Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенов, А. А. Шоманова, Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2009, том 73, выпуск 2, 183–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im956>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:52:29

УДК 517.5

Н. Темиргалиев, С. С. Кудайбергенев, А. А. Шоманова

Применение тензорных произведений функционалов в задачах численного интегрирования

Определено новое понятие тензорного произведения функционалов и показаны их применения в задачах численного интегрирования. Найдены точные порядки возникающих при этом погрешностей на различных классах функций как ранее известных, так и новых.

Библиография: 43 наименования.

Ключевые слова: тензорные произведения функционалов, численное интегрирование, квадратурные формулы Смоляка, дискрепанс, сетка Коробова, теоретико-числовые методы, теория дивизоров, система Чебышёва, восстановление по неточной информации.

Введение

Задача приближенного вычисления интегралов важна как с теоретической, так и с прикладной точки зрения, и ей посвящена обширная литература (см., например, [1]–[32] и имеющуюся в этих работах библиографию).

Здесь мы ограничимся рассмотрением только периодических функций многих переменных (всюду ниже число переменных будет обозначаться через s , $s = 1, 2, \dots$).

Отметим, что все теоремы о численном интегрировании периодических функций могут быть распространены и на непериодические функции путем их периодизации (см. [3, с. 52–65] и [7, с. 105–124]).

К основным в численном интегрировании относится задача построения оптимальных (или близких к оптимальным) квадратурных формул вида $N^{-1} \sum_{k=1}^N f(\xi_k)$, полностью определяемых системой (сеткой) узлов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. При этом самостоятельное значение имеет наука об “иррегулярностях распределения”, предмет изучения которой составляет вопрос о том, “в каких пределах конечный набор точечных масс, сосредоточенный в точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ s -мерного единичного куба, может (в различных геометрических смыслах) послужить приближением к равномерному распределению массы по всему кубу” [20].

В настоящей статье сетку $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ будем называть *равномерно распределенной*, если для ее дискрепанса D_s выполнено неравенство

$$D_s(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \equiv \sup \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \chi_I(\xi_k) - \prod_{j=1}^s (d_j - b_j) \right| : I = \prod_{j=1}^s [b_j, d_j] \subset [0, 1]^s \right\} \\ \leq c(s) \frac{1}{N} \ln^{\beta(s)} N; \quad (1)$$

как обычно, здесь и далее $\chi_A(x)$ – характеристическая функция множества A , через $c(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, ... обозначены некоторые положительные величины, различные, вообще говоря, в разных неравенствах и зависящие лишь от указанных в скобках параметров. Для положительных последовательностей $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ записи $A_n \ll B_n$ и $A_n \asymp B_n$ означают соответственно $A_n \leq c(\cdot)B_n$ и $A_n \ll B_n \ll A_n$.

Н. М. Коробовым в 1959 г. [3, с. 98] были определены сетки вида

$$\xi_k = \left(\left\{ \frac{k}{N} a_1 \right\}, \dots, \left\{ \frac{k}{N} a_s \right\} \right), \quad k = 1, \dots, N, \quad (2)$$

где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа и $a_1 = a_1(N), \dots, a_s = a_s(N)$ – взаимно простые с N целые числа, а также дано первоначальное определение оптимальности по модулю N индекса β коэффициентов $a_1, \dots, a_s$. Затем им же было установлено [3, с. 141–146], что это определение оптимальности эквивалентно выполнению неравенства (1).

Сетки Коробова (2) примечательны тем, что независимо от количества узлов N они полностью определяются заданием $s+1$ целых чисел $(a_1, \dots, a_s; N)$. При этом узлы сетки легко выписываются за $\ll N$ элементарных арифметических операций, что можно отнести к особому случаю сверхсжатия информации. Тем самым, здесь наблюдается замечательное соединение оптимальности сетки с простотой ее задания и предельной экономностью хранения в памяти ЭВМ.

Выпишем равенство, в котором раскрывается механизм действия теоретико-числовых методов в задачах численного интегрирования (см. [11], [12]):

$$\int_{[0,1]^s} f(x) dx - \frac{1}{|\det d|} \sum_{k \bmod \mathbb{Z}^s d'} f(k(d^{-1})') = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s}^* \hat{f}(m) \chi_{\mathbb{Z}^s d}(m),$$

$$\hat{f}(m) = \int_{[0,1]^s} f(x) e^{-2\pi i(m, x)} dx,$$

где $\mathbb{Z}^s d = \{md : m \in \mathbb{Z}^s\}$ – полная решетка в $\mathbb{Z}^s$, заданная невырожденной целочисленной матрицей d , штрих ' обозначает транспонирование, запись $k \bmod \mathbb{Z}^s d'$ означает, что k пробегает полную систему представителей классов вычетов по модулю решетки $\mathbb{Z}^s d'$, знак * в обозначении суммы (а далее и в обозначении множества) означает, что из нее исключается слагаемое, соответствующее индексу суммирования $m = 0$ (для множества E имеем $E^* = E \setminus \{0\}$).

Этим в данном контексте задача численного интегрирования сводится к нахождению при заданном положительном ε такой целочисленной невырожденной матрицы d с минимальным определителем $N = |\det d|$, что соответствующая решетка $\mathbb{Z}^s d$ имеет (самое большое) нулевое пересечение со спектром

$$\Gamma_\varepsilon(F) = \left\{ m \equiv (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : \sup_{f \in F} |\hat{f}(m)| \geq \varepsilon \right\} \quad (3)$$

“больших” тригонометрических коэффициентов Фурье–Лебега индивидуальной периодической функции или множества функций, объединенных в класс F периодических функций.

Метод исследования, предложенный Н. М. Коробовым и развитый в последующих многочисленных публикациях (обзор последних достижений в этом

направлении приведен в [7, гл. 6]), заключается, по существу, в нахождении по данному $\varepsilon > 0$ наименьшего (или близкого к наименьшему) целого положительного N и взаимно простых с N целых чисел $a_1 = a_1(N), \dots, a_s = a_s(N)$ таких, что решетка

$$\{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : a_1 m_1 + \dots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{N}\}$$

имеет нулевое пересечение с множеством $(\bar{y} = \max\{1; |y|\})$

$$\Gamma_\varepsilon \equiv \{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s : (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r} \geq \varepsilon > 0\} \quad (4)$$

– гиперболическим крестом, составляющим спектр “больших коэффициентов” (3) класса Коробова E_s^r , $r > 1$:

$$E_s^r \equiv \{f : |\hat{f}(m_1, \dots, m_s)| \leq (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r} \text{ для всех } m \in \mathbb{Z}^s\}.$$

Еще один критерий оптимальности был установлен Н.С. Бахваловым [8] в виде соотношения $\varepsilon^{-\frac{1}{r}} \geq \frac{N}{C_1 \ln^{\theta_1} N}$ между ε (размером гиперболического креста в (4)) и количеством узлов N в (2).

Иной метод был разработан С.М. Ворониным и одним из авторов этой статьи. Основную идею этого метода представим на примере двумерного случая (см. [11]).

Пусть $i = \sqrt{-1}$ и $Z[i]$ – множество, составленное из всех комплексных чисел $x + iy$, где x и y – целые рациональные числа, т.е. принадлежат $\mathbb{Z}$. Относительно обычных операций поля комплексных чисел множество $Z[i]$ образует кольцо и называется *кольцом гауссовых целых чисел*.

Если $b = b_1 + ib_2 \neq 0$, $b \in Z[i]$, то множество $(b) = \{bm : m = m_1 + im_2 \in Z[i]\}$ образует квадратную решетку с базисом, состоящим из b и $bi = be^{i\frac{\pi}{2}}$. При этом условие принадлежности точки $x + iy \neq 0$ из $Z[i]$ решетке (b) сводится к уравнению $x + iy = (b_1 + ib_2)(m_1 + im_2)$ в целых рациональных числах относительно m_1 и m_2 , откуда $x^2 + y^2 = (b_1^2 + b_2^2)(m_1^2 + m_2^2)$.

Согласно теореме Эйлера (см., например, [33, с. 64–69]) всякое простое p , $p \equiv 1 \pmod{4}$, представимо в виде суммы двух квадратов целых чисел: $b_1^2 + b_2^2 = p$. Тогда запись $x^2 + y^2 = p(m_1^2 + m_2^2)$ приводит к решению сформулированной выше задачи. Именно, пусть дано конечное множество $\Gamma \subset Z[i]$; тогда если простое p , $p \equiv 1 \pmod{4}$, обладает тем свойством, что для всякого $x + iy$ из Γ^* число $x^2 + y^2$ не делится на p , то решетка (b) , где $b \in Z[i]$ и $p = |b|^2$, не пересекается с Γ^* .

Эти рассуждения позволяют применить теорию дивизоров, созданную при попытках доказательства Последней теоремы Ферма (см. историю вопроса, например, в [33]), в задачах теории квадратур, что представляет собой сочетание гармонического анализа и теории алгебраических чисел. Эффективность применения теории дивизоров обеспечивается тем обстоятельством, что появляется возможность с учетом каждого элемента множества “больших коэффициентов” класса $\Gamma_\varepsilon(F)$ построить идеал (решетку) минимальной нормы из арифметической прогрессии, имеющий разве лишь нулевое пересечение с $\Gamma_\varepsilon(F)$ (см. [11]–[16]). При этом во всех таких случаях снова приходим к сеткам Коробова (2).

Из других методов численного интегрирования теоретико-числового содержания с последующим эффективным развитием (см. работу [19] и имеющуюся в ней библиографию) отметим квадратурные формулы с равными весами, предложенные К. К. Фроловым [18].

Целью настоящей статьи является изучение вычислительных возможностей квадратурных формул Смоляка [23], [24]. В этих работах фактически был предложен метод, позволяющий распространить результаты аппроксимативного содержания с меньших размерностей пространств на большие. Однако, как нам представляется, возможности метода были неоправданно сужены тем обстоятельством, что сфера применения была ограничена тензорным произведением классов, что отражено в названии статьи [23].

Общая формула переноса утверждений о приближениях функционалов $B^{(j)}$ агрегатами по полным ортонормированным системам $\{\varphi_{m_j}^{(j)}\}_{m_j \in M_j}$, $j = 1, \dots, s$, на случай полных кратных ортонормированных систем $\{(\varphi_{m_1}^{(1)} \varphi_{m_2}^{(2)} \dots \varphi_{m_s}^{(s)})\}$ выписывается в виде

$$\begin{aligned} & \left(\otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)} \right) (f) - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s} \left(\otimes \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)} \right) (f) \\ &= \sum_{m \in M} \left\langle f, \prod_{j=1}^s \varphi_{m_j}^{(j)} \right\rangle \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)} (\varphi_{m_j}^{(j)}) \end{aligned} \quad (5)$$

(см. [31], необходимая здесь детализация приведена в § 2 настоящей статьи), или, что то же самое,

$$\begin{aligned} & \left(\otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)} \right) (f) - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s} \\ & \times \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_s=0}^1 \left\{ \otimes \prod_{j=1}^s (-\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)}))^{\varepsilon_j} \alpha_{\nu_j - \varepsilon_j}^{(j)} \right\} (f) \\ &= \sum_{m \in M} \left\langle f, \prod_{j=1}^s \varphi_{m_j}^{(j)} \right\rangle \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \\ & \times \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_s=0}^1 \prod_{j=1}^s (-\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)}))^{\varepsilon_j} \alpha_{\nu_j - \varepsilon_j}^{(j)} (\varphi_{m_j}^{(j)}). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь и всюду далее $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)})$ – произвольный, но фиксированный во всех вычислительных агрегатах целочисленный вектор с неотрицательными компонентами, $Z_{\nu^{(0)}}^s = \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{Z}^s : \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s\}$, $\Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$ – конечное множество, $\nu^{(0)} \in \Omega$,

$$\begin{aligned} B^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)}) &= \lim_{\substack{\nu_j \rightarrow \infty \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}}} \alpha_{\nu_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)}), \quad \theta_{\nu_j}^{(j)} = \alpha_{\nu_j}^{(j)} - \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)}) \alpha_{\nu_j-1}^{(j)}, \\ & \sum_{\nu_j \geq \nu_j^{(0)}} |\theta_{\nu_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)})| < +\infty, \end{aligned} \quad (7)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение (быть может, с весом), наконец, $m = (m_1, \dots, m_s) \in M_1 \times \dots \times M_s \equiv M$,

$$\left(\otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)} \right) \left(\sum_{m \in M} \left\langle f, \prod_{j=1}^s (\varphi_{m_j}^{(j)}) \right\rangle \prod_{j=1}^s (\varphi_{m_j}^{(j)}) \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m \in M} \left\langle f, \prod_{j=1}^s (\varphi_{m_j}^{(j)}) \right\rangle \prod_{j=1}^s B^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)})$$

– тензорное произведение функционалов $B^{(1)}, \dots, B^{(s)}$, а все ряды из равенств (5), (6) предполагаются абсолютно сходящимися.

С. А. Смоляк в работе [23] указал на разнообразные применения своего подхода, вплоть до вероятностных, и получил ряд важнейших результатов в численном интегрировании (в двух конкретизациях) и восстановлении функций, тем не менее, по-видимому, возможности метода Смоляка недостаточно изучены.

Так, в работе [31] получено следующее представление функции по ее значениям в конечном числе точек (сетке Смоляка):

$$\begin{aligned} f(x) - & \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu(0)}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left\{ \prod_{j=1}^s \right. \\ & \times \sum_{n_j=-2^{\nu_j-1}}^{2^{\nu_j-1}} [\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j) - \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})(1 + (-1)^{k_j}) \lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)] \\ & \times \exp\left(2\pi i n_j \left(x_j - \frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)\right) \left. \right\} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \\ = & \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu(0)}^s \setminus \Omega} \sum_{\substack{(\varphi_1, \dots, \varphi_s) \\ \varphi_j=1,2,3, j=1, \dots, s}} \\ & \times \sum_{(\tau_1, \dots, \tau_s) \in A_{\varphi_1}^{(\nu_1)} \times \dots \times A_{\varphi_s}^{(\nu_s)}} \delta_{\varphi_1}^{(\nu_1)}(\tau_1, x_1) \dots \delta_{\varphi_s}^{(\nu_s)}(\tau_s, x_s) \\ & \times \left[\sum_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(2^{\nu_1} t_1 + \tau_1, \dots, 2^{\nu_s} t_s + \tau_s) \right], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1^{(\nu)} &= \{\tau \in \mathbb{Z}: |\tau| < 2^{\nu-2}\}, \quad A_2^{(\nu)} = \{\tau \in \mathbb{Z}: 2^{\nu-2} < |\tau| < 2^{\nu-1}\}, \\ A_3^{(\nu)} &= \{\tau = -2^{\nu-1}, -2^{\nu-2}, 2^{\nu-2}\}, \\ \delta_1^{(\nu)}(\tau, x) &= [\lambda_{\tau}^{(\nu)} - \lambda_{\tau}^{(\nu-1)} \text{sign}(\nu - \nu^{(0)})] e^{2\pi i \tau x}, \quad \tau \in A_1^{(\nu)}, \\ \delta_2^{(\nu)}(\tau, x) &= [\lambda_{\tau-2^{\nu-1}}^{(\nu)} - \lambda_{\tau-2^{\nu-1}}^{(\nu-1)} \text{sign} \tau e^{-(\text{sign} \tau) \cdot 2\pi i \cdot 2^{\nu-1} x} \text{sign}(\nu - \nu^{(0)})] e^{2\pi i \tau x}, \quad \tau \in A_2^{(\nu)}, \\ \delta_3^{(\nu)}(\tau, x) &= \begin{cases} \lambda_{-2^{\nu-1}}^{(\nu)} e^{-2\pi i \cdot 2^{\nu-1} x} + \lambda_{2^{\nu-1}}^{(\nu)} e^{2\pi i \cdot 2^{\nu-1} x} - \lambda_0^{(\nu-1)} \text{sign}(\nu - \nu^{(0)}), & \tau = -2^{\nu-1}, \\ \lambda_{\pm 2^{\nu-2}}^{(\nu)} e^{2\pi i (\pm 2^{\nu-2}) x} - [\lambda_{-2^{\nu-2}}^{(\nu-1)} e^{-2\pi i \cdot 2^{\nu-2} x} + \lambda_{2^{\nu-2}}^{(\nu-1)} e^{2\pi i \cdot 2^{\nu-2} x}] \text{sign}(\nu - \nu^{(0)}), & \tau = \pm 2^{\nu-2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что в основе применения равенств (5), (6) в задачах восстановления функций лежат теоремы типа

$$\sum_{k=1}^N f(\xi_k^{(N)}) K_N(x - \xi_k^{(N)}) \rightarrow f(x), \quad N \rightarrow \infty,$$

где $K_N(x)$ – специальная функция (ядро).

