Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Геометрические реализации высших порядков Брюа и M -морсификации, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 6, 91–100

DOI: <https://doi.org/10.4213/im96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 03:57:47

УДК 513.5

Г. Г. Ильята

Геометрические реализации высших порядков Брюа и M -морсификации

Высшие порядки Брюа были введены Ю. И. Маниным и В. В. Шехтманом при изучении многомерных обобщений уравнения Янга–Бакстера. В статье представлена задача теории вещественных особенностей, которая обобщает исчисление змей В. И. Арнольда (кодирование связных компонент пространства очень хороших M -морсификаций особенности A_n) и в которой роль updown-перестановок играют их высшие аналоги – специального вида элементы высших порядков Брюа.

Библиография: 21 наименование.

Обычное в теории особенностей условие невырожденности морсификации – критические значения различны – можно заменить другим, т.е. рассмотреть в пространстве параметров версальной деформации другую гиперповерхность в качестве дискриминанта. Основное содержание статьи составляет рассмотрение обобщенного страта Максвелла особенности A_n . Морсификациями особенности A_n являются полиномы от одной переменной степени $n + 1$, и условие, что полином является общим (критические значения полинома различны), можно сформулировать следующим образом: никакие два экстремума графика морсификации не лежат на графике полинома степени 0, т.е. на графике константы. Наше обобщение (k -общие полиномы от одной переменной) состоит в рассмотрении следующего условия невырожденности морсификации: любое подмножество из $k + 1$ элемента множества экстремумов графика морсификации не лежит на графике полинома степени $k - 1$ (аналогично можно определить и более общий дискриминант, рассмотрев вместо графиков полиномов степени $k - 1$ какое-либо другое k -мерное семейство кривых). В вещественном случае задача изучения k -страта Максвелла особенности A_n обобщает исчисление змей В. И. Арнольда (кодирование связных компонент пространства очень хороших M -морсификаций особенности A_n) [2], [9].

Морсификация особенности называется *максимальной* (или *M -морсификацией*), если число вещественных критических точек, родившихся из исходной вырожденной критической точки, максимально (равно кратности особенности). M -морсификация называется *очень хорошей*, если все ее критические значения различны [9]. Связные компоненты пространства очень хороших M -морсификаций особенности A_n перечисляются updown-перестановками. В статье показано, что для k -вырождения роль updown-перестановок играют специального вида элементы высших порядков Брюа – обобщений симметрической группы, введенных Ю. И. Маниным и В. В. Шехтманом при изучении многомерного уравнения Янга–Бакстера [6].

Основные результаты теории M -морсификаций особенности A_n состоят в рассмотрении двух взаимно однозначных отображений: набор связных компонент пространства очень хороших M -морсификаций отображается на множество cr-down -перестановок и пространство M -морсификаций гомеоморфно отображается на конус Спрингера A_{n-1} [9]. В статье строятся высшие аналоги этих отображений, что, в частности, позволяет определить высшие аналоги последовательности чисел Бернулли–Эйлера [2]. Также определяется высший аналог отображения Ляшко–Лойенги [1]. Статья является расширенным вариантом работы [5].

Наряду с изучением k -вырождения M -морсификаций (вещественных объектов) возникает аналогичная задача над полем комплексных чисел. Ниже мы покажем, что пространство k -общих наборов точек над $\mathbb{C}$ (которыми для k -общих полиномов будут наборы точек экстремума на графике полинома) является тотальным пространством расслоения, слоем которого является дополнение к дискриминантной конфигурации гиперплоскостей Манина–Шехтмана, а базой – дополнение к конфигурации группы кос Артина. Выписывание точной гомотопической последовательности этого расслоения дает следующий факт: пространство k -общих наборов точек над $\mathbb{C}$ является $K(\pi, 1)$ -пространством, если и только если $K(\pi, 1)$ -пространством является дополнение к дискриминантной конфигурации гиперплоскостей Манина–Шехтмана.

Опишем общую схему (назовем ее *схемой А*) реализации высших порядков Брюа, частные случаи которой представлены в статье. Пусть даны множество B и отображение из множества k -элементных подмножеств из B в линейно упорядоченное множество C (в рассмотренных ниже реализациях $B = C = \mathbb{R}$). Тогда при дополнительных условиях на вырождения упорядоченное n -элементное ($k \leq n$) подмножество из B задает линейный порядок на $C(n, k)$ – множестве k -элементных подмножеств из $\{1, 2, \dots, n\}$. Действительно, k -элементные подмножества упорядоченного n -элементного множества взаимно однозначно соответствуют элементам $C(n, k)$. Высшие порядки Брюа $B(n, k)$ являются подмножествами в множестве линейных порядков на $C(n, k)$, профакторизованными по некоторому отношению эквивалентности.

