C_1}$ оценка (5.5) будет верна. Лемма доказана.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned}(\gamma^2 g(\gamma))'_\gamma &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma^{-4n-1}}{(4n+4)!} ((4n+3)(2n+2)(2n-1)((2n-1)2^{4n-1} + 1)\gamma^2 \\ &\quad - n(n2^{4n+2} + 1))\end{aligned}$$

при $\gamma > 0$. При $\gamma \geq 2/\pi$ все слагаемые последнего ряда положительны, а значит, функция $\gamma^2 g(\gamma)$ строго возрастает. Поэтому $2 - 16\pi^{-2} = 4g(2/\pi) < \pi^2 \gamma^2 g(\gamma) < \pi^2/12$ при всех $\gamma > 2/\pi$. Отметим также, что функция

$$g(\gamma)/\gamma = \int_0^{1/\gamma} v^{-2}(1 - \cos v - v \sin v)^2 dv$$

строго убывает при $\gamma \in (0, +\infty)$. Отсюда несложно получить (мы не будем приводить эти несколько громоздкие выкладки), что наилучшие постоянные в лемме 5.2 таковы:

$$\begin{aligned}C_1 &= \min\{4g(\gamma): \gamma \in [1/\pi, 2/\pi]\}, \\ C_2 &= \max\{4g(\gamma): \gamma \in [1/(2\pi), 2/(3\pi)]\}, \\ B &= \max\{\gamma(1 - \cos(1/\gamma))/\sqrt{g(\gamma)}: \gamma \in [1/\pi, 2/\pi]\}.\end{aligned}$$

Отсюда для наилучших постоянных в лемме 5.2 можно получить такие оценки:

$$0.24 < C_1 < 0.3, \quad 2 < C_2 < 2.3, \quad 2.5 < B < 2.7. \quad (5.6)$$

В приводимых далее доказательствах эти оценки, конечно, использоваться не будут. Роль оценок (5.6) в этой работе чисто информационная.

Основой доказательства теорем 5.1 и 0.4 является лемма 5.3, для формулировки которой нам потребуются следующие обозначения. Пусть последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (0.1). В этом случае при $x > 0$ будем обозначать

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_{\Lambda}(x) &= x \cdot \sum_{n:\lambda_n \geq x/2} 1/\lambda_n, \\ \Delta_{\Lambda}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\min \left\{ \frac{x}{\lambda_n}, 1 \right\} \right)^2 = x^2 \int_x^{\infty} t^{-3} \varphi_{\Lambda}(t) dt, \\ \delta_{\Lambda}(x) &= (\mathfrak{M}_{\Lambda}(x))^2 / \Delta_{\Lambda}(x).\end{aligned}\tag{5.7}$$

Пусть всюду далее в этом параграфе $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных величин и

$$\mathcal{F}_{\Lambda}(\xi; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi x \xi_n}{2\lambda_n} \right)\tag{5.8}$$

– случайная функция, определенная при всех действительных x .

ЛЕММА 5.3. *Существует такая абсолютная положительная постоянная $\varkappa$, что для любой последовательности положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая удовлетворяет условию (0.1), при каждом $x > 0$ для случайной величины (5.8) справедлива оценка*

$$\mathbf{P} \left(\mathcal{F}_{\Lambda}(\xi; x) < \frac{\mathfrak{M}_{\Lambda}(x)}{2\pi} \right) \leq \exp \left(-\frac{\delta_{\Lambda}(x)}{\varkappa} \right).\tag{5.9}$$

Более того, можно взять $\varkappa = 8\pi^2 B^2 C_2$, где B и C_2 – постоянные из леммы 5.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенумеровывая, если нужно, можно считать, что Λ – убывающая последовательность. Пусть $x > 0$ и

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi x} \lambda_n, \quad n \geq 1.\tag{5.10}$$

Будем использовать обозначения, введенные в лемме 5.2. При всех $n \geq 1$ рассмотрим случайные величины

$$\eta_n = \frac{\gamma_n (1 - \cos(1/\gamma_n)) - \sin(\xi_n/\gamma_n)}{\sqrt{g(\gamma_n)}}.$$

Из (5.3) и (5.5) легко видеть, что выполнены условия (5.1).

Пусть $a_n = \sqrt{g(\gamma_n)}$ при $n \geq 1$ и

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\gamma_n} \right) \right) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} g(\gamma_n) \right)^{-1/2}.\tag{5.11}$$

Тогда в силу (0.1), (5.4) и (5.10) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ и по лемме 5.1 справедливо неравенство (5.2). Поскольку

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta_n - \delta \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\gamma_n} \right) \right) - \mathcal{F}_{\Lambda}(\xi; x),$$

то неравенство (5.2) совпадает с неравенством

$$\mathbf{P} \left(\mathcal{F}_{\Lambda}(\xi; x) < \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\gamma_n} \right) \right) \right) \leq \exp \left(-\frac{\delta^2}{4B^2} \right). \quad (5.12)$$

Пусть m – наименьшее натуральное число такое, что $\pi \gamma_m = \frac{2}{x} \lambda_m \geq 1$. Отсюда, из (5.10) и (5.7) имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \left(1 - \cos \left(\frac{1}{\gamma_n} \right) \right) \geq \sum_{n=m}^{\infty} \gamma_n \sin^2 \left(\frac{1}{2\gamma_n} \right) \geq \pi^{-2} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}_{\Lambda}(x). \quad (5.13)$$

Из (5.4), (5.10) и (5.7) видим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(\gamma_n) \leq C_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\max\{\pi \gamma_n, 2\})^{-2} = \frac{1}{2} C_2 \Delta_{\Lambda}(x).$$

Отсюда, из (5.13), (5.11) и (5.7) получаем

$$\delta^2 \geq \left(\frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}_{\Lambda}(x) \right)^2 \left(\frac{1}{2} C_2 \Delta_{\Lambda}(x) \right)^{-1} = \frac{1}{2\pi^2 C_2} \delta_{\Lambda}(x).$$

Из этой оценки, из (5.13) и (5.12) сразу вытекает неравенство (5.9) с $\varkappa = 8\pi^2 B^2 C_2$. Лемма доказана.

Из оценок (5.6) видим, что в лемме 5.3 можно, например, взять

$$\varkappa = 1400. \quad (5.14)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть функция ψ определена, непрерывна, строго возрастает на промежутке $[1, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\psi(t) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad \psi(1) = 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\psi(n) < \infty, \quad \psi(n+1) \leq 2\psi(n) \quad \text{при} \quad n \geq 1. \quad (5.15)$$

Пусть ψ^{-1} – обратная к ψ функция и

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\psi; x) &= x \int_x^{\infty} t^{-2} (\psi^{-1}(t) - \psi^{-1}(x)) dt = x \int_{\psi^{-1}(x)}^{\infty} \frac{dt}{\psi(t)}, \\ \Delta(\psi; x) &= x^2 \int_x^{\infty} t^{-3} \psi^{-1}(t) dt, \\ \delta(\psi; x) &= (\mathfrak{M}(\psi; x))^2 / \Delta(\psi; x) \end{aligned} \quad (5.16)$$

при $x \geq 1$. Тогда для каждого $x \geq 1$ для случайной величины

$$\mathcal{F}(\psi, \xi; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{\pi x \xi_n}{2\psi(n)} \right) \quad (5.17)$$

справедлива оценка

$$\mathbf{P} \left(\mathcal{F}(\psi, \xi; x) < \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}(\psi; x) \right) \leq \exp \left(-\frac{\delta(\psi; x)}{\varkappa} \right). \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\lambda_n = \psi(n)$ при $n \geq 1$ и для произвольного взятого $x \geq 1$ применим лемму 5.3. В этом случае случайные величины (5.17) и (5.8) совпадают и $\varphi_\Lambda(t) = [\psi^{-1}(t)]$ при всех $t \geq 1$. Поэтому из (5.7) и (5.16) имеем

$$\Delta_\Lambda(x) = x^2 \int_x^\infty t^{-3} \varphi_\Lambda(t) dt \leq \Delta(\psi; x).$$

Пусть $m = [\psi^{-1}(x)]$. Из (5.15) видим, что $2\psi(m) \geq \psi(m+1) > \psi(\psi^{-1}(x)) = x$. Отсюда, из (5.7) и (5.16) выводим, что

$$\mathfrak{M}_\Lambda(x) \geq x \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{\psi(n)} \geq x \int_m^\infty \frac{dt}{\psi(t)} \geq x \int_{\psi^{-1}(x)}^\infty \frac{dt}{\psi(t)} = \mathfrak{M}(\psi; x).$$

Поэтому $\delta_\Lambda(x) \geq \delta(\psi; x)$. Из последних двух оценок и из (5.9) сразу вытекает оценка (5.18).