Несмотря на то, что по этому направлению имеются результаты К. И. Осколкова [34], В. Н. Темлякова [32] и других, не исключено, что будут возрождены активные в прошлом исследования (см., например, [35, с. 489–589] и [36, гл. X]), имеющие, впрочем, в связи с развитием компьютерных технологий и самостоятельное значение.

Итак, основная тема исследований – это конкретизация равенств (5), (6) при

$$\alpha_\nu(f) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=0}^{2^\nu-1} f\left(\frac{k}{2^\nu}\right).$$

Возникающая при этом квадратурная формула Λ_q выписана в работе [23] в виде

$$\Lambda_q(f) = \sum_{q-s < \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q} \sum_{1 \leq k_j \leq 2^{\nu_j}} p_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{k_1, \dots, k_s}(q) f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \quad (8)$$

с числом узлов $N = N(q, s) \asymp 2^q q^{s-1}$. В этой работе сказано, что “коэффициенты $p_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{k_1, \dots, k_s}$ можно вычислить за $C(s)$ операций каждый...”, а в [24, с. 118, 119] приведен явный вид этих коэффициентов:

$$p_{\nu_1, \dots, \nu_s}^{k_1, \dots, k_s}(q) = 2^{-(\nu_1 + \dots + \nu_s)} \sum_{\substack{\varepsilon_j = 0, 1 \\ q-s < \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s + \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q}} (-1)^{\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_s}. \quad (9)$$

Впоследствии квадратурные формулы Смоляка изучались группой математиков, работающих по теме под названием “Теория информационной сложности”, в составе Дж. Трауба, Х. Вожняковского, Г. Василковского, Э. Новака, С. Пашкова (см., например, работы [25], [26] и имеющуюся в них библиографию). Затем в работах [27], [28] и в [29] те же вопросы изучались для классов лоренцова типа и классов Ульянова U_s соответственно.

В результате этих исследований было выяснено, что имеются $s + 2$ видов записи одной и той же квадратурной формулы Смоляка. В частности, первая запись есть собственно (8), (9), вторая (см. (29)) получена специальным приемом в [28]. Из всех записей наиболее предпочтительной с вычислительной точки зрения является следующая (см. (30)):

$$\Lambda_q(f) = \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) \quad (10)$$

(см. работы [26] и [29]).

В общем случае вычислительные возможности тех или иных агрегатов приближения выявляются посредством точных порядковых оценок наихудших погрешностей по классу. Данные порядковые оценки зависят от параметров этих классов.

Функциональные классы, определяемые поведением коэффициентов Фурье, подразделяются на два типа: классы типа Коробова E_s^r , $r > 1$, с непосредственными оценками $|\hat{f}(m)| \leq (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{-r}$ коэффициентов Фурье и классы типа Соболева SW_2^r со взвешенными оценками $\|f\|_{SW_2^r}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} (\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{2r} |\hat{f}(m)|^2 \leq 1$.

Как можно заметить, здесь оценки проводятся в степенной шкале. Более тонкая классификация функций получается при замене степенной шкалы на более общую.

На основе критериев П. Л. Ульянова [37], связывающих скорость убывания тригонометрических коэффициентов Фурье бесконечно дифференцируемых периодических функций и скорость возрастания норм их производных, в работах [29], [30] были определены функциональные пространства

$$U_s \equiv U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi) = \left\{ f: |\hat{f}(m_1, \dots, m_s)| \leq \prod_{j=1}^s \bar{m}_j^{\beta_j} \theta_j^{\bar{m}_j^{1/\alpha_j}} \psi_j(m_j) \right\}, \quad (11)$$

где $\beta_j \in (-\infty, +\infty)$, $0 < \theta_j \leq 1$, $\alpha_j > 0$, $\psi_j(\cdot)$ – четные медленно колеблющиеся положительные функции, осуществляющие классификацию в широком диапазоне: от функций предельно малой гладкости до аналитических функций (и их подклассов).

В частности (для $c \in \mathbb{R}$ полагаем $\vec{c} \equiv (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^s$), при $\beta = -\vec{r}$, $\theta = \vec{1}$, $\alpha = \vec{1}$, $\psi = \vec{1}$, $r > 1$ соответствующие классы Ульянова U_s сводятся к классам Коробова E_s^r .

Взвешенный вариант классов U_s , предложенный в § 1, также приводит к более тонкой классификации функций, чем классы $SW_2^r(0, 1)^s$.

Последовательность шкал

$$\frac{1}{\bar{m}^\tau}, \frac{1}{\bar{m}(\log_+ \bar{m})^\tau}, \frac{1}{\bar{m} \log_+ \bar{m} (\log \log_+ \bar{m})^\tau}, \dots,$$

где $\tau > 1$,

$$\underbrace{\log \dots \log_+}_k y = \begin{cases} \underbrace{\log_2 \dots \log_2}_k y & \text{при } y \geq 2^k, \\ 1 & \text{при } 0 < y < 2^k, \end{cases}$$

показывает неограниченность классов типа U_s с предельно малой гладкостью, то же относится и к случаю взвешенных классов.

Настоящая статья посвящена получению точных порядковых оценок погрешностей квадратурных формул Смоляка для классов общего вида, отражающих гладкость функций в терминах поведения коэффициентов Фурье (определению этих классов посвящен § 1).

В § 2, 3 приведены вспомогательные утверждения, имеющиеся в них полные или частичные совпадения с ранними результатами (лемма 6 получена в [26], лемма 5 в разных записях содержится в [25]–[29]) сохранены ради целостности изложения.

В качестве иллюстрации основных результатов настоящей статьи приведем некоторые соотношения, точные в логарифмической шкале ($N \asymp 2^q q^{s-1}$).

Для класса U_s , определяемого непосредственными оценками коэффициентов Фурье, найдены точные порядки погрешностей

$$\sup \left\{ \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| : f \in U_s(-\vec{r}, \vec{1}, \vec{1}; \log_+^{-\vec{r}}(\cdot)) \right\} \asymp N^{-r} b_r(N), \quad (12)$$

где при $r > 1$ имеем $b_0(N) = (\ln N)^{(r+1)(s-1)}$, а при $r = 1$ множитель $b_r(N)$ равен $(\ln N)^{(3-\tau)s-2}$, $(\ln N)^{s-2}(\ln \ln N)^{s-1}$ и $(\ln N)^{s-\tau}$ при $1 < \tau < 2$, $\tau = 2$ и $\tau > 2$ соответственно.

Далее, в случае взвешенных оценок коэффициентов Фурье имеем

$$\sup \left\{ \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| : f \in \text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta}(0,1)^s, \text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta}(0,1)^s \right. \\ \left. = \left\{ f : \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \left(|\hat{f}(m)| \prod_{j=1}^s (\overline{m}_j)^r \log_+^\kappa \overline{m}_j \right)^2 \leq 1 \right\} \right\} \asymp N^{-r} \Psi_\kappa(N), \quad (13)$$

где при $2r > 1$

$$\Psi_\kappa(N) = \Psi_{s,r,\kappa}(N) = \begin{cases} (\ln N)^{(s-1)(r+\frac{1}{2})-s\kappa}, & \text{если } \kappa < \frac{1}{2}, \\ (\ln \ln N)^{\frac{s-1}{2}} (\ln N)^{r(s-1)-\frac{1}{2}}, & \text{если } \kappa = \frac{1}{2}, \\ (\ln N)^{r(s-1)-\kappa}, & \text{если } \kappa > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

При $2r = 1$ имеем то же самое, но только с заменой 2κ на $2\kappa - 1 > 0$:

$$\sup_{f \in \text{SW}_2^{\sqrt{\delta} \log_+^\kappa \delta}(0,1)^s} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \asymp N^{-\frac{1}{2}} g_\kappa(N),$$

где

$$g_\kappa(N) = g_{s,\kappa}(N) = \begin{cases} (\ln N)^{(s-1)-s(\kappa-\frac{1}{2})}, & \text{если } \frac{1}{2} < \kappa < 1, \\ (\ln \ln N)^{\frac{s-1}{2}} (\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\frac{1}{2}}, & \text{если } \kappa = 1, \\ (\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\kappa+\frac{1}{2}}, & \text{если } \kappa > 1. \end{cases}$$

В то же время в классе $U_2(\vec{0}, (e^{-1}, e^{-1}), \vec{1}; \vec{1})$ выполнено $\delta_N \asymp \exp(-\sqrt{\frac{4}{3}}N)$ для квадратурной формулы Смоляка, тогда как наилучшаемый порядок есть $\asymp \exp(-\sqrt{2}N)$ (см. [21], [29]).

Таким образом, в шкале классов Ульянова $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и классов Соболева $\text{SW}_2^{\omega(\delta)}(0,1)^s$ получаем полную картину вычислительных возможностей квадратурных формул Смоляка, которые хотя и никогда не дают точных порядков, но наилучшаемы в степенной шкале, а в показательной шкале не точны, при этом из $s+2$ видов формул наиболее экономной для вычислений является квадратурная формула (10).

Из соотношения (13) при $2r > 1$ и $\kappa = 0$ следует, что для класса $\text{SW}_2^r(0,1)^s$ оценка в статье [23] завышена на множитель $q^{\frac{s-1}{2}} \asymp (\ln N)^{\frac{s-1}{2}}$ (оценка сверху ранее дана в [27]).

Заметим, что, как это следует из сравнения соотношений (12) и (13) при $r > 1$, приведенное в [23] утверждение: “взяв вместо $\text{SW}_2^r(0,1)^s$ класс E_s^r , мы аналогично получим, что та же квадратурная формула дает ту же по порядку ошибку и на классе E_s^r ” – не верно.

В заключение отметим статью [38], имеющую прямое отношение к настоящей работе.

Авторы работы [38] строят контрпример к оценке сверху, приведенной в [29, теорема 3] и принадлежащей, как указано в [29], С. А. Смоляку [23]. Стало

быть, и квадратурная формула в [29, теорема 3] тоже принадлежит Смоляку. Это означает, что $\nu_1^{(0)} = \dots = \nu_s^{(0)} = 0$, на это также указывает условие $0 \leq \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} < q$, где $q = 2, 3, \dots$. Автору статьи [29] принадлежит лишь оценка снизу, совпадающая по порядку с оценкой сверху, полученной Смоляком. Далее покажем (см. теорему 6 в §4), что теорема 3 из [29] в общем случае всех фиксированных векторов $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)})$ с целыми неотрицательными компонентами, в том числе и в случае Смоляка, когда $\nu_1^{(0)} = \dots = \nu_s^{(0)} = 0$, верна.

Авторы работы [38] также строят контрпример к устранимым по тексту статьи [29] опечаткам в виде пропущенных или оказавшихся совсем в другом месте скобок в формулировке теоремы 2 из той же статьи [29]. Однако доказательство теоремы 2 состоит, как это сообщается в самой статье, в том, что к имеющемуся в [29] представлению (в настоящей статье это лемма 5)

$$\begin{aligned}
 \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) &= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \\
 &\times \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}((2t_1 + \text{sign}(\nu_1 - \nu_1^{(0)})) \cdot 2^{\nu_1-1}, \dots \\
 &\dots, (2t_s + \text{sign}(\nu_s - \nu_s^{(0)})) \cdot 2^{\nu_s-1})
 \end{aligned} \quad (14)$$

применяется определение класса U_s из статьи [29] (здесь это определение (11)), и тогда получается свободное от опечаток (и однозначно восстанавливаемое по (14) и (11) при любых опечатках) утверждение теоремы 2:

$$\begin{aligned}
 \sup_{f \in U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) \right| \\
 \ll_{\beta, \theta, \alpha, \psi} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j \in \mathbb{Z}} \left(\overline{(2t_j + \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})) \cdot 2^{\nu_j-1}} \right)^{\beta_j} \\
 \times \theta_j \left(\overline{(2t_j + \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})) \cdot 2^{\nu_j-1}} \right)^{\alpha_j-1} \psi_j \left(\overline{(2t_j + \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})) \cdot 2^{\nu_j-1}} \right).
 \end{aligned}$$

Тем самым, теоремы 2 и 3 из статьи [29] верны.

§ 1. Определения функциональных классов $\ell_s^p(D)$ и $\ell_{g,p,s}^*(D)$

В качестве исходных рассмотрим классы Соболева с доминирующей смешанной производной, основанные на определении производной Вейля и равенстве Парсевала: класс $\text{SW}_2^r(0,1)^s$ состоит из всевозможных 1-периодических по каждой переменной функций f из класса Лебега $L^2(0,1)^s$ таких, что

$$\|f^{(r)}\|_{L^2(0,1)^s}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |D_s(m) \hat{f}(m)|^2 \leq 1,$$

где $f(x) \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m,x)}$. Здесь последовательно положено:

$$f^{(r)}(x) \equiv f^{(r_1, \dots, r_s)}(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) (e^{2\pi i(m,x)})^{(r_1, \dots, r_s)}, \quad (15)$$

$$(e^{2\pi i m_j x_j})^{(r_j)} = D(m_j)_{r_j} e^{i\eta_{r_j}(m_j)} e^{2\pi i m_j x_j}, \quad m_j \in \mathbb{Z}, \quad r_j \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

$$D(m_j)_{r_j} = (\overline{2\pi m_j})^{r_j}, \quad \eta_{r_j}(m_j) = r_j \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} m_j, \quad 1^{r_j} \equiv 1, \quad (17)$$

$$D_s(m) = D(m_1, \dots, m_s)_{(r_1, \dots, r_s)} = \prod_{j=1}^s D(m_j)_{r_j},$$

$$(e^{2\pi i(m, x)})^{(r_1, \dots, r_s)} = D(m_1, \dots, m_s)_{(r_1, \dots, r_s)} (e^{i(\eta_{r_1}(m_1) + \dots + \eta_{r_s}(m_s))}) e^{2\pi i(m, x)}.$$

Заметим, что определение (15) отличается от определения производной $f^{(r_1, \dots, r_s)}$, данного в [39, с. 238], тем, что в силу соглашений (16), (17) в записи $f^{(r_1, \dots, r_s)}$ учтены также коэффициенты Фурье $\hat{f}(m_1, \dots, m_s)$, в которых не все m_j отличны от нуля.

Таким образом, запись $f \in \operatorname{SW}_2^r(0, 1)^s$ означает, что последовательность

$$\left\{ (\overline{2\pi i m_1})^{r_1} e^{r_1 i \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} m_1} \dots (\overline{2\pi i m_s})^{r_s} e^{r_s i \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} m_s} \hat{f}(m_1, \dots, m_s) \right\}_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s},$$

или, что то же самое,

$$\left\{ (\overline{2\pi i m_1})^{r_1} \dots (\overline{2\pi i m_s})^{r_s} \hat{f}(m_1, \dots, m_s) \right\}_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s},$$

принадлежит классу ℓ_s^2 , который содержится в общей шкале классов ℓ_s^p , $0 < p \leq \infty$, определяемых как множество, составленное из всевозможных комплекснозначных последовательностей $c \equiv \{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ таких, что конечна величина

$$\|c\|_{\ell_s^p} = \begin{cases} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{если } 0 < p < \infty, \\ \sup_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m|, & \text{если } p = \infty. \end{cases}$$

Резюмируя изложенное выше, для данной положительной последовательности $D \equiv D_s \equiv \{D_s(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ и s последовательностей $\{\eta_j(m_j)\}_{m_j \in \mathbb{Z}, j=1, \dots, s}$, действительных чисел определим класс $\ell_s^p(D)$ как множество всех 1-периодических по каждой из s переменных функций $f \equiv f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_s) \in L(0, 1)^s$ таких, что

$$\|f\|_{\ell_s^p(D)} \equiv \left\| \{D_s(m) e^{i\eta(m)} \hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s} \right\|_{\ell_s^p} \leq 1,$$

где $\eta(m) = \eta_1(m_1) + \dots + \eta_s(m_s)$.

