Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Горбацевич, О топологии натурального расслоения компактных однородных пространств, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2007, том 71, выпуск 3, 15–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 11:46:51

УДК 519.46

В. В. Горбачевич

О топологии натурального расслоения компактных однородных пространств

Изучаются топологические характеристики компактных однородных многообразий. Основная используемая при этом конструкция – натуральное расслоение. Показано, как вычислить когомологии компактного однородного многообразия, рассматриваемого с точностью до конечнолистного накрытия. Изучается топология различных специальных классов компактных однородных многообразий.

Библиография: 20 наименований.

Введение

Гладкое многообразие M называется *однородным*, если на нем существует транзитивное действие некоторой группы Ли G . Действие это можно предполагать эффективным или локально эффективным (последнее более подходит в случае, когда мы хотим ограничиться рассмотрением только односвязных групп Ли G). Далее его можно считать несократимым. Напомним, что транзитивное действие группы Ли G называется *несократимым*, если при этом в G не существует собственных подгрупп Ли, транзитивных на M (если учитываются только нормальные подгруппы Ли, то действие иногда называется *неприводимым*). Легко убедиться в том, что в исходной группе Ли, транзитивной на M , всегда существует подгруппа Ли, действие которой на M несократимо.

Для любого однородного многообразия M существует его представление в виде $M = G/H$, где H – некоторая замкнутая подгруппа Ли в G . Однако группа Ли G (даже эффективная и несократимая) не определяется однозначно многообразием M (даже если оно компактно). Например, тор $M = T^3$ является группой Ли (т. е. можно просто взять $G = T^3$), но на нем транзитивна (и несократима) и группа Ли $E(2)_0 = \mathrm{SO}(2) \cdot \mathbb{R}^2$ – группа собственных движений евклидовой плоскости. Стационарная подгруппа для этого действия дискретна, это $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$. Тем самым, для компактного однородного многообразия T^3 имеются две существенно различные транзитивные на нем трехмерные группы Ли. Можно привести и примеры такого рода, когда M не только компактно, но и односвязно.

В статье будут рассматриваться только компактные однородные многообразия. На самом деле многие результаты будут справедливы (с очевидными переформулировками) и для произвольных плезиокомпактных однородных многообразий. Многообразие называется *плезиокомпактным*, если оно может быть представлено как плезиокомпактное однородное пространство некоторой

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-01-00647).

связной группы Ли. Напомним, что однородное пространство $M = G/H$ называется *плезикокомпактным*, если существует такая замкнутая подгруппа Ли F , $H \subset F \subset G$, что многообразие G/F компактно, а на однородном пространстве F/H существует конечная инвариантная мера (подробнее о плезикокомпактных однородных пространствах см. [1]). Возможность такого обобщения результатов настоящей статьи вытекает из возможности обобщить на плезикокомпактный случай многие методы и конструкции, которые используются ниже и которые первоначально были использованы для компактных однородных пространств (см. обзор [2], а также статьи [1], в которых были получены указанные обобщения).

В настоящей статье изучаются топологические свойства компактных однородных многообразий M , в частности изучается кольцо когомологий $H^*(M, \mathbb{R})$. Основная используемая при этом конструкция – натуральное расслоение, а также некоторые другие, связанные с ним расслоения. Дадим краткое описание этих расслоений (подробности см. в [2], а также в [3] и в других работах автора).

Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство некоторой связной группы Ли G . Эту группу Ли мы можем считать односвязной и локально эффективной (эффективной она в этом случае будет не всегда). Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G , она определена однозначно с точностью до сопряжения в G . Имеется естественное действие K на M . В общем случае орбиты этого действия между собой не изоморфны, они имеют разный орбитный тип (т. е. соответствующие разным точкам многообразия M стационарные подгруппы не всегда сопряжены в K). Действие компактной группы K на многообразии M называется *эквиорбитным*, если все его орбиты одного орбитного типа, т. е. если для любых точек $m, m' \in M$ соответствующие им стационарные подгруппы $K_m, K_{m'}$ сопряжены в K .

Оказывается, что для произвольного компактного однородного пространства G/H существует некоторое компактное однородное пространство $M' = G/H'$, его конечнолистно покрывающее (H' – некоторая подгруппа конечного индекса в H) и являющееся эквиорбитным относительно естественного действия максимальной компактной подгруппы K (см. [2], [3]). В таком случае пространство орбит $K \backslash M'$ этого действия является гладким многообразием, а естественное отображение $M' \rightarrow K \backslash M'$ – гладким локально тривиальным расслоением. Именно это расслоение и называется *натуральным расслоением* для M (хотя расслаивается не M , а подходящее M' , конечнолистно его покрывающее). В общем случае переход к M' необходим, если мы хотим получить на $K \backslash M'$ структуру гладкого многообразия. Однако и для исходного M также имеется своего рода расслоение – расслоение Зейферта над орбиобразом $K \backslash M$ (подробнее об этом см. [4]).

Итак, натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$ – это гладкое, локально тривиальное расслоение для подходящего M' , конечнолистно покрывающего исходное компактное однородное многообразие M . База $M_a = K \backslash M'$ этого расслоения – асферичное многообразие (асферичность означает, что гомотопические группы $\pi_i(M_a) = \{0\}$ при всех $i \geq 2$). Слой этого расслоения имеет вид $M_c = K/L$, где $L = K \cap H'$ – замкнутая подгруппа в компактной группе Ли K . Если мы предполагаем, что G односвязна (а мы обычно будем это предполагать), то и максимальная компактная подгруппа K будет, как хорошо известно, односвязной, а потому она обязательно будет полупростой.

Структурной группой этого расслоения является компактная группа Ли $Q = N_K(L)/L$, где $N_K(L)$ – нормализатор L в K . Эта группа может рассматриваться как группа всех автоморфизмов однородного пространства K/L (т. е. диффеоморфизмов, перестановочных с транзитивным действием группы K). Само натуральное расслоение по M' определяется однозначно с точностью до послышной гомотопической эквивалентности (см. [2], [3]).

При выборе подходящего M' группу Ли Q можно считать связной (редуцировав к ней натуральное расслоение; см. [3] и § 2 ниже). Если удастся редуцировать структурную группу к $\{e\}$, то натуральное расслоение будет тривиально (что имеет место не всегда; условия такой тривиальности в некоторых частных случаях даны в [3]). Структурная группа Q натурального расслоения, указанная выше, в некоторых частных случаях может быть редуцирована к своей подгруппе или расширена (что тоже иногда оказывается полезным).

Слой M_c натурального расслоения почти односвязен, т. е. его фундаментальная группа конечна. Важный частный случай – когда этот слой односвязен. Необходимое и достаточное условие односвязности слоя M_c (или, что эквивалентно, связности подгруппы $L = K \cap H$) – это условие отсутствия кручения у фундаментальной группы $\pi_1(M)$ многообразия M .

Рассмотрим естественное действие фундаментальной группы базы $\pi_1(M_a)$ (единственной нетривиальной гомотопической группы асферичного M_a) на слое M_c . Можно доказать, что при подходящем выборе M' , конечнолистно накрывающего M , это действие гомотопически тривиально (и потому натуральное расслоение гомотопически просто); см. [3]. В частности, тогда и действие $\pi_1(M_a)$ на $\pi_1(M_c)$ будет тривиально.

Рассмотрим теперь некоторые примеры натуральных расслоений.

1. Пусть $M = G/\Gamma$, где Γ – решетка в односвязной группе Ли G (т. е. дискретная подгруппа с компактным факторпространством). Предположим, что решетка Γ не имеет кручения, тогда естественное действие на M максимальной компактной подгруппы $K \subset G$ является свободным (все стационарные подгруппы тривиальны). В этом случае имеем главное K -расслоение $K \rightarrow M \rightarrow K \backslash M$ над многообразием $M_a = K \backslash M = K \backslash G/\Gamma$, оно и будет натуральным расслоением для рассматриваемого M . Иногда оказывается, что это расслоение тривиально (см. ниже).

2. Пусть F_g – замкнутая ориентируемая поверхность некоторого рода $g \geq 2$. Известно, что все такие поверхности F_g не будут однородными. Однако многообразие $M = F_g \times S^3$ – прямое произведение F_g на трехмерную сферу – будет, как оказывается, однородным [3]. Здесь $M_c = S^3$, $M_a = F_g$, а натуральное расслоение тривиально.

Слой натурального расслоения – компактное однородное пространство компактной полупростой группы Ли. Такие многообразия топологически характеризуются среди всех однородных многообразий конечностью фундаментальной группы. Имеется множество результатов о строении такого рода однородных многообразий (см., например, обзор [2] и книгу [5]).

База натурального расслоения не обязательно однородна. Однако и она допускает довольно подробное описание. Для этого используется еще одно важное расслоение – структурное расслоение для M_a . Оно строится при подходящем выборе M' , конечнолистно накрывающем исходное компактное однородное многообразие M , и имеет вид $M_t \rightarrow M_a \rightarrow M_s$ (см. [2]). База M_s этого

расслоения может быть записана в виде $K \setminus S/D$, где D – решетка в полупростой группе Ли S , а K – максимальная компактная подгруппа в S (отметим, что здесь K не обязательно полупроста, так как S не всегда односвязна). Такое M_s имеет структуру локально симметрического пространства отрицательной кривизны. Слой M_r структурного расслоения – солвмногообразие (т. е. однородное пространство разрешимой группы Ли), имеющее вид R/Γ , где Γ – решетка в некоторой разрешимой группе Ли R . Структурное расслоение можно рассматривать как топологический аналог разложения Леви для групп Ли (представления односвязной группы Ли в виде полупрямого произведения полупростой части и разрешимого радикала).

В результате для компактного однородного многообразия мы получаем три составляющие его “компоненты”: многообразия M_c , M_r , M_s . Если одна из этих компонент вырождается в точку, то получаются три специальных класса компактных однородных многообразий.

Если $M_c = \{*\}$ – точка, то $M = M_a$ – асферичное однородное многообразие. При $M_s = \{*\}$ получаем класс разрешимых однородных многообразий, они характеризуются тем, что их фундаментальная группа имеет разрешимую подгруппу конечного индекса (не нужно путать их с солвмногообразиями – однородными пространствами разрешимых групп Ли). Топологическое строение таких однородных многообразий может быть довольно подробно описано (хотя оно и нетривиально); см [6].

При вырождении в точку компоненты M_r получаем класс полупростых компактных однородных многообразий (они характеризуются тем, что любая разрешимая нормальная подгруппа в их фундаментальной группе конечна). Подробное описание таких однородных многообразий содержится в [7].

Для компактного однородного многообразия M имеются еще два расслоения (см. [8]). Одно из них тесно связано с главным Q -расслоением, соответствующим натуральному расслоению (группа Ли Q описана выше). Рассмотрим подмножество $M^L = \{m \in M' \mid Lm = m\}$, являющееся подмножеством неподвижных точек естественного действия на M' компактной группы Ли $L = K \cap H'$. Доказывается, что M^L – гладкое подмногообразие в M . Естественное действие группы Ли $N_K(L)$ на M^L порождает действие Q на M^L , которое является свободным и потому порождает главное расслоение $Q \rightarrow M^L \rightarrow Q \setminus M^L$, база которого $Q \setminus M^L$ естественным образом отождествляется с базой $M_a = K \setminus M'$ натурального расслоения.

Подмногообразие M^L может быть несвязным. Однако из $Q \setminus M^L = M_a$ вытекает, что число связных компонент многообразия M^L конечно (и не превосходит числа связных компонент компактной группы Q , если исходное однородное многообразие M связно) и все эти компоненты одинаковой размерности.

Известная конструкция скрещенного Q -произведения дает нам представление M' в виде произведения: $M' = K/L \times_Q M^L$ (здесь рассматриваются естественное действие группы Q на K/L и описанное выше действие на M^L).