Следствие 5.1 следует рассматривать как аналог леммы 5.3, более удобный в некоторых случаях. Интересно посмотреть, как выглядит следствие 5.1 для некоторых конкретных примеров функции ψ .

СЛЕДСТВИЕ 5.2. При всех $q > 1$, $\lambda \geq 2q$ и $x \geq 1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{\pi x \xi_n \lambda^q}{2(n+\lambda-1)^q}\right) < \frac{\lambda x^{1/q}}{2\pi(q-1)}\right) < \exp\left(-\frac{\lambda x^{1/q}}{\pi(q-1)^2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следствии 5.1 положим

$$\psi(v) = (v + \lambda - 1)^q \lambda^{-q} \quad \text{при } v \geq 1. \quad (5.19)$$

Поскольку

$$\frac{\psi(n+1)}{\psi(n)} = \left(1 + \frac{1}{n+\lambda-1}\right)^q \leq \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^q \leq \left(1 + \frac{1}{2q}\right)^q \leq \exp\left(\frac{1}{2}\right) < 2$$

при всех натуральных n , то условия (5.15) выполнены. Из (5.19) и (5.16) имеем

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(t) &= \lambda(t^{1/q} - 1) + 1, \quad t \geq 1, \\ \mathfrak{M}(\psi; x) &= \lambda x \int_x^\infty t^{-2} (t^{1/q} - x^{1/q}) dt = \frac{\lambda}{q-1} x^{1/q}, \\ \Delta(\psi; x) &\leq \lambda x^2 \int_x^\infty t^{1/q-3} dt = \frac{\lambda}{2-1/q} x^{1/q} < \lambda x^{1/q}, \\ \delta(\psi; x) &> \left(\frac{\lambda x^{1/q}}{q-1}\right)^2 (\lambda x^{1/q})^{-1} = \frac{\lambda x^{1/q}}{(q-1)^2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Отсюда и из (5.18) немедленно получаем следствие 5.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. При всех $\nu \in (1, 2]$ и $x \geq 1$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}\left(\sum_{n=1}^\infty \sin\left(\frac{1}{2}\pi x \xi_n \nu^{-(n-1)^{1/3}}\right) < \frac{3(1+\ln x)^2}{2\pi(\ln \nu)^3}\right) < \exp\left(-\frac{9(1+\ln x)}{\pi(\ln \nu)^3}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В следствии 5.1 положим

$$\psi(v) = \exp(\varepsilon(v-1)^{1/3}) \quad \text{при } v \geq 1, \quad \text{где } \varepsilon = \ln \nu. \quad (5.21)$$

Поскольку $\ln(\psi(n+1)/\psi(n)) = \varepsilon(n^{1/3} - (n-1)^{1/3}) \leq \varepsilon \leq \ln 2$ при всех натуральных n , то условия (5.15) выполнены. Из (5.21) и (5.16) выводим

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(t) &= 1 + \left(\frac{\ln t}{\varepsilon}\right)^3 \quad \text{при } t \geq 1, \\ \mathfrak{M}(\psi; x) &= \varepsilon^{-3} \int_1^\infty t^{-2} (3 \ln^2 x \ln t + 3 \ln x \ln^2 t + \ln^3 t) dt = 3\varepsilon^{-3} ((1 + \ln x)^2 + 1), \\ \Delta(\psi; x) &= \int_1^\infty t^{-3} (1 + \varepsilon^{-3} (\ln t + \ln x)^3) dt \\ &= \frac{1}{2} + \varepsilon^{-3} \left(\frac{1}{2} \ln^3 x + \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{4} \ln x + \frac{3}{8} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon^{-3} (1 + \ln x)^3 < \varepsilon^{-3} (1 + \ln x)^3, \\ \delta(\psi; x) &> (3\varepsilon^{-3} (1 + \ln x)^2)^2 \varepsilon^3 (1 + \ln x)^{-3} = 9\varepsilon^{-3} (1 + \ln x). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Отсюда и из (5.18) сразу получаем следствие 5.3.

Теорему 0.4 можно доказать непосредственно на основе следствий 5.2 и 5.3. Однако мы, используя следствие 5.1, предпочитаем сначала доказать более общую теорему 5.1, а уже затем из нее получить теорему 0.4.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть числа $\theta \in (0, 1)$ и $\gamma \geq 1$ произвольны. Пусть функция ψ определена, непрерывна, строго возрастает на промежутке $[1, +\infty)$, удовлетворяет условиям (5.15) и в обозначениях (5.16) выполнены условия

$$\mathfrak{M}(\psi; x_2) \geq \frac{1}{\gamma} \mathfrak{M}(\psi; x_1), \quad x_2 \geq x_1 \geq 1, \quad (5.23)$$

$$\delta(\psi; x) \geq \kappa \left(\ln \left(\frac{1 + 4\gamma\pi^2}{\theta} \right) + 2 \ln x \right), \quad x \geq 1. \quad (5.24)$$

Тогда с вероятностью, большей, чем $1 - \theta$, последовательность $\{\psi(n)/\xi_n\}_{n=1}^\infty$ является строго приемлемой и, более того,

$$\mathcal{F}(\psi, \xi; x) \geq \frac{1}{4\pi\gamma} \mathfrak{M}(\psi; x), \quad x \geq 1, \quad (5.25)$$

где использовано обозначение (5.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$x_j = 1 + j/(4\gamma\pi^2), \quad j \geq 0. \quad (5.26)$$

Обозначим через Y событие, состоящее в том, что

$$\mathcal{F}(\psi, \xi; x_j) \geq \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}(\psi; x_j), \quad j \geq 0. \quad (5.27)$$

Тогда по следствию 5.1 из (5.24) имеем

$$\begin{aligned} 1 - \mathbf{P}(Y) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(\mathcal{F}(\psi, \xi; x_j) < \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}(\psi; x_j)\right) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{\varkappa} \delta(\psi; x_j)\right) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1 + 4\gamma\pi^2}\right) x_j^{-2} < \frac{\theta}{1 + 4\gamma\pi^2} \left(1 + \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{t}{4\gamma\pi^2}\right)^{-2} dt\right) = \theta. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{P}(Y) > 1 - \theta$.

Будем рассматривать (5.17) как случайную функцию $\mathcal{F}(x) \equiv \mathcal{F}(\psi, \xi; x)$ на прямой. Ясно, что

$$\mathcal{F}'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \xi_n}{2\psi(n)} \cos\left(\frac{\pi x \xi_n}{2\psi(n)}\right).$$

В силу условий (5.15) $\psi(n+1) \leq 2\psi(n)$ при всех $n \geq 1$. Поэтому

$$|\mathcal{F}'(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2\psi(n)} \leq \pi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\psi(n)} \leq \pi \int_1^{\infty} \frac{dt}{\psi(t)} = \pi \mathfrak{M}(\psi; 1).$$

Следовательно, если при некотором натуральном j

$$x \in [x_{j-1}, x_j], \quad (5.28)$$

то в силу (5.26)

$$|\mathcal{F}(x_j) - \mathcal{F}(x)| \leq \pi \mathfrak{M}(\psi; 1)(x_j - x) \leq \pi \mathfrak{M}(\psi; 1)/(4\gamma\pi^2).$$

Поэтому из (5.28) вытекает оценка

$$\mathcal{F}(x) \geq \mathcal{F}(x_j) - \mathfrak{M}(\psi; 1)/(4\gamma\pi). \quad (5.29)$$