Приведем пример. $B(n, 1)$ совпадает с множеством перестановок чисел $1, \dots, n$, иначе говоря, с множеством всех линейных порядков на $C(n, 1) = \{1, \dots, n\}$. Рассмотрим множество из n точек в $\mathbb{R}^2(x, y)$, у которых все координаты x и все координаты y различны (условие невырожденности). Точки упорядочены по величине координаты x и по величине координаты y , что дает перестановку из $B(n, 1)$.

Условие k -общности полинома является условием на набор точек экстремума его графика. Поэтому можно рассмотреть просто k -общие наборы точек, не обязательно являющиеся экстремумами графика некоторого полинома. Ниже описана реализация согласно схеме А элементов высших порядков Брюа с помощью конфигураций графиков полиномов степени $k - 1$, строящихся по k -общим наборам точек в $\mathbb{R}^2$. В [6], [7] Ю. И. Манин и В. В. Шехтман описали реализацию элементов $B(n, k)$ с помощью конфигураций n гиперплоскостей в $\mathbb{R}^k$. Для $k = 2$ эти конструкции двойственны – конфигурация n прямых в $\mathbb{R}^2$ двойственна конфигурации n точек. Для $k > 2$ конструкции расходятся. В п. 2 описана реализация схемы А на таком уровне общности, который позволяет включить в одно семейство реализации элементов высших порядков Брюа с помощью графиков полиномов в $\mathbb{R}^2$ и

конструкцию, двойственную конструкции Ю. И. Манина и В. В. Шехтмана.

Конфигурации прямых реализуют не все элементы $B(n, 2)$, а конфигурации псевдопрямых – все [3]. Где проходит граница между множествами конфигураций кривых, которых или достаточно или недостаточно для реализации всех элементов $B(n, 2)$? Аналогичный вопрос можно задать по отношению к $B(n, k)$.

В последнем пункте работы представлены некоторые вариации основной темы, к которым автор надеется вернуться в дальнейшем.

1. Определение высших порядков Брюа [6], [7], [14]. Через $C(n, k)$ обозначим множество k -элементных подмножеств в $\{1, \dots, n\}$. Для $e \in C(n, k+1)$ назовем *пакетом* в $C(n, k)$ множество $\{d : d \in C(n, k), d \subset e\}$. Например, единственный пакет в $C(n, n-1)$ совпадает с $C(n, n-1)$. На $C(n, k)$ имеется естественный линейный порядок – лексикографический. Произвольный линейный порядок на $C(n, k)$ назовем *допустимым*, если на каждом пакете он индуцирует либо лексикографический порядок, либо обратный лексикографическому. В частности, любой линейный порядок на $C(n, 1)$ является допустимым и множество линейных порядков на $C(n, 1)$ совпадает с множеством перестановок на $\{1, \dots, n\}$. Через $A(n, k)$ обозначим множество всех допустимых порядков на $C(n, k)$. Два порядка из $A(n, k)$ называются *элементарно эквивалентными*, если они отличаются только в паре соседних элементов, которые не принадлежат одному пакету. Фактор $A(n, k)$ по отношению эквивалентности, порожденному элементарной эквивалентностью, называется *высшим порядком Брюа* $B(n, k)$ (частичный порядок на $B(n, k)$ нам не понадобится, его определение можно найти в [14]).

2. Определение k -общих наборов точек. Пусть $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$. Рассмотрим F^{m+2} с декартовыми координатами $(x, y, z_1, \dots, z_m)$. Набор из n различных точек в F^{m+2} назовем *k -общим*, $k + m \leq n$, если выполнены условия:

1) для любых $k + m$ точек набора $(x_1, y_1, z_{11}, \dots, z_{m1}), \dots, (x_{m+k}, y_{m+k}, z_{1\ m+k}, \dots, z_{m\ m+k})$

$$\begin{vmatrix} x_1^{k-1} & x_1^{k-2} & \dots & x_1 & 1 & z_{11} & \dots & z_{m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m+k}^{k-1} & x_{m+k}^{k-2} & \dots & x_{m+k} & 1 & z_{1\ m+k} & \dots & z_{m\ m+k} \end{vmatrix} \neq 0;$$