Проекция $K/L \times_Q M^L \rightarrow Q \setminus M^L = M_a$ дает нам натуральное расслоение, а проекция на второй множитель скрещенного произведения – на $K/N = Q \setminus K/L$ – дает нам еще одно расслоения для M , введенное для компактных однородных многообразий в работе [8] и названное в этой работе *борелевским* (в случае произвольного эквиорбитного действия компактной группы Ли на многообразии оно построено в работе [9]).

Еще одно расслоение для M имеет вид

$$Q = Q \times Q/Q \rightarrow M' \rightarrow K/N \times M_a$$

(здесь $N = N_K(L)$), назовем его *диагональным*. Оно порождается диагональным вложением Q в $Q \times Q$ и факторизацией прямого произведения $K/L \times M^L$ по действию группы $Q \times Q$.

Описанные расслоения и будут нашими основными инструментами при изучении топологии компактных однородных многообразий. В § 1 покажем, как можно вычислить кохомологии компактного однородного многообразия, рассматриваемого с точностью до конечнолистного накрытия. Оказывается, что известное описание вещественных кохомологий односвязных компактных однородных пространств через алгебру Картана (см., например, [5]) может быть обобщено на произвольные компактные однородные многообразия (теорема 1). При этом существенную роль играют результаты работ [10]. Важной составляющей этих результатов является главное Q -расслоение, соответствующее натуральному расслоению. В § 2 изучается строение главных Q -расслоений, соответствующих компактным однородным многообразиям. Дано групповое описание такого расслоения (теорема 2). Кроме того, рассмотрены различные случаи, в которых возможна редукция структурной группы натурального расслоения к меньшей группе. В § 3 рассмотрены главные однородные пространства – те, для которых уже само натуральное расслоение является главным. В § 4 на основании полученных в предыдущих параграфах результатов изучается топология (когомологии, расслоения) различных специальных классов компактных однородных многообразий (некоторые результаты такого рода содержатся и в § 3). Среди них – однородные многообразия с малой размерностью базы натурального расслоения или слоя этого расслоения, разрешимые компактные однородные многообразия.

Введем некоторые соглашения и обозначения. В настоящей работе кохомологии рассматриваются практически везде только с вещественными коэффициентами. Через $F \rightarrow E \rightarrow B$ обозначено гладкое, локально тривиальное расслоение некоторого многообразия E над базой B и со слоем F , через $\Omega(M)$ – пространство (точнее, дифференциальная градуированная алгебра) всех вещественных гладких дифференциальных форм на гладком многообразии M .

Для группы Ли F через F_0 обозначена ее связная компонента единицы, через $N_G(H)$ – нормализатор подгруппы H в группе G , а через $Z_G(H)$ – ее центратор. Через $Z(G)$ обозначен центр группы G .

§ 1. Когомологии компактных однородных многообразий

Рассмотрим вначале компактные однородные пространства вида $M = K/L$, где K – компактная полупростая группа Ли (такого рода однородные многообразия топологически характеризуются конечностью фундаментальной группы). Известная теорема Картана (см. [5], [11]) дает способ вычисления алгебры вещественных кохомологий таких многообразий M . А именно, $H^*(K/L, \mathbb{R}) \simeq H(C(K, L))$, где $C(K, L) = H^*(K) \otimes S_L$ – алгебра Картана. Здесь $H(K) = \wedge(x_1, x_2, \dots, x_l)$ – алгебра кохомологий (вещественных, других мы здесь, как

правило, рассматривать не будем) компактной группы Ли K , l – ранг группы Ли K , S_L – алгебра полиномов от образующих $z_1, z_2, \dots$ (в количестве, равном рангу группы Ли L). Элементы x_i универсально трансгрессивны (при трансгрессии в универсальном главном расслоении $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ им соответствуют элементы $y_i \in S_K$; см. ниже). Для простой компактной группы Ли K степени элементов x_i различны, если K не типа D_n (для них в размерности $2n - 1$ имеются две образующие). В обозначениях, которые подробнее объяснены ниже, $H^*(K) \simeq \Lambda P_K$, $S_L \simeq H^*(BL)$, где P_K – пространство примитивных классов когомологий для K , а BL – классифицирующее пространство (база универсального расслоения) для группы Ли L .

Дифференциал d алгебры Картана $C(K, L)$ действует тривиально на S_L , а на $H^*(K)$ задается следующим образом:

$$d(x_i \otimes 1) = 1 \otimes \rho^*(y_i).$$

Гомоморфизм $\rho^*: S_K \rightarrow S_L$ индуцирован вложением $L \hookrightarrow K$, его можно рассматривать и как гомоморфизм $H^*(BK) \rightarrow H^*(BL)$ алгебр когомологий классифицирующих пространств, индуцированный этим вложением.

Представим теперь еще одно описание гомоморфизма ρ^* для пространства K/L . Пусть t_k, t_l – максимальные торические подалгебры в алгебрах Ли групп Ли K, L соответственно. Естественное вложение $t_L \hookrightarrow t_K$ порождает гомоморфизм (гомоморфизм ограничения) алгебр полиномов $\mathbb{R}[t_K] \rightarrow \mathbb{R}[t_L]$ на этих торах. Известно, что алгебра S_K изоморфна алгебре $\mathbb{R}[t_k]^{W_K}$ – подалгебре инвариантов относительно естественного действия группы Вейля W_K (см. [11]). То же верно и для L . Таким образом, гомоморфизм ρ^* сопоставляет многочлену из S_K многочлен из S_L (инвариантный относительно W_L) – его ограничение на t_L .

Указанный дифференциал превращает алгебру Картана в дифференциальную алгебру. В силу теоремы Картана когомологии $H(C(K, L))$ этой алгебры изоморфны, как было указано выше, алгебре когомологий $H^*(K/L)$.

Алгебра Картана, в отличие от алгебры когомологий $H^*(K/L)$, напрямую связана с транзитивной группой Ли K и ее замкнутой подгруппой L , она имеет чисто алгебраическое описание. Далее нам потребуются некоторые подробности о понятии трансгрессии (входящем в определение дифференциала алгебры Картана).

Трансгрессия в главном расслоении $G \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ – это линейное отображение τ некоторого линейного подпространства T_G (пространства трансгрессивных элементов) пространства когомологий $H^*(G)$ в некоторое факторпространство пространства $H^{s+1}(B)$. Элемент $h \in H^s(G)$ называется *трансгрессивным* (т.е. $h \in T_G$), если существует такой элемент $c \in C(E)$ (коцепь трансгрессии) в пространстве (вещественных) коцепей на E , что $i^*(c) = h$ (где $i: G \hookrightarrow E$ – вложение слоя), а $dc = p^*(b)$ для некоторого элемента $b \in C(B)$ – коцепи на базе (такую коцепь $p^*(b)$ называют *коцепью базы*). Элемент b и есть образ трансгрессии, он определяется по исходному h в общем случае неоднозначно.

Для случая, когда G – группа Ли, а само расслоение гладкое, опишем отображение трансгрессии для вещественных коцепей иначе. Рассмотрим классифицирующее отображение $f: B \rightarrow BG$ (где BG – классифицирующее пространство группы G , которое можно считать гладким многообразием; подробнее

см. ниже), определяющее наше главное расслоение. Пусть $f^*: \Omega(BG) \rightarrow \Omega(B)$ – индуцированный отображением f гомоморфизм алгебр дифференциальных форм. Тогда если $\tau_G: T_G \rightarrow \Omega(BG)$ – отображение (многозначное) трансгрессии в универсальном G -расслоении, то $f^*\tau_G: T_G \rightarrow \Omega(B)$ – трансгрессия заданного гладкого расслоения.

Фактически трансгрессия может рассматриваться и как граничный дифференциал в спектральной последовательности когомологий расслоения (действующий из $E_{k+1}^{0,k}$ в $E_{k+1}^{k+1,0}$).

Рассмотрим один простой пример (см., например, [12]). Пусть $K = T^l$ – тор; тогда трансгрессия здесь обычно понимается как гомоморфизм $H^1(T^l, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B, \mathbb{Z})$. Пространство $H^1(T^l, \mathbb{Z})$ можно отождествить с пространством гомоморфизмов $\text{Hom}(T^l, T^1)$. Введем отображение $v: \text{Hom}(T^l, T^1) \rightarrow H^1(T^l, \mathbb{Z})$: для $h \in \text{Hom}(T^l, T^1)$ положим $v(h) = h^*(s)$, где $s \in H^1(T^1, \mathbb{Z})$ – стандартная образующая, а отображение h^* индуцировано гомоморфизмом h . При таком отождествлении трансгрессия в виде гомоморфизма $\mu: \text{Hom}(T^l, T^1) \rightarrow H^2(B, \mathbb{Z})$ задается следующим образом: $\mu(h) = c_1(\gamma(c_h))$; здесь берется класс Черна c_1 для комплексного линейного расслоения $\gamma(c_h)$, которое соответствует простому T^l -модулю c_h , получающемуся из пространства $\mathbb{C}$, если на нем определить действие группы T^l формулой $tz = h(t)z$, где $t \in T^l$, $z \in \mathbb{C}$.

Для натурального расслоения со слоем T классифицирующее отображение $f: M_a \rightarrow BT$ индуцирует гомоморфизм когомологий $f^*: H^2(BT) \rightarrow H^2(M_a)$, это фактически и есть отображение трансгрессии. Образ этого отображения – подпространство в $H^2(M_a)$, которое есть векторный характеристический класс Черна (с компонентами – обычными классами Черна).

Элемент $x \in H^*(G)$ называется *универсально трансгрессивным*, если он трансгрессивен в любом главном G -расслоении (G – произвольная группа). Оказывается, что универсально трансгрессивных элементов достаточно много. Известно, что для компактной группы Ли K алгебра $H^*(K)$ есть внешняя алгебра, базис которой – универсально трансгрессивные элементы (все они – нечетных степеней). Другими словами, алгебра $H^*(K)$ изоморфна $\Lambda(T_K)$.

Нам понадобится еще один подход к понятию трансгрессивного элемента при использовании понятия примитивного элемента. Элемент $x \in H^*(G)$ называется *примитивным*, если $\mu^*(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, где отображение $\mu: G \times G \rightarrow G$ задает групповую операцию на группе G . Обозначим через P_G подпространство всех примитивных элементов для группы G . Теорема Картана–Шевалле–Вейля утверждает, что для компактной группы Ли K примитивные элементы – это в точности все универсально трансгрессивные элементы, т. е. $P_K = T_K$.

Известно прямое описание трансгрессивных элементов степени 3 в когомологиях простых групп Ли (см. [5]). Пусть $b(x, y)$ – симметрическая инвариантная форма на компактной простой алгебре Ли, соответствующей группе Ли K . Тогда $a(x, y, z) = \frac{1}{2}b([x, y], z)$ есть образующая в P_K^3 .

Далее нам понадобится также понятие характеристической подалгебры, соответствующей главному расслоению. Однако мы начнем рассмотрение с уточнения понятия классифицирующего пространства.