Предположим теперь, что событие Y реализовалось. Тогда верно (5.27). Если $x \geq 1$, то в силу (5.26) обязательно существует такое натуральное j , что выполнено (5.28). Но тогда будет верна оценка (5.29), а значит, в силу (5.27) и (5.23)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &\geq \mathcal{F}(x_j) - \frac{\mathfrak{M}(\psi; 1)}{4\gamma\pi} \geq \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}(\psi; x_j) - \frac{\mathfrak{M}(\psi; 1)}{4\gamma\pi} \\ &\geq \frac{1}{4\pi} \mathfrak{M}(\psi; x_j) \geq \frac{1}{4\pi\gamma} \mathfrak{M}(\psi; x). \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{F}(x) \geq \frac{1}{4\pi\gamma} \mathfrak{M}(\psi; x)$ при всех $x \geq 1$. Но очевидно, что $\mathcal{F}(x) > 0$ при $x \in (0, 1]$. Поэтому последовательность $\{\psi(n)/\xi_n\}$ является строго приемлемой и верна оценка (5.25) всякий раз, когда реализуется событие Y , а это происходит с вероятностью, большей, чем $1 - \theta$. Теорема 5.1 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1) ТЕОРЕМЫ 0.4. Пусть $q > 1$ и $\lambda \geq 2q$. Возьмем функцию (5.19) и при $\theta = 1/2, \gamma = 1$ применим теорему 5.1. В силу (5.20)

$$\mathfrak{M}(\psi; x) = \frac{\lambda}{q-1} x^{1/q} \quad \text{и} \quad \delta(\psi; x) > \frac{\lambda}{(q-1)^2} x^{1/q}$$

при $x \geq 1$. Поэтому условия (5.15) и (5.23) выполнены, а условие (5.24) будет выполнено, если

$$\frac{\lambda}{(q-1)^2} x^{1/q} \geq \kappa(\ln(2 + 8\pi^2) + 2q \ln(x^{1/q})), \quad x \geq 1.$$

Обозначая $t = (2 + 8\pi^2)^{1/2q} x^{1/q}$, видим, что последнее условие эквивалентно условию

$$\lambda \geq 2q(q-1)^2 \kappa(2 + 8\pi^2)^{1/2q} \frac{\ln t}{t}, \quad t \geq (2 + 8\pi^2)^{1/2q}. \quad (5.30)$$

Поскольку $\ln t \leq t/e$ при $t > 0$, то условие (5.30) будет выполнено, если

$$\lambda \geq \frac{2}{e} \kappa q(q-1)^2 (2 + 8\pi^2)^{1/2q}. \quad (5.31)$$

Пусть $\lambda \geq Aq^3$, где

$$A = \max \left\{ 2, \frac{2}{e} \kappa (2 + 8\pi^2)^{1/2} \right\}. \quad (5.32)$$

Тогда условия (5.31), (5.15), (5.23) и (5.24) в силу сказанного выше выполнены. Поэтому по теореме 5.1 с вероятностью, большей, чем $1/2$, верна оценка (5.25), которая в рассматриваемом случае совпадает с (0.39). Утверждение 1) теоремы 0.4 доказано с постоянной (5.32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2) ТЕОРЕМЫ 0.4. Пусть $\nu \in (1, 2]$. Возьмем функцию (5.21) и при $\theta = 1/2, \gamma = 1$ применим теорему 5.1. В силу (5.22) $\mathfrak{M}(\psi; x) = 3\varepsilon^{-3}(1 + (1 + \ln x)^2)$, $\delta(\psi; x) > 9\varepsilon^{-3}(1 + \ln x)$ при $x \geq 1$. Поэтому условия (5.15) и (5.23) выполнены, а условие (5.24) будет выполнено, если

$$9\varepsilon^{-3}(1 + \ln x) \geq \kappa(\ln(2 + 8\pi^2) + 2 \ln x), \quad x \geq 1. \quad (5.33)$$

Последнее условие будет выполнено, если $9\varepsilon^{-3} \geq \kappa \ln(2 + 8\pi^2)$. Таким образом, если $\nu \in (1, \nu_0]$, где

$$\nu_0 = \exp(9^{1/3}(\kappa \ln(2 + 8\pi^2))^{-1/3}), \quad (5.34)$$

то условия (5.33), (5.24), (5.15) и (5.23) будут выполнены. Поэтому по теореме 5.1 с вероятностью, большей чем $1/2$, справедлива оценка (5.25), которая в рассматриваемом случае совпадает с (0.40). Утверждение 2) теоремы 0.4 доказано с постоянной (5.34).

Из (5.14), (5.32) и (5.34) видим, что в теореме 0.4 можно взять

$$A = 12000, \quad \nu_0 = e^{0.1}. \quad (5.35)$$

Из утверждения 1) и из утверждения 2) теоремы 0.4 вытекает следующая

ТЕОРЕМА 5.2. *Существует такая абсолютная положительная постоянная C , что*

$$\Phi(x) \leq C(1 + \ln x)^3 \quad \text{при всех} \quad x \geq 1. \quad (5.36)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем доказательство, основанное на утверждении 2) теоремы 0.4. Пусть $\nu > 1$ таково, что последовательность

$$\left\{ \nu^{(n-1)^{1/3}} / \xi_n \right\}_{n=1}^{\infty} \quad (5.37)$$

является приемлемой с вероятностью, большей, чем $1/2$. Поскольку вероятность события $\{\xi_1 \leq 1/2\}$ равна $1/2$, то событие, состоящее в том, что $\xi_1 > 1/2$ и последовательность (5.37) является приемлемой, имеет положительную вероятность. Поэтому в качестве реализации такой случайной последовательности $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдется последовательность $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\gamma_1 \in (1/2, 1)$, $\gamma_n \in (0, 1)$ при $n \geq 2$ и последовательность $\left\{ \nu^{(n-1)^{1/3}} / \gamma_n \right\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой. Пусть

$$\Delta = \min_{n \geq 1} \left\{ \nu^{(n-1)^{1/3}} / \gamma_n \right\} \quad \text{и} \quad \Lambda = \left\{ \nu^{(n-1)^{1/3}} / (\Delta \gamma_n) \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Тогда $\Delta \geq 1$, $\min \Lambda = 1$ и $\Delta \leq 1/\gamma_1 < 2$. Поэтому при $t \geq 1$ число $\varphi_{\Lambda}(t)$ членов последовательности Λ , которые не превосходят t , равно числу натуральных чисел n , которые удовлетворяют условию

$$\nu^{(n-1)^{1/3}} \leq t \Delta \gamma_n.$$

Отсюда видим, что $\varphi_{\Lambda}(t)$ не больше, чем число натуральных чисел n , которые удовлетворяют условию $\nu^{(n-1)^{1/3}} \leq 2t$, т. е.

$$\varphi_{\Lambda}(t) \leq 1 + \left(\frac{\ln(2t)}{\ln \nu} \right)^3$$

при всех $t \geq 1$. Отсюда и из (0.11) при $x \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{\Lambda}(x) &\leq x \int_x^{\infty} t^{-2} \left(1 + \left(\frac{\ln(2t)}{\ln \nu} \right)^3 \right) dt \\ &= 1 + (\ln \nu)^{-3} ((\ln(2x))^3 + 3(\ln(2x))^2 + 6 \ln(2x) + 6) \\ &\leq (1 + (\ln \nu)^{-3} (\ln^3 2 + 3 \ln^2 2 + 6 \ln 2 + 6)) (1 + \ln x)^3 \\ &\leq (1 + 14(\ln \nu)^{-3}) (1 + \ln x)^3. \end{aligned}$$

В силу (0.14) верно (5.36), где

$$C = 1 + 14(\ln \nu)^{-3}. \quad (5.38)$$

Теорема доказана.

Из (5.38), (5.35) и утверждения 2) теоремы 0.4 вытекает, что в теореме 5.2 можно, например, взять

$$C = 14001. \quad (5.39)$$

Из (0.25), (0.26) и теоремы 5.2 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.4. *При всех натуральных n верны оценки*

$$M_Z^{\perp}(n) \leq C_3(1 + \ln n)^3, \quad K_Z^{\perp}(n) \leq C_4(1 + \ln n)^3,$$

где $C_3 = \frac{11}{5}C$, $C_4 = \frac{16}{5}C$, а C — постоянная из теоремы 5.2.