Тогда при

$$D_s(m_1, \dots, m_s) = \prod_{j=1}^s (\overline{2\pi m_j})^{r_j}, \quad \eta_j(m_j) = r_j \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} m_j$$

получим, что $\ell_s^2(D) \equiv \operatorname{SW}_2^{r_1, \dots, r_s}$ – класс Соболева с доминирующей смешанной производной, $\ell_s^\infty(D) \equiv E^{r_1, \dots, r_s}$ – класс Коробова и, вообще,

$$U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi) \equiv \ell_s^\infty(D), \quad \text{где } D \equiv D_s = \left\{ \left(\prod_{j=1}^s \overline{m_j}^{\beta_j} \theta_j^{\frac{1}{\alpha_j}} \psi_j(m_j) \right)^{-1} \right\}_{m \in \mathbb{Z}^s}.$$

Классы иного вида получим при замене ℓ_s^p на дискретные классы типа Лоренца $\ell_{g,p,s}^*$ (см. [40]), где $1 \leq p < \infty$, $g(k) = g(k_1, \dots, k_s)$ – положительная последовательность, определенная на множестве $\mathbb{N}_+^s = \{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}^s : k_j \geq 1\}$,

$j = 1, \dots, s$. Именно, для данной комплекснозначной последовательности $c \equiv \{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$, обозначая через $\{c_{k_1, \dots, k_s}^*\}_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s} = \{|c_{m_1, \dots, m_s}|\}_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s}^{*1, \dots, *s}$ невозрастающую перестановку (если такая существует) последовательности $\{|c_m|\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$, произведенную последовательно по переменным $m_s, m_{s-1}, \dots, m_1$ при фиксированных остальных, полагаем

$$\|c\|_{\ell_{g,p,s}^*} \equiv \left\{ \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s} [g(k_1, \dots, k_s)(c_{k_1, \dots, k_s}^*)]^p \right\}^{\frac{1}{p}} = \|\{g(k)c_k^*\}_{k \in \mathbb{N}_+^s}\|_{\ell_s^p}.$$

Тогда класс $\ell_{g,p,s}^*(D)$ состоит из всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x) \in L(0, 1)^s$ таких, что конечна величина

$$\|f\|_{\ell_{g,p,s}^*(D)} \equiv \|\{D_s(m)e^{i\eta(m)}\hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}^{*1, \dots, *s}\|_{\ell_{g,p,s}^*} \leq 1.$$

В частности, при $g(k_1, \dots, k_s) = (k_1 \cdots k_s)^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$, $1 \leq \alpha < \infty$, получаем пространство $\ell_{\alpha,p,s}^*$ с квазинормой

$$\|c\|_{\ell_{\alpha,p,s}^*} \equiv \left\{ \sum_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s} (k_1 \cdots k_s)^{\frac{p}{\alpha} - 1} (c_{k_1, \dots, k_s}^*)^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leq 1. \quad (18)$$

Согласно [36, с. 184] под невозрастающей перестановкой $\{c_k^*\}_{k=1}^\infty$ комплекснозначной последовательности $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ понимается перестановка в невозрастающем порядке последовательности $|c_0|, |c_1|, |c_{-1}|, \dots$, из которой исключены нули, что обеспечивает, например, условие $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = 0$.

Нарушение этого условия, вообще говоря, исключает возможность указанной перестановки. Например, последовательность, составленную из всех рациональных чисел отрезка $[\frac{1}{2}, 1]$, нельзя переставить в порядке невозрастания.

Заметим, что применение определения невозрастающей перестановки, данного для функций, в случае последовательностей с дискретной мерой, когда каждая точка пространства $\mathbb{N}_+$ имеет меру, равную 1 (см. [28]), приводит к тому, что “невозрастающая перестановка” последовательности $f(m) = 1 - \frac{1}{m}$ есть $f^*(k) \equiv 1$. Это говорит о том, что такой путь не ведет к цели и, по-видимому, не может привести в принципе, поскольку множество $\{1 - \frac{1}{m} : m = 1, 2, \dots\}$ нельзя выписать в виде убывающей последовательности.

Учитывая эти обстоятельства, при определении классов $\ell_{g,p,s}^*$ всегда будем предполагать, что при всяком $j = 1, 2, \dots, s$ и всяком фиксированном векторе $(m_1, \dots, m_{j-1}, m_{j+1}, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^{s-1}$ имеет место равенство

$$\lim_{m_j \rightarrow \infty} D_s(m)\hat{f}(m) = 0.$$

Тем самым, классы типа $\ell_s^\infty(D)$, в частности E_s^r , не вписываются в шкалу классов $\ell_{g,p,s}^*(D)$ (вопреки, например, утверждению из [28, с. 138–139]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Некоторые мотивы к привлечению невозрастающих перестановок числовых последовательностей в теории рядов Фурье приведены в [36, с. 191–196].

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $p = \infty$ определим класс $\ell_{g,p,s}^*$ как множество, составленное из всевозможных последовательностей $\{c_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$, для которых невозрастающие перестановки $\{c_{k_1, \dots, k_s}^*\}_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s}$ существуют и конечны величины

$$\|c\|_{g, \infty, s}^* = \sup_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s} g(k_1, \dots, k_s) c_{k_1, \dots, k_s}^*.$$

Для $g(k_1, \dots, k_s) = (k_1 \cdots k_s)^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}}$ при $p = \infty$ полагаем $g(k_1, \dots, k_s) = (k_1 \cdots k_s)^{\frac{1}{\alpha}}$; тогда условие (18) для $\ell_{\alpha, \infty, s}^*$ сведется к условию

$$\|c\|_{\alpha, \infty, s}^* = \sup_{(k_1, \dots, k_s) \in \mathbb{N}_+^s} (k_1 \cdots k_s)^{\frac{1}{\alpha}} c_{k_1, \dots, k_s}^* < \infty,$$

которое совпадает с аналогичным условием из [41].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку в определениях классов функций, данных в этом параграфе, величины

$$D(m_1, \dots, m_s) e^{2\pi i(\eta_1(m_1) + \dots + \eta_s(m_s))},$$

обобщающие производные экспонент $e^{2\pi i(m, x)}$, берутся по модулю, в обозначениях этих классов последовательности $\eta_1(m_1), \dots, \eta_s(m_s)$ указывать не будем, а последовательность $D(m_1, \dots, m_s)$, как об этом сообщалось выше, будем предполагать положительной.

§ 2. Тензорное произведение функционалов

Пусть дано число s , $s = 1, 2, \dots$, и пусть для каждого $j = 1, \dots, s$ на всех функциях тригонометрической системы $\{e^{2\pi i m_j x_j}\}_{m_j \in \mathbb{Z}}$ определен функционал $B^{(j)}$.

Тензорным произведением функционалов $B^{(1)}, \dots, B^{(s)}$ будем называть функционал B , определенный на всех функциях системы $\{e^{2\pi i(m, x)}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ по правилу

$$B(e^{2\pi i(m, x)}) = \prod_{j=1}^s B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}), \quad (19)$$

и обозначать его

$$B = B^{(1)} \otimes \dots \otimes B^{(s)} \equiv \otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)}.$$

Распространим функционал B на множество, составленное из всех функций f , определенных на $[0, 1]^s$, для которых абсолютно сходится числовой ряд $\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) B(e^{2\pi i(m, x)})$, принимая в качестве $B(f)$ значение суммы этого ряда. Ясно, что множества определения функционалов $B^{(j)}$ также могут быть расширены в этом же смысле.

Пусть для каждого $j = 1, \dots, s$ имеется последовательность функционалов $\theta_{\nu_j}^{(j)}$, $\nu_j \in \mathbb{Z}$, $\nu_j \geq \nu_j^{(0)} \geq 0$, определенных на всех функциях системы $\{e^{2\pi i m_j x_j}\}_{m_j \in \mathbb{Z}}$, такая, что для каждой функции этой системы имеет место равенство

$$\sum_{\nu_j \geq \nu_j^{(0)}} \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) = B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}), \quad (20)$$

или, что то же самое, для частичных сумм

$$\alpha_{\mu_j}(e^{2\pi i m_j x_j}) = \sum_{\nu_j^{(0)} \leq \nu_j \leq \mu_j} \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \quad (21)$$

выполнено равенство

$$\lim_{\mu_j \rightarrow +\infty} \alpha_{\mu_j}(e^{2\pi i m_j x_j}) = B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}). \quad (22)$$

Тогда для функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]^s$, в предположении, что все действия законны (например, все встречающиеся ряды сходятся абсолютно), будем иметь

$$\begin{aligned} B(f) &= (B^{(1)} \otimes \dots \otimes B^{(s)})(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \left(\sum_{\nu_j \geq \nu_j^{(0)}} \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \right) \\ &= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}). \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что внутреннюю сумму в правой части последнего равенства в соотношении (23) можно записать и по-иному:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) (\theta_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s})(e^{2\pi i(m, x)}) \\ &= (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)}) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)} \right) = (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)})(f). \end{aligned} \quad (24)$$

Тем самым, для всякого конечного множества Ω , $\nu^{(0)} \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$, в условиях приведенных определений, обозначений и необходимых дополнительных предположений, из (23), (24) получаем равенство (одно из конкретизаций общего равенства (5))

$$B(f) - \Lambda_{\Omega}(f) = \Delta_{\Omega}(f), \quad (25)$$

где $\Lambda_{\Omega}(f) \equiv \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega} (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)})(f)$ – вычислительный агрегат, а

$$\begin{aligned} \Delta_{\Omega}(f) &\equiv \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \end{aligned}$$

– погрешность приближения.

Рассмотрим одну конкретизацию из [23], [24] общего равенства (25) (другая конкретизация, основанная на последовательности Фибоначчи, также дана в [23], [24]).

Положим в (19) функционал $B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j})$ равным 1 или 0 соответственно при $m_j = 0$ или $m_j \neq 0$. Тогда

$$B(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s B^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) = \hat{f}(0) = \int_{[0,1]^s} f(x) dx.$$

Далее, в (20)–(22) выберем $\nu_j^{(0)} \in \mathbb{Z}$, $\nu_j^{(0)} \geq 0$, и $\theta_{\nu_j}^{(j)}$ такими, что частичные суммы

$$\alpha_{\nu_j}(f_j) = \frac{1}{2^{\nu_j}} \sum_{k_j=0}^{2^{\nu_j}-1} f_j\left(\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right) \quad (26)$$

ряда $\sum_{\nu_j^{(0)} \leq \mu_j \leq \nu_j} \theta_{\mu_j}^{(j)}$ есть квадратурные формулы с равными весами, в сумме равными единице, по равномерной сетке с 2^{ν_j} узлами.

Имеют место следующие утверждения (в них, ради упрощения записей, индекс j , указывающий номер переменной, не будем использовать).

ЛЕММА 1. *Имеет место равенство*

$$B(f) - \alpha_{\nu}(f) = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{2^{\nu}-1} f\left(\frac{k}{2^{\nu}}\right) = - \sum_{t \in \mathbb{Z}}^* \hat{f}(t \cdot 2^{\nu}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из равенства (см., например, [3, с. 19, 20])

$$\chi_{\mathbb{Z}N}(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{k}{N} m}.$$

Ясно, что для всякой функции, разлагающейся в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд Фурье, имеет место сходимость квадратурной формулы из (26) к истинному значению интеграла, т. е. выполнение условия (22).

ЛЕММА 2. *При всех $\nu \geq \nu^{(0)}$ выполнено равенство*

$$\theta_{\nu}(f) = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{2^{\nu}-1} (-1)^{(k-1) \operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)})} f\left(\frac{k}{2^{\nu}}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $\nu > \nu^{(0)}$, ибо $\operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)}) = 0$ при $\nu = \nu^{(0)}$, и потому $\theta_{\nu^{(0)}}(f) = \alpha_{\nu^{(0)}}(f)$. Имеем (см. также (7))

$$\begin{aligned} \theta_{\nu}(f) &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{2^{\nu}-1} f\left(\frac{k}{2^{\nu}}\right) - \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\frac{k}{2^{\nu-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{t=0}^{2^{\nu-1}-1} \left[f\left(\frac{2t}{2^{\nu}}\right) + f\left(\frac{2t+1}{2^{\nu}}\right) \right] - \frac{2}{2^{\nu}} \sum_{t=0}^{2^{\nu-1}-1} f\left(\frac{2t}{2^{\nu}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{t=0}^{2^{\nu-1}-1} \left[-f\left(\frac{2t}{2^{\nu}}\right) + f\left(\frac{2t+1}{2^{\nu}}\right) \right] = \frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k=0}^{2^{\nu}-1} (-1)^{k-1} f\left(\frac{k}{2^{\nu}}\right), \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы при $\nu > \nu^{(0)}$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned} & (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)})(f) \\ &= \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} & (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)})(f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \prod_{j=1}^s \frac{1}{2^{\nu_j}} \sum_{k_j=0}^{2^{\nu_j}-1} (-1)^{(k_j-1) \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} e^{2\pi i m_j \frac{k_j}{2^{\nu_j}}} \\ &= \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \\ & \quad \times \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i (\frac{k_1}{2^{\nu_1}} m_1 + \dots + \frac{k_s}{2^{\nu_s}} m_s)} \\ &= \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Положим $A_\nu = \{(2t + \operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)})) \cdot 2^{\nu-1} : t \in \mathbb{Z}\}$, где $\nu \geq \nu^{(0)}$. Справедлива

ЛЕММА 4. *При всех $\nu \geq \nu^{(0)}$ имеем*

$$\begin{aligned} \theta_\nu(e^{2\pi i m x}) &= (-1)^{\operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)})} \chi_{\{(2t + \operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)})) \cdot 2^{\nu-1} : t \in \mathbb{Z}\}}(m) \\ &= (-1)^{\operatorname{sign}(\nu - \nu^{(0)})} \chi_{A_\nu}(m). \end{aligned} \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu = \nu^{(0)}$; тогда

$$\begin{aligned} \theta_{\nu^{(0)}}(e^{2\pi i m x}) &= \alpha_{\nu^{(0)}}(e^{2\pi i m x}) = \frac{1}{2^{\nu^{(0)}}} \sum_{k=0}^{2^{\nu^{(0)}}-1} e^{2\pi i \frac{k}{2^{\nu^{(0)}}} m} = \chi_{\mathbb{Z} \cdot 2^{\nu^{(0)}}}(m) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{2^{\nu^{(0)}}}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{2^{\nu^{(0)}}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Если $\nu > \nu^{(0)}$, то

$$\theta_\nu(e^{2\pi i m x}) = \alpha_\nu(e^{2\pi i m x}) - \alpha_{\nu-1}(e^{2\pi i m x}) = \chi_{\mathbb{Z} \cdot 2 \cdot 2^{\nu-1}}(m) - \chi_{\mathbb{Z} \cdot 2^{\nu-1}}(m).$$

Далее, для всякого $m \in \mathbb{Z}$ выполнены равенства

$$\chi_{\mathbb{Z} \cdot 2^\nu}(m) - \chi_{\mathbb{Z} \cdot 2^{\nu-1}}(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 2t \cdot 2^{\nu-1}, \\ -1, & \text{если } m = (2t+1) \cdot 2^{\nu-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е.

$$\theta_\nu(e^{2\pi imx}) = \begin{cases} -1, & \text{если } m = (2t+1) \cdot 2^{\nu-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В итоге имеем: если $\nu = \nu^{(0)}$, то

$$\theta_{\nu^{(0)}}(e^{2\pi imx}) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = 2^{\nu^{(0)}} t = (2t+0) \cdot 2^{\nu^{(0)}-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $\nu > \nu^{(0)}$, то

$$\theta_\nu(e^{2\pi imx}) = \begin{cases} -1, & \text{если } m = (2t+1) \cdot 2^{\nu-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Значит, при всех $\nu \geq \nu^{(0)}$ справедливо

$$\theta_\nu(e^{2\pi imx}) = \begin{cases} (-1)^{\text{sign}(\nu - \nu^{(0)})}, & \text{если } m = (2t + \text{sign}(\nu - \nu^{(0)})) \cdot 2^{\nu-1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. лемма доказана.