Пусть $G \rightarrow EG \rightarrow BG$ – универсальное расслоение для некоторой группы G . Если $G = O(n)$, то классифицирующее расслоение – это классическая конструкция (на основе многообразий Грассмана и Штифеля), здесь $EO(n) = W_{n,\infty}$ – многообразие Штифеля (предельное), а $BO(n)$ – соответ-

ствующее многообразие Грассмана. Если G – произвольная компактная группа Ли, то известно, что она имеет точное конечномерное линейное представление. Поэтому группу G можно рассматривать как подгруппу в некоторой ортогональной группе $O(n)$. Это позволяет построить через конструкцию индуцирования классифицирующее пространство и для любой компактной группы Ли G , взяв, например, $EG = EO(n)$, $BG = G \setminus EG$. Однако имеется прямая функториальная конструкция Милнора для произвольной группы G (см. [12]). А именно, $EG = \text{Mi}(G) = G \star G \star \dots \star G$ – джойн бесконечного числа экземпляров группы G . На таком пространстве $\text{Mi}(G)$ имеется естественное (свободное) действие группы G . Если рассматриваются G -расслоения для групп Ли G , базы которых имеют ограниченную размерность, то достаточно брать джойн только конечного числа экземпляров группы G . При этом если G – группа Ли, то $\text{Mi}(G)$ – гладкое многообразие. Вложению групп $H \hookrightarrow G$ соответствует вложение $\text{Mi}(H) \hookrightarrow \text{Mi}(G)$.

В качестве базы BG универсального расслоения берется $G \setminus \text{Mi}(G)$.

Рассмотрим теперь произвольное главное G -расслоение $G \rightarrow E \rightarrow B$. Оно, как известно, однозначно с точностью до гомотопии определяется характеристическим (непрерывным) отображением $f: B \rightarrow BG$.

Характеристической подалгеброй (в $H^*(B)$) называется образ индуцированного гомоморфизма когомологий $f^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(B)$.

Переходим теперь к обобщению подхода Картана в вычислении когомологий однородных пространств для произвольных компактных однородных пространств (а не только для односвязных, как у Картана). Это будет сделано на основе работ [10].

Вначале в указанных работах строится обобщенная алгебра Картана для случая однородных пространств вида K/L . Для этого вводится дополнительно замкнутая подгруппа N , $L \subset N \subset K$, такая, что L нормальна в N . Например, можно взять $N = N_K(L)$. Положим $Q = N/L$, это компактная группа Ли. Имеем естественное расслоение $Q = N/L \rightarrow K/L \rightarrow K/N$, являющееся главным Q -расслоением. Строится обобщенная алгебра Картана следующим образом:

$$C(K, L, N) = \Lambda(P_Q) \otimes \Lambda(P_K) \otimes S(\overline{P}_N).$$

Здесь P_K – подпространство примитивных элементов в $H^*(K)$, а $S(\overline{P}_N)$ – пространство полиномов над $\overline{P}_N$, где $\overline{P}_N$ – фактически пространство P_N , но все его элементы имеют степени на единицу больше. На самом деле $S(\overline{P}_N)$ – это алгебра S_N , введенная выше (и изоморфная $H^*(BN)$).

Опишем действие дифференциала d на $C(K, L, N)$ (точнее, это антидифференцирование степени 1):

- если $x \in P_Q$, то $dx = \overline{i(x)}$;
- если $y \in P_K$, то $dy = \overline{\rho^*(y)}$;
- если $z \in S(\overline{P}_N)$, то $dz = 0$.

Здесь гомоморфизм $i: P_Q \rightarrow P_N$ индуцирован естественным эпиморфизмом $N \rightarrow Q$, а гомоморфизм $\rho^*: P_K \rightarrow P_N$ – вложением $N \hookrightarrow K$ (см. выше).

На самом деле элемент $\overline{i(x)}$ можно описать и по-другому (это полезно при некоторых вычислениях). Гомоморфизм групп $\pi: N \rightarrow Q$ (естественный эпиморфизм) порождает непрерывное отображение $B\pi: BN \rightarrow BQ$. Дело в том,

что если имеется расслоение, функции g_{ij} перехода которого принимают значения в N , то $\pi(g_{ij})$ – функции перехода расслоения, принимающие значения в Q . Этот естественный переход от N -расслоений к Q -расслоениям и порождает (однозначно с точностью до гомотопии) непрерывное отображение $BN \rightarrow BQ$, которое мы и обозначили через $B\pi$. Для группы Ли N пространство $S(\bar{P}_N)$ изоморфно $H^*(BN)$, аналогично, пространство $S(\bar{P}_Q)$ изоморфно $H^*(BQ)$. Отображение $B\pi$ индуцирует гомоморфизм алгебр когомологий классифицирующих пространств. Таким образом, элемент $i(x)$ можно записывать и в виде $B\pi \circ \tau_Q(x)$, где $\tau_Q: P_Q \rightarrow S(\bar{P}_N)$ – отображение трансгрессии в универсальном Q -расслоении.

Обычная алгебра Картана получится, если взять $N = L$ (тогда $Q = \{e\}$).

В [10] доказано, что при любой указанной выше подгруппе N имеет место изоморфизм $H^*(K/L) \simeq H^*(C(K, L, N))$. Здесь для нас важен не столько данный результат, сколько метод его доказательства, основную роль в нем играет вычисление трансгрессии для скрещенного произведения $P_1 \times_Q P_2$ двух произвольных главных Q -расслоений P_i (с базами B_i), слоем которого является $Q \times Q/Q$ (слой можно отождествить с группой Q , но главным оно, вообще говоря, не будет). Оказывается, что любой элемент из P_Q в этом случае будет трансгрессивен [10, ч. I, теорема 3.1.1].

Теперь рассмотрим произвольное компактное однородное пространство $M = G/H$ группы Ли G , которую мы, как было отмечено выше, можем считать односвязной. Пусть K – максимальная компактная подгруппа в G (она будет полупроста). Для подходящего однородного пространства G/H' , конечнолистно накрывающего G/H , где H' – некоторая подгруппа конечного индекса в H , естественное действие группы K будет эквиорбитно (см. выше). Тогда имеем натуральное расслоение $M_c \rightarrow M' \rightarrow M_a$. База этого расслоения – гладкое многообразие вида $M_a = K \setminus M' = K \setminus G/H'$, а слой имеет вид $M_c = K/L$, где $L = K \cap H'$. Структурной группой этого расслоения будет компактная группа Ли $Q = N_K(L)/L$. Соответствующее натуральному главному Q -расслоению имеет вид $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$, где $M^L = \{m \in M \mid Lm = m\}$ – гладкое подмногообразие в M . Тем самым, M' можно представить в виде $K/L \times_Q M^L$.

Рассмотрим естественное действие группы Ли $Q \times Q$ на прямом произведении $(K/L) \times M^L$. Оно порождает расслоение

$$Q \times Q/Q \rightarrow K/L \times_Q M^L \rightarrow K/N \times M_a$$

со слоем, диффеоморфным Q . Обозначив $\widehat{M} = K/N \times M_a$, получаем расслоение $Q \rightarrow M' \rightarrow \widehat{M}$. В силу результатов из [10] любой элемент из P_Q в этом расслоении трансгрессивен (в [10, ч. I] это доказано для случая связной компактной группы Ли Q , а в [10, ч. II] – для произвольной компактной группы Ли Q).

Далее, в силу [10] существует квазиизоморфизм (т. е. линейное отображение дифференциальных алгебр, индуцирующее изоморфизм когомологий) алгебры $\Omega(M)$ гладких коцепей на M и алгебры $\Omega(M_a) \otimes \Lambda(P_Q) \otimes \Omega(K/N)$ со следующим дифференциалом: он переводит $\Omega(M_a)$ обычным образом в себя, то же верно и для $\Omega(K/N)$, а для $a \in P_Q$ дифференциал da равен сумме образов элемента a при трансгрессии $P_Q \rightarrow \Omega(M_a)$, соответствующей расслоению $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$, и при трансгрессии $P_Q \rightarrow \Omega(K/N)$, соответствующей расслоению $Q \rightarrow K/L \rightarrow K/N$. Другими словами, имеем $da = b_1 \otimes 1 + 1 \otimes b_2$.

Подмногообразие M^L можно представить в виде $M^L = G_1/H_1$, где группа Ли G_1 – это $(N_G(L))_0/L_0$, а $H_1 = H \cap (N_G(L))_0/L_0$ – ее замкнутая подгруппа. Это утверждение доказано ниже (см. следствие 1 из теоремы 2), частный случай, когда подгруппа L связна (что будет, например, если фундаментальная группа $\pi_1(M')$ не имеет кручения), был рассмотрен ранее (см. [3]). Тем самым расслоение $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$ есть Q -расслоение для некоторого компактного однородного пространства G_1/H_1 .

Введем теперь, следуя общему подходу из [9], алгебру

$$C(M) = \Omega(B) \otimes \Lambda(P_Q) \otimes \Lambda(P_K) \otimes S(\bar{P}_N),$$

которую, я думаю (и для этого есть все основания), можно называть *алгеброй Картана–Лосика*, она является тензорным произведением $\Omega(B) \otimes C(K, L, N)$, где алгебра $C(K, L, N)$ такая, как была введена выше. При построении этой алгебры предполагается, что выбрано и зафиксировано некоторое компактное однородное пространство $M' = G/H'$, где H' – подгруппа конечного индекса в H , для которого существует натуральное расслоение (см. выше). На самом деле иногда удобнее использовать обозначение $C(M')$ вместо несколько неопределенного $C(M)$.

Опишем дифференциал на алгебре $C(M)$. На $\Lambda(P_K) \otimes S(\bar{P}_N)$ он в точности тот же, что и в алгебре $C(K, L, N)$, причем $\Lambda(P_K)$ переводится в $\bar{S}(P_N)$. На $\Omega(B)$ это обычный внешний дифференциал гладких дифференциальных форм (переводящий это пространство в себя), а для $a \in P_Q$ дифференциал действует следующим образом: $da = b + \partial a$, где $\partial a = i(\bar{x})$, а b – коцикл в $\Omega(B)$, соответствующий элементу a при транскрессии для главного Q -расслоения $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$ (соответствующего натуральному расслоению); построение такого b на самом деле связано с алгеброй $C(M^L, K/L, Q)$.

Опишем элемент b подробнее. Транскрессию для главного Q -расслоения $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$ обозначим $\tau: P_Q \rightarrow \Omega(M_a)$; тогда $b = \tau(a)$ (это вытекает из данного выше описания транскрессии).

Элемент ∂a более подробно описывается следующим образом. Рассмотрим композицию отображения транскрессии $\tau_N: P_N \rightarrow H^*(BN)$ и гомоморфизма $i: P_Q \rightarrow P_N$. Полученное линейное отображение $\tau_N \circ i: P_Q \rightarrow H^*(BN) \simeq S(\bar{P}_N)$ и есть отображение ∂ .

Алгебру $C(M)$ можно записать по-другому. Поскольку $\Lambda(P_Q) \simeq H^*(Q)$, $\Lambda(P_K) \simeq H^*(K)$, $S(\bar{P}_N) \simeq S_N$, то при $N = N_K(L)$, $Q = N/L$ имеем

$$C(M) = \Omega(B) \otimes H^*(Q) \otimes H^*(K) \otimes S_N.$$

В [9] показано, что минимальная модель для многообразия M' (вычисленная через алгебру K -инвариантных дифференциальных форм на M') изоморфна минимальной модели для алгебры $C(M')$. В частности, когомологии алгебры $C(M')$ те же, что и для многообразия M' . Это дает возможность алгебраизировать в значительной степени вычисление когомологий эквиорбитных компактных однородных пространств.

Из приведенных выше рассуждений мы получили доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Пусть M – произвольное компактное однородное многообразие. Тогда существует компактное однородное многообразие M' , конечнолистно накрывающее M , алгебра вещественных когомологий $H^*(M')$ которого изоморфна алгебре когомологий алгебры Картана–Лосика $C(M')$,

$$C(M') = \Omega(M_a) \otimes H^*(Q) \otimes H^*(K) \otimes S_N.$$

Более того, минимальная модель для M' изоморфна минимальной модели $\text{Min}(C(M'))$ алгебры $C(M')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из вида дифференциала для алгебры Картана–Лосика следует, что главное для вычисления ее когомологий (а потому и когомологии однородного многообразия M') – это информация о когомологиях базы натурального расслоения и вид трансгрессий двух вспомогательных расслоений: главного $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$, соответствующего натуральному, и борелевского $Q \rightarrow M_c = K/L \rightarrow K/N$ для слоя M_c натурального расслоения.