Из (5.39) видим, что в следствии 5.4 можно, например, взять $C_3 = 31000$, $C_4 = 45000$.

§ 6. Нижние оценки

В этом параграфе мы оценим снизу функцию $\Phi(x)$. Это позволит получить нижние оценки функций $\Phi_0(x)$, $M_Z^\downarrow(n)$, $K_Z^\downarrow(n)$ и тем самым завершить доказательство теоремы 0.5.

На протяжении этого параграфа $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — неограниченная неубывающая последовательность и $\lambda_1 = 1$. Положим $\mu_n = 1/\lambda_n$ ($n \geq 1$); тогда имеем $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots$ и $\mu_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Отсюда мы можем задать подпоследовательность $\{\nu_k\}$ последовательности $\{\mu_n\}$: полагаем

$$\nu_1 = \mu_1 = 1 \quad (6.1)$$

и далее последовательно определяем

$$\nu_k = \max\{\mu_n : \mu_n \leq \nu_{k-1}/10\}. \quad (6.2)$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $\Delta \in (0, 1]$, $N \geq \max\{n : \mu_n \geq \Delta/2\}$, $K = \max\{k : \nu_k \geq \Delta\}$. Тогда существуют натуральные числа L , $k_1 = 1 < k_2 < \dots < k_L \leq K$ и конечная подпоследовательность $\{\eta_l\}_{l=1}^L$ последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ такие, что

$$L \geq 0.5K/\ln(5N), \quad (6.3)$$

$$k_l \leq 2\ln(5N)(l-1) + 1, \quad l = 1, \dots, L, \quad (6.4)$$

$$|\eta_l - \nu_{k_l}| \leq \nu_{k_l}/6, \quad l = 1, \dots, L, \quad (6.5)$$

$$\left| \sum_{i=1}^L \varepsilon_i \eta_i - \mu_n \right| > \nu_{k_{i_2}}/27 \quad (6.6)$$

при $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i_1 < i_2$, $|\varepsilon_{i_1}| = |\varepsilon_{i_2}| = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В последовательности $\{\nu_k\}$ мы будем выделять некоторые элементы (с индексами $k_1, k_2, \dots$), которые будут “создавать свои команды”, составленные из некоторых близко к ним расположенных элементов μ_n . Построение проводим индукцией по k . После k -го шага ($k = 1, \dots, K$) у нас будут определены все числа k_i , не превосходящие k , а команду элемента ν_{k_i} будем обозначать $T^k(i)$. Мы будем добиваться выполнения, наряду с (6.3) и (6.4), следующих условий:

$$T^{k_l}(l) = \{\nu_{k_l}\}, \quad (6.7)$$

$$\forall k > k_i, \quad \forall \mu \in T^k(i) \quad \exists \mu' \in T^{k-1}(i) \quad |\mu - \mu'| \leq 3\nu_k/2, \quad (6.8)$$

$$\forall \mu \in T^k(l), \mu' \in T^k(l) \quad (\mu \neq \mu' \Rightarrow |\mu - \mu'| \geq \nu_k/2), \quad (6.9)$$

$$\forall i < l, \mu \in T^{k_l}(i), n \in \mathbb{N} \quad |\mu + \nu_{k_l} - \mu_n| > \nu_{k_l}/2, \quad |\mu - \nu_{k_l} - \mu_n| > \nu_{k_l}/2. \quad (6.10)$$

При $k = 1$ первый выделенный элемент — ν_1 , его команда состоит из него самого. Опишем k -й шаг при $k > 1$. Пусть уже выделены некоторые элементы $\nu_{k_1}, \dots, \nu_{k_{l-1}}$, причем $1 = k_1 < \dots < k_{l-1} < k$. Пусть каждый элемент ν_{k_i} имеет команду $T^{k-1}(i)$, состоящую из u_i членов. В i -й команде образуем подкоманду, составленную из тех элементов μ , что для любого n выполнены неравенства

$|\mu + \nu_k - \mu_n| > \nu_k/2$, $|\mu - \nu_k - \mu_n| > \nu_k/2$. Пусть i -я подкоманда содержит v_i элементов. Если

$$\sum_{i=1}^{l-1} (u_i - v_i)/u_i \leq 2/3, \quad (6.11)$$

то мы выделяем элемент ν_k (т.е. полагаем $k_l = k$), из команд предыдущих выделенных элементов оставляем только подкоманды, а команда элемента ν_k состоит из него самого. Условия (6.7), (6.8) и (6.10) автоматически выполнены, а (6.9), будучи выполненным на предыдущем шаге, не может нарушиться. Если же (6.11) не справедливо, то мы не выделяем элемент ν_k . В имеющихся командах оставляем все элементы, которые там были. Кроме того, если элемент μ принадлежит i -й команде, но не подкоманде, то при некотором n выполнено одно из двух неравенств

$$|\mu + \nu_k - \mu_n| \leq \nu_k/2, \quad |\mu - \nu_k - \mu_n| \leq \nu_k/2.$$

Введем элемент μ_n в i -ю команду. (Предполагается, что для каждого i и μ мы добавляем в i -ю команду ровно один соответствующий элемент μ_n .) Поскольку $|\mu_n - \mu| \leq 3\nu_k/2$, то для нового элемента μ_n из i -й команды условие (6.8) выполнено.

С другой стороны, $|\mu_n - \mu| \geq \nu_k/2$. Заметим, что новые элементы i -й команды не могут совпасть ни друг с другом, ни со старыми, поскольку по предположению индукции расстояние между любыми старыми элементами не меньше $\nu_{k-1}/2 \geq 5\nu_k$, а значит, расстояние между любыми новыми элементами i -й команды будет не менее $5\nu_k - 2(3\nu_k/2) > \nu_k/2$; расстояние между новым и старым элементами также будет не меньше $\nu_k/2$, т.е. (6.9) проверено.

Итак, в случае выполнения условия (6.11) команда $T^k(i)$ содержит v_i элементов, а в противном случае $2u_i - v_i$ элементов. Если после k -го шага образовано $l(k)$ команд, то мы полагаем

$$P_k = \prod_{i=1}^{l(k)} \text{card } T^k(i), \quad Q_k = 5^{l(k)} P_k.$$

Тогда

$$P_{k-1} = \prod_{i=1}^{l-1} u_i, \quad Q_{k-1} = 5^{l-1} P_{k-1}.$$

Оценим Q_k . Если выполнено (6.11), то $l(k) = l$ и

$$P_k = \prod_{i=1}^{l-1} v_i = P_{k-1} \prod_{i=1}^{l-1} (1 - (u_i - v_i)/u_i) \geq P_{k-1} \left(1 - \sum_{i=1}^{l-1} (u_i - v_i)/u_i\right) \geq P_{k-1}/3, \\ Q_k = 5^l P_k \geq 5^l P_{k-1}/3,$$

откуда

$$Q_k \geq 5Q_{k-1}/3. \quad (6.12)$$

Если же (6.11) не выполнено, то $l(k) = l - 1$ и

$$\begin{aligned} P_k &= \prod_{i=1}^{l-1} (2u_i - v_i) = P_{k-1} \prod_{i=1}^{l-1} (1 + (u_i - v_i)/u_i) \\ &\geq P_{k-1} \left(1 + \sum_{i=1}^{l-1} (u_i - v_i)/u_i \right) > 5P_{k-1}/3, \\ Q_k &= 5^{l-1} P_k \geq 5^l P_{k-1}/3, \end{aligned}$$

и (6.12) вновь справедливо. Значит, (6.12) всегда верно и

$$Q_k > (5/3)^k. \quad (6.13)$$

Из условий (6.7), (6.8) и выбора $\{\nu_k\}$ следует, что для любых $k' > k_i$ и $\mu \in T^{k'}(i)$ справедливо неравенство

$$|\mu - \nu_{k_i}| \leq \sum_{k=k_i+1}^{k'} 3\nu_k/2 < 3\nu_{k_i}/2 \sum_{k=k_i+1}^{k'} 10^{k_i-k} < \nu_{k_i}/6. \quad (6.14)$$

Следовательно, на любом шаге все элементы всех команд не меньше $5\nu_{k_L}/6 > \Delta/2$, поэтому по условию леммы каждая команда содержит не более N членов. Отсюда

$$Q_k \leq (5N)^{l(k)}.$$

Из последнего неравенства и (6.13) следует, что

$$l(k) > k \ln \left(\frac{5}{3} \right) / \ln(5N) > 0.5k / \ln(5N).$$

Подставляя в полученное неравенство значения $k = K$ и $k = k_l - 1$, мы получаем (6.3) и (6.4). Индукционное построение завершено.