2) координаты x точек конфигурации различны;

3) любое $(m + k + 1)$ -элементное подмножество набора не лежит на графике полинома вида

$$y = a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0 + b_1z_1 + \dots + b_mz_m, \quad a_{k-1}, \dots, a_0, b_1, \dots, b_m \in F. \quad (1)$$

Из определения следует, что любому k -общему набору из n точек можно сопоставить $\binom{n}{m+k}$ полиномов вида (1): каждому подмножеству из $m + k$ точек набора сопоставляется единственный полином вида (1), на графике которого лежат эти точки. Назовем k -общий набор из n точек *вполне k -общим*, если коэффициенты при $(k - 1)$ -й степени x сопоставленных набору полиномов различны.

Если точки набора упорядочены, то любому подмножеству из $k + m$ точек набора взаимно однозначно соответствует элемент множества $C(n, k + m)$. Поэтому полиномы k -общего набора упорядоченных точек будем обозначать через P_d ,

$d \in C(n, k + m)$, а их коэффициенты при $(k - 1)$ -й степени x – через p_d . Для $F = \mathbb{R}$ всегда будем считать, что точки k -общего набора упорядочены по возрастанию координаты x , и обозначим через $U(n, k)$ ($V(n, k)$) пространство всех k -общих (вполне k -общих) упорядоченных наборов из n точек.

Далее до конца статьи рассматривается частный случай конструкции этого пункта: $m = 0$. В этом случае условие 1) в определении k -общего набора вытекает из условия 2), так как определитель Вандермонда не равен нулю. Поэтому набор $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ является k -общим, если и только если x_i различны и (условие 3)) для любого $(k + 1)$ -элементного подмножества $(x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, (x_{i_{k+1}}, y_{i_{k+1}})$

$$\begin{vmatrix} y_{i_1} & x_{i_1}^{k-1} & \dots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i_{k+1}} & x_{i_{k+1}}^{k-1} & \dots & x_{i_{k+1}} & 1 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

3. Фундаментальная группа пространства k -общих наборов над $\mathbb{C}$.

Напомним определение дискриминантной конфигурации гиперплоскостей Манина–Шехтмана [14]. Пусть F – поле и $H_1^0, \dots, H_n^0 \subset F^k$ – семейство аффинных гиперплоскостей в общем положении. Через $D(n, k)$ обозначим пространство конфигураций гиперплоскостей $H_1, \dots, H_n \subset F^k$, обладающих свойствами: H_i параллельно H_i^0 для всех i ; $H_1, \dots, H_n$ находятся в общем положении. $D(n, k)$ является подмножеством в пространстве F^n всех параллельных сдвигов гиперплоскостей H_i^0 . Более того, $F^n \setminus D(n, k)$ есть конфигурация гиперплоскостей следующего вида. Для $d \in C(n, a)$ положим

$$D_d = \left\{ (H_1, \dots, H_n) \in F^n : \bigcap_{i \in d} H_i \neq \emptyset \right\}.$$

Ясно, что $D_d = F^n$, если $k \geq a$ и $\text{codim } D_d = a - k$, $a \geq k + 1$.

В частности, D_d для $d \in C(n, k + 1)$ являются попарно различными гиперплоскостями в F^n и

$$D(n, k) = F^n \setminus \bigcup_{d \in C(n, k+1)} D_d.$$

Конфигурация гиперплоскостей D_d , $d \in C(n, k + 1)$, называется *дискриминантной конфигурацией Манина–Шехтмана*.

Приведем также определение циклической конфигурации гиперплоскостей [21]. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – множество различных элементов поля F . *Циклической конфигурацией* называется множество гиперплоскостей

$$Z_i = \{ (z_1, \dots, z_k) \in F^k : z_1 + x_i z_2 + \dots + x_i^{k-1} z_k + x_i^k = 0 \}.$$

Нетрудно видеть, что дополнение к дискриминантной конфигурации Манина–Шехтмана, строящейся по циклической конфигурации, задается условиями (2). Поэтому пространство k -общих наборов $U(n, k)$ расслоено над дополнением к конфигурации группы кос $E_n = F^n \setminus \{x_i = x_j, i < j\}$ и слоем является дополнение к дискриминантной конфигурации Манина–Шехтмана $D(n, k)$. Пусть $F = \mathbb{C}$. Тогда дополнение к конфигурации группы кос является $K(\pi, 1)$ -пространством [1], и поэтому из точной гомотопической последовательности расслоения вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Имеем короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow \pi_1(D(n, k)) \rightarrow \pi_1(U(n, k)) \rightarrow \pi_1(E_n) \rightarrow 0$$