Вид главного расслоения, соответствующего натуральному, исследован в следующем параграфе, где показано, что изучение таких расслоений сводится во многом к чисто алгебраической задаче, а потому и описание трансгрессии во многих частных случаях становится решаемой задачей. По поводу нахождения трансгрессии в борелевском расслоении отметим, что это задача другого рода, которой в общем случае мы здесь заниматься не будем. Она связана с общей задачей вычисления когомологий произвольных однородных пространств компактных полупростых групп Ли.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В общем случае для M и M' из теоремы 1 алгебры когомологий различны. Например, может оказаться, что размерности $\dim H^i(M')$ пространств когомологий сколь угодно велики при подходящем выборе M' , конечнолистно накрывающего заданное компактное однородное многообразие M . Однако если, например, фундаментальная группа $\pi_1(M)$ почти разрешима (т. е. имеет разрешимую подгруппу конечного индекса), то пространства когомологий $H^*(M')$ стабилизируются (см. [13]) и применять теорему 1 более продуктивно.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Переход к M' от исходного однородного пространства $M = G/H$ нужен для того, чтобы обеспечить эквиорбитность действия максимальной компактной подгруппы K . В [3] приведено достаточное условие эквиорбитности действия K уже на исходном многообразии G/H : должно быть $L \subset Z(P_0/H_0) \cdot L_0$, где $P = N_G(H_0)$ – нормализатор в G связной компоненты единицы H_0 стационарной подгруппы H , а $Z(P_0/H_0)$ – центр группы Ли P_0/H_0 . В частности, как показано в [3], это условие выполнено, если группа $\pi_1(M)$ не имеет кручения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Алгебра Картана при вычислении когомологий удобна не всегда. Например, для вычисления когомологий однородных многообразий вида K/L классическая алгебра Картана удобна, если подгруппа L не очень сложна или не очень велика (например, если она абелева). Для вычисления когомологий сфер алгебра Картана, конечно, менее удобна, чем прямое вычисление. Для особо больших L (например, для подгрупп максимального ранга) алгебра Картана также часто дает значительное упрощение вычислений. Те же соображения применимы и для приложений алгебры Картана–Лосика. Здесь

не всегда можно провести эффективно вычисление когомологий, поскольку трудности связаны с некоторыми свойствами как базы расслоения, так и слоя (к которому в точности применимы приведенные выше соображения).

Для компактных однородных многообразий, натуральное расслоение которых является главным (подробнее о таких многообразиях см. в § 3), алгебра Картана–Лосика тоже не дает значительных упрощений. В этом случае когомологии слоя (группы Ли) очевидны, когомологии базы могут быть сложными и необходимо учитывать структуру самого расслоения (например, через анализ соответствующего характеристического отображения).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Вместо алгебры $C(M)$ для вычисления алгебры когомологий можно использовать и некоторые “более экономные” алгебры (см., например, [10, ч. II]).

В некоторых частных случаях можно построить специальные варианты алгебры $C(M)$. Например, пусть фундаментальная группа $\pi_1(M)$ нильпотентна. Тогда M_a будет нильмногообразием (однородным пространством некоторой нильпотентной группы Ли), $M_a = N/\Gamma$, где Γ – решетка в нильпотентной односвязной группе Ли N . Как известно (см., например, [14]), минимальная модель для $\Omega(M_a)$ изоморфна алгебре когомологий $H^*(L(N))$ алгебры Ли $L(N)$ группы Ли N . Поэтому в определении алгебры $C(M)$ без ущерба для ее применений можно заменить алгебру $\Omega(M_a)$ конечномерной алгеброй $C^*(L(N))$ коцепей алгебры Ли $L(N)$. Точнее, речь идет о переходе от алгебры всех гладких дифференциальных форм на $M_a = N/\Gamma$ к подалгебре, состоящей из всех N -инвариантных дифференциальных форм. В результате получим аналог алгебры $C(M)$, в котором только один тензорный множитель – $S(\bar{P}_N)$ – бесконечномерен (но он все же конечнопорожден).

То же верно в случае, если M_a имеет вид R/Γ , где группа Ли R треугольна (т.е. все собственные значения линейных операторов ее присоединенного представления вещественны).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Алгебра $C(M)$ не является, вообще говоря, топологическим инвариантом многообразия M (даже при фиксировании некоторого M' , конечнолистно накрывающего M и имеющего натуральное расслоение). Однако ее минимальная модель (при фиксировании M') уже будет таким инвариантом.

В связи с понятием обобщенной алгебры Картана–Лосика докажем одно утверждение, полезное при изучении произвольных однородных пространств. Рассмотрим однородное пространство K/L полупростой компактной группы Ли K . Положим $N = N_K(L)$. Тогда имеем расслоение $Q = N/L \rightarrow K/L \rightarrow K/N$ (это борелевское расслоение для K/L). Оно играет важную роль при построении алгебры Картана–Лосика. Естественно поставить вопрос о тривиальности этого расслоения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Борелевское расслоение $Q = N/L \rightarrow K/L \rightarrow K/N$ будет нетривиальным, если его слой или базы нетривиальны (имеют положительную размерность).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что пространство K/L не диффеоморфно $Q \times K/N$. Для этого покажем, что алгебры когомологий $H^*(K/L)$

и $H^*(K/N) \otimes H^*(Q)$ (с вещественными коэффициентами) не изоморфны. Имеем

$$H^*(K/L) \simeq H(C(K, L, N)),$$

где

$$C(K, L, N) = \Lambda(P_Q) \otimes \Lambda(P_K) \otimes S(\bar{P}_N).$$

Отметим, что алгебра $\Lambda(P_Q)$ изоморфна алгебре когомологий $H^*(Q)$ компактной группы Ли $Q = N/L$.

Далее, имеем

$$H^*(K/N) \simeq H(C(K, N)),$$

где

$$C(K, N) = \Lambda(P_K) \otimes S(\bar{P}_N).$$

Сопоставляя указанные изоморфизмы и учитывая описание дифференциала для алгебр Картана (см. выше), получаем, что алгебры $H^*(K/L)$ и $H^*(K/N) \otimes H^*(Q)$ изоморфны (при $\dim(K/N) > 0$) тогда и только тогда, когда дифференциал $d: \Lambda(P_Q) \rightarrow S(\bar{P}_N)$ нулевой. Для $x \in P_Q$ по определению этого дифференциала имеем $dx = \overline{i(x)}$, где отображение $i: P_Q \rightarrow P_N$ пространств примитивных элементов порождено естественным эпиморфизмом $p: N \rightarrow Q = N/L$. Дифференциал d будет нулевым на P_Q тогда и только тогда, когда гомоморфизм алгебр когомологий $p^*: H^*(Q) \rightarrow H^*(N)$ нулевой. Но это возможно только тогда, когда алгебра Q тривиальна, или, что эквивалентно, слой борелевского расслоения нульмерен (см., например, [5]).

§ 2. Строение главного Q -расслоения

Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство односвязной группы Ли G , а K – максимальная компактная подгруппа в G . В этом параграфе мы изучим свойства главного Q -расслоения $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$, соответствующего натуральному расслоению для M (здесь $L = K \cap H$, $Q = N_K(L)/L$), и возможности редукции структурной группы. Это позволит проводить конкретные вычисления когомологий для отдельных классов компактных однородных многообразий на основе теоремы 1. Такого рода вычисления описываются в § 4. Мы будем обычно считать, что M K -эквиорбитно, т. е. натуральное расслоение существует уже для M (и переход к M' не нужен).

Поскольку группа Ли L компактна, то подмножество M^L (см. его описание выше), состоящее из неподвижных точек действия L на многообразии M , является гладким подмногообразием (возможно, несвязным).

Пусть $p: G \rightarrow G/H$ – естественная проекция на факторпространство, p является гладким локально тривиальным расслоением. Поэтому и прообраз $p^{-1}(M^L)$ подмногообразия M^L тоже будет гладким подмногообразием (возможно, несвязным).

Следуя работе автора [8], введем подмножество $P_M = \{g \in G \mid g^{-1}Lg \subset H\}$ в группе Ли G . В [8] были анонсированы некоторые свойства P_M , которые мы здесь сформулируем и докажем в виде одного утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство односвязной группы Ли G . Предположим, что естественное действие на M максимальной компактной подгруппы $K \subset G$ эквиорбитно. Тогда:

- а) $P_M = p^{-1}(M^L)$, и потому P_M – гладкое подмногообразие в G ;
- б) $P_M \supset H$ и $P_M/H = M^L$, и потому, в частности, все связные компоненты подмногообразия P_M одинаковой размерности;
- в) $K \cdot P_M = G$;
- г) $P_M \cap K = N_K(L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения M^L следует, что точка $m = gH \in G/H = M$ лежит в P_M тогда и только тогда, когда $LgH \subset gH$, или, что эквивалентно, когда $g^{-1}Lg \subset H$. Поэтому $gH \in M^L$ тогда и только тогда, когда $g \in P_G$, т.е. $P_M = p^{-1}(M^L)$, причем M^L естественным образом отождествляется с пространством орбит P_M/H естественного действия H на P_M . Тем самым доказаны включение и равенства из утверждений а) и б).

Все связные компоненты подмногообразия $M^L \subset M$ одинаковой размерности, и их число конечно (см. введение). Отсюда и из уже доказанной части утверждения б) вытекает, что все связные компоненты подмногообразия P_M одной размерности (равной $\dim(P_M/H)$).

Докажем теперь утверждение в). Рассмотрим отображение $\phi: K \times M^L \rightarrow M$, задаваемое следующим образом: $\phi(k, m) = k \cdot m$, $k \in K$, $m \in M^L$. Отображение ϕ сюръективно, это вытекает из эквиорбитности действия K на M и в более общей, чем рассматриваемая здесь, ситуации доказано в [9]. В данном случае $M^L = P_M/H$ и отображение ϕ имеет вид $(k, pH) \mapsto kpH$, где $p \in P_M$. Поэтому сюръективность ϕ означает, что $K \cdot P_M \cdot H = G$. Однако $P_H \supset H$, и потому очевидно, что $P_M \cdot H = P_M$. Поэтому получаем, что $K \cdot P_M = G$.

Докажем утверждение г). Положим $N = N_K(L)$; тогда нужно показать, что $K \cap P_M = N$. Из определений для P_M и N следует, что $N \subset P_M \cap K$. Докажем обратное включение.

Пусть $g \in P_M \cap K$. Поскольку $g \in P_M$, то $g^{-1}Lg \subset H$, но $g \in K$, а потому $g^{-1}Lg \subset K \cap H = L$. Тогда ясно, что $g^{-1}Lg = L$, и потому $g \in N = N_K(L)$. Получаем, что $P_M \cap K = N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Далее, так как M компактно, то число связных компонент подмножества P_M не более чем счетно (поскольку не более чем счетно число связных компонент подгруппы H , равное числу элементов группы $\pi_1(M)$).

Переходим к групповому описанию подмногообразия P_M . В [8] доказано, что $P_M = N_G(L) \cdot H$, если фундаментальная группа $\pi_1(M)$ многообразия M не имеет кручения. Здесь же мы докажем чуть более сильное утверждение и сразу для общего случая (так что условие на фундаментальную группу в указанном утверждении из [8] оказывается излишним).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M = G/H$ – компактное однородное пространство связной и односвязной группы Ли G , причем естественное действие на M максимальной компактной подгруппы $K \subset G$ эквиорбитно. Тогда $P_M = (N_G(L))_0 \cdot H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим все возможные связные компоненты P_M^i многообразия P_M . В силу предложения 2, в) имеем равенство $\bigcup_k P_M^i = G$. Одна из этих связных компонент содержит единичный элемент группы Ли G , обозначим ее $(P_M)_e$. Докажем, что $K \cdot (P_M)_e = G$.