Для завершения доказательства леммы 6.1 мы берем в качестве элемента η_l любой элемент из команды $T^K(l)$. В силу неравенства (6.14), справедливого при $i = l$ для любого элемента μ из i -й команды, мы получаем (6.5).

Остается проверить условие (6.6). Мы можем считать, что i_1 и i_2 — два наименьших значения i , для которых $|\varepsilon_i| = 1$. Положим $\nu = \nu_k$, где $k = k_{i_2}$. Заметим, что в силу (6.5) и выбора $\{\nu_k\}$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i>i_2} \varepsilon_i \eta_i \right| &\leq \sum_{i>i_2} |\eta_i| \leq \sum_{i>i_2} 7\nu_{k_i}/6 \\ &\leq \sum_{k>k_{i_2}} 7\nu_k/6 \leq 7/6 \sum_{k>k_{i_2}} 10^{k_{i_2}-k} \nu = 7\nu/54. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Если $\varepsilon_{i_1} = -1$, то в силу (6.5) и (6.15)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^L \varepsilon_i \eta_i &\leq -\eta_{i_1} + \eta_{i_2} + 7\nu/54 \\ &\leq -5\nu_{k_{i_1}}/6 + 7\nu/6 + 7\nu/54 \leq -50\nu/6 + 7\nu/6 + 7\nu/54 < -7\nu, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует (6.6).

Пусть $\varepsilon_{i_1} = 1$. По аналогии с неравенством (6.14) для элемента $\eta_{i_1} \in T^K(i_1)$ найдется $\mu \in T^{k_{i_2}}(i_1)$ такой, что

$$|\eta_{i_1} - \mu| \leq \sum_{k=k_{i_2}+1}^K 3\nu_k/2 < \nu/6. \quad (6.16)$$

В силу (6.10) для любого $n \in \mathbb{N}$

$$|\mu + \varepsilon_{i_2}\nu - \mu_n| > \nu/2. \quad (6.17)$$

Из (6.15)–(6.17) и (6.5) для $l = i_2$ следует, что

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^L \varepsilon_i \eta_i - \mu_n \right| &= \left| \eta_{i_1} + \varepsilon_{i_2} \eta_{i_2} + \sum_{i>i_2} \varepsilon_i \eta_i - \mu_n \right| \\ &\geq |\mu + \varepsilon_{i_2}\nu - \mu_n| - |\eta_{i_1} - \mu| - |\eta_{i_2} - \nu| - \left| \sum_{i>i_2} \varepsilon_i \eta_i \right| \\ &> \nu/2 - \nu/6 - \nu/6 - 7\nu/54 = \nu/27, \end{aligned}$$

и (6.6) выполнено. Лемма 6.1 доказана.

Доказательство нижней оценки для $\Phi(x)$ идейно близко к работе [6]. Обозначим $H(x) = ((2/x) \sin(x/2))^2$, $G(t) = \max(1 - |t|, 0)$.

ЛЕММА 6.2 [10, с. 377]. Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\theta > 0$

$$\int_0^\infty \cos(tx) H(\theta x) dx = \pi \theta^{-1} G(t\theta^{-1}).$$

Отсюда, используя четность функции G и известные свойства преобразования Фурье [10, с. 370, 378], мы получаем, что

$$\int_0^\infty \cos(tx) H^2(\theta x) dx = \pi \theta^{-1} G_1(t\theta^{-1}), \quad (6.18)$$

где $G_1 = G * G$, т. е.

$$G_1(u) = \int_{-\infty}^\infty G(t) G(u - t) dt.$$

Вычисляя G_1 , мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 6.3. Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\theta > 0$ справедливо равенство (6.18). При этом функция G_1 четная, не возрастает на $[0, \infty)$, равна нулю вне $(-2, 2)$ и $G_1(0) = 2/3$.

ЛЕММА 6.4. Для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\theta > 0$

$$\int_0^\infty |\sin(tx)| H^2(\theta x) dx \leq 4|t|/\theta^2. \quad (6.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\sin(tx)| H^2(\theta x) dx &\leq \int_0^\infty |tx| H^2(\theta x) dx \\ &= |t| \int_0^\infty x H^2(\theta x) dx = \frac{|t|}{\theta^2} \int_0^\infty y H^2(y) dy. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Оценим последний интеграл:

$$\int_0^\infty y H^2(y) dy = \int_0^2 y H^2(y) dy + \int_2^\infty y H^2(y) dy \leq \int_0^2 y dy + \int_2^\infty y (2/y)^4 dy = 4.$$

Отсюда и из (6.20) вытекает утверждение леммы.

ЛЕММА 6.5. Для любых $t \neq 0$ и $\theta > 0$

$$\left| \int_0^\infty \sin(tx) H^2(\theta x) dx \right| < 91/(45|t|). \quad (6.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} t \int_0^\infty \sin(tx) H^2(\theta x) dx &= -\cos(tx) H^2(\theta x) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \cos(tx) d(H^2(\theta x)) \\ &= 1 + \int_0^\infty \cos(tx) d(H^2(\theta x)) = 1 + \int_0^\infty \cos(ty/\theta) d(H^2(y)). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left| \int_0^\infty \sin(tx) H^2(\theta x) dx \right| \leq \frac{1}{|t|} (1 + \text{Var } H^2), \quad (6.22)$$

где $\text{Var } H^2$ – вариация функции H^2 на $[0, \infty)$. Легко показать, что эта функция убывает на $[0, 2\pi]$, имеет ровно одну точку перемены знака производной на каждом из отрезков $[2\pi k, 2\pi(k+1)]$, $k \in \mathbb{N}$, причем $\max\{H^2(x) : x \in [2\pi k, 2\pi(k+1)]\} < 1/(\pi k)^4$. Значит,

$$\text{Var } H^2 < 1 + \sum_{k=1}^\infty 2/(\pi k)^4 = 46/45.$$

Отсюда и из (6.22) вытекает утверждение леммы.

Мы всюду считаем, что выполнены предположения леммы 6.1. Будем оценивать интегралы вида

$$S = \int_0^\infty \prod_{i=1}^l (1 - \sin \eta_i x) \sum_n \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx. \quad (6.23)$$

Для исследования поведения приемлемой последовательности Λ мы будем пользоваться тем, что для такой последовательности всегда $S \geq 0$.

Напомним, что максимальной функцией Харди–Литтлвуда меры μ называется функция

$$M_\mu(u) = \sup_{u' < u < u''} \mu[u', u'']/(u'' - u').$$

Пусть $\delta(\cdot)$ есть δ -функция,

$$\mu = \sum_{n=1}^N \delta(\cdot - \ln \mu_n). \quad (6.24)$$

ЛЕММА 6.6. Пусть $M > 0$, $\Sigma > 0$, $z \geq 1$, $1 \leq l \leq L$,

$$0 < \theta \leq \nu_{k_l}/54, \quad (6.25)$$

$$M_\mu(\ln \theta) \leq M, \quad (6.26)$$

$$\sum_{n > N} \mu_n \leq \Sigma, \quad (6.27)$$

$$\mu_n \notin (\theta/z, \theta z), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.28)$$

Тогда

$$S < 4 \cdot 2^l \Sigma / \theta^2 + 6.1M(1 + \ln z)/(z\theta) + 78lN/\nu_{k_l} - \pi l/(3\theta). \quad (6.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим S в виде суммы пяти интегралов. Пусть

$$S_1 = \int_0^\infty \prod_{i=1}^l (1 - \sin \eta_i x) \sum_{n > N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx;$$