и изоморфизмы

$$\pi_i(D(n, k)) \approx \pi_i(U(n, k)), \quad i > 1.$$

Таким образом, пространство k -общих наборов точек над $\mathbb{C}$ является $K(\pi, 1)$ -пространством, если и только если $K(\pi, 1)$ -пространством является дополнение к дискриминантной конфигурации Манина–Шейтмана.

4. Высшие порядки Брюа и k -общие наборы в $\mathbb{R}^2$. Далее рассматривается конструкция п. 2 для $m = 0$, $F = \mathbb{R}$. Построим постоянные на компонентах связности отображения

$$a: V(n, k) \rightarrow A(n, k), \quad b: U(n, k) \rightarrow B(n, k).$$

ЛЕММА 1. Рассмотрим k -общий набор из n точек и два полинома этого набора, $P_d, P_q, d, q \in C(n, k)$. Если $p_d = p_q$, то d, q не принадлежат одному пакету.

Действительно, разность $P_d - P_q$ имеет не более чем $k - 2$ корня, т.е. d, q имеют не более чем $k - 2$ общих элемента, и поэтому не могут принадлежать одному пакету.

Согласно лемме 1 для любого набора из $U(n, k)$ можно упорядочить по величине числа p_d , отвечающие произвольному пакету в $C(n, k)$, и тем самым получить порядок на произвольном пакете.

Ключевым является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Полученный порядок на любом пакете является либо лексикографическим, либо обратным лексикографическому.

Вначале отметим, что тем самым определено a , а именно для любого набора из $V(n, k)$ упорядочиваем по величине числа $p_d, d \in C(n, k)$, что дает порядок на $C(n, k)$, который в силу предложения 1 принадлежит $A(n, k)$. Определено также и b : если какие-то из чисел p_d совпадают, то все возможные упорядочения этих чисел приводят согласно лемме 1 к эквивалентным порядкам из $A(n, k)$, т.е. к одному и тому же элементу из $B(n, k)$. Очевидно, что a постоянно на компонентах связности пространства $V(n, k)$, и из леммы 1 следует, что b постоянно на компонентах связности пространства $U(n, k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Упорядочим отвечающие пакету точки $A_1, \dots, A_{k+1}$ по возрастанию координаты x . Через P_i обозначим полином набора, график которого не содержит A_i и содержит остальные точки пакета, p_i – старший коэффициент полинома P_i . Согласно лемме 1 числа p_i различны. Каждая пара графиков полиномов P_i имеет $k - 1$ общую точку среди $A_1, \dots, A_{k+1}$, и степени полиномов P_i не превосходят $k - 1$. Поэтому все точки пересечения графиков полиномов P_i принадлежат $\{A_1, \dots, A_{k+1}\}$.

График полинома делит $\mathbb{R}^2$ на две части, и поэтому можно говорить о точках, расположенных выше и ниже графика. При больших x график P_i расположен выше

графика P_j , если и только если $p_i > p_j$. Пусть A_{k+1} расположена выше графика P_{k+1} . Покажем, что $p_1 > \dots > p_{k+1}$ (если A_{k+1} расположена ниже графика P_{k+1} , то совершенно аналогично доказывается, что $p_1 < \dots < p_{k+1}$). Так как все точки пересечения графиков принадлежат $\{A_1, \dots, A_{k+1}\}$, то $p_k > p_{k+1}$. Между точками A_{k-1} и A_{k+1} график P_k выше графика P_{k+1} , и поэтому между точками A_{k-2} и A_k график P_{k-1} ниже графиков P_k и P_{k+1} , и тем самым при больших x график P_{k-1} выше графиков P_k и P_{k+1} , т.е. $p_{k-1} > p_k > p_{k+1}$. Аналогично для всех i : если между точками A_{k-i} и A_{k-i+2} график P_{k-i+1} выше (ниже) графиков $P_{k-i+2}, \dots, P_{k+1}$, то между точками A_{k-i-1} и A_{k-i+1} график P_{k-i} ниже (выше) графиков $P_{k-i+1}, \dots, P_{k+1}$, и поэтому при больших x график P_{k-i} выше графиков $P_{k-i+1}, \dots, P_{k+1}$, т.е. $p_{k-i} > \dots > p_{k+1}$.