Выше было отмечено, что все P_M^i имеют одну и ту же размерность и что их число не более чем счетно. Если эта размерность меньше размерности группы Ли G , то их объединение может не совпадать со всем пространством G , что противоречит доказанному выше. Поэтому все компоненты имеют ту же размерность, что и G . По условию группа Ли G связна, а потому должно быть $K \cdot P_M^i = G$ для всех i . В частности, $K \cdot (P_M)_e = G$.

Докажем теперь, что $(P_M)_e = ((N_G(L))_0 \cdot H)_0$. Эквиорбитность действия K на M (выполненная по предположению) эквивалентна (с точностью до перехода к конечнолистному накрытию над M) условию $L/L_0 \subset Z(P_0/H_0)$, где $P = N_G(H_0)$ (см. [3]). Поэтому подмножество $L \cdot H_0$ в рассматриваемом случае будет подгруппой Ли с конечным числом связных компонент, причем L будет в ней максимальной компактной подгруппой. В группе Ли с конечным числом связных компонент все максимальные компактные подгруппы сопряжены между собой (и потому сопряжены с L).

Рассмотрим действие элементов связного подмногообразия $(P_M)_e$ сопряжениями на группе Ли G . Покажем, что оно не выводит подгруппу Ли L за пределы группы Ли $L \cdot H_0$. Ясно, что это верно для пересечения L с H_0 . В силу своей связности $(P_M)_e$ тривиально действует на множестве связных компонент: пусть g_t – некоторая непрерывная кривая в G , тогда $g_t^{-1}Lg_t \cap H/g_t^{-1}Lg_t \cap H_0$ – непрерывно меняющееся подмножество конечного множества, т. е. оно постоянно. Отсюда следует, что L не выходит при указанном действии за пределы $L \cdot H_0$. Но тогда в рассматриваемом случае применимо соответствующее рассуждение из [8] (где оно использовалось в одном частном случае). А именно, для любого $g \in (P_M)_e$ рассмотрим подгруппу $g^{-1}Lg$, она, как и L , будет максимальной компактной в $L \cdot H_0$, а потому существует элемент $h \in L \cdot H_0$ такой, что $g^{-1}Lg = h^{-1}Lh$. Но тогда $gh^{-1} \in N_G(L)$, откуда и следует, что $(P_M)_e \subset ((N_G(L))_0 \cdot H)_0$. Обратное включение очевидно.

Получаем, что $(P_M)_e = ((N_G(L))_0 \cdot H)_0$. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Имеем очевидное включение $(N_G(H_0))_0 \subset (P_M)_e$. Если подгруппа L связна (так будет, например, если $\pi_1(M)$ без кручения), то в [15] доказано, что двойной нормализатор $P^2(H)$ содержится в P_M . Подгруппа $P^2(H)$ почти связна и почти содержит H (т. е. ее пересечение с H имеет в H конечный индекс).

Если в условиях теоремы 2 положить $G'_1 = (N_G(L))_0$, то полученная связная группа Ли G'_1 будет в силу утверждения этой теоремы транзитивна на M^L . Более того, будет транзитивна и группа Ли $G_1 = G'_1/L_0$. Стационарная подгруппа этого последнего действия имеет вид $H_1 = H \cap (N_G(L))_0/L_0$. В результате получаем такое следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 2 многообразие M^L однородно и его можно представить в виде $M^L = G_1/H_1$, где $G_1 = (N_G(L))_0/L_0$ – связная группа Ли, а $H_1 = H \cap (N_G(L))_0/L_0$ – ее замкнутая подгруппа Ли.

В силу следствия 1 главное Q -расслоение, соответствующее натуральному расслоению для исходного компактного однородного пространства, может быть записано в виде расслоения $Q \rightarrow G_1/H_1 \rightarrow M_a$ для компактного однородного пространства G_1/H_1 (но это расслоение не обязательно натуральное, так как

группа Ли Q может оказаться и не полупростой). Полезно отметить, что структурную группу натурального расслоения можно всегда редуцировать к связной группе Ли Q_0 (см. [3], а также рассуждения, приведенные ниже).

Рассмотрим некоторые частные случаи для следствия 1.

1. Если структурная группа Q (которая компактна и которую можно считать связной) полупроста, то группа Ли G_1 из следствия 1 почти односвязна (ее фундаментальная группа конечна), а главное расслоение $Q \rightarrow M^L \rightarrow M_a$ в данном случае будет натуральным расслоением для компактного однородного пространства $M^L = G_1/H_1$.

2. Если группа Q – тор (компактная абелева группа Ли), то группа Ли G_1 будет асферична. Известно строение произвольной асферичной группы Ли: ее полупростая часть локально изоморфна прямому произведению нескольких экземпляров группы $SL_2(\mathbb{R})$. Если дополнительно известно, что группа $\pi_1(M_a)$ разрешима, то группу Ли G_1 можно считать разрешимой (см. [6]), и потому M^L – солвмногообразие.

Перейдем теперь к краткому рассмотрению вопроса о возможности редукции структурной группы Q натурального расслоения.

Рассмотрим классифицирующее отображение $f: M_a \rightarrow BQ$, соответствующее натуральному расслоению. Имеем изоморфизмы гомотопических групп $\pi_i(BQ) \simeq \pi_{i-1}(Q)$. Поскольку Q – компактная группа Ли, то $\pi_0(Q)$ конечна, а $\pi_2(Q) = \{0\}$ (как и для всякой группы Ли). Поэтому получаем, что $\pi_1(BQ)$ конечна, а $\pi_3(BQ) = \{0\}$. Выше уже отмечалось, что можно редуцировать Q к Q_0 . Обсудим этот вопрос подробнее.

Рассмотрим вложение $i: Q_0 \hookrightarrow Q$ и индуцированное им отображение $Bi: BQ \rightarrow BQ_0$ классифицирующих пространств. Поскольку Q_0 связна, то пространство BQ_0 односвязно и потому Bi – универсальное накрытие (конечнолистное).

Рассмотрим индуцированный отображением f гомоморфизм фундаментальных групп $f_*: \pi_1(M_a) \rightarrow \pi_1(BQ)$. Ядро этого гомоморфизма – подгруппа конечного индекса в $\pi_1(M_a)$, так как $\pi_1(BQ)$ конечна. Пусть M'_a – многообразие, конечнолистно накрывающее M_a соответственно этой подгруппе конечного индекса. Тогда отображение f поднимается до отображения $f': M'_a \rightarrow BQ_0$. Индуцированное на M'_a главное Q -расслоение редуцируется тогда к Q_0 . Тем самым для подходящего M'_a получаем редукцию Q к Q_0 .

Ту же редукцию можно произвести и по-другому. Для этого запишем M в виде $M = K/L \times_Q M^L$ и положим $M' = K/L \times_{Q_0} (M^L)_e$.

В общем случае полученная связная структурная группа Q_0 может оказаться совершенно произвольной компактной связной группой Ли. Рассмотрим один важный частный случай, когда она полупроста. В этом случае ее фундаментальная группа конечна (это характеристическое свойство). Выясним, что можно сделать в этом случае для упрощения структурной группы. Нельзя ли перейти от Q к ее универсальной накрывающей (односвязной полупростой компактной группе Ли)? В общем случае, как известно, для этого имеются определенные препятствия. Это препятствие хорошо известно для случая перехода от группы $SO(n)$ к $Spin(n)$, ее двулистно накрывающей.

Пусть $\tilde{Q}$ – универсальная накрывающая группа для Q . Тогда имеем точную последовательность $\{e\} \rightarrow Z \rightarrow \tilde{Q} \rightarrow Q \rightarrow \{e\}$; здесь $Z \simeq \pi_1(Q)$. Этой

точной последовательности соответствует точная когомологическая последовательность [5, с. 305]

$$H^1(M_a, Z) \rightarrow H^1(M_a, \tilde{Q}) \rightarrow H^1(M_a, Q) \rightarrow H^2(M_a, Z).$$

Отметим, что $H^1(M_a, \tilde{Q})$ изоморфно $[M_a, B\tilde{Q}]$ (множеству гомотопических классов непрерывных отображений), аналогично, $H^1(M_a, Q) \simeq [M_a, BQ]$. Нас интересует переход от $H^1(M_a, Q)$ к $H^1(M_a, \tilde{Q})$.

Для группы $H^2(M_a, Z)$, которой оканчивается приведенная выше точная когомологическая последовательность, имеем в силу теоремы об универсальных коэффициентах следующую точную последовательность:

$$\{0\} \rightarrow \text{Ext}(H_1(M_a), Z) \rightarrow H^2(M_a, Z) \rightarrow \text{Hom}(H_2(M_a), Z) \rightarrow \{0\}.$$

Мы видим, что для перехода от Q к Q_0 имеется препятствие, лежащее в $H^2(M_a, Z)$. В общем случае обратить его в нуль переходом к подходящему M' нельзя.

Отметим, что указанное препятствие $c \in H^2(M_a, Z) \simeq H^2(M_a, \pi_1(Q))$ можно рассматривать как препятствие к построению сечения на 2-остове базы M_a (см. [3])

Перечислим некоторые возможные случаи редукции структурной группы натурального расслоения к $\{e\}$ (см. [3]). Эта редукция возможна в следующих ситуациях:

- 1) подгруппа L имеет максимальный ранг в K (что эквивалентно положительности эйлеровой характеристики многообразия K/L);
- 2) алгебра Ли l подгруппы L является максимальной подалгеброй в алгебре Ли k группы K (так как здесь $N_k(l) = l$);
- 3) группа K максимальна среди компактных групп Ли, транзитивных и локально эффективных на K/L (так как если $\dim(N_K(L)/L) > 0$, то действие K на K/L допускает расширение; см. [16]).

Докажем теперь одно полезное представление для группы Ли $Q_0 = (N_K(L)/L)_0$ – структурной группы натурального расслоения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть L – связная замкнутая подгруппа в компактной связной группе Ли K . Тогда группы Ли $(N_K(L)/L)_0$ и $(Z_K(L)/Z(L))_0$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ясно, что $Z_K(L) \cap L = Z(L)$, то $Z_K(L)/L$ – подгруппа в $N_K(L)/L$. Докажем, что связные компоненты единицы у этих двух групп на самом деле совпадают, т.е. $Z_K(L)/L$ – открытая подгруппа в $N_K(L)/L$.

Пусть $g \in N_K(L)$, тогда $gLg^{-1} = L$ и g порождает автоморфизм $\phi(g) \in \text{Aut}(L)$. Если $g \in (N_K(L))_0$, то $\phi(g) \in (\text{Aut}(L))_0$.

Рассмотрим представление компактной связной группы Ли K в виде (почти прямого) произведения $L = S \cdot T$ полупростой компактной группы Ли S и тора T . Группа $\text{Aut}(T)$ дискретна, а потому в силу полупростоты группы S получаем, что $(\text{Aut}(L))_0$ совпадает с группой внутренних автоморфизмов $\text{Int}(L)$. Поэтому получаем, что $\text{Im}(\phi) \subset \text{Int}(L)$. Но тогда существует такой элемент $l_0 \in L$, что для всех $l \in L$ имеем $glg^{-1} = l_0 l l_0^{-1}$. Поэтому $l_0^{-1}g \in Z_K(L)$,

а значит, $g \in Z_K(L) \cdot L$. В результате получаем, что

$$(N_K(L)/L)_0 = (N_K(L))_0/L \subset Z_K(L) \cdot L/L = Z_K(L)/Z(L).$$

Отсюда вытекает утверждение предложения.