тогда

$$|S_1| \leq 2^l \sum_{n > N} \int_0^\infty |\sin(\mu_n x)| H^2(\theta x) dx,$$

откуда и из леммы 6.4 и (6.27) получаем

$$|S_1| \leq 4 \cdot 2^l \Sigma / \theta^2. \quad (6.30)$$

В произведении в (6.23) раскроем скобки и положим

$$S_2 = \int_0^\infty \sum_{n \leq N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx.$$

Пусть $n_0 = \max\{n: \mu_n \geq \theta\}$; тогда в силу (6.28)

$$\mu_{n_0} \geq \theta z, \quad \mu_{n_0+1} \leq \theta/z. \quad (6.31)$$

В силу условия (6.26) для любого $v > 0$ мы имеем $\text{card}\{n \leq N: n > n_0, \mu_n \geq \theta e^{-v}\} \leq Mv$, или

$$\mu_{n_0+j} \leq \theta e^{-j/M}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad j \leq N - n_0. \quad (6.32)$$

Обозначим $m = [M \ln z]$, $w = \{M \ln z\}$; тогда из (6.31) и (6.32) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n > n_0, n \leq N} \mu_n &= \sum_{j=1}^{N-n_0} \mu_{n_0+j} \leq \theta \sum_{j=1}^{\infty} \min(1/z, e^{-j/M}) \\ &= \theta(m/z + e^{-m/M}/(e^{1/M} - 1)) = \theta(M \ln z + 1/(e^{1/M} - 1))/z \\ &\quad + \theta(-w + (e^{w/M} - 1)/(e^{1/M} - 1))/z. \end{aligned}$$

Так как функция $-w + (e^{w/M} - 1)/(e^{1/M} - 1)$ выпукла и равна 0 при $w = 0$ и $w = 1$, то она неположительна на $[0, 1]$, поэтому

$$\sum_{n > n_0, n \leq N} \mu_n \leq \theta(M \ln z + 1/(e^{1/M} - 1))/z < \theta M(1 + \ln z)/z.$$

Отсюда и из леммы 6.4 следует, что

$$\int_0^\infty \sum_{n > n_0, n \leq N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx < 4M(1 + \ln z)/(z\theta). \quad (6.33)$$

Аналогичными рассуждениями с использованием леммы 6.5 мы находим, что

$$\int_0^\infty \sum_{n \leq n_0, n \leq N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx < 91M(1 + \ln z)/(45z\theta). \quad (6.34)$$

Складывая (6.33) и (6.34), мы выводим, что

$$S_2 < 6.1M(1 + \ln z)/(z\theta). \quad (6.35)$$

Интегралы S_3 и S_4 соответствуют тем членам произведения (6.23), в которых синус берется один раз. Положим

$$S_3 = \int_0^\infty \sum_i -\sin^2(\eta_i x) H^2(\theta x) dx.$$

Имеем

$$S_3 = \int_0^\infty -l H^2(\theta x) dx / 2 + \sum_i \int_0^\infty \cos(2\eta_i x) H^2(\theta x) dx / 2.$$

В силу (6.5) и (6.25) при $i = 1, \dots, l$

$$\eta_i \geq 5\nu_{k_i}/6 \geq 5\nu_{k_l}/6 \geq 45\theta,$$

поэтому по лемме 6.3

$$\int_0^\infty \cos(2\eta_i x) H^2(\theta x) dx = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Следовательно,

$$S_3 = -\frac{l}{2} \int_0^\infty H^2(\theta x) dx,$$

и, вновь используя лемму 6.3, получаем

$$S_3 = -\pi l/(3\theta). \quad (6.36)$$

Далее, пусть

$$S_4 = \int_0^\infty \sum_i -\sin(\eta_i x) \sum_{n \leq N, \mu_n \neq \eta_i} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx.$$

Из леммы 6.3 вытекает, что каждый интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty -\sin(\eta_i x) \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \cos((\eta_i + \mu_n)x) H^2(\theta x) dx \\ &\quad - \int_0^\infty \frac{1}{2} \cos((\eta_i - \mu_n)x) H^2(\theta x) dx \\ &= \pi \theta^{-1} \left(G_1((\eta_i + \mu_n)\theta^{-1}) - G_1((\eta_i - \mu_n)\theta^{-1}) \right) / 2 \end{aligned}$$

не больше 0, поэтому

$$S_4 \leq 0. \quad (6.37)$$

Наконец, осталось оценить интеграл S_5 , образованный теми членами произведения (6.23), в которых синус берется более одного раза. Раскладывая произведение синусов в виде суммы тригонометрических функций, мы видим, что S_5 есть сумма слагаемых вида

$$\alpha \int_0^\infty \text{sc} \left(\sum_i (\varepsilon_i \eta_i - \mu_n) x \right) H^2(\theta x) dx, \quad (6.38)$$

где sc означает синус или косинус, $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sum_i |\varepsilon_i| > 1$, α зависит от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$, причем всегда

$$|\alpha| \leq 1/4. \quad (6.39)$$

Для каждого выражения (6.38) пусть i_1 и i_2 — два наименьших значения i , для которых $|\varepsilon_i| = 1$ и $i_1 < i_2$. По лемме 6.1

$$\left| \sum_{i=1}^l \varepsilon_i \eta_i - \mu_n \right| > \nu_{k_{i_2}} / 27 \geq 10^{l-i_2} \nu_{k_l} / 27, \quad (6.40)$$

и в силу условия (6.25)

$$\left| \sum_{i=1}^l \varepsilon_i \eta_i - \mu_n \right| > 2\theta.$$

Если sc в (6.38) означает косинус, то по лемме 6.3 соответствующий интеграл равен нулю. Если же sc означает синус, то в силу леммы 6.5 и (6.40)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \sin \left(\sum_i (\varepsilon_i \eta_i - \mu_n) x \right) H^2(\theta x) dx \right| \\ < 91 \cdot 27 \cdot 10^{i_2-l} / (45 \nu_{k_l}) = 54.6 \cdot 10^{i_2-l} / \nu_{k_l}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Если мы фиксируем $i_2 \in \{2, \dots, l\}$, то имеется менее l вариантов выбора i_1 , по 2 варианта выбора ε_{i_1} и ε_{i_2} , по 3 варианта выбора каждого ε_i при $i > i_2$ и N вариантов выбора n . Поэтому каждому i_2 соответствует менее $4lN \cdot 3^{l-i_2}$ слагаемых (6.38), суммарный вклад которых, с учетом (6.39) и (6.40), меньше $54.6lN(0.3)^{l-i_2} / \nu_{k_l}$. Просуммировав по i_2 , получаем

$$|S_5| < 78lN / \nu_{k_l}. \quad (6.42)$$

Так как $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$, то утверждение леммы следует из соотношений (6.30), (6.35)–(6.37) и (6.42).

ЛЕММА 6.7. Пусть

$$X \geq e^{500}, \quad (6.43)$$

$$M = \ln X / (500 \ln \ln X), \quad L' = [7M] + 1, \quad (6.44)$$

$$a = [4 \ln \ln X], \quad b = 2 \ln \ln X, \quad (6.45)$$

числа w_l определены соотношениями

$$w_1 = b, \quad w_{l+1} = w_l + (2 \ln(98(M/l)^2) + \ln 10)a + b, \quad l \in \mathbb{N}. \quad (6.46)$$

Тогда

$$w_{L'} < 0.484 \ln X. \quad (6.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $\ln u / \ln \ln u$ возрастает при $u \geq e^e$, то в силу (6.43) имеем

$$1/M \leq 500 \ln \ln e^{500} / \ln e^{500} = \ln 500 < 6.25. \quad (6.48)$$

Из (6.46) находим

$$\begin{aligned} w_{L'} &= bL' + \sum_{l=1}^{L'-1} (2 \ln(98(M/l)^2) + \ln 10)a \\ &= b + (b + a \ln 40)(L' - 1) + 4a \sum_{l=1}^{L'-1} \ln(7M/l). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Учитывая (6.44), оценим сумму в правой части (6.49) через интеграл:

$$\sum_{l=1}^{L'-1} \ln(7M/l) \leq \int_0^{L'-1} \ln(7M/u) du \leq \int_0^{7M} \ln(7M/u) du = 7M.$$

Подставляя полученное неравенство, (6.45), (6.48) и (6.44) в (6.49), получаем

$$\begin{aligned} w_{L'} &\leq 2 \ln \ln X + (2 + 4 \ln 40) \cdot 7M \ln \ln X + 16 \cdot 7M \ln \ln X \\ &< 2 \ln \ln X + 229.2M \ln \ln X < 241.7M \ln \ln X < 0.484 \ln X. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству основного результата настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 6.1. При всех $X \geq 3$ справедливо неравенство

$$\Phi(X) \geq \ln^2 X / (2000 \ln \ln X). \quad (6.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится отдельно для малых, средних и больших значений X . Если $3 \leq X \leq e^4$, то (6.50) вытекает из тривиальной оценки $\Phi(X) \geq 1$. Чтобы разделиться со средними значениями X ($e^4 \leq X \leq e^{500}$), мы воспользуемся следующей леммой, в которой устанавливается достаточно слабая общая оценка функции $\Phi(X)$; доказательство ее является простейшей моделью применения той схемы, с помощью которой мы установим (6.50) в основном случае, когда X велико.