5. Updown-элементы высших порядков Брюа и k -общие полиномы. Перенесем конструкции п. 4 на k -общие наборы точек, которые появляются как множества точек экстремума на графиках полиномов. Назовем полином над F степени $n + 1$ со старшим коэффициентом 1 (вполне) k -общим, если он имеет n различных критических точек в F и множество точек экстремума его графика образует (вполне) k -общий набор. Критические значения k -общего полинома над $\mathbb{R}$ образуют updown-последовательность: $y_n < y_{n-1} > y_{n-2} < \dots$. Это мотивирует следующие определения.

Для $F = \mathbb{R}$ назовем (вполне) k -общий набор из n точек *updown-набором*, если координаты y точек набора образуют updown-последовательность. Обозначим через $\text{Up}(n, k)$ и $\text{Vp}(n, k)$ пространства всех updown-наборов в $U(n, k)$ и $V(n, k)$. Образ отображения, сопоставляющего (вполне) k -общему полиному степени $n + 1$ набор точек экстремума его графика, принадлежит $(\text{Vp}(n, k)) \text{ Up}(n, k)$.

Элемент $d \in A(n, k)$ назовем *updown-элементом*, если выполнено следующее условие. Рассмотрим последовательность пакетов в $C(n, k)$, отвечающих следующим элементам $C(n, k + 1)$: $(1, \dots, k + 1), (2, \dots, k + 2), \dots, (n - k, \dots, n)$. Элемент d индуцирует полные порядки на этих пакетах, и мы потребуем, чтобы лексикографический и обратный лексикографическому порядки в последовательности пакетов чередовались, причем на последнем пакете порядок обратный лексикографическому. Для $k = 1$ получается обычное определение updown-перестановки [2]. Из определения очевидно, что весь класс эквивалентности updown-элемента состоит из updown-элементов. Соответствующие элементы $B(n, k)$ также назовем updown-элементами. Обозначим через $\text{Ap}(n, k)$ ($\text{Bp}(n, k)$) множество updown-элементов в $A(n, k)$ ($B(n, k)$). Через ap (bp) обозначим ограничение отображения a (b) на $\text{Vp}(n, k)$ ($\text{Up}(n, k)$). Легко видеть, что ap (bp) постоянно на компонентах связности пространства $\text{Vp}(n, k)$ ($\text{Up}(n, k)$).

Предложение 2. *Образ отображения ap (bp) лежит в $\text{Ap}(n, k)$ ($\text{Bp}(n, k)$).*

Доказательство. Если i -я точка набора является точкой локального максимума (минимума), т.е. $y_{i-1} < y_i > y_{i+1}$ ($y_{i-1} > y_i < y_{i+1}$), то она лежит выше (ниже) графика полинома, содержащего точки с номерами $i - k, \dots, i - 1$. Это вытекает из того, что $y_{i-1} < y_{i-2} > \dots$ ($y_{i-1} > y_{i-2} < \dots$), и следующего замечания: полином, график которого содержит точки с номерами $i - k, \dots, i - 1$, имеет степень не более $k - 1$, и поэтому его производная меняет знак не более $k - 2$ раз. Поэтому на пакете, отвечающем точкам $(i - k, \dots, i)$, порядок лексикографический

(обратный лексикографическому) согласно предложению 1.

ГИПОТЕЗА 1. *Отображения a, b, ar, br индуцируют биекции своих образов и множеств связных компонент пространств $V(n, k)$, $U(n, k)$, $Vp(n, k)$, $Up(n, k)$.*

ГИПОТЕЗА 2. *Если элемент $B(n, k)$ ($Vp(n, k)$) принадлежит образу отображения b (br), то весь прообраз этого элемента при факторизации в $A(n, k)$ ($Ap(n, k)$) принадлежит образу отображения a (ar).*