Отметим, что утверждение, аналогичное предложению 3, справедливо и для компактных алгебр Ли, а потому на самом деле условие замкнутости L в K несущественно.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Группа $N_K(L)/L$ конечна тогда и только тогда, когда $\dim(Z_K(L)) = \dim Z(L)$.*

Тем самым вопрос о конечности естественной структурной группы $Q = N_K(L)/L$ натурального расслоения сводится к изучению $Z_K(L)$. В частности, натуральное расслоение можно считать тривиальным, если $\dim(Z_K(L)) = \dim Z(L)$.

Рассмотрим теперь некоторые дополнительные возможности для редукции главного расслоения, соответствующего натуральному расслоению компактного однородного пространства.

В [17, теорема 4] доказано, в частности, следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть M – компактное однородное многообразие. Тогда существует однородное многообразие M' , конечнолистно накрывающее M и имеющее представление $M' = G_1/H_1$ такое, что структурная группа натурального расслоения для M' редуцируется к структурной группе K_1 (максимальной компактной подгруппе в G_1) расслоения $K_1 \rightarrow G_1/\Gamma_1 \rightarrow K_1 \setminus G_1/\Gamma_1 = M'_a$, где группа Ли G_1 конечнолистно накрывается группой Ли $(N_{G'}(H'_0))_0/H'_0 \times \mathbb{R}^n$ при некотором $n \geq 0$, а Γ_1 – образ решетки $H' \cap (N_{G'}(H'_0))_0/H'_0 \times \mathbb{Z}^n$ при этом накрытии.*

В частности, база натурального расслоения для M' в силу предложения 4 может быть представлена в виде $K \setminus G/\Gamma$. Этот факт дал основу для подробного изучения базы натурального расслоения (см., например, [2]). Редукция структурной группы, полученная в [17], до сих пор использовалась незначительно. В настоящей статье это упущение будет несколько исправлено.

Отметим, что группа Ли G_1 , фигурирующая в предложении 4, не обязательно односвязна, и потому группа K_1 не обязательно полупроста. Поэтому указанное расслоение для однородного пространства G_1/Γ_1 не обязательно является натуральным. Кроме того, переход к K_1 есть редукция структурной группы натурального расслоения для исходного M' , и потому если K_1 не удастся редуцировать к $\{e\}$, то это вовсе не означает, что невозможна редукция к $\{e\}$ структурной группы исходного натурального расслоения. Например, для однородного многообразия $M = S^3 \times F_g$, $g \geq 2$ (см. выше), группа Ли G_1 в предложении 4 оказывается изоморфной $SL(2, \mathbb{R})$, здесь $K_1 = SO(2)$ и расслоение

$$SO(2) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Gamma_1 \rightarrow SO(2) \setminus SL(2, \mathbb{R})/\Gamma_1$$

нетривиально (см. [3]). Однако исходное натуральное расслоение для указанного M тривиально. Несмотря на это возможность редукции к K_1 часто оказывается очень полезной, так как значительно упрощает изучение исходного натурального расслоения.

Для расслоения вида $K_1 \rightarrow G_1/\Gamma_1 \rightarrow K_1 \setminus G_1/\Gamma_1 = M'_a$ можно указать условия его тривиальности в некоторых частных случаях.

В [6, предложение 6.3] доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть R – разрешимая связная группа Ли, K – максимальная компактная подгруппа в R , а Γ – решетка в R , свободная от кручения. Рассмотрим однородное пространство $M = R/\Gamma$. Тогда K является структурной группой расслоения $K \rightarrow M \rightarrow K \setminus R/\Gamma$, причем редукция этой структурной группы к $\{e\}$ для некоторого M' , конечнолистно накрывающего M , существует тогда и только тогда, когда группа Ли R линейна.

Линейность группы Ли R означает, что она имеет точное конечномерное линейное представление. Имеется чисто алгебраический критерий линейности связной группы Ли – это возможность ее разложения в полупрямое произведение подгруппы K и некоторого связного нормального делителя (подробное обсуждение этой темы см. в [6]).

На самом деле в [6] введен некий характеристический класс $c(R)$, который является препятствием для линейности разрешимой группы Ли R . Он естественно связан с характеристическими классами, фигурировавшими выше при изучении алгебры Картана–Лосика.

Для разрешимых однородных многообразий M всегда можно добиться, чтобы группа Ли G_1 из предложения 4 была связна и разрешима, а решетка Γ_1 – свободна от кручения. Поэтому для таких M в полной мере применимо предложение 5, что дает достаточное условие тривиальности натурального расслоения (необходимым оно не будет в силу сделанного выше общего замечания). Более того, в [6] доказано (теорема 2.2 для некоторых – правильных – действий и теорема 6.1 для произвольных), что достаточным условием тривиальности натурального расслоения для разрешимых однородных пространств является линейность радикала группы G_1 , описанной в предложении 4. Условие линейности радикала не является необходимым условием тривиальности натурального расслоения, но довольно близко к нему.

Еще один специальный случай – полупростые однородные многообразия M . Для них группу Ли G можно считать полупростой (см. [7]).

Описание главных расслоений, соответствующих натуральным для полупростых однородных пространств, вытекает из [7, ч. I, теорема 4.1] (с уточнениями, сделанными в [7, ч. II, приложение Б]). Мы будем пользоваться обозначениями и понятиями, введенными и объясненными в [7]. Напомню только, что в [7] описание полупростых однородных пространств полупростых групп Ли ведется в терминах схем Сатаке $\Pi_0 \cup \Pi_1$ полупростых алгебр Ли, подсистем Γ простых корней в схемах Сатаке и параболических подгрупп.

Пусть $M = G/H$ – полупростое однородное пространство полупростой группы Ли G . Тогда в силу [7] существует подсистема корней $\Gamma \subset \Pi_1$ такая, что $H_0 = W \cdot S' \cdot N_\Gamma$, где N_Γ – нильрадикал параболической подгруппы, соответствующей системе простых корней Γ , S' – полупростой нормальный делитель в S_Γ (некомпактной части полупростой части указанной параболической подгруппы), а W – некоторая равномерная подгруппа в $C_\Gamma \cdot E_\Gamma$ (равномерная подгруппа – это замкнутая подгруппа с компактным факторпространством); здесь C_Γ – картановская подгруппа в той же параболической подгруппе, а E_Γ – компактная часть полупростой ее части. Подгруппа C_Γ абелева и разлагается

в прямое произведение двух замкнутых подгрупп C_Γ^+ и C_Γ^- , первая из которых односвязна, а вторая компактна (т.е. является тором). Здесь группу G_1 (описанную выше) можно взять изоморфной S_Γ/S' (эта полупростая группа Ли тесно связана с исходной группой Ли G).

Условия тривиальности расслоения $K_1 \rightarrow G_1/\Gamma_1 \rightarrow K_1 \setminus G_1/\Gamma_1 = M'_a$ в данном частном случае изучались в работах [7], где этот вопрос связывается с вычислением характеристической алгебры $C(S, \Gamma)$, Γ – решетка в полупростой группе Ли S . Алгебра $C(S, \Gamma)$ есть образ гомоморфизма когомологий, индуцированного непрерывным отображением классифицирующих пространств $B\Gamma \rightarrow BS$, порожденного вложением $\Gamma \hookrightarrow S$. Если она тривиальна, то расслоение оказывается кохомологически тривиальным (т.е. пространство расслоения имеет те же кохомологии, что прямое произведение базы и слоя). В частности, в [7] доказано, что если S комплексна, то характеристическая алгебра тривиальна (и потому расслоение кохомологически тривиально). Тривиальность характеристической подалгебры также имеет место для случаев, когда S имеет тип $SL(2n+1, \mathbb{R})$ или $E_6 IV$. Для всех других простых односвязных групп Ли S с конечным центром характеристическая алгебра ненулевая, она явно вычислена в [7]. В [7, ч. II] частично изучены и односвязные группы Ли S с бесконечным центром (например, характеристическая алгебра здесь тривиальна, если S односвязная типа $so(2, 2n-1)$).

В силу теоремы 1 при равенстве нулю характеристической подалгебры будет кохомологически тривиально не только соответствующее главное расслоение, но и исходное натуральное расслоение. В частности, если группа Ли $(N_G(H_0)/H_0)/H_0$ полупроста и комплексна, то из сказанного выше следует, что алгебра $H^*(M)$ как градуированное пространство изоморфна тензорному произведению $H^*(M_c) \otimes H^*(M_c)$.

§ 3. Главные однородные многообразия

Компактное однородное пространство $M = G/H$ назовем *главным*, если $M^L = M$.

Компактное многообразие называется *главным однородным многообразием*, если на M существует транзитивное действие некоторой связной группы Ли G , относительно которого M является главным однородным пространством.

Другими словами, компактное однородное пространство $M = G/H$ главное, если действие на M подгруппы $L = K \cap H$ максимальной компактной подгруппы K в G тривиально. Поэтому здесь L нормальна в G . Поскольку мы предполагаем, что транзитивное действие G на M локально эффективно, то для главного однородного многообразия должно быть $L_0 = \{e\}$. В частности, получаем, что подгруппа $K \cap H$ конечна (на самом деле это условие не только необходимо, но и достаточно для главной однородности).

Если $M = G/H$ – главное однородное пространство, то группа Ли $Q = N_K(L)/L$ действует на M , причем свободно. Это действие превращает натуральное расслоение для M в Q -главное.

Применение алгебры Картана–Лосика для вычисления когомологий главных однородных многообразий эффективно, но при этом не всегда можно получить

простой ответ, поскольку необходима информация о структуре главного расслоения. Этим объясняется, в частности, наш интерес к главным однородным многообразиям.

Рассмотрим некоторые примеры главных однородных многообразий.

ПРИМЕР 1. Пусть M – произвольное компактное однородное многообразие. Тогда для некоторого M' , конечнолистно накрывающего M , многообразие $(M')^{L'}$ будет главным однородным многообразием (это вытекает из следствия 1 и [3]).

ПРИМЕР 2. Компактные однородные многообразия вида $M = G/\Gamma$ (где Γ – решетка в группе Ли G) являются главными однородными многообразиями. Действительно, переходя к подгруппе конечного индекса в Γ , мы можем считать, что $\Gamma \cap K \subset Z(G)$ (здесь K – максимальная компактная подгруппа в группе Ли G ; см. [3]), но тогда естественное действие компактной группы Ли $K' = K/K \cap Z(G)$ на $M = G'/\Gamma'$, где $G' = G/\text{Tors}(\Gamma \cap Z(G))$, свободно.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим однородное многообразие $M = S^3 \times F_g$ – прямое произведение трехмерной сферы и замкнутой ориентируемой поверхности F_g рода $g \geq 2$. Однородность этого многообразия была впервые доказана в [3], где построено транзитивное действие на нем группы Ли $\text{SL}(3, \mathbb{R})$ (универсальной накрывающей для группы Ли $\text{SL}(3, \mathbb{R})$). В этой конструкции максимальная компактная подгруппа есть $\text{SU}(2)$ и ее пересечение со стационарной подгруппой транзитивного действия тривиально. Именно поэтому естественное действие $\text{SU}(2)$ на M свободно, т. е. мы имеем главное однородное многообразие.

Натуральное расслоение здесь оказывается тривиальным (см. [3]). Интересно отметить, что это однородное многообразие нельзя представить в виде G/Γ ни для какой группы Ли G и решетки Γ в ней. Это нетрудно доказать, проанализировав возможный вид пятимерной группы Ли G и решеток в ней. Поэтому класс главных однородных пространств шире его подкласса, указанного в примере 2.