ЛЕММА 6.8. *При всех $X \geq e^4$ справедливо неравенство*

$$\Phi(X) \geq \ln X / (4 \ln \ln X). \quad (6.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы предполагаем противное и считаем, что рассматриваемая нами последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ является приемлемой и

$$\Phi_{\Lambda}(X) < \ln X / (4 \ln \ln X). \quad (6.52)$$

Положим $N = \max\{n : \mu_n \geq 1/X\}$; тогда из (6.52) вытекают неравенства

$$N < \ln X / (4 \ln \ln X), \quad (6.53)$$

$$\sum_{n>N} \mu_n < \Sigma = \ln X / (4X \ln \ln X). \quad (6.54)$$

Неравенство (6.53) показывает, что хотя бы один из отрезков

$$[\ln \mu_{n+1}, \ln \mu_n] \quad (n = 1, \dots, N-1), \quad [-\ln X, \ln \mu_N]$$

имеет длину не менее $\ln X / N > 4 \ln \ln X$. Выберем θ так, чтобы $\ln \theta$ попало в середину этого отрезка, и положим $z = \ln^2 X$; тогда выполнено условие (6.28) и

$$\theta > z / X. \quad (6.55)$$

Рассмотрим интеграл

$$S = \int_0^{\infty} (1 - \sin x) \sum_n \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx.$$

Имеем

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad (6.56)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\infty} \sum_{n>N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx, \\ S_2 &= \int_0^{\infty} \sum_{n \leq N} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx, \\ S_3 &= \int_0^{\infty} -\sin^2 x H^2(\theta x) dx, \\ S_4 &= \int_0^{\infty} -\sin x \sum_{n>1} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx. \end{aligned}$$

Для оценки S_1 воспользуемся леммой 6.4 и неравенством (6.54):

$$S_1 \leq 4\Sigma/\theta^2 < \ln X / (X \ln \ln X \theta^2) < \ln X / (\theta z \ln \ln X) = 1/(\theta \ln X \ln \ln X). \quad (6.57)$$

В силу условия (6.28) и лемм 6.4 и 6.5 для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_0^{\infty} \sin(\mu_n x) H^2(\theta x) dx \leq 4/(\theta z),$$

откуда и из (6.53) получаем

$$S_2 \leq 4N/(\theta z) < 1/(\theta \ln X \ln \ln X). \quad (6.58)$$

Интегралы S_3 и S_4 оцениваются так же, как при доказательстве леммы 6.6: справедлива оценка

$$S_3 = -\pi/(3\theta) < -1/\theta \quad (6.59)$$

и неравенство (6.37). Подставляя оценки (6.57)–(6.59) и (6.37) в (6.56), находим

$$S < (2/(\ln X \ln \ln X) - 1)/\theta.$$

Напомним, что $\ln X \geq 4$ и, следовательно, $\ln X \ln \ln X > 2$, откуда $S < 0$, что противоречит приемлемости Λ . Лемма доказана.

Из леммы 6.8 вытекает утверждение теоремы для $e^4 \leq X \leq e^{500}$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда выполнено неравенство (6.43). Мы вновь предполагаем противное и считаем, что рассматриваемая нами последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ является приемлемой и

$$\Phi_\Lambda(X) < \ln^2 X/(2000 \ln \ln X). \quad (6.60)$$

Положим $N = \max\{n: \mu_n \geq 1/X\}$, $\Delta = X^{-0.984}$; тогда в силу (6.43) $\Delta X = X^{0.016} \geq e^8 > 2$, и мы можем воспользоваться леммой 6.1. Заметим, что из (6.60) вытекают неравенства

$$N < \ln^2 X/(2000 \ln \ln X), \quad (6.61)$$

$$\sum_{n>N} \mu_n \leq \Sigma = \ln^2 X/(2000X \ln \ln X). \quad (6.62)$$

Пусть mes обозначает лебегову меру на $\mathbb{R}$, мера μ определена соотношением (6.24), а число M – (6.44). По теореме Харди–Литтлвуда (см. [11, с. 215], где теорема доказана для интегрируемых функций, но доказательство легко переписывается для мер)

$$\text{mes}\{u: M_\mu(u) > M\} \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |d\mu|/M = 2N/M,$$

т. е. с учетом (6.44) и (6.61)

$$\text{mes}\{u: M_\mu(u) > M\} < \ln X/2.$$

Обозначая

$$E = \{u \in [-\ln X, 0]: M_\mu(u) \leq M\},$$

мы имеем

$$\text{mes}(E) > \ln X/2. \quad (6.63)$$

Используя обозначения леммы 6.7, мы определяем числа

$$u_l = \inf\{u: \text{mes}(E \cap [u, 0]) \leq w_l\}, \quad l = 1, \dots, L'.$$

Очевидно, $0 > u_1 > \dots > u_{L'}$. В силу леммы 6.7 и (6.63)

$$\exp(u_{L'}) \geq \exp(-0.484 \ln X - 0.5 \ln X) = \Delta. \quad (6.64)$$

ЛЕММА 6.9. В обозначениях леммы 6.7 при всех $l = 0, \dots, L' - 1$ справедливы неравенства

$$\nu_{al+1} \geq \exp(b + u_{l+1}). \quad (6.65)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по l . При $l = 0$ утверждение сразу следует из определений ν_1 и w_1 . Сделаем индукционный переход от $l - 1$ к l ($l = 1, \dots, L' - 1$). Заметим, что из (6.61) следует, что $2 \ln(5N) < a$, поэтому по лемме 6.1 $k_l \leq a(l - 1) + 1$ и по предположению индукции

$$\nu_{k_l} \geq \exp(b + u_l). \quad (6.66)$$

Положим

$$z = 98(M/l)^2$$

и для каждого $j = 0, \dots, a$ определим числа

$$u_{l,j} = \inf \{ u : \text{mes}(E \cap [u, 0]) \leq w_l + (2 \ln z + \ln 10)j \}.$$

Докажем индукцией по j , что

$$\nu_{a(l-1)+1+j} \geq \exp(u_{l,j}). \quad (6.67)$$

Так как $w_l + (2 \ln z + \ln 10)a = w_{l+1} - b$, то $u_{l+1} \leq u_{l,a} - b$, и (6.67) при $j = a$ влечет (6.65). Таким образом, лемма будет доказана, как только мы проверим соотношение (6.67).