Заметим, что равенство (14) следует из (25) и (27).

Из леммы 4 следует

ЛЕММА 5. *Имеет место равенство*

$$\begin{aligned} (\theta_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{\nu_s})(f) &= (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j - 1) \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \\ &\times \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}((2t_1 + \text{sign}(\nu_1 - \nu_1^{(0)})) \cdot 2^{\nu_1-1}, \dots, (2t_s + \text{sign}(\nu_s - \nu_s^{(0)})) \cdot 2^{\nu_s-1}). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 3.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Начнем исследование с записей квадратурных формул Смоляка и их погрешностей. Пусть $\nu_1^{(0)} + \cdots + \nu_s^{(0)} < q$. Положим

$$\Omega \equiv \Omega_q = \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s : \nu_0^{(0)} + \cdots + \nu_s^{(0)} \leq \nu_1 + \cdots + \nu_s \leq q\}.$$

ЛЕММА 6. *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \Lambda_q &\equiv \Lambda_{\Omega_q} = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega_q} \theta_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{\nu_s} \\ &= \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \cdots + \nu_s = q-l}} \alpha_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\nu_s}. \end{aligned} \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формулу (28) докажем индукцией по s . С учетом равенства

$$\theta_\nu = \alpha_\nu - \text{sign}(\nu - \nu^{(0)})\alpha_{\nu-1}$$

при $s = 2$ имеем $(\nu_1^{(0)} \leq \nu_1 \leq q - \nu_2 \leq q - \nu_2^{(0)})$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 \leq q \\ \nu_1 \geq \nu_1^{(0)}, \nu_2 \geq \nu_2^{(0)}}} \theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \theta_{\nu_2}^{(2)} &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - \nu_2^{(0)}} \sum_{\nu_2 = \nu_2^{(0)}}^{q - \nu_1} \theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \theta_{\nu_2}^{(2)} \\
 &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - \nu_2^{(0)}} \theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \left(\sum_{\nu_2 = \nu_2^{(0)}}^{q - \nu_1} \theta_{\nu_2}^{(2)} \right) = \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - \nu_2^{(0)}} \theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1}^{(2)} \\
 &= \theta_{\nu_1^{(0)}}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1^{(0)}}^{(2)} + \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)} + 1}^{q - \nu_2^{(0)}} \alpha_{\nu_1}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1}^{(2)} - \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)} + 1}^{q - \nu_2^{(0)}} \alpha_{\nu_1 - 1}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1}^{(2)} \\
 &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - \nu_2^{(0)}} \alpha_{\nu_1}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1}^{(2)} - \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)} + 1}^{q - \nu_2^{(0)}} \alpha_{\nu_1 - 1}^{(1)} \otimes \alpha_{q - \nu_1}^{(2)} \\
 &= \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 = q \\ \nu_1 \geq \nu_1^{(0)}, \nu_2 \geq \nu_2^{(0)}}} \alpha_{\nu_1}^{(1)} \otimes \alpha_{\nu_2}^{(2)} - \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 = q - 1 \\ \nu_1 \geq \nu_1^{(0)}, \nu_2 \geq \nu_2^{(0)}}} \alpha_{\nu_1}^{(1)} \otimes \alpha_{\nu_2}^{(2)} \\
 &= \sum_{\substack{q - 1 \leq \nu_1 + \nu_2 \leq q \\ \nu_1 \geq \nu_1^{(0)}, \nu_2 \geq \nu_2^{(0)}}} (-1)^{q - (\nu_1 + \nu_2)} \alpha_{\nu_1} \otimes \alpha_{\nu_2}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, при $s = 2$ и $\nu_0^{(1)} + \nu_0^{(2)} < q$ равенство (28) доказано:

$$\sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 \leq q \\ \nu_1 \geq \nu_1^{(0)}, \nu_2 \geq \nu_2^{(0)}}} \theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \theta_{\nu_2}^{(2)} = \sum_{l=0}^1 (-1)^l \binom{1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \nu_2) \in Z_{\nu^{(0)}}^2 \\ \nu_1 + \nu_2 = q - l}} \alpha_{\nu_1} \otimes \alpha_{\nu_2}.$$

Допустим, что равенство (28) справедливо для s , и докажем его для $s + 1$:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{s+1} &= \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_{s+1} \leq q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s+1}} \theta_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_{s+1}} \\
 &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - (\nu_2^{(0)} + \dots + \nu_{s+1}^{(0)})} \theta_{\nu_1} \otimes \sum_{\substack{\nu_2 + \dots + \nu_{s+1} \leq q - \nu_1 \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2, \dots, s+1}} \theta_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_{s+1}} \\
 &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - (\nu_2^{(0)} + \dots + \nu_{s+1}^{(0)})} \theta_{\nu_1} \otimes \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{\nu_2 + \dots + \nu_{s+1} = (q - \nu_1) - l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2, \dots, s+1}} \alpha_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}} \\
 &= \sum_{\nu_1 = \nu_1^{(0)}}^{q - (\nu_2^{(0)} + \dots + \nu_{s+1}^{(0)})} \alpha_{\nu_1} \otimes \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{\nu_2 + \dots + \nu_{s+1} = (q - \nu_1) - l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2, \dots, s+1}} \alpha_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\nu_1=\nu_1^{(0)}+1}^{q-(\nu_2^{(0)}+\dots+\nu_{s+1}^{(0)})} \alpha_{\nu_1-1} \otimes \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \\
& \times \sum_{\substack{\nu_2+\dots+\nu_{s+1}=(q-(\nu_1-1)-1)-l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2,\dots,s+1}} \alpha_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}} \\
& = \sum_{\nu_1=\nu_1^{(0)}}^{q-(\nu_2^{(0)}+\dots+\nu_{s+1}^{(0)})} \alpha_{\nu_1} \otimes \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{\nu_2+\dots+\nu_{s+1}=(q-\nu_1)-l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2,\dots,s+1}} \alpha_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}} \\
& - \sum_{\nu_1=\nu_1^{(0)}}^{q-(\nu_2^{(0)}+\dots+\nu_{s+1}^{(0)})-1} \alpha_{\nu_1} \otimes \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \\
& \times \sum_{\substack{\nu_2+\dots+\nu_{s+1}=(q-\nu_1-1)-l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=2,\dots,s+1}} \alpha_{\nu_2} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}} \\
& = \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_{s+1}) \in Z_{\nu^{(0)}}^{s+1} \\ \nu_1+\dots+\nu_{s+1}=q-l}} \alpha_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}} \\
& - \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_{s+1}) \in Z_{\nu^{(0)}}^{s+1} \\ \nu_1+\dots+\nu_{s+1}=(q-1)-l}} \alpha_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}}.
\end{aligned}$$

Обозначим

$$T_{q-k} = \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_{s+1}) \in Z_{\nu^{(0)}}^{s+1} \\ \nu_1+\dots+\nu_{s+1}=q-k}} \alpha_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_{s+1}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi_{s+1} &= \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} T_{q-l} - \sum_{l=1}^s (-1)^{l-1} \binom{s-1}{l-1} T_{q-l} \\
&= T_q + \sum_{l=1}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} T_{q-l} - \sum_{l=1}^{s-1} (-1)^{l-1} \binom{s-1}{l-1} T_{q-l} - (-1)^{s-1} T_{q-s} \\
&= T_q + \sum_{l=1}^{s-1} (-1)^l \binom{s}{l} T_{q-l} + (-1)^s T_{q-s} = \sum_{l=0}^s (-1)^l \binom{s}{l} T_{q-l}.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из леммы 6 вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 7. Для $1 \leq k \leq s-1$ выполнено следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega_q} \theta_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s} &= \sum_{l=0}^{s-k-1} (-1)^l \binom{s-k-1}{l} \\ &\times \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q-l}} \theta_{\nu_1} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_k} \otimes \alpha_{\nu_{k+1}} \otimes \dots \otimes \alpha_{\nu_s}. \end{aligned}$$

В итоге справедлива

ЛЕММА 8. При $1 \leq k \leq s-1$ (в силу леммы 7) имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_q(f) &= \sum_{l=0}^{s-k-1} (-1)^l \binom{s-k-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \\ &\times \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^k (k_j-1) \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right). \end{aligned}$$

В частности, при $k = s-1$

$$\Lambda_q(f) = \frac{1}{2^q} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^{s-1} (k_j-1) \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right). \quad (29)$$

При $k = s$ (в силу леммы 3) и при $k = 0$ (в силу леммы 6) соответственно имеем

$$\begin{aligned} \Lambda_q(f) &= \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s \leq q}} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \\ &\times f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\Lambda_q(f) = \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = q-l}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right).$$

Таким образом, получаем $s+1$ записей квадратурной формулы Смоляка $\Lambda_q(f)$.

Теперь изучим функцию $\chi_{A_\nu}(m)$, где $A_\nu = \{(2t + \text{sign}(\nu - \nu^{(0)})) \cdot 2^{\nu-1} : t \in \mathbb{Z}\}$, $\nu \geq \nu^{(0)}$.

Пусть дано целое число $m \neq 0$. Если $m > 0$, то имеет место однозначное представление $m = 2^\mu$, где $\mu \geq 0$ – целое число, или $m = 2^\mu p_1^{\mu_1} \dots p_t^{\mu_t}$, где $\mu_j > 0$ – целые, а $p_j \geq 3$ – простые числа. Поскольку произведение нечетных чисел является нечетным, то $p_1^{\mu_1} \dots p_t^{\mu_t} = 2\tau + 1$, и потому $m = (2\tau + 1) \cdot 2^\mu$, где τ и μ – целые неотрицательные числа. Если $m < 0$ и $m = -(2\tau_1 + 1) \cdot 2^\mu$, то $m = (-2\tau_1 - 1) \cdot 2^\mu = (-2\tau_1 - 2 + 1) \cdot 2^\mu = (2(-\tau_1 - 1) + 1) \cdot 2^\mu = (2\tau + 1) \cdot 2^\mu$, где $\tau = -\tau_1 - 1$.

Таким образом, всякое $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, однозначно представимо в виде $m = (2\tau(m)+1) \cdot 2^{\mu(m)}$, где $\tau(m)$ – целое, а $\mu(m)$ – целое неотрицательное число. Если $m = 0$, то, продолжая это представление, положим $\tau(0) = -\frac{1}{2}$ и $\mu(0) = \nu^{(0)}$, так что $m = 0 = 0 \cdot 2^{\nu^{(0)}} = (2\tau(0) + 1) \cdot 2^{\mu(0)}$.

ЛЕММА 9. Пусть $m = (m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s$. Тогда в обозначениях $m_j \in \mathbb{Z}$, $m_j = (2\tau_j(m) + 1) \cdot 2^{\mu_j(m)}$, и $b_j \geq \nu_j^{(0)} \geq 0$, b_j – целое число, $A_{b_j} = \{(2t_j + \text{sign}(b_j - \nu_j^{(0)})) \cdot 2^{b_j-1} : t_j \in \mathbb{Z}\}$ имеем, что $\chi_{A_{b_j}}(m_j) = 1$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $m_j = 0$ (или, что же самое, $\tau_j(m) = -\frac{1}{2}$ и $\mu_j(m) = \nu_j^{(0)}$), $b_j = \nu_j^{(0)}$, $t_j = 0$;
- 2) $m_j \neq 0$, $b_j = \nu_j^{(0)}$, $t_j = (2\tau_j(m) + 1) \cdot 2^{\mu_j(m) - \nu_j^{(0)}}$;
- 3) $m_j \neq 0$, $b_j = \mu_j(m) + 1$, $t_j = \tau_j(m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливы следующие утверждения.

1°. Пусть $m \neq 0$. Тогда если $0 \leq \mu(m) < \nu^{(0)}$, то $m \notin \bigcup_{\nu \geq \nu^{(0)}} A_\nu$.

Допустим обратное. Пусть $m \in A_{\nu^{(0)}}$; тогда $m = (2\tau(m) + 1) \cdot 2^{\mu(m)} = t \cdot 2^{\nu^{(0)}}$. Однако $\nu^{(0)} - \mu(m) \geq 1$, откуда $2\tau(m) + 1 = t \cdot 2^{\nu^{(0)} - \mu(m)}$. Противоречие.

Пусть теперь существует $\nu > \nu^{(0)}$ такое, что $m \in A_\nu$. Тогда $(2\tau(m) + 1) \times 2^{\mu(m)} = (2t + 1) \cdot 2^{\nu-1}$. Последовательно имеем $\mu(m) < \nu^{(0)} < \nu$, $\nu - \mu(m) \geq 2$, $\nu^{(0)} \leq \nu - 1$, $\mu(m) \leq \nu^{(0)} - 1 \leq \nu - 2$, так что $\nu - \mu(m) - 1 \geq 1$. Тем самым $(2\tau(m) + 1) = (2t + 1) \cdot 2^{\nu - \mu(m) - 1}$, что невозможно.

2°. Если $m \neq 0$ и $\mu(m) \geq \nu^{(0)}$, то $m \in A_{\nu^{(0)}}$ и $m \in A_{\mu(m)+1}$.

На самом деле, во-первых, $m \in A_{\nu^{(0)}}$, ибо $m = (2\tau(m) + 1) \cdot 2^{\mu(m) - \nu^{(0)}} \cdot 2^{\nu^{(0)}} = t \cdot 2^{\nu^{(0)}}$, где $t = t(m) = (2\tau(m) + 1) \cdot 2^{\mu(m) - \nu^{(0)}}$, во-вторых, $m \in A_{\mu(m)+1}$, ибо $m = (2\tau(m) + 1) \cdot 2^{\mu(m)+1-1} = (2t + 1) \cdot 2^{\nu-1}$, где $\nu \equiv \mu(m) + 1$, $t = \tau(m)$.

3°. Если $m = 0$, то $m \in A_{\nu^{(0)}}$.

Действительно, при $t = 0$ и $\nu = \nu^{(0)}$ выполнены равенства $m = 0 = (2t + 0) \times 2^{\nu^{(0)}-1} = t \cdot 2^{\nu^{(0)}} \in A_{\nu^{(0)}}$.

Далее, на основе соглашения $m = 0 \cdot 2^{\nu^{(0)}}$ полагаем, что $m \notin \bigcup_{\nu > \nu^{(0)}} A_\nu$.

Лемма следует из утверждений 1°–3°.

Пусть Ω – конечное множество такое, что $\nu^{(0)} \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$. Тогда для погрешности интегрирования

$$\Delta_\Omega(f) = \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f)$$

имеет место

ЛЕММА 10. Для всякого конечного множества Ω , $\nu^{(0)} \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega(f) = & \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_s): \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1, \dots, \tau_s): \tau_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\frac{1}{2}\}}} \hat{f}((2\tau + 1) \cdot 2^\mu) \\ & \times \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega \\ \text{если } \tau_j = -\frac{1}{2}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \\ \text{если } \tau_j \in \mathbb{Z}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ и } \nu_j = \mu_j + 1}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения (25), лемм 4 и 9 имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\Omega}(f) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(e^{2\pi i m_j x_j}) \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \chi_{A_{\nu_j}}(m_j) \\
 &= \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_s): \text{ целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1, \dots, \tau_s): \tau_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\frac{1}{2}\}}} \hat{f}((2\tau+1) \cdot 2^{\mu}) \\
 &\quad \times \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega \\ \text{если } \tau_j = -\frac{1}{2}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \\ \text{если } \tau_j \in \mathbb{Z}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ и } \nu_j = \mu_j + 1}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть числа p , $1 \leq p \leq \infty$, и s , $s = 1, 2, \dots$, последовательность $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ и положительная последовательность $\{b_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$ таковы, что $\|\{a_m b_m^{-1}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} < +\infty$, где $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 B &\equiv \sup_{\{c_m\}: \|\{c_m b_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p} \leq 1} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m a_m \right| \\
 &= \sup_{\{c_m\}: \|\{c_m b_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p} \leq 1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| = \|\{a_m b_m^{-1}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} \equiv A. \quad (31)
 \end{aligned}$$

При этом супремум в (31) достигается при выборе $(m \in \mathbb{Z}^s)$

$$c_m = \begin{cases} \left(\frac{|a_m|}{\|\{a_m b_m^{-1}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}}} \right)^{\frac{1}{p-1}} b_m^{-p'}, & \text{если } 1 < p < \infty, \\ b_m^{-1}, & \text{если } p = \infty, \end{cases}$$

а если $p = 1$ и $\sup_{m \in \mathbb{Z}^s} b_m^{-1} |a_m| = b_n^{-1} |a_n|$, то при

$$c_m = \begin{cases} b_n^{-1}, & \text{если } m = n, \\ 0, & \text{если } m \neq n. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай $1 < p < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m| b_m |a_m| b_m^{-1} \leq \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m b_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |a_m b_m^{-1}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\
 &\leq \|\{a_m b_m^{-1}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} < +\infty, \quad (32)
 \end{aligned}$$

значит, ряд $\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m a_m$ сходится и

$$\left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m a_m \right| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m|.$$

Отсюда следует первое равенство в (31).