6. Обобщенное отображение Ляшко–Лойенги. Построим высший аналог отображения Ляшко–Лойенги и отображения M -морсификаций A_n в конус Спрингера A_{n-1} [1], [9]. Занумеруем в лексикографическом порядке элементы $C(n, k)$ и согласно номерам сопоставим их координатным функциям z_i в F^m , $m = \binom{n}{k}$. Обозначим через $G(n, k)$ конфигурацию группы кос $\{z_i = z_j, i < j\}$ в F^m . Через $H(n, k)$ обозначим конфигурацию гиперплоскостей в F^m , которая получается, если из конфигурации $G(n, k)$ выбросить те гиперплоскости $z_i = z_j$, для которых отвечающие координатам z_i, z_j элементы $C(n, k)$ не принадлежат одному пакету. Согласно лемме для любого (вполне) k -общего набора из n точек вектор чисел p_d , $d \in C(n, k)$, принадлежит $(F^m \setminus G(n, k)) \setminus F^m \setminus H(n, k)$. Для $F = \mathbb{R}$ согласно предложению 1 образ построенного отображения принадлежит $(T(n, k) \setminus G(n, k)) \setminus T(n, k) \setminus H(n, k)$, где $T(n, k) \subset \mathbb{R}^m$ определяется как множество всех точек, координаты которых удовлетворяют условию: подмножество координат $z_{i_1}, \dots, z_{i_{k+1}}$, $i_1 < \dots < i_{k+1}$, отвечающих любому пакету в $C(n, k)$, является решением одной из систем неравенств: $z_{i_1} > \dots > z_{i_{k+1}}$ или $z_{i_1} < \dots < z_{i_{k+1}}$.

Определим k -конус Спрингера $S(n, k) \subset T(n, k)$ дополнительным условием: любое подмножество координат $z_{i_1}, \dots, z_{i_{k+1}}$, отвечающее пакету элемента $(q - k, \dots, q + 1) \in C(n, k)$, является решением системы $z_{i_1} \geq \dots \geq z_{i_{k+1}}$, если $n - q$ четно, и решением системы $z_{i_1} \leq \dots \leq z_{i_{k+1}}$, если $n - q$ нечетно. Согласно предложению 2 сопоставление k -общему набору из n точек вектора из чисел p_d , $d \in C(n, k)$, задает отображение в k -конус Спрингера

$$Vp(n, k) \rightarrow S(n, k) \setminus G(n, k), \quad Up(n, k) \rightarrow S(n, k) \setminus H(n, k).$$

F^m можно факторизовать по действию симметрической группы (перестановка координат). Сквозное отображение $\{\text{полиномы}\} \rightarrow \{\text{наборы экстремумов графиков полиномов}\} \rightarrow F^m$ и факторизация по действию симметрической группы обобщают отображение Ляшко–Лойенги.

7. Торическая точка зрения. В п. 4 k -общему набору из n точек в $\mathbb{R}^2$ сопоставляется $\binom{n}{k}$ полиномов и линейный порядок на $C(n, k)$ задается упорядочением по величине коэффициентов при $(k - 1)$ -й степени x этих полиномов. Оказывается, что столь же хорошими свойствами обладают упорядочения коэффициентов этих полиномов при любом мономе x^m , $k - 1 > m \geq 0$, но, как обычно в торической геометрии, нужно потребовать, чтобы объекты “хорошо вели себя” по отношению к началу координат.

Из определения понятно, что, заменив порядок в допустимом линейном упорядочении элементов $C(n, k)$ на обратный, мы снова получим допустимый порядок.

Также очевидно, что, заменив порядок на обратный в двух эквивалентных линейных порядках на $C(n, k)$, снова получим эквивалентные линейные порядки. Поэтому для любого элемента из $B(n, k)$ определен обратный ему элемент, также принадлежащий $B(n, k)$.

Рассмотрим k -общий набор из n точек в $\mathbb{R}^2$, причем пусть координаты x всех точек набора положительны. Покажем, что для $k - 1 > m \geq 0$ упорядочение по величине коэффициентов при x^m полиномов набора задает тот же элемент $B(n, k)$, что и упорядочение коэффициентов при x^{k-1} , если $k - m$ нечетно, и обратный элемент, если $k - m$ четно. Это вытекает из леммы 2 и предложения 3 с учетом того, что любой элемент $B(n, k)$ определяется порядками на всех пакетах [14].

ЛЕММА 2. *Пусть координаты x всех точек k -общего набора положительны. Рассмотрим два полинома этого набора, P_d, P_q , $d, q \in C(n, k)$. Если коэффициенты при x^m ($k - 1 \geq m \geq 0$) этих полиномов совпадают, то d, q не принадлежат одному пакету.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что $P_d - P_q$ имеет не более $k - 2$ положительных корней (сравните с леммой 1). Так как коэффициент при x^m у полинома $P_d - P_q$ равен нулю, то это вытекает из правила Декарта (теоремы о малочленах) [8].