ПРИМЕР 4. Главное однородное пространство компактной полупростой группы Ли K всегда диффеоморфно (с точностью до конечнолистного накрытия) некоторой компактной полупростой группе Ли (в частности, диффеоморфно исходной группе Ли K , если она действует эффективно).

ПРИМЕР 5. Асферичное однородное многообразие всегда является главным (так как натуральное расслоение здесь вырождается, слой его тривиален).

ПРИМЕР 6. Если слой натурального расслоения для компактного однородного многообразия M трехмерен, то M – главное однородное многообразие [18]. Двумерный и четырехмерный слой не могут быть диффеоморфны компактной группе Ли никогда (они имеют ненулевую эйлерову характеристику; см. подробнее ниже и [3]), и потому M с такими слоями натурального расслоения никогда главным не будет.

Естественно возникает вопрос о топологической характеристизации главных однородных многообразий среди всех компактных однородных многообразий. Очевидно, что для главного однородного многообразия M слой натурального расслоения диффеоморфен группе Ли. База натурального расслоения всегда асферична, поэтому универсальное накрывающее $\tilde{M}$ главного однородного

многообразие M гомотопически эквивалентно некоторой компактной полупростой группе Ли (в частности, эйлерова характеристика для $\bar{M}$ равна нулю). Можно предположить, что верно и обратное. При этом в качестве частного случая возникает утверждение, справедливость которого мы ниже рассмотрим более подробно.

ГИПОТЕЗА. *Если односвязное компактное однородное многообразие гомотопически эквивалентно группе Ли, то оно диффеоморфно этой группе Ли.*

В общем случае справедливость этой гипотезы не ясна. Однако из [19] вытекает ее доказательство в некоторых важных частных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть M – компактное однородное многообразие, гомотопически эквивалентное односвязной простой компактной группе Ли K , не изоморфной $\mathrm{Spin}(2n)$ (т. е. не типа D_n). Тогда M диффеоморфно группе Ли K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M = G/H$, где G – некоторая связная группа Ли. Так как M односвязно, то мы можем считать, что G компактна. Точнее, на M в силу теоремы Монтгомери (см. [2]) будет транзитивна максимальная полупростая компактная подгруппа группы Ли G , на которую мы и заменим G . Далее, можно считать, что в K нет нормальных делителей, транзитивных на M (если такие есть, мы просто заменим G на один из них, например на минимальный). В силу результата из [19] (где изучен более общий случай, когда вместо K рассматриваются ее факторы по торам) группа Ли G будет изоморфна K , а $H = \{e\}$, т. е. M диффеоморфно K .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Условие $K \neq D_n$ существенно для метода доказательства, примененного в [19], где используется различие степеней примитивных образующих x_i алгебры когомологий, а для D_n в размерности $2n - 1$ имеется две образующие. Более того, для $K = \mathrm{SO}(8)$ (т. е. для D_4) существует транзитивное действие группы Ли $\mathrm{SO}(8) \times \mathrm{SO}(7)$, для которого не существует транзитивных на M нормальных делителей. Чтобы убедиться в этом, отметим известный факт: пространство простой группы Ли $\mathrm{SO}(8)$ разложимо в прямое произведение двух многообразий (это единственный пример такого рода разложимости): $\mathrm{SO}(8) = S^7 \times \mathrm{SO}(7)$. Если теперь возьмем естественное транзитивное действие группы $\mathrm{SO}(8)$ на S^7 и прямое произведение его на действие группы $\mathrm{SO}(7)$ самой на себе сдвигами, то получим, как легко понять, требуемое действие группы Ли $\mathrm{SO}(8) \times \mathrm{SO}(7)$ на $\mathrm{SO}(8)$.

Подобные эффекты для D_n при $n > 4$ автору не известны.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В [19] отмечено, что в случае простых групп Ли K типа D_{2m+1} все же можно доказать некоторое утверждение о структуре групп Ли, транзитивных на K . Однако это утверждение не решает нашей проблемы, поэтому мы его здесь не рассматриваем.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. В [5, теорема 4, с. 323] рассмотрен вопрос о простых группах Ли, транзитивных на простых компактных группах Ли. Там же доказано, что если простая компактная группа Ли транзитивна на некоторой простой компактной группе Ли, то она ей локально изоморфна (фактически доказано, что их односвязные накрывающие изоморфны). Однако ясно, что на простой группе Ли могут транзитивно действовать и непростые группы Ли. Например,

группа $K \times K$ транзитивно действует на K (правыми и левыми сдвигами), стационарная подгруппа этого действия изоморфна K (вложенной диагонально).

Для главного компактного однородного пространства G/H односвязной группы Ли G пересечение $K \cap H$ конечно (и центрально в G), и потому подгруппа H_0 не имеет нетривиальных компактных подгрупп. Отсюда вытекает, что G либо разрешима, либо представляется в виде полупрямого произведения: $G = S \cdot R$ (ее разложения Леви), где R – ее радикал, а полупростая часть S есть прямое произведение нескольких экземпляров группы Ли $\mathcal{A}$ – универсальной накрывающей для группы Ли $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Группа $\mathcal{A}$ нелинейна (не имеет конечномерного точного линейного представления), поэтому если группа Ли G или хотя бы ее полупростая часть S линейны (допускают точное конечномерное линейное представление), то H_0 обязательно разрешима.

Если главное однородное многообразие M разрешимо (т.е. компонента M_s вырождается в точку; см. введение), то $S'_\Gamma \subset H_0$ (мы используем обозначения, введенные в [6], здесь Γ – некоторая система простых корней, а S'_Γ – некоторая полупростая подгруппа, построенная с помощью этой системы корней), и потому либо S'_Γ тривиальна, либо есть прямое произведение нескольких экземпляров группы $\mathcal{A}$. В последнем случае Γ состоит из нескольких изолированных корней (не соединенных между собой стрелками на схеме Сатаке), причем рядом с ними не может быть и черных корней. Это позволяет на основе результатов из [6] подробно описать соответствующие компактные однородные многообразия с точностью до конечнолистного накрытия.

Группа Q полупроста, и на M транзитивна группа Ли $Q \cdot R$, где R – радикал группы Ли G . В силу предложения 5 и [6] в данном случае натуральное расслоение тривиально и некоторое M' , конечнолистно накрывающее M , диффеоморфно прямому произведению $Q \times R_1/D_1$, где Γ_1 – решетка в некоторой односвязной разрешимой группе Ли R_1 . Здесь R_1/D_1 – база натурального расслоения для M' .

Пусть главное однородное многообразие M полупросто. Тогда на M транзитивна полупростая часть S группы Ли G (см. [7]), и потому мы можем считать, что G полупроста. В этом случае H_0 содержит нильрадикал некоторой параболической подгруппы N_Γ , где Γ – некоторая подсистема системы простых корней (подробности см. в [7]). Простейший интересный случай – когда H_0 унипотентна, при этом $H_0 = N_\Gamma$. Более общий случай – когда H_0 разрешима, при этом $N_\Gamma \subset H_0 \subset A \cdot N_\Gamma$, где A – расщепимая картановская подгруппа.

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы 4.1 из [7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Полупростое компактное однородное пространство $M = G/H$ полупростой группы Ли G является главным тогда и только тогда, когда $W \cap C_\Gamma^+ \cdot E_\Gamma = \{e\}$ (здесь используются введенные выше обозначения).*

Отметим, что указанные в предложении 7 подгруппы W всегда можно построить. Простейший случай – когда $W = C_\Gamma$, при этом соответствующее однородное пространство G/H является в каком-то смысле стандартным главным однородным пространством; другие главные однородные пространства той же полупростой группы Ли G с той же подсистемой корней Γ получаются из него своего рода деформацией (сдвигом W вдоль $C_\Gamma^+ \cdot E_\Gamma$). Натуральное расслоение

для таких G/H описывается в чисто алгебраических терминах, поэтому, в частности, вычисление алгебры Картана–Лосика для полупростых компактных однородных пространств можно сделать достаточно эффективно (хотя здесь мы этим заниматься не будем).

Примером главного полупростого однородного пространства является уже упоминавшееся многообразие $S^3 \times F_g$ с построенным на нем в [2] транзитивным действием группы Ли $SL(3, \mathbb{R})$.

В [3] доказано, что если группа Ли G полупроста, имеет тривиальный центр и не имеет компактных факторов, то для $M = G/\Gamma$, где Γ – дискретная стационарная подгруппа, главное расслоение $K \rightarrow M \rightarrow M_a$ тривиально тогда и только тогда, когда многообразие M_a параллелизуемо.

Важный частный случай – когда G проста. В этом случае K также проста или является прямым произведением двух простых компактных групп Ли (это вытекает из классификации простых вещественных групп Ли; см., например, [2]). Интересно, что для каждого типа A, B, C, D, E, F, G простых вещественных групп Ли только для одного подтипа максимальная компактная полупростая подгруппа не проста, это будут группы $SU(p, q)$, $SO(p, q)$, $Sp(p, q)$ и исключительные группы $E_6\text{II}$, $E_7\text{VI}$, $E_8\text{IX}$, $F_4\text{I}$, G_2 (в обозначениях из [2]). Описание главных компактных однородных пространств простых групп Ли можно провести довольно подробно, используя результаты работы [7].

Интересен вопрос о том, какие главные расслоения $Q \rightarrow E \rightarrow B$ соответствуют натуральным расслоениям. База однородных пространств M достаточно подробно описана (через структурное расслоение; см. введение). Из теоремы 2 видно, что пространство расслоения E должно быть однородно (возможно, после перехода к подходящему конечнолистному накрытию). Для произвольных расслоений с заданными Q и $B = M_a$ это имеет место не всегда. Например, пусть $Q = T$ – тор, а $M_a = M_s$ (т. е. разрешимая компонента вырождена в точку; см. введение). В [7] показано, что не всегда даже прямое произведение $T \times M_s$ будет однородным. Еще один пример такого рода: пусть $M_a = F_g$ – ориентируемая поверхность некоторого рода $g \geq 2$, а $Q = Sp(n)$. Тогда $F_g \times Sp(n)$ однородно. Более того, для любой простой компактной группы Ли K многообразие $F_g \times K$ (тривиальное главное расслоение) однородно тогда и только тогда, когда K локально изоморфна $Sp(n)$ [7], более того, для любой простой K главное расслоение над F_g тривиально.

§ 4. Некоторые специальные классы компактных однородных многообразий

Здесь мы применим полученные выше результаты в нескольких частных случаях.

Предположим вначале, что для компактного однородного многообразия M структурная группа Q натурального расслоения полупроста (другой крайний частный случай, когда она абелева, рассмотрен ниже).

Если $\dim M_a = 1$, то в [3] доказано, что всегда натуральное расслоение тривиально. Это следует из того, что, считая группу Ли Q связной, мы получаем, что классифицирующее пространство BQ односвязно, а потому классифицирующее отображение $M_a \rightarrow BQ$ гомотопно тривиальному. Итак, в этом случае для подходящего M' , конечнолистно покрывающего M , имеем $M' = S^1 \times M_c$,

и вычисление когомологий сводится к их вычислению для M_c (например, с использованием стандартной теоремы Картана).

Пусть теперь $\dim M_a = 2$. Как было показано в § 2, имеется препятствие $c \in H^2(M_a, Z)$ для перехода от группы Q к ее универсальной накрывающей. Но переход к конечнолистному накрытию над поверхностью M_a действует на соответствующие двумерные когомологии (с коэффициентами в $Z = \pi_1(Q)$) как умножение на степень накрытия. Поскольку группа Z конечна (ибо S полупроста), то умножение на порядок этой группы аннулирует препятствие. Тем самым переход к конечнолистному накрытию над поверхностью M_a позволяет заменить структурную группу на односвязную. Однако тогда 2-остов пространства BQ можно считать тривиальным (т. е. точкой), и потому классифицирующее отображение $M_a \rightarrow BQ$ гомотопно тривиальному. Следовательно, в рассматриваемом случае если Q полупроста, то натуральное расслоение тривиально.