При $j = 0$ оно верно. Пусть оно справедливо для j , выведем его для $j + 1$. Обозначим

$$v = \inf \{ u : \text{mes}(E \cap [u, 0]) \leq w_l + (2 \ln z + \ln 10)j + \ln z + \ln 10 \}, \\ \theta = e^v.$$

Из определения v и замкнутости множества E сразу следует, что $v \in E$, так что θ удовлетворяет условию (6.26). Далее, $\theta < \exp(u_l)$ и в силу (6.66)

$$\theta < \nu_{k_l} \exp(-b) = (\ln X)^{-2} \nu_{k_l}, \quad (6.68)$$

и условие (6.25) также выполнено. Неравенство (6.27) содержится в (6.62). Рассмотрим случай существования элемента $\mu_n \in (\theta/z, \theta z)$. Имеют место неравенства

$$w_l + (2 \ln z + \ln 10)j + \ln 10 < \text{mes}(E \cap [\ln \mu_n, 0]) < w_l + (2 \ln z + \ln 10)(j + 1),$$

откуда

$$\exp(u_{l,j+1}) < \mu_n < \exp(u_{l,j})/10. \quad (6.69)$$

По предположению индукции для j выполнено неравенство (6.67); стало быть, $\mu_n < \nu_{a(l-1)+1+j}/10$. По определению последовательности $\{\nu_k\}$ последнее неравенство влечет $\mu_n \leq \nu_{a(l-1)+2+j}$, и (6.69) показывает выполнение требуемого утверждения для $j + 1$.

Нам осталось рассмотреть случай справедливости условия (6.28). Все предположения леммы 6.6 выполнены, и мы вправе использовать оценку (6.29). Покажем, что она влечет неравенство

$$S < 0, \quad (6.70)$$

противоречащее предположению о приемлемости последовательности Λ .

Так как функция натурального аргумента $2^l/l$ не убывает, то при $l \leq L'$ мы имеем

$$2^l/l < 2^{7M+1}/(7M).$$

С учетом (6.62) получаем

$$2^l \Sigma/l < 2^{7M+1} \ln^2 X / (7 \cdot 2000 M X \ln \ln X) = 2^{7M} \ln X / (14X).$$

Отсюда и из неравенства $\theta \geq \Delta$ следует, что

$$2^l \Sigma/(l\theta) < 2^{7M} \ln X / (14X^{0.016}),$$

или

$$4 \cdot 2^l \Sigma/(\theta^2) < (2 \cdot 2^{7M} \ln X / (7X^{0.016}))(l/\theta). \quad (6.71)$$

Далее,

$$2^{7M} \leq 2^{7 \ln X / (500 \ln 500)} = X^{7 \ln 2 / (500 \ln 500)} < X^{0.002},$$

и, значит,

$$2^{7M} / X^{0.016} < X^{-0.014}. \quad (6.72)$$

Функция $X^{-0.014} \ln X$ убывает на $[e^{500}, \infty)$, поэтому

$$X^{-0.014} \ln X \leq (e^{500})^{-0.014} \ln e^{500} = 500e^{-7}. \quad (6.73)$$

Соединяя (6.71)–(6.73), получаем

$$4 \cdot 2^l \Sigma/(\theta^2) < 1000l/(7e^7\theta) < 0.14l/\theta. \quad (6.74)$$

Для любого $u \geq 1$ мы имеем $u \geq 1 + \ln u$, откуда $2u > 1 + \ln 2 + 2 \ln u = 1 + \ln(2u^2)$, т. е. $(2u^2)/(1 + \ln(2u^2)) > u$. Значит, при $l < L'$ и $u = 7M/l$ мы имеем

$$z/(1 + \ln z) > u \quad (6.75)$$

и

$$6.1M(1 + \ln z)/(z\theta) < 6.1l/(7\theta) < 0.88l/\theta. \quad (6.76)$$

Из (6.61) и (6.68) следует, что

$$78lN/\nu_{k_l} < 78l/(2000\theta \ln \ln X) \leq 78l/(2000\theta \ln 500) < 0.01l/\theta. \quad (6.77)$$

Остается подставить (6.74), (6.76) и (6.77) в (6.29). Получаем

$$S < (1.03 - \pi/3)l/\theta.$$

Неравенство (6.70), а вместе с ним и лемма 6.9 доказаны.

Для завершения доказательства теоремы 6.1 заметим, что по лемме 6.9 неравенство (6.66) выполнено для $l = L'$. Рассмотрим интеграл (6.23) для $\theta = \exp(u_l)$ и $z = 1$. В этом случае вновь имеет место неравенство (6.70). В самом деле, условия леммы 6.6 будут выполнены так же, как и неравенства (6.74) и (6.77). Оценки (6.75) и (6.76) также справедливы, ибо $u = 7M/L' < 1$. Неравенство (6.70) показывает, что последовательность Λ не может быть приемлемой. Теорема доказана.

Из теоремы 6.1 с помощью первого неравенства (0.33) легко получить нижнюю оценку такого же порядка для $\Phi_0(X)$. Мы сделаем это, используя более простые средства.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *При всех $X \geq 3$ справедливо неравенство*

$$\Phi_0(X) \geq \ln^2 X / (2100 \ln \ln X). \quad (6.78)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.19) вытекает $\Phi_0(X) \geq 1$, что доказывает (6.78) для $3 \leq X \leq e^{90}$. Пусть $X > e^{90}$. Возьмем произвольную приемлемую последовательность Λ , $\min \Lambda = 1$, и покажем, что

$$\Phi_\Lambda \left(\frac{X}{\Phi_\Lambda(1)} \right) \geq \frac{\ln^2 X}{2100 \ln \ln X}. \quad (6.79)$$

Если $\Phi_\Lambda(1) \leq X^{0.02}$, то по теореме 6.1

$$\begin{aligned} \Phi_\Lambda \left(\frac{X}{\Phi_\Lambda(1)} \right) &\geq \Phi_\Lambda(X^{0.98}) \geq \Phi(X^{0.98}) \\ &\geq 0.98^2 \ln X / (2000 \ln \ln X) > \ln^2 X / (2100 \ln \ln X). \end{aligned}$$

Если $X^{0.02} < \Phi_\Lambda(1) \leq X$, то

$$\Phi_\Lambda \left(\frac{X}{\Phi_\Lambda(1)} \right) \geq \Phi_\Lambda(1) > X^{0.02},$$

и (6.79) следует из неравенства $X^{0.02} > \ln^2 X / 2100$. Если же $\Phi_\Lambda(1) > X$, то по лемме 2.2

$$\Phi_\Lambda \left(\frac{X}{\Phi_\Lambda(1)} \right) = \frac{X}{\Phi_\Lambda(1)} \Phi_\Lambda(1) = X,$$

и (6.79) вновь выполнено. Следствие доказано.

Из доказанных утверждений и теоремы 0.2 немедленно вытекают нижние оценки для $M_Z^\downarrow(n)$ и $K_Z^\downarrow(n)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. *При всех $n \geq 3$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} M_Z^\downarrow(n) &\geq \ln^2 n / (56000 \ln \ln n), \\ K_Z^\downarrow(n) &\geq \ln^2 n / (58800 \ln \ln n). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.5. Первое неравенство (0.41) вытекает из следствия 6.1, второе – из леммы 2.3, а третье – из теоремы 5.2. В силу теоремы 0.2 неравенства (0.41) влекут (0.42).

Список литературы

1. Белов А.С. Новые примеры неотрицательных тригонометрических полиномов с целыми коэффициентами // Конструктивная теория функций и ее приложения. Махачкала, 1994. С. 17–19.
2. Белов А.С. Новые примеры неотрицательных тригонометрических полиномов с целыми коэффициентами // Фунд. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 3. С. 581–612.
3. Odlyzko A.M. Minima of cosine sums and maxima of polynomials on the unit circle // J. Lond. Math. Soc. 1982. V. 26. № 3. P. 412–420.
4. Kolountzakis M.N. On nonnegative cosine polynomials with nonnegative integral coefficients // Proc. Am. Math. Soc. 1994. V. 120. № 1. P. 157–163.
5. Erdős P., Szekeres G. On the product $\prod_{k=1}^n (1 - z^{a_k})$ // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. 1959. V. 13. P. 29–34.
6. Белов А.С. О неравенстве Сидона–Зигмунда в теории лакунарных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1981. Т. 30. № 4. С. 501–515.
7. Чандрасекхаран К. Введение в аналитическую теорию чисел. М.: Мир, 1974.
8. Rosser J.B., Schoenfeld L. Approximate formulas for some functions of prime numbers // Illinois J. Math. 1962. V. 6. № 1. P. 64–94.
9. Кашиин Б.С., Саакян А.А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
10. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т.2. М.: Мир, 1965.
11. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.

Ивановский государственный университет,
Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступило в редакцию
5.IV.1996