Приведем более прямое доказательство, которое понадобится в предложении 3. Если d, q принадлежат одному пакету, то они имеют $k - 1$ общий элемент, и поэтому у полинома степени не выше $k - 1$ $P_d - P_q$ все корни вещественны и положительны. Тогда и все корни производных порядка $0, 1, \dots, k - 1$ этого полинома вещественны и положительны (они лежат на отрезке, концами которого являются минимальный и максимальный корни полинома $P_d - P_q$). Но нуль является корнем m -й производной полинома, у которого коэффициент при x^m равен нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть координаты x всех точек k -общего набора из n точек в $\mathbb{R}^2$ положительны. Тогда порядок на коэффициентах при x^m полиномов набора, отвечающих одному пакету, совпадает с порядком на коэффициентах при x^{k-1} , если $k - m$ нечетно, и с обратным этому порядку, если $k - m$ четно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в доказательстве леммы 2 для пары полиномов P_d, P_q , отвечающих одному пакету, у полинома $P_d^{(m)} - P_q^{(m)}$ все корни вещественны и положительны. Поэтому на положительной полуоси полиномы $P_d^{(m)}$ и $P_q^{(m)}$ “меняются местами” (их графики пересекаются) $k - m - 1$ раз, т.е. для всех пар полиномов пакета их графики пересекаются одинаковое число раз. Коэффициент при x^{k-1} полинома P_d совпадает с коэффициентом при x^{k-m-1} полинома $P_d^{(m)} / ((k-1) \dots (k-m))$. Остается заметить, что упорядочение по величине коэффициентов при x^m полиномов P_d совпадает с порядком на прямой $x = 0$ точек пересечения этой прямой с графиками полиномов $P_d^{(m)}$, а упорядочение по величине коэффициентов при x^{k-1} совпадает с порядком на прямой $x = c$, если c достаточно велико.

8. Направления дальнейших исследований. В конструкции п. 2, включающей в одно семейство реализации элементов высших порядков Брюа с помощью графиков полиномов в $\mathbb{R}^2$ и конструкцию, двойственную конструкции

Ю. И. Манина и В. В. Шехтмана [6], [7], используются конфигурации гиперповерхностей вида

$$y = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{i=1}^m b_i y^i.$$

Такие гиперповерхности являются простейшими обобщениями гиперплоскостей – определяющее уравнение полиномиально по одной из переменных и линейно по остальным. Интересно было бы описать связи высших порядков Брюа и дискриминантных конфигураций Манина–Шехтмана с обобщениями на такие конфигурации гиперповерхностей основных конструкций теории конфигураций гиперплоскостей: алгебра Орлика–Соломона [17], комплекс Салветти [18], кольцо Варченко–Гельфанда [4], монодромия кос для $m = 0$ [15], [16].

Пространство комплексных полиномов с нестандартным дискриминантом в нем рассматривалось в [10]. Полином называется *лемнискатно общим* [10] (или *типичным* [2]), если его критические значения не равны нулю и имеют разные модули. Назовем лемнискатно общий полином *эллиптически общим*, если его критические значения лежат на разных лучах с началом в нуле в плоскости значений полинома $\mathbb{C}$. *Гиперболически общим* назовем комплексный полином, все критические значения которого лежат на разных гиперболах

$$(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 = c \neq 0$$

($\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ – соответственно вещественная и мнимая части комплексного числа z , $c \in \mathbb{R}$) и имеют разные a в естественной параметризации этих гиперболических синуса и косинуса $\operatorname{sh} a$, $\operatorname{ch} a$. Аналогично пп. 2, 3 можно определить эллиптически (гиперболически) k -общие полиномы с помощью (гиперболических) тригонометрических полиномов и реализовать для них схему А. По-видимому, на эллиптически и гиперболически k -общие полиномы могут быть обобщены результаты работы [10], в которой описана связь лемнискатно общих полиномов с M -морсификациями.

В стратификации пространства комплексных полиномов от одной переменной, задаваемой обычным стратом Максвелла (т.е. в стратификации по числу критических значений полинома), кроме общего страта довольно интенсивно изучался еще один – обобщенные полиномы Чебышева, т.е. полиномы, имеющие не более двух критических значений [19]. Назовем (m, n) -полиномом Чебышева комплексный полином, для которого существуют полином степени не выше m и полином степени не выше n , на графиках которых лежат все экстремумы графика исходного полинома.