Докажем второе равенство в (31). Из (32) получаем неравенство $B \leq A$. Покажем, что на самом деле имеет место равенство $A = B$. Это следует из цепочки следующих равенств. Числовую последовательность $\{c_m\}$ выберем из условий

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \frac{c_m |a_m|}{A} = 1, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m b_m|^p = 1.$$

Положим

$$\frac{|c_m| |a_m|}{A} = |c_m|^p b_m^p.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{|c_m|^p}{|c_m|} &= \frac{|a_m| b_m^{-p}}{A}, \quad |c_m|^{p-1} = \frac{|a_m| b_m^{-p}}{A}, \quad |c_m| = \left(\frac{|a_m| b_m^{-p}}{A} \right)^{\frac{1}{p-1}}, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m b_m|^p &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} b_m^p \left(\frac{|a_m| b_m^{-p}}{A} \right)^{\frac{p}{p-1}} \equiv k. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{A^{\frac{p}{p-1}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} b_m^{\frac{p-2}{p-1}} |a_m|^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{A^{\frac{p}{p-1}}} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} (b_m^{-1} |a_m|)^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} (b_m^{-1} |a_m|)^{p'}}{A^{p'}} = 1, \end{aligned}$$

поскольку $A = \|\{a_m b_m^{-1}\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}}$. Таким образом, равенства (31) доказаны в случае $1 < p < \infty$.

Пусть теперь $p = 1$; тогда $p' = +\infty$ и искомое равенство (31) записывается в виде

$$\begin{aligned} \sup_{\{c_m\}: \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m b_m| \leq 1} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m a_m \right| &= \sup_{\{c_m\}: \|\{c_m b_m\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^1} \leq 1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| \\ &= \sup_{m \in \mathbb{Z}^s} b_m^{-1} |a_m|. \end{aligned}$$

Также имеем

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| = \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m| b_m |a_m| b_m^{-1} \right| \leq \sup |a_m| b_m^{-1} \equiv A.$$

Пусть $|a_{m(k)}| b_{m(k)}^{-1} \rightarrow A$, $k \rightarrow +\infty$. Положим $c_m = b_{m(k)}^{-1}$ при $m = m(k)$ и $c_m = 0$ для всех остальных m . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m b_m &= c_{m(k)} b_{m(k)} = 1, \\ \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| &= |a_{m(k)}| b_{m(k)}^{-1} \rightarrow A, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение леммы при $p = 1$.

Осталось рассмотреть случай $p = \infty$. Тогда искомое равенство (31) есть

$$\sup_{\{c_m\}: \sup_m |c_m b_m| \leq 1} \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |a_m| b_m^{-1}.$$

Последовательность $\{c_m\}$ необходимо выбрать такой, что

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m a_m| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |c_m b_m| |a_m b_m^{-1}| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |a_m| b_m^{-1} = A,$$

для чего достаточно положить $c_m = b_m^{-1}$, и тогда получим

$$c_m b_m = 1, \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} c_m |a_m| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |a_m| b_m^{-1} = A.$$

Лемма доказана полностью.

§ 4. Квадратурные формулы $\Lambda_\Omega(f)$ для классов $\ell_s^p(D)$ и $\ell_{g,p,s}^*(D)$

Из приведенных определений классов следует общая

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны последовательность $D \equiv D_s: \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ и число $1 \leq p \leq \infty$ такие, что $(p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$

$$\|\{D_s^{-1}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} < +\infty. \quad (33)$$

Тогда для всякого конечного множества Ω , $\nu^{(0)} \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} f: \|\{\hat{f}(m) D_s(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p} & \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) \right| \\ & = \left\| \left\{ D_s^{-1}(m) \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \chi_{A_{\nu_1} \times \dots \times A_{\nu_s}}(m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}^s} \right\|_{\ell_s^{p'}}. \end{aligned} \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что условие (33) обеспечивает абсолютную сходимость ряда Фурье всякой функции $f(x) \in \ell_s^p(D)$, а значит, и корректность постановки задачи приближенного интегрирования:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)| = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}(m)| D_s(m) D_s^{-1}(m) \leq \|f\|_{\ell_s^p(D)} \|\{D_s^{-1}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} < +\infty.$$

Далее, в силу равенства (25) и леммы 4, полагая в лемме 11

$$\begin{aligned} c_m &= \hat{f}(m), \quad b_m = D_s(m), \\ a_m &= \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \chi_{A_{\nu_1} \times \dots \times A_{\nu_s}}(m), \end{aligned}$$

приходим к равенству (34). Теорема доказана.

Аналогично, для классов $\ell_{g,p,s}^*(D)$ имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть даны последовательности $D \equiv D_s: \mathbb{Z}^s \mapsto \mathbb{R}_+$, $g: \mathbb{N}_+^s \mapsto \mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ и число $1 \leq p < \infty$ такие, что

$$\|\{D_s^{-1}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_{g^{-1},p',s}^*} < +\infty.$$

Тогда для всякого конечного множества Ω , $\nu^{(0)} \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s$, и всякой функции $f \in \ell_{g,p,s}^*(D)$ имеет место неравенство

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) \right| \leq \|f\|_{\ell_{g,p,s}^*(D)} \|\{D_s^{-1}(m)\chi_{E(\Omega)}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_{g^{-1},p',s}^*}, \quad (35)$$

где

$$E(\Omega) = \bigcup_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}}^s / \Omega} \bigcup_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \{(2t_1 + \text{sign}(\nu_1 - \nu_1^{(0)})) \cdot 2^{\nu_1-1}, \dots, (2t_s + \text{sign}(\nu_s - \nu_s^{(0)})) \cdot 2^{\nu_s-1}\}. \quad (36)$$

Таким образом, как это следует из соотношений (34) и (35), в случае квадратурных формул $\Lambda_\Omega(f)$ задача сводится к такому выбору последовательности конечных множеств $\{\Omega_l\}$ с числом узлов $N(l)$ в квадратурной формуле $\Lambda_{\Omega_l}(f)$ по данным D_s , g и p , чтобы скорость убывания к нулю соответствующих последовательностей из их правых частей была как можно большей.

В случае квадратурных формул Смоляка имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть даны число $1 \leq p \leq \infty$ и последовательность $D \equiv D_s: \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ такие, что $(p^{-1} + (p')^{-1} = 1)$

$$\|\{D_s^{-1}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^{p'}} < +\infty.$$

Тогда имеют место следующие равенства (где $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)})$ фиксировано, а $q > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)}$ любое):

1) при $p = \infty$

$$\begin{aligned} \sup_{f: \|\{\hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^\infty(D)} \leq 1} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) - \Lambda_q(f) \right| &= \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_s): \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1, \dots, \tau_s): \tau_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\frac{1}{2}\}}} \left| D_s^{-1}((2\tau+1) \cdot 2^\mu) \right. \\ &\times \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s): \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \text{если } \tau_j = -\frac{1}{2}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \\ \text{если } \tau_j \in \mathbb{Z}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ и } \nu_j = \mu_j + 1}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \Big|; \quad (37) \end{aligned}$$

2) при $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \sup_{f: \|\{\hat{f}(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p(D)} \leq 1} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) - \Lambda_q(f) \right| &= \left\{ \sum_{\substack{\mu=(\mu_1, \dots, \mu_s): \text{целое } \mu_j \geq \nu_j^{(0)} \\ \tau=(\tau_1, \dots, \tau_s): \tau_j \in \mathbb{Z} \cup \{-\frac{1}{2}\}}} \left| D_s^{-1}((2\tau+1) \cdot 2^\mu) \right. \right. \\ &\times \sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s): \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, \nu_1 + \dots + \nu_s > q \\ \text{если } \tau_j = -\frac{1}{2}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \\ \text{если } \tau_j \in \mathbb{Z}, \text{ то } \nu_j = \nu_j^{(0)} \text{ и } \nu_j = \mu_j + 1}} (-1)^{\sum_{j=1}^s \text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \Big|^{p'} \Big\}^{\frac{1}{p'}}. \quad (38) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из (34) и леммы 10 при $\Omega = \Omega_q$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При доказательстве равенств (34), (37) и (38) согласно условиям леммы 11 погрешности $\Delta_\Omega(f)$ и $\Delta_{\Omega_q}(f) \equiv \Delta_q(f)$ в (25) и лемме 10 были записаны в виде сумм, в которых приведены подобные члены при $\hat{f}(m)$, что было упущено при доказательстве теорем 2 и 3 из [38], поэтому последние не верны.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В общем случае из представлений (5) и (6) и леммы 11 следуют равенства ($1 \leq p \leq \infty$)

$$\begin{aligned}
 f: \|\{f, \prod_{j=1}^s \varphi_{m_j}^{(j)} D_s(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p} &\leq 1 \left| \left(\otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)} \right) (f) - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega} (\theta_{\nu_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \theta_{\nu_s}^{(s)})(f) \right| \\
 &= \left(\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in M_1 \times \dots \times M_s \equiv M} \left(\left| \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in Z_{\nu^{(0)}(0)}^s \setminus \Omega} \prod_{j=1}^s \theta_{\nu_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)}) \right| D_s^{-1}(m) \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \\
 f: \|\{f, \prod_{j=1}^s \varphi_{m_j}^{(j)} D_s(m)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}\|_{\ell_s^p} &\leq 1 \left| \left(\otimes \prod_{j=1}^s B^{(j)} \right) (f) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}(0)}^s} \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_s=0}^1 \left[\otimes \prod_{j=1}^s (-\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)}))^{\varepsilon_j} \alpha_{\nu_j - \varepsilon_j}^{(j)} \right] (f) \right| \\
 &= \left(\sum_{m=(m_1, \dots, m_s) \in M_1 \times \dots \times M_s \equiv M} \left(\left| \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}(0)}^s \setminus \Omega} \sum_{\varepsilon_1=0}^1 \dots \sum_{\varepsilon_s=0}^1 \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \prod_{j=1}^s (-\text{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)}))^{\varepsilon_j} \alpha_{\nu_j - \varepsilon_j}^{(j)}(\varphi_{m_j}^{(j)}) \right| D_s^{-1}(m) \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.
 \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как это следует из леммы 5, при заданном конечном Ω квадратурная формула $\Lambda_\Omega(f)$ точна для тригонометрических полиномов со спектром, не имеющим пересечений с множеством $E(\Omega)$ из (36). В случае $\Omega = \Omega_q$ это будут полиномы со спектром из гиперболического креста.

Тогда для любых неравенств вида (где B – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_B$)

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) \right| \leq \varepsilon_\Omega \|f\|_B,$$

к которым относятся (34) и (35), величину $\|f\|_B$ можно заменить на наилучшее приближение (см. [32], [28])

$$E_B(f) = \inf_{T \equiv \sum_{m \in \mathbb{Z}^s \setminus E(\Omega)} \hat{T}(m) e^{2\pi i(m, x)}} \|f - T\|_B.$$

Из многочисленных конкретных реализаций классов $\ell_s^p(D)$ и $\ell_{g,p,s}^*(D)$ в теоремах 1–3, вычисление точных порядков в которых иногда может оказаться не совсем тривиальным исследованием, рассмотрим нижеследующие. Доказательствам этих теорем предпошлим две леммы.

ЛЕММА 12. *Справедливы соотношения* ($s = 2, 3, \dots; -\infty < \varkappa < +\infty$)

$$\sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = k \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \frac{1}{(\nu_1 \cdots \nu_s)^\varkappa} \asymp \begin{cases} \frac{1}{k^{s\varkappa - (s-1)}}, & \text{если } \varkappa < 1, \\ \frac{\ln^{s-1} k}{k}, & \text{если } \varkappa = 1, \\ \frac{1}{k^\varkappa}, & \text{если } \varkappa > 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s = 2$. Имеем ($[\cdot]$ – целая часть числа)

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\substack{\nu_1 + \nu_2 = k \\ \nu_1 \geq 1, \nu_2 \geq 1}} \frac{1}{(\nu_1 \nu_2)^\varkappa} = \sum_{\nu_1=1}^{k-1} \frac{1}{(\nu_1(k-\nu_1))^\varkappa} = \sum_{\nu_1=1}^{[k/6]} \frac{1}{(\nu_1(k-\nu_1))^\varkappa} \\ &+ \sum_{\nu_1=[k/6]+1}^{[5k/6]-1} \frac{1}{(\nu_1(k-\nu_1))^\varkappa} + \sum_{\nu_1=[5k/6]}^{k-1} \frac{1}{(\nu_1(k-\nu_1))^\varkappa} = I_1 + I_2 + I_3, \\ I_1 &\asymp I_3 \asymp \begin{cases} \frac{1}{k^\varkappa}, & \text{если } \varkappa > 1, \\ \frac{\ln k}{k}, & \text{если } \varkappa = 1, \\ \frac{1}{k^\varkappa} k^{-\varkappa+1} = \frac{1}{k^{2\varkappa-1}}, & \text{если } \varkappa < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее,

$$I_2 = \sum_{\nu_1=[k/6]+1}^{[5k/6]-1} \frac{1}{(\nu_1(k-\nu_1))^\varkappa} \asymp \frac{1}{k^{2\varkappa}} k = \frac{1}{k^{2\varkappa-1}}.$$

Таким образом, лемма доказана при $s = 2$. Для произвольного $s \geq 3$ доказательство проводится методом математической индукции.

ЛЕММА 13. *Если* $l > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)}$, *то*

$$\sum_{\substack{(\nu_1, \dots, \nu_s): \nu_1 + \dots + \nu_s = l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} 1 \asymp (l - (\nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)}))^{s-1} \underset{\nu^{(0)}}{\asymp} l^{s-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s = 2$ имеем

$$\sum_{\substack{(\nu_1, \nu_2): \nu_1 + \nu_2 = l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, 2}} 1 = \sum_{\substack{\nu_1 = \nu_1^{(0)}, \dots, l - \nu_2^{(0)} \\ \nu_2 = l - \nu_1}} 1 = l - (\nu_1^{(0)} + \nu_2^{(0)}),$$

т. е. лемма в случае $s = 2$ доказана. Применение метода математической индукции завершает доказательство леммы.