Р. Стенли сопоставил стандартные таблицы Юнга линейным порядкам на $C(n, 2)$, связанным с высшим порядком Брюа $B(n, 2)$ [20]. В [11] любому линейному порядку на $C(n, 2)$ сопоставлена таблица Юнга следующим образом: в клетке на пересечении i -го столбца и j -й строки ($i < j$) таблицы записывается порядковый номер элемента $(i, j) \in C(n, 2)$ в линейном порядке. Описаны также таблицы (так называемые сбалансированные таблицы Юнга), отвечающие при таком отображении линейным порядкам на $C(n, 2)$, связанным с $B(n, 2)$, и алгоритм перехода от сбалансированных таблиц к стандартным. Определение из [11] очевидным образом обобщается на линейные порядки на $C(n, k)$ и многомерные таблицы

Юнга. А именно, в клетке многомерной таблицы Юнга с координатами $i_1, \dots, i_k$, $i_1 < \dots < i_k$, $(i_1, \dots, i_k) \subset \{1, \dots, n\}$, записывается порядковый номер элемента $(i_1, \dots, i_k) \in C(n, k)$ в линейном порядке.

Список литературы

1. Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1984.
2. Арнольд В. И. Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера // УМН. 1992. Т. 47. № 1. С. 3–45.
3. Воеводский В. А., Капранов М. М. Свободная n -категория, порожденная кубом, ориентированные матроиды и высшие порядки Брюа // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 3. С. 62–65.
4. Гельфанд И. М., Рыбников Г. Л. Алгебраические и топологические инварианты ориентированных матроидов // ДАН. 1989. Т. 307. № 4. С. 791–795.
5. Ильютя Г. Г. Высшие порядки Брюа и M -морсификации // ДАН. 1996. Т. 347. № 3. С. 306–308.
6. Манин Ю. И., Шейтман В. В. Расположения вещественных гиперплоскостей и уравнения Замолотчикова // Тр. семинара “Теоретико-групповые методы в физике”. 1986. Т. 1. С. 316–324.
7. Манин Ю. И., Шейтман В. В. О высших порядках Брюа, связанных с симметрической группой // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 2. С. 74, 75.
8. Хованский А. Г. Об одном классе трансцендентных уравнений // ДАН СССР. 1980. Т. 255. № 4. С. 804–807.
9. Arnold V. I. Springer number and morsification spaces // J. Algebraic Geometry. 1992. V. 1. № 2. P. 197–214.
10. Cataneze F., Frediani P. Configurations of real and complex polynomials // Asterisque. 1993. V. 218. P. 61–93.
11. Edelman P., Greene C. Balanced tableaux // Adv. Math. 1987. V. 63. P. 42–99.
12. Kirillov A. N., Berenstein A. D. Groups generated by involutions, Gelfand–Tsetlin patterns, and combinatorics of Young tableaux // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 1. С. 92–152.
13. Looijenga E. The discriminant of a real simple singularity // Compositio Math. 1987. V. 37. Fasc. 1. P. 51–62.
14. Manin Y. I., Schechtman V. V. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders // Adv. Studies in Pure Math. 1985. V. 44. P. 289–308.
15. Moisezon B. Algebraic surfaces and the arithmetic of braids. II // Contemporary Math. 1985. V. 44. P. 311–344.
16. Moisezon B., Teicher M. Braid group technique in complex geometry. I: Line arrangements in $\mathbb{CP}^2$ // Contemporary Math. 1986. V. 78. P. 425–555.
17. Orlik P., Terao H. Arrangements of hyperplanes. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
18. Salvetti M. Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbb{C}^n$ // Invent. Math. 1987. V. 88. P. 603–618.
19. Shabat G., Zvonkin A. Plane trees and algebraic numbers // Contemporary Math. 1994. V. 178. P. 233–275.
20. Stanley R. On the number of reduced decompositions of elements of Coxeter groups // European J. Combinatorics. 1984. V. 5. P. 359–372.
21. Ziegler G. M. Higher Bruhat orders and cyclic hyperplane arrangements // Topology. 1993. V. 32. № 2. P. 259–279.

Поступило в редакцию
1. III. 1996