Для класса $\text{SW}_2^r(0, 1)^s$ справедлива

ТЕОРЕМА 4. *Имеют место соотношения* ($2r > 1; s = 1, 2, \dots; q > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + s$)

$$\sup_{f \in \text{SW}_2^r(0, 1)^s} \left| \int_{[0, 1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right|_{r, s, \nu^{(0)}} \underset{\nu^{(0)}}{\asymp} \frac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \asymp \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+\frac{1}{2})}}{N^r},$$

где $N = N(q, s) \asymp 2^q q^{s-1}$ – число узлов в квадратурной формуле $\Lambda_q(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $p = 2$ и $D_s(m_1, \dots, m_s) = (\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^r$ в равенстве (38), получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in \text{SW}_2^r(0,1)^s} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| &\leq c(s, r, \nu^{(0)}) \left[\sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_s > q-s \\ \mu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \frac{1}{2^{2r(\mu_1 + \dots + \mu_s)}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\ll \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^{2rk}} \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_s = k \\ \mu_j \geq 0}} 1 \right]^{\frac{1}{2}} \ll \frac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}}. \end{aligned}$$

Теперь получим оценку снизу. Для всякого целого $q \geq \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + s$ определим функцию

$$f_q(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}_q(m) e^{2\pi i(m, x)},$$

где

$$\hat{f}_q(m_1, \dots, m_s) = \begin{cases} \prod_{j=1}^s \frac{1}{((2t_j + 1)^2 \cdot 2^{\nu_j - 1})^r}, & \text{если } m_j = (2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1}, \text{ где} \\ & \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, t_j \geq 1, j = 1, \dots, s, \\ & \nu_1 + \dots + \nu_s = q, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (39)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f_q\|_{\text{SW}_2^r(0,1)^s}^2 &= \sum_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}_q(m_1, \dots, m_s)|^2 (\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^{2r} \\ &= \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q, \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, t_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \prod_{j=1}^s \frac{1}{((2t_j + 1)^2 \cdot 2^{\nu_j - 1})^{2r}} ((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1})^{2r} \\ &= \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j \geq 1} \frac{1}{(2t_j + 1)^{2r}} \underset{r, s, \nu^{(0)}}{\asymp} q^{s-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|f_q\|_{\text{SW}_2^r} \asymp q^{\frac{s-1}{2}}$.

Далее, в силу равенств (25) и (27) имеем

$$\begin{aligned} |\Delta_q(f_q)| &= \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j \geq 1} \frac{1}{(2t_j + 1)^{2r}} \frac{1}{2^{(\nu_1 + \dots + \nu_s - s)r}} \\ &= \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \frac{c(r, s)}{2^{(\nu_1 + \dots + \nu_s)r}} \asymp \frac{1}{2^{qr}} q^{s-1} \underset{r, s, \nu^{(0)}}{\asymp} \frac{q^{\frac{s-1}{2}}}{2^{qr}} \|f_q\|_{\text{SW}_2^r(0,1)^s}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В случае $D_s(m_1, \dots, m_s) = \prod_{j=1}^s \omega(\overline{m}_j)$, где функция $\omega(\delta)$ определена, положительна, непрерывна на $[1, +\infty)$ и неограниченно возрастает при неограниченном увеличении δ , класс $\ell_s^2(D)$ естественно обозначить $\text{SW}_2^{\omega(\delta)}(0, 1)^s$. Тогда в продолжение теоремы 4 имеет место

ТЕОРЕМА 5. *При $\omega(\delta) = \delta^r \log_+^\kappa \delta$, $\delta > 1$, справедливы следующие утверждения:*

а) *если $2r > 1$, $-\infty < \kappa < +\infty$, то*

$$\sup_{f \in \text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta}(0, 1)^s} \left| \int_{[0, 1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \asymp \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+\frac{1}{2})-s\kappa}}{N^r} & \text{при } \kappa < \frac{1}{2}, \\ \frac{(\ln \ln N)^{\frac{s-1}{2}} (\ln N)^{r(s-1)-\frac{1}{2}}}{N^r} & \text{при } \kappa = \frac{1}{2}, \\ \frac{(\ln N)^{r(s-1)-\kappa}}{N^r} & \text{при } \kappa > \frac{1}{2}; \end{cases}$$

б) *если $2r = 1$, $\kappa > \frac{1}{2}$, то*

$$\sup_{f \in \text{SW}_2^{\sqrt{\delta} \log_+^\kappa \delta}(0, 1)^s} \left| \int_{[0, 1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \asymp \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(s-1)-s(\kappa-\frac{1}{2})}}{N^{\frac{1}{2}}} & \text{при } \frac{1}{2} < \kappa < 1, \\ \frac{(\ln \ln N)^{\frac{s-1}{2}} (\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} & \text{при } \kappa = 1, \\ \frac{(\ln N)^{\frac{s-1}{2}-\kappa+\frac{1}{2}}}{N^{\frac{1}{2}}} & \text{при } \kappa > 1. \end{cases}$$

Здесь $q > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + s$ и $N \equiv N(q, s) \asymp 2^q q^{s-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получим оценку сверху. Отметим, что

$$\sum_{t_j=1}^{\infty} \frac{\log_2^{-2\kappa}(2t_j+1) \cdot 2^{\nu_j}}{(2t_j+1)^{2r}} \underset{r, \kappa}{\asymp} \begin{cases} \nu_j^{-2\kappa}, & \text{если } 2r > 1, -\infty < \kappa < +\infty, \\ \nu_j^{-2\kappa+1}, & \text{если } 2r = 1, 2\kappa > 1. \end{cases} \quad (40)$$

Действительно, в случае $2r > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{t_j: (2t_j+1) \leq 2^{\nu_j}} \frac{(\nu_j + \log_2(2t_j+1))^{-2\kappa}}{(2t_j+1)^{2r}} &\underset{r, \kappa}{\asymp} \nu_j^{-2\kappa} \sum_{t_j \geq 1} \frac{1}{(2t_j+1)^{2r}} \underset{r, \kappa}{\asymp} \nu_j^{-2\kappa}, \\ \sum_{t_j: (2t_j+1) \geq 2^{\nu_j}} \frac{\log_2^{-2\kappa}(2t_j+1) \cdot 2^{\nu_j}}{(2t_j+1)^{2r}} &\underset{r, \kappa}{\asymp} \sum_{t_j: (2t_j+1) \geq 2^{\nu_j}} \frac{\log_2^{-2\kappa}(2t_j+1)}{(2t_j+1)^{2r}} \underset{r, \kappa}{\asymp} \frac{\nu_j^{-2\kappa}}{2^{\nu_j(2r-1)}}. \end{aligned}$$

Случай $2r = 1$, $2\kappa > 1$ доказывается аналогично.

Отсюда в силу (38) при $2r > 1$ для всякой функции $f \in \text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta}(0, 1)^s$ имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \\ & \ll \left[\sum_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s > q-s \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}}} \prod_{j=1}^s \frac{\log_2^{-2\kappa}((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j})}{((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j})^{2r}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \ll \left[\sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s > q-s \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}}} \frac{1}{2^{2r(\nu_1 + \dots + \nu_s)}} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j \geq 1} \frac{\log_2^{-2\kappa}(2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j}}{(2t_j + 1)^{2r}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \ll_{s, r, \kappa, \nu^{(0)}} \left[\sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s > q-s \\ \nu_j \geq 1}} \frac{1}{2^{2r(\nu_1 + \dots + \nu_s)}} \prod_{j=1}^s \frac{1}{\nu_j^{2\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь оценку сверху установим в случае $2r > 1$, используя лемму 12. Именно, при $2\kappa < 1$ получаем

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^{2kr}} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = k \\ \nu_j \geq 1}} \frac{1}{(\nu_1 \dots \nu_s)^{2\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{k^{(s-1)-2s\kappa}}{2^{2kr}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \asymp \frac{q^{\frac{s-1}{2}-s\kappa}}{2^{qr}} \asymp \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+\frac{1}{2})-s\kappa}}{N^r}. \end{aligned}$$

Если $2\kappa = 1$, то имеем

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^{2kr}} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = k \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \frac{1}{\nu_1 \dots \nu_s} \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{\ln^{s-1} k}{2^{2kr} k} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \asymp \frac{1}{2^{qr}} \frac{\ln^{\frac{s-1}{2}} q}{q^{\frac{1}{2}}} \asymp \frac{(\ln \ln N)^{\frac{s-1}{2}} (\ln N)^{(s-1)r-\frac{1}{2}}}{N^r}. \end{aligned}$$

Если $2\kappa > 1$, то

$$\left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^{2kr}} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = k \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \frac{1}{(\nu_1 \dots \nu_s)^{2\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}} \asymp \frac{1}{2^{qr}} \frac{1}{q^\kappa} \asymp \frac{(\ln N)^{(s-1)r-\kappa}}{N^r}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_q(f) & \ll \left[\sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s > q-s \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \frac{1}{2^{2r(\nu_1 + \dots + \nu_s)}} \frac{1}{(\nu_1 \dots \nu_s)^{2\kappa}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \ll \begin{cases} \frac{q^{\frac{s-1}{2}-s\kappa}}{2^{qr}}, & \text{если } \kappa < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2^{qr}} \frac{\ln^{\frac{s-1}{2}} q}{q^{\frac{1}{2}}}, & \text{если } \kappa = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2^{qr}} \frac{1}{q^\kappa}, & \text{если } \kappa > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

При условиях $2r = 1$ и $2\kappa > 1$, используя соотношения (40) и применяя лемму 12, получим

$$\sup_{f \in \text{SW}_2^{\sqrt{\delta} \log_+^{\kappa} \delta}} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \ll \left[\sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = k \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} \frac{1}{(\nu_1 \dots \nu_s)^{2\kappa-1}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \asymp \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{q}{2}}} \cdot q^{\frac{s-1}{2} - s(\kappa - \frac{1}{2})}, & \text{если } \frac{1}{2} < \kappa < 1, \\ \frac{1}{2^{\frac{q}{2}}} \frac{\ln \frac{s-1}{2} q}{q^{\frac{1}{2}}}, & \text{если } \kappa = 1, \\ \frac{1}{2^{\frac{q}{2}}} \frac{1}{q^{\kappa - \frac{1}{2}}}, & \text{если } \kappa > 1. \end{cases} \quad (41)$$

Таким образом, оценка сверху в теореме доказана.

Получим оценку снизу. Положим $(q > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + s)$

$$f_q(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}_q(m) e^{2\pi i(m, x)},$$

где

$$\hat{f}_q(m_1, \dots, m_s) = \\ = \begin{cases} \prod_{j=1}^s \frac{\log_2^{-2\kappa}((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1})}{((2t_j + 1)^2 \cdot 2^{\nu_j - 1})^r}, & \begin{aligned} &\text{если } m_j = (2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1}, \\ &\nu_j \geq \nu_j^{(0)}, t_j \geq 1, j = 1, \dots, s, \\ &\nu_1 + \dots + \nu_s = q, \end{aligned} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$\|f_q\|_{\text{SW}_2^{\omega}(0,1)^s}^2 \equiv \sum_{(m_1, \dots, m_s) \in \mathbb{Z}^s} |\hat{f}_q(m_1, \dots, m_s)|^2 \prod_{j=1}^s \omega^2(\overline{m}_j) \\ = \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, t_j \geq 1 \\ j=1, \dots, s}} |\hat{f}_q((2t_1 + 1) \cdot 2^{\nu_1 - 1}, \dots, (2t_s + 1) \cdot 2^{\nu_s - 1})|^2 \\ \times \prod_{j=1}^s [(2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1}]^{2r} \log_2^{-2\kappa}((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1}) \\ = \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j=1}^{\infty} \frac{\log_2^{-2\kappa}((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1})}{(2t_j + 1)^{2r}}, \quad (42)$$

в то время как погрешность квадратурной формулы есть

$$\Delta_q(f_q) \equiv \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \frac{1}{2^{(\nu_1 + \dots + \nu_s - s)r}} \prod_{j=1}^s \sum_{t_j=1}^{\infty} \frac{\log_2^{-2\kappa}((2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j - 1})}{(2t_j + 1)^{2r}}. \quad (43)$$

При $2r > 1$ имеем (см. (40) и (42))

$$\|f_q\|_{\text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta} (0,1)^s} \asymp \begin{cases} q^{\frac{s-1}{2} - s\kappa}, & \text{если } \kappa < \frac{1}{2}, \\ \frac{\ln^{\frac{s-1}{2}} q}{q^{\frac{1}{2}}}, & \text{если } \kappa = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{q^\kappa}, & \text{если } \kappa > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (44)$$

Далее, при $2r > 1$ в силу (43), (40) и (44) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |\Delta_q(f_q)| &\equiv \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \frac{c(r, s)}{2(\nu_1 + \dots + \nu_s)r} \frac{1}{(\nu_1 \dots \nu_s)^{2\kappa}} \\ &\asymp \frac{1}{2^{qr}} \times \begin{cases} q^{s-1-2s\kappa}, & \text{если } 2\kappa < 1, \\ \frac{\ln^{s-1} q}{q}, & \text{если } 2\kappa = 1, \\ \frac{1}{q^{2\kappa}}, & \text{если } 2\kappa > 1, \end{cases} \\ &\asymp \frac{\|f_q\|_{\text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta} (0,1)^s}}{2^{qr}} \times \begin{cases} q^{\frac{s-1}{2} - s\kappa}, & \text{если } \kappa < \frac{1}{2}, \\ \frac{\ln^{\frac{s-1}{2}} q}{q^{\frac{1}{2}}}, & \text{если } \kappa = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{q^\kappa}, & \text{если } \kappa > \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Оценка снизу и, тем самым, соотношения утверждения а) доказаны.

Аналогично, в случае $2r = 1$, $2\kappa > 1$ из (42), (43) и (40) получим оценки снизу, совпадающие с оценками (41) сверху соответствующих погрешностей интегрирования, что в совокупности составляет утверждение б) теоремы. Теорема доказана полностью.

Теперь рассмотрим классы типа U_s . Имеет место

ТЕОРЕМА 6. Пусть дано число $r > 1$, и пусть $\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)})$ – фиксированный целочисленный вектор с неотрицательными компонентами. Тогда для квадратурной формулы ($q > \nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + s$)

$$\Lambda_q(f) \equiv \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q-l \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j=1, \dots, s}} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right)$$

справедливо соотношение

$$\sup_{f \in E_s^r} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right|_{s,r,\nu^{(0)}} \asymp \frac{\ln^{s-1} q}{2^{qr}} \asymp \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка сверху следует из равенства (37): для всякого $f \in E_s^r$ имеем

$$\left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \ll \sum_{\substack{\tau \in \mathbb{Z}^s \\ \tau_j \geq 0}} \sum_{\substack{\mu_1 + \dots + \mu_s > q-s \\ \mu_j \geq \nu_j^{(0)}}} \prod_{j=1}^s \frac{1}{(2\tau_j + 1)^r 2^{\mu_j r}}$$

$$\begin{aligned} & \ll_{s,r,\nu^{(0)}} \sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{1}{2^{kr}} \sum_{\substack{\mu_1+\dots+\mu_s=k \\ \mu_j \geq 0}} 1 \ll \sum_{k=q+1-s}^{\infty} \frac{k^{s-1}}{2^{kr}} \\ & \ll_{s,r,\nu^{(0)}} \frac{\ln^{s-1} q}{2^{qr}} \asymp \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^r}. \end{aligned}$$

Получим оценку снизу. Пусть даны целые положительные числа $\nu_1^{(0)} \geq 0, \dots, \nu_s^{(0)} \geq 0$. Положим

$$f(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}(m) e^{2\pi i(m, x)},$$

где

$$\begin{aligned} \hat{f}(m) &= \hat{f}(m_1, \dots, m_s) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{(\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s)^r}, & \text{если } m_j = (2t_j + 1) \cdot 2^{\nu_j-1}, \ t_j \geq 1, \\ & \nu_j \geq \nu_j^{(0)} + 10, \ j = 1, \dots, s, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда функция $f(x)$ принадлежит классу E_s^r . Далее, в силу равенств (25) и (27) и леммы 13 при всех $q > 2(\nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + 10s)$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| &= \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s > q \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}+10 \\ j=1,\dots,s}} \sum_{\substack{t_1 \geq 1, \dots, t_s \geq 1 \\ (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s}} \prod_{j=1}^s (2t_j + 1)^{-r} 2^{-(\nu_j-1)r} \\ &\asymp_{s,r} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^{kr}} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_s=k \\ \nu_j \geq \nu_j^{(0)}+10 \\ j=1,\dots,s}} 1 \asymp_{s,r} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{(k - (\nu_1^{(0)} + \dots + \nu_s^{(0)} + 10s))^{s-1}}{2^{kr}} \\ &\asymp_{s,r,\nu^{(0)}} \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{k^{s-1}}{2^{kr}} \asymp_{s,r,\nu^{(0)}} \frac{q^{s-1}}{2^{qr}} \asymp_{s,r,\nu^{(0)}} \frac{(\ln N)^{(s-1)(r+1)}}{N^r}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Аналогично доказывается (см. [29]) следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7. Пусть дано число $\tau > 1$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in U_s(-\bar{1}; \bar{1}; \bar{1}; \log_2^{-\tau}(\cdot))} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \\ & \asymp \begin{cases} \frac{(\ln N)^{(3-\tau)s-2}}{N}, & \text{если } r = 1, \ 1 < \tau < 2, \\ \frac{(\ln N)^{s-2} (\ln \ln N)^{s-1}}{N}, & \text{если } r = 1, \ \tau = 2, \\ \frac{(\ln N)^{s-\tau}}{N}, & \text{если } r = 1, \ \tau > 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Такого типа результаты всегда интересны тем, что классы задаются различными параметрами и определяется влияние каждого из них в неутрачиваемых утверждениях.

Теперь перейдем к конкретизации общей теоремы 2. Именно, в определении классов $\ell_{g,p,s}^*(D)$ положим

$$D \equiv D_s(m_1, \dots, m_s) = \prod_{j=1}^s (2\pi m_j)^r, \quad r > 0. \quad (45)$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 8. *Справедливо соотношение*

$$\sup_{f \in \ell_{g,p,s}^*(D)} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \ll \left(\sum_{k_1 \geq 1, \dots, k_{s-1} \geq 1} \sum_{n=q}^{\infty} \times \sum_{2^{n-q} A_q \leq k_s < 2^{n+1-q} A_q} \frac{1}{(k_1 \cdots k_{s-1} \cdot 2^n)^{rp'}} g^{-p'}(k_1, \dots, k_s) \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad (46)$$

где

$$1 < p < \infty, \quad q = 2, 3, \dots, \quad A_q = \sum_{\substack{\nu_1 + \dots + \nu_s = q \\ \nu_j \geq 1, j=1, \dots, s}} 1 \asymp q^{s-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 и выбора (45) доказательство теоремы сводится к оценке величины

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^s (2\pi m_j)^{-r} \chi_{E(\Omega_q)}(m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}^s} \right\|_{\ell_{g^{-1}, p', s}^*}. \quad (47)$$

Очевидно, что с точностью до постоянных множителей, зависящих только от s , квазинорма (47) совпадает с $(\ell_{g^{-1}, p', s}^*)$ -квазинормой последовательности

$$\left\{ \frac{1}{(2^{\nu_1} t_1 \cdots 2^{\nu_s} t_s)^r} \right\}_{\substack{\nu_1 \geq 1, \dots, \nu_s \geq 1 \\ t_1 \geq 1, \dots, t_s \geq 1 \\ \nu_1 + \dots + \nu_s = b, b \geq q}}. \quad (48)$$

При фиксированных $t_1, \dots, t_{s-1}$ положим ($n = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} M_n &\equiv \left\{ (b, t_s) : t_s \geq 1, \frac{1}{2^{r(n+1)}} < \frac{1}{2^{br} t_s^r} \leq \frac{1}{2^{rn}} \right\} \\ &= \{q \leq b \leq n; 2^{n-b} \leq t_s < 2 \cdot 2^{n-b}\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что b принимает $\asymp n - q$ значений, а t принимает $\asymp 2^{n-b}$ значений, при этом каждое t_s встречается в (48) по $A_b \asymp b^{s-1}$ раз. Вычислим количество точек $|M_n|$ множества M_n :

$$|M_n| = \sum_{b=q}^n 2^{n-b} b^{s-1} = 2^n \sum_{b=q}^n \frac{b^{s-1}}{2^b} \asymp 2^{n-q} q^{s-1}.$$

Тем самым, получим $c_{k_s}^{*s} = \frac{1}{2^{nr}}$ при $\sum_{j=1}^n |M_j| \leq k_s < \sum_{j=1}^{n+1} |M_j|$.

Далее,

$$c_{k_1, \dots, k_s}^* = c_{k_1, \dots, k_s}^{*1, \dots, *s} = \frac{1}{k_1^r \dots k_{s-1}^r \cdot 2^{nr}}$$

при $k_1 \geq 1, \dots, k_{s-1} \geq 1$, $2^{n-q} q^{s-1} \leq k_s < 2 \cdot 2^{n-q} q^{s-1}$. Стало быть,

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^s (2\pi m_j)^{-r} \chi_{E(\Omega_q)}(m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}^s} \right\|_{\ell_{g^{-1}, p', s}^*} \asymp \left(\sum_{k_1 \geq 1, \dots, k_{s-1} \geq 1} \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{(k_1 \dots k_{s-1} \cdot 2^n)^{rp'}} g^{-p'}(k_1, \dots, k_s) \right)^{\frac{1}{p'}},$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Переходя к оценке снизу погрешности в теореме 8, ограничимся рассмотрением случая

$$g \equiv g(k_1, \dots, k_s) = \prod_{j=1}^s g(k_j), \quad g(k) = k^\tau \varphi(k), \quad (r + \tau)p' > 1, \quad (49)$$

где $\varphi(k)$ – медленно колеблющаяся неубывающая на $[1, +\infty)$ положительная функция. Тогда

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^s (2\pi m_j)^{-r} \chi_{E(\Omega_q)}(m) \right\}_{m \in \mathbb{Z}^s} \right\|_{\ell_{g^{-1}, p', s}^*} \asymp \left(\prod_{j=1}^{s-1} \sum_{k_j \geq 1} \frac{1}{k_j^{(r+\tau)p'} \varphi^{p'}(k_j)} \right)^{\frac{1}{p'}} \times \left(\sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{2^{nrp'}} \sum_{2^{n-q} A_q \leq k_s < 2^{n+1-q} A_q} \frac{1}{k_s^{\tau p'} \varphi^{p'}(k_s)} \right)^{\frac{1}{p'}} \asymp \frac{A_q^{-\tau + \frac{1}{p'}}}{2^{qr} \varphi(A_q)}.$$

Легко видеть, что при $\tau p > -1$ для функции ($q \geq 1$)

$$f_q(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_s = q} (2^{-qr} A_q^{\tau + \frac{1}{p}} \varphi(A_q))^{-1} e^{2\pi i(2^{\nu_1} x_1 + \dots + 2^{\nu_s} x_s)}$$

выполнено $\|f_q\|_{\ell_{g, p, s}^*(D)} \asymp 1$, так что

$$\Delta_q(f_q) \asymp A_q(2^{-qr} A_q^{\tau + \frac{1}{p}} \varphi(A_q))^{-1},$$

что вместе с оценкой сверху (46) в случае (49) приводит к искомому соотношению

$$\sup_{f \in \ell_{g, p, s}^*(D)} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \Lambda_q(f) \right| \asymp \frac{A_q^{-\tau + \frac{1}{p'}}}{2^{qr} \varphi(A_q)} \asymp \frac{q^{(s-1)(1-(\tau + \frac{1}{p}))}}{2^{qr} \varphi(q^{s-1})}, \quad (50)$$

где

$$\tau + \frac{1}{p} > 0, \quad r > \max \left\{ 0; 1 - \left(\tau + \frac{1}{p} \right) \right\}.$$

При $\varphi(k) \equiv 1$, $\tau = \frac{1}{\alpha'} - \frac{1}{p}$ из (50) получаем соответствующее утверждение из [28] (но при выполнении замечания из § 1 о “невозрастающих перестановках” последовательностей).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Сравнивая полученные в этом параграфе результаты с наилучшими порядками квадратурных формул для указанных классов (см. [21], [22]), убеждаемся в том, что квадратурные формулы $\Lambda_q(f)$ неулучшаемы в степенной шкале, а потому потеря скорости убывания погрешности по сравнению с оптимальной выражается лишь в логарифмических множителях. Однако этого нельзя сказать при увеличении скорости убывания коэффициентов Фурье до показательной. Именно, в двумерном случае для класса $U_2 \equiv U_2(\vec{0}, e^{-1}, \vec{1}; \vec{1})$ оптимальная квадратурная формула из всевозможных квадратурных формул вида $\Lambda_\Omega(f)$, получающихся при конкретизации (25), (26), реализуется при

$$\Omega = \Omega_R \equiv \{(\mathbb{Z}^2 \cap [0, R]^2) \setminus (R, R)\} \quad (51)$$

с числом узлов $N = N_\Omega = 3 \cdot 2^{2R-4}$, где R – произвольный целый положительный параметр. Тем самым, максимальная погрешность $|\Delta_{\Omega_R}(f)|$ по классу U_2 имеет порядок

$$\sup_{f \in U_2} |\Delta_{\Omega_R}(f)| \asymp e^{-\sqrt{\frac{4}{3}}N},$$

в то время как наилучший порядок есть (см. [21])

$$\delta_N \asymp e^{-\sqrt{2}N},$$

т.е. в показательной шкале квадратурные формулы $\Lambda_\Omega(f)$ не точны (см. об этом также [29]).

Действительно, пусть даны целые положительные числа R_1 и R_2 . Тогда всякое множество

$$\Omega \subset ([0, R_1] \times [0, R_2]) \cap Z_0^2$$

представимо в виде $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= ([0, \bar{\nu}_1] \times [0, \bar{\nu}_2]) \cap \Omega \cap Z_0^2, \\ \Omega_2 &= ([0, \bar{\nu}_1] \times [\bar{\nu}_2, \bar{\nu}_2]) \cap \Omega \cap Z_0^2, \quad \Omega_3 = \Omega \setminus [\Omega_1 \cup \Omega_2], \\ Z_0^2 &\equiv \{(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}^2, \nu_1 \geq 0, \nu_2 \geq 0\}, \\ \bar{\nu}_1 &= \max\{\nu_1: (\nu_1, \nu_2) \in \Omega\}, \quad \bar{\nu}_2 = \max\{\nu_2: (\nu_1, \nu_2) \in \Omega\}, \\ \bar{\nu}_1 &= \max\{\nu_1: (\nu_1, \bar{\nu}_2) \in \Omega\}, \quad \bar{\nu}_2 = \max\{\nu_2: (\bar{\nu}_1, \nu_2) \in \Omega\}, \end{aligned}$$

и задача состоит в нахождении $\bar{\nu}_1 \leq \bar{\nu}_1 \leq R_1$, $\bar{\nu}_2 \leq \bar{\nu}_2 \leq R_2$ и Ω_3 таких, чтобы соответствующая величина $\sup_{f \in U_2(\vec{0}, e^{-1}, \vec{1}, \vec{1})} |\Delta_\Omega(f)|$ была по порядку наименьшей.

Рассмотрим случай $\Omega_3 = \emptyset$ и вычислим число узлов N_Ω в квадратурной формуле (25), (26), соответствующей выбору Ω из (51):

$$\Lambda_\Omega(f) = \Lambda_{\Omega_1}(f) + \Lambda_{\Omega_2}(f).$$

Заметим, что узлы $\frac{k}{2^\nu}$, $k = 1, \dots, 2^\nu$, $0 \leq \nu \leq B$, представимы в виде

$$\frac{k}{2^\nu} = \frac{k \cdot 2^{B-\nu}}{2^B} = \frac{l}{2^B},$$

где $1 \leq l \leq 2^B$, а их число равно 2^B .

Далее, если $1 \leq \nu \leq \mu$, то количество новых узлов вида $\frac{l}{2^\mu}$ среди имеющихся узлов вида $\frac{k}{2^\nu}$ равно $2^\mu - 2^\nu$. Поэтому число узлов в квадратурной формуле $\Lambda_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$ есть

$$N_\Omega = 2^{\bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2} + 2^{\bar{\nu}_1} (2^{\bar{\nu}_2} - 2^{\nu_2}).$$

Теперь оценим погрешность:

$$\int_{[0,1]^2} f(x) dx - \Lambda_\Omega(f) \equiv \Delta_\Omega(f) = \sum_{Z_0^2 \setminus \Omega} b_{\nu_1, \nu_2}(f), \quad (52)$$

где

$$b_{\nu_1, \nu_2}(f) = (-1)^{\nu_1 + \nu_2} \sum_{(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}((2t_1 + \text{sign } \nu_1) \cdot 2^{\nu_1 - 1}, (2t_2 + \text{sign } \nu_2) \cdot 2^{\nu_2 - 1}).$$

Для всякой функции $f(x_1, x_2) \in U_2 \equiv U_2(\vec{0}, \vec{e}^{-1}, \vec{1}; \vec{1})$ имеем $|\hat{f}(m_1, m_2)| \leq e^{-(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)}$, так что

$$|b_{0, \nu_2}(f)| \ll e^{-2^{\nu_2 - 1}}, \quad |b_{\nu_1, 0}(f)| \ll e^{-2^{\nu_1 - 1}}, \quad |b_{\nu_1, \nu_2}(f)| \ll e^{-2^{\nu_1 - 1}} e^{-2^{\nu_2 - 1}}$$

для каждой функции $f \in U_2$ и

$$b_{0, \nu_2}(f_0) \asymp e^{-2^{\nu_2 - 1}}, \quad b_{\nu_1, 0}(f_0) \asymp e^{-2^{\nu_1 - 1}}, \quad b_{\nu_1, \nu_2}(f_0) \asymp e^{-2^{\nu_1 - 1}} e^{-2^{\nu_2 - 1}}$$

для функции

$$f_0(x_1, x_2) = \sum_{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2} e^{-(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)} e^{2\pi i(m_1 x_1 + m_2 x_2)}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sup_{f \in U_2} |\Delta_I(f)| &= \sup_{f \in U_2} \left| \sum_{\nu_1 > \bar{\nu}_1} \sum_{\nu_2 > \bar{\nu}_2} b_{\nu_1, \nu_2}(f) \right| \asymp e^{-(2^{\bar{\nu}_1} + 2^{\bar{\nu}_2})}, \\ \sup_{f \in U_2} |\Delta_{II}(f)| &= \sup_{f \in U_2} \left| \sum_{\nu_1 > \bar{\nu}_1} \sum_{0 \leq \nu_2 \leq \bar{\nu}_2} b_{\nu_1, \nu_2}(f) \right| \asymp e^{-2^{\bar{\nu}_1}}, \\ \sup_{f \in U_2} |\Delta_{III}(f)| &= \sup_{f \in U_2} \left| \sum_{0 \leq \nu_1 \leq \bar{\nu}_1} \sum_{\nu_2 > \bar{\nu}_2} b_{\nu_1, \nu_2}(f) \right| \asymp e^{-2^{\bar{\nu}_2}}. \end{aligned}$$

Итак, полагая

$$a = \bar{\nu}_1, \quad b = \bar{\nu}_2, \quad \bar{\nu}_1 = a - k, \quad \bar{\nu}_2 = b - l, \quad A = \min\{2^a; 2^b; 2^{a-k} + 2^{b-l}\},$$

будем иметь

$$\sup_{f \in U_2} |\Delta_\Omega(f)| \asymp e^{-A}, \quad N(\Omega) = 2^{a+b-l} + 2^{a-k} (2^b - 2^{b-l}).$$

При заданных $k, k = 0, 1, \dots, a$, и $l, l = 0, 1, \dots, b$, положим $c_{k,l} \equiv c_{k,l}^{(a,b)} = \frac{A^2}{N}$ и покажем, что во всех случаях

$$c_{k,l} \leq \frac{4}{3}, \quad (53)$$

при этом равенство достигается при $A = 2^a = 2^b = 2^{a-k} + 2^{b-l}$. Рассмотрим этот случай, т.е. когда $a = b$, $k = l = 1$. Имеем

$$A = 2^a, \quad N = 2^{2a-1} + 2^{a-1}(2^a - 2^{a-1}) = 2^{2a} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 2^{2a} \cdot \frac{3}{4},$$

откуда получаем

$$c_{1,1}^{(a,a)} = \frac{4}{3}.$$

Далее, рассматривая случаи:

- 1) $a < b$, $a - k \geq b - l$, $2^{a-k} + 2^{b-l} \leq 2^a$,
- 2) $a < b$, $a - k \geq b - l$, $2^{a-k} + 2^{b-l} > 2^a$,
- 3) $a < b$, $a - k < b - l$, $2^{b-l} < 2^a$ (и тогда $2^{a-k} + 2^{b-l} \leq 2^a$),
- 4) $a < b$, $a - k < b - l$, $2^{b-l} \geq 2^a$ (и тогда $2^{a-k} + 2^{b-l} > 2^a$),
- 5) $a = b$, $2^{a-k} + 2^{a-l} < 2^a$,
- 6) $a = b$, $2^{a-k} + 2^{a-l} \geq 2^a$,

убеждаемся в том, что во всех этих случаях имеет место неравенство (53).

Так, в случае 1) имеем $a - k < a$, откуда $k \geq 1$. Стало быть,

$$c_{k,l} = \frac{(2^{a-k} + 2^{b-l})^2}{2^{b+(a-k)} + 2^{b-l}(2^a - 2^{a-k})} \leq \frac{(2 \cdot 2^{a-k})^2}{2^{b+(a-k)}} = \frac{4}{2^{k+(b-a)}} \leq 1.$$

Итак, при $\Omega_3 = \emptyset$ наименьшая погрешность в (52) достигается в случае, когда

$$R_1 = R_2 = R, \quad \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = R, \quad \bar{\nu}_1 = \bar{\nu}_2 = R - 1.$$

И наконец, те же рассуждения приводят к выводу, что любой другой случай Ω не приводит к уменьшению (в смысле порядка) соотношения

$$\sup_{f \in U_2} \left| \int_{[0,1]^s} f(x) - \Lambda_{\Omega_R}(f) \right| \asymp e^{-\sqrt{\frac{4}{3} N \Omega_R}},$$

где Ω_R определено в (51).

§ 5. Оценки погрешностей квадратурных формул по неточной информации для классов $\ell_s^p(D)$ и $\ell_{g,p,s}^*(D)$

Простое неравенство

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{j=1}^N c_j z_j \right| \leq \left| \int_{\Omega} f(x) dx - \sum_{j=1}^N c_j f(t_j) \right| + \sum_{j=1}^N |c_j| |f(t_j) - z_j|$$

позволяет сделать вывод принципиального характера, который заключается в том, что всякая квадратурная формула и всякая оценка сверху ее погрешности δ_N несут в себе вычислительный ресурс, позволяющий находить значение функции $f(t_j)$ в узлах квадратурной формулы с ошибкой до величины

$$\varepsilon_j^{(N)} = \delta_N \left(\sum_{k=1}^N |c_k| \right)^{-1},$$

увеличивая при этом оценку δ_N не более чем в два раза. Тем самым, указываются границы точности вычисления значений функции в квадратурной формуле, которые практически не ухудшают порядок точности вычисления интеграла. Это важно, поскольку при компьютерной реализации алгоритмов вычисления всегда проводятся с конечным числом знаков. Вместе с тем, излишняя точность вычисления значений f в узлах квадратурной формулы приводит лишь к увеличению необходимого объема памяти и количества арифметических операций, никак не улучшая порядка точности квадратурной формулы (см. также работу [42] и имеющуюся в ней библиографию).

Справедлива

ТЕОРЕМА 9. При $\omega(\delta) = \delta^r \log_+^\kappa \delta$, $\delta > 1$, $q = 2, 3, \dots$, $N \equiv N(q, s) \asymp 2^q q^{s-1}$ имеем:

а) если $2r > 1$, $-\infty < \kappa < +\infty$, то

$$\sup \left\{ \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_s = q-l} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} z_{k_1, \dots, k_s}^{(\nu_1, \dots, \nu_s)} \right| : \right. \\ \left. f \in \text{SW}_2^{\delta^r \log_+^\kappa \delta}(0, 1)^s, \left| f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) - z_{k_1, \dots, k_s}^{(\nu_1, \dots, \nu_s)} \right| \leq d_{\kappa, r, s} (\ln N)^{-(s-1)} N^{-r} \psi_\kappa(N) \right\} \\ \asymp N^{-r} \psi_\kappa(N);$$

б) если $2r = 1$, $\kappa > \frac{1}{2}$, то

$$\sup \left\{ \left| \int_{[0,1]^s} f(x) dx - \sum_{l=0}^{s-1} (-1)^l \binom{s-1}{l} \frac{1}{2^{q-l}} \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_s = q-l} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \dots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} z_{k_1, \dots, k_s}^{(\nu_1, \dots, \nu_s)} \right| : \right. \\ \left. f \in \text{SW}_2^{\sqrt{\delta} \log_+^\kappa \delta}(0, 1)^s, \left| f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right) - z_{k_1, \dots, k_s}^{(\nu_1, \dots, \nu_s)} \right| \leq d'_{\kappa, s} (\ln N)^{-(s-1)} N^{-\frac{1}{2}} g_\kappa(N) \right\} \\ \asymp N^{-\frac{1}{2}} g_\kappa(N),$$

где $\psi_\kappa(N)$ и $g_\kappa(N)$ определены во введении.

§ 6. Тензорные произведения функционалов относительно систем Чебышёва

Определенный выше метод тензорных произведений может быть применен не только к тригонометрической системе, но и к другим ортогональным системам функций. Так, в случае системы Чебышёва $\{\prod_{j=1}^s \cos(m_j) \arccos(x_j)\}_{m \in \mathbb{Z}^s}$, ортогональной на сегменте $[-1, 1]^s$ с весом $\prod_{j=1}^s (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}}$ (см., например, [43]), из общего равенства (5) следует

ТЕОРЕМА 10. Для всякого конечного множества Ω и вектора

$$\nu^{(0)} = (\nu_1^{(0)}, \dots, \nu_s^{(0)}) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s \equiv \{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \mathbb{Z}^s : \nu_j \geq \nu_j^{(0)}, j = 1, \dots, s\}$$

имеет место равенство

$$\begin{aligned}
 & \int_{[-1,1]^s} f(x_1, \dots, x_s) \frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}} \cdots \frac{dx_s}{\sqrt{1-x_s^2}} - \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \in \Omega \subset Z_{\nu^{(0)}}^s} \frac{1}{2^{\nu_1 + \dots + \nu_s}} \\
 & \times \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} (-1)^{\sum_{j=1}^s (k_j-1) \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} f\left(\cos \frac{2\pi k_1}{2^{\nu_1}}, \dots, \cos \frac{2\pi k_s}{2^{\nu_s}}\right) \\
 & = \sum_{(\nu_1, \dots, \nu_s) \subset Z_{\nu^{(0)}}^s \setminus \Omega} (-1)^{\sum_{j=1}^s \operatorname{sign}(\nu_j - \nu_j^{(0)})} \\
 & \times \sum_{(t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{Z}^s} \hat{f}_{\text{Tc}}((2t_1 + \operatorname{sign}(\nu_1 - \nu_1^{(0)})) \cdot 2^{\nu_1-1}, \dots, \\
 & \dots, (2t_s + \operatorname{sign}(\nu_s - \nu_s^{(0)})) \cdot 2^{\nu_s-1}),
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{f}_{\text{Tc}}(m) = \frac{1}{\pi^s} \int_{[-1,1]^s} f(x_1, \dots, x_s) \prod_{j=1}^s (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}} \cos(m_j) \arccos(x_j) dx_1 \dots dx_s$$

– коэффициенты Фурье–Чебышёва интегрируемой с весом $\prod_{j=1}^s (1-x_j^2)^{-\frac{1}{2}}$ функции $f(x)$.

Отсюда вытекают оценки погрешностей квадратурных формул типа Смоляка для различных классов функций, определяемых посредством той или иной скорости убывания коэффициентов Фурье–Чебышёва.

Список литературы

1. С. М. Никольский, *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1988.
2. С. Л. Соболев, *Введение в теорию кубатурных формул*, Наука, М., 1974; англ. пер.: S. L. Sobolev, *Cubature formulas and modern analysis: An introduction*, Gordon and Breach, Montreux, 1992.
3. Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, Физматгиз, М., 1963.
4. L. K. Hua, Y. Wang, *Applications of number theory to numerical analysis*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1981.
5. E. Hlawka, F. Firneis, P. Zinterhof, *Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Mathematik*, Schriftenreihe der Österreich. Comput. Ges., **12**, Oldenbourg-Verlag, München, 1981.
6. Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер, *Равномерное распределение последовательностей*, Наука, М., 1985; пер. с англ.: L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley, New York–London–Sydney, 1974.
7. Н. М. Коробов, *Теоретико-числовые методы в приближенном анализе*, МЦНМО, М., 2004.
8. Н. С. Бахвалов, “О приближенном вычислении кратных интегралов”, *Вестн. МГУ. Сер. матем., мех.*, 1959, № 4, 3–18.

9. В. Н. Темляков, “Квадратурные формулы и восстановление по значениям в узлах теоретико-числовых сеток для классов функций малой гладкости”, *УМН*, **40**:4 (1985), 203–204; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Quadrature formulae and recovery of number-theoretical nets from nodal values for classes of functions with small degree of smoothness”, *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 223–224.
10. В. Н. Темляков, “О восстановлении периодических функций нескольких переменных по значениям в узлах теоретико-числовых сеток”, *Analysis Math.*, **12**:4 (1986), 287–305.
11. С. М. Воронин, Н. Темиргалиев, “О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел”, *Матем. заметки*, **46**:2 (1989), 34–41; англ. пер.: S. M. Voronin, N. Temirgaliev, “Quadrature formulas associated with divisors of the field of Gaussian numbers”, *Math. Notes*, **46**:2 (1989), 597–602.
12. Н. Темиргалиев, “Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных”, *Матем. сб.*, **181**:4 (1990), 490–505; англ. пер.: N. Temirgaliev, “Application of divisor theory to the numerical integration of periodic functions of several variables”, *Math. USSR-Sb.*, **69**:2 (1991), 527–542.
13. С. М. Воронин, “О квадратурных формулах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:5 (1994), 189–194; англ. пер.: S. M. Voronin, “On quadrature formulas”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:2 (1995), 417–422.
14. С. М. Воронин, *Избранные труды: Математика*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2006.
15. Н. Темиргалиев, “Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье”, *Вестн. Евраз. ун-та*, 1997, № 3, 90–144.
16. Н. Темиргалиев, Е. А. Баилов, А. Ж. Жубанышева, “Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных”, *Докл. РАН*, **416**:2 (2007), 169–173; англ. пер.: N. Temirgaliev, E. A. Bailov, A. Zh. Zhubanisheva, “General algorithm for the numerical integration of periodic functions of several variables”, *Dokl. Math.*, **76**:2 (2007), 681–685.
17. М. М. Скриганов, “О решетках в полях алгебраических чисел”, *Докл. АН СССР*, **306**:3 (1989), 553–555; англ. пер.: M. M. Skriganov, “Lattice in algebraic number fields”, *Soviet Math. Dokl.*, **39**:3 (1989), 538–540.
18. К. К. Фролов, “Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций”, *Докл. АН СССР*, **231**:4 (1976), 818–821; англ. пер. К. К. Frolov, “Upper bounds for the errors of quadrature formulas on classes of functions”, *Soviet Math. Dokl.*, **17** (1976), 1665–1669.
19. V. N. Temlyakov, “Cubature formulas, discrepancy, and nonlinear approximation”, *J. Complexity*, **19**:3 (2003), 352–391.
20. К. Ф. Рот, “Ограничения для регулярности”, *Математика: границы и перспективы*, Фазис, М., 2005, 375–394; пер. с англ.: K. F. Roth, “Limitations to regularity”, *Mathematics: frontiers and perspectives*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 235–250.
21. И. Ф. Шарыгин, “Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций”, *ЖВМ и МФ*, **3** (1963), 370–376; англ. пер.: I. F. Sharygin, “A lower estimate for the error of quadrature formulae for certain classes of functions”, *U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys.*, **3**:2 (1963), 489–497.
22. Н. С. Бахвалов, “Оценки снизу асимптотических характеристик функций с доминирующей смешанной производной”, *Матем. заметки*, **12**:6 (1972), 655–664; англ. пер.: N. S. Bakhvalov, “A lower bound for the asymptotic characteristics of classes of functions with dominating mixed derivative”, *Math. Notes*, **12**:6 (1972), 833–838.

23. С. А. Смоляк, “Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций”, *Докл. АН СССР*, **148**:5 (1963), 1042–1045.
24. С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.
25. S. H. Paskov, “Average case complexity of multivariate integration for smooth functions”, *J. Complexity*, **9**:2 (1993), 291–312.
26. G. W. Wasilkowski, H. Wozniakowski, “Explicit cost bounds of algorithms for multivariate tensor product problems”, *J. Complexity*, **11**:1 (1995), 1–56.
27. Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова, “О приближенном вычислении интегралов для функций из пространств $W_p^\alpha[0, 1]^n$ ”, *УМН*, **55**:6 (2000), 153–154; англ. пер.: E. D. Nursultanov, N. T. Tleukhanova, “Approximate computation of integrals for functions in $W_p^\alpha[0, 1]^n$ ”, *Russian Math. Surveys*, **55**:6 (2000), 1165–1167.
28. Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова, “Квадратурные формулы для классов функций малой гладкости”, *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 133–160; англ. пер.: E. D. Nursultanov, N. T. Tleukhanova, “Quadrature formulae for classes of functions of low smoothness”, *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1559–1584.
29. Н. Темиргалиев, “Классы $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и квадратурные формулы”, *Докл. РАН*, **393**:5 (2003), 605–608; англ. пер.: N. Temirgaliev, “Classes $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ and quadrature formulas”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **68**:3 (2003), 414–417.
30. Н. Темиргалиев, “Классы $U_s(\beta, \theta, \alpha; \psi)$ и квадратурные формулы”, *Материалы Междунар. симпоз. “Ряды Фурье и их приложения”* (27–30 мая 2002 г.), Ростов-на-Дону, 2002.
31. Н. Темиргалиев, “Тензорные произведения функционалов и их применения к задачам восстановления”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, 2003, № 4, 67–73.
32. В. Н. Темляков, “Приближенное восстановление периодических функций нескольких переменных”, *Матем. сб.*, **128**(170):2(10) (1985), 256–268; англ. пер.: V. N. Temlyakov, “Approximate recovery of periodic functions of several variables”, *Math. USSR-Sb.*, **56**:1 (1987), 249–261.
33. Г. Эдвардс, *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел*, Мир, М., 1980; пер. с англ.: H. M. Edwards, *Fermat’s last theorem. A genetic introduction to algebraic number theory*, Grad. Texts in Math., **50**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1977.
34. К. И. Осolkov, “Inequalities of the “large sieve” type and applications to problems of trigonometric approximation”, *Anal. Math.*, **12**:2 (1986), 143–166.
35. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1949; англ. пер.: I. P. Natanson, *Constructive function theory*, vols. I–III, Frederick Ungar Publ., New York, 1964–1965.
36. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
37. П. Л. Ульянов, “О классах бесконечно дифференцируемых функций”, *Матем. сб.*, **181**:5 (1990), 589–609; англ. пер.: P. L. Ulyanov, “On classes of infinitely differentiable functions”, *Math. USSR-Sb.*, **70**:1 (1991), 11–30.
38. Е. Д. Нурсултанов, Н. Т. Тлеуханова, “О некоторых задачах теории приближений”, Алматы, *Матем. журн.*, **6**:4(22) (2006), 86–95.
39. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il’in, S. M. Nikol’skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, vol. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto–London, 1979.
40. A. P. Blozinski, “Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 149–167.

41. С. В. Бочкарев, “Оценки коэффициентов Фурье функций из пространств Лоренца”, *Докл. РАН*, **360**:6 (1998), 730–733; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “Estimation of the Fourier coefficients of functions from Lorentz spaces”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **57**:3 (1998), 454–457.
42. Н. Темиргалиев, “О задаче восстановления по неточной информации”, *Вестн. Евраз. нац. ун-та*, 2004, № 1, 202–209.
43. С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва*, Наука, М., 1983; пер. с польск.: S. Paszkowski, *Zastosowania numeryczne wielomianów i szeregów Czebyszewa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1975.

Н. ТЕМИРГАЛИЕВ (N. TEMIRGALIEV)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва
E-mail: ntmath@mail.ru

Поступило в редакцию
11.03.2005
05.04.2008

С. С. КУДАЙБЕРГЕНОВ (S. S. KUDAIBERGENOV)
Южно-Казахстанский государственный университет
им. М. О. Ауезова
E-mail: ainash59@mail.ru

А. А. ШОМАНОВА (A. A. SHOMANOVA)
Евразийский национальный университет
им. Л. Н. Гумилёва
E-mail: anar93.71@mail.ru