При $\dim M_a = 3$ для полупростой Q натуральное расслоение тоже можно сделать тривиальным. Чтобы убедиться в этом, будем рассуждать так же, как и выше. Только добавим, что для трехмерного M_a пространство когомологий H^2 изоморфно пространству одномерных гомологий H_1 , и потому препятствие c также можно аннулировать переходом к конечнолистному накрытию. Поэтому и здесь Q можно считать односвязной. Но тогда $\pi_i(Q) = \{0\}$ при $i = 1, 2$, а потому $\pi_i(BQ) = \{0\}$ при $i = 1, 2, 3$. Отсюда вытекает, что 3-остов у BQ можно стянуть в точку, и потому классифицирующее отображение трехмерного многообразия M_a в BQ гомотопно тривиальному. В результате нами доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если структурная группа Q натурального расслоения полупроста, то при $\dim M_a \leq 3$ натуральное расслоение тривиально и подходящее M' , конечнолистно накрывающее M , диффеоморфно $M_c \times M_a$.*

При $\dim M_a \geq 4$ редукции структурной группы, даже полупростой, к $\{e\}$ в общем случае добиться уже невозможно. Отметим, что для отдельных классов компактных однородных многообразий на возможный вид группы Q налагаются некоторые дополнительные ограничения. Например, если M полупросто, то на возможный вид Q налагаются очень сильные ограничения (явно указанные в [7]).

Интересен и другой крайний случай: когда структурная группа Q абелева, т. е. является тором. Например, так будет для случая, когда M асферично или когда оно разрешимо (т. е. когда $\pi_1(M)$ имеет разрешимую подгруппу конечного индекса). В этом случае явный вид трансгрессии (на которой основано вычисление когомологий, проведенное выше) был описан ранее. Поскольку Q – тор, то в K существует подгруппа N , содержащая L в качестве нормальной подгруппы, причем $N/L = Q$ – тор. Рассмотрим расслоение $Q \rightarrow K/L \rightarrow K/N$ (это борелевское расслоение для однородного пространства K/L ; см. введение). Оно задается характеристическим классом $c \in H^1(K/N, T) \simeq H^2(K/N, \mathbb{Z}^l)$, где $l = \dim Q$.

Пусть $N_K(L)/L = Q$ абелева. Если L связна, то и Q можно считать связной. Тогда нетрудно показать, что группа Ли $N_K(L)$ (которую в силу сказанного можно считать связной, заменив ее в случае необходимости на ее связную компоненту единицы) может быть разложена в прямое произведение $Q \times L$ (если N

абелева, то это хорошо известный факт, а в общем случае L будет содержать полупростую часть группы N , и потому здесь все сводится к разложению тора). Поэтому BN гомотопически эквивалентно (или даже гомеоморфно) прямому произведению $BL \times BQ$. Это разложение вносит в структуру алгебры Картана–Лосика дополнительные упрощения.

Рассмотрим чуть подробнее случай, когда однородное многообразие M разрешимо. В [6] доказано, что в этом случае Q всегда можно редуцировать к некоторому тору T . База M_a в этом случае – солвмногообразие вида R/Γ , где Γ – решетка в односвязной разрешимой группе Ли R . В [6] доказано, что любое главное T -расслоение над M_a соответствует некоторому натуральному расслоению (для некоторого компактного однородного разрешимого многообразия).

При вычислении когомологий можно рассмотреть несколько важных частных случаев. Если $\pi_1(M)$ нильпотентна, то $M_a = N/\Gamma$ – нильмногообразие, и потому применим тот вариант алгебры Картана–Лосика, о котором было сказано выше (где вместо $\Omega(M_a)$ используется конечномерная алгебра коцепей на нильпотентной алгебре Ли группы Ли N). Аналогичная возможность имеется для некоторых разрешимых R : для треугольных. В этом случае также можно заменить $\Omega(M_a)$ на алгебру коцепей, принадлежащую соответствующей алгебре Ли.

В качестве примера отметим, что когомологии одного разрешимого компактного однородного пространства M , рассмотренного в [6], фактически были вычислены с помощью “кустарного аналога” алгебры Картана–Лосика (в очень частном случае). Натуральное расслоение для этого M имеет вид $V_{4,2} \rightarrow M \rightarrow T^2$, структурная группа изоморфна $SO(2)$. Оказалось, что натуральное расслоение в этом случае нетривиально (в сильном смысле), т.е. M не диффеоморфно прямому произведению $V_{4,2}$ и T^2 . При $n \geq 5$ оказывается, что натуральное расслоение когомологически тривиально (это легко доказать и непосредственно, и на основе алгебры Картана–Лосика), а также что рациональная минимальная модель у этого M та же, что у прямого произведения. На самом деле можно доказать (расширив структурную группу $SO(2)$), что при $n \geq 5$ натуральное расслоение тривиально в прямом смысле этого слова (доказательство требует дополнительных соображений и здесь не приводится).

Компактная связная группа Ли Q есть почти прямое произведение тора и полупростой компактной группы Ли, т.е. $Q = T \cdot Q_s$ – произведение двух нормальных подгрупп: тора T и полупростой группы Q_s , пересечение которых конечно. Добиться того, чтобы это произведение оказалось прямым в общем случае, невозможно.

Рассмотрим теперь случаи малых размерностей структурной группы Q натурального расслоения.

Если $\dim Q = 0$, то Q конечна, и потому после перехода к подходящему конечнолистному накрытию мы можем считать, что натуральное расслоение тривиально.

При $\dim Q = 1$ группа Q имеет подгруппу конечного индекса, изоморфную $SO(2)$, к которой после подходящего конечнолистного накрытия и редуцируется структурная группа натурального расслоения.

Главные $SO(2)$ -расслоения задаются своими двумерными характеристическими классами. Рассмотрим подробнее вычисления с алгеброй Картана–Лосика в этом случае. Здесь P_Q одномерно, его образующая имеет степень 1.

Действие дифференциала алгебры Картана–Лосика на P_Q в данном случае описывается очень просто: образующую дифференциал переводит в сумму двух характеристических классов – элементов пространств $H^2(M_a)$ и $H^2(K/N)$ соответственно. Эти характеристические классы соответствуют двум $SO(2)$ -расслоениям: главному над M_a , соответствующему натуральному расслоению, и борелевскому. Второй характеристический класс обычно находится без труда, а первый из них требует большего внимания, так как связан с неодносвязным однородным многообразием M^L . Оба этих характеристических класса – это классы Черна, они являются образами универсальных классов Черна (образующих одномерной алгебры $H^*(BSO(2))$) при отображении пространств когомологий, индцированном классифицирующим отображением $(X \rightarrow BSO(2) = \mathbb{C}P^\infty)$ соответствующего расслоения. Так или иначе, алгебраическая структура дифференциала алгебры Картана–Лосика на ΛP_Q определяется значениями двух характеристических классов. Остальные компоненты дифференциала имеют стандартный вид. Поэтому вычисления когомологий алгебры Картана–Лосика для одномерной Q сводятся фактически к вычислениям для “урезанной” алгебры

$$C_1(M) = \Omega(M_a) \otimes H^*(K) \otimes S_N.$$

Это позволяет во многих случаях достаточно эффективно вычислять когомологии соответствующих компактных однородных многообразий (один пример такого рода приведен ниже).

При $\dim Q = 2$ в группе Ли Q , как легко понять, имеется подгруппа конечного индекса, изоморфная двумерному тору $T^2 = SO(2) \times SO(2)$, к которой и редуцируется структурная группа натурального расслоения после перехода к подходящему конечнолистному накрытию. В этом случае ситуация похожа на только что рассмотренную, только вместо характеристического класса в двумерных когомологиях необходимо рассматривать пару таких классов (или подпространство, ими порожденное). Дифференциал алгебры Картана–Лосика и в этом случае вычисляется несложно.

Пусть теперь $\dim Q = 3$; тогда Q сводится или к трехмерному тору (что подобно случаям, уже рассмотренным выше), или к трехмерной простой группе Ли, изоморфной $SU(2)$ либо $SO(3)$.

Когомологии группы $SU(n)$ – внешняя алгебра с образующими x_i степеней $3, 5, \dots, 2n - 1$. Этим образующим соответствуют их образы y_i при трансгрессии в универсальном расслоении, которые как элементы алгебры когомологий классифицирующего пространства $BSU(n)$ есть универсальные классы Черна. Первая компонента дифференциала $da = b + \partial a$ алгебры Картана–Лосика для случая $Q = SU(2)$ дает образ одномерного подпространства P_Q как прямую, натянутую на класс Черна $c_2 \in H^4(M_a, \mathbb{R})$. Если $H^4(M_a, \mathbb{R}) = \{0\}$, то соответствующая компонента дифференциала тривиальна. В этом случае когомологии алгебры Картана–Лосика те же, что у тривиального натурального расслоения (с теми же базой и слоем). Аналогично описывается и вторая компонента образа P_Q при дифференцировании, лежащая в S_N . Мы видим, что для $Q = SU(2)$ задача вычисления когомологий соответствующего компактного однородного пространства M во многом сводится к вычислению двух вторых классов Черна. Если же $Q = SO(3)$, то ситуация с вычислением дифференциала алгебры

Картана–Лосика аналогична, только вместо класса Черна здесь фигурируют классы w_i Штифеля–Уитни.

Рассмотрим теперь случаи малой размерности слоя натурального расслоения.

Если размерность слоя равна 2 или 4, то натуральное расслоение тривиально (см. [3]).

Если эта размерность равна 3, то натуральное расслоение является главным со структурной группой $SU(2)$ или $SO(3)$ [8]. В этом случае алгебра $C(M)$ имеет довольно простой вид, описанный выше.

Для размерности 5 можно перечислить все возможные односвязные слои M_c : это S^5 , $S^3 \times S^2$, $SU(3)/SO(3)$. Здесь в каждом случае можно выписать явное выражение для алгебры $C(M)$.

Например, для $M_c = S^5$ возможны представления $S^5 = SO(6)/SO(5)$ и $S^5 = SU(3)/SU(2)$. В первом случае группа Q тривиальна (точнее, она конечна и может быть редуцирована к тривиальной). Поэтому натуральное расслоение тривиально, M диффеоморфно $S^5 \times M_a$. Во втором случае $Q = SO(2)$ и вычисление дифференциала алгебры Картана–Лосика сводится к нахождению характеристических классов Черна (см. выше). Сама алгебра Картана–Лосика имеет вид

$$C(M) = \Omega(B) \otimes P_Q \otimes \Lambda(P_K) \otimes S(\bar{P}_N),$$

где P_Q одномерно (образующая x_1 степени 1), причем $d(x_1)$ – сумма двух характеристических классов. Один из них – характеристический класс $c \in H^2(M_a, \mathbb{R})$ главного $SO(2)$ -расслоения, соответствующего натуральному расслоению для исходного компактного однородного пространства M , второй – характеристический класс классического расслоения $SO(2) \rightarrow S^5 \rightarrow \mathbb{C}P^2$, который является образующей в $H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$.

Далее, в этом случае $K = SU(3)$, и потому P_K порождено элементами x_3 , x_5 степеней 3 и 5. Дифференциал из P_K в $S_N \simeq H^*(BN)$ соответствует вложению $N \hookrightarrow K$. Здесь $N = S(U(1) \times U(2))$, S_N – алгебра полиномов с двумя образующими z_2 , z_4 степеней 2 и 4 соответственно. Дифференциал переводит трехмерную образующую x_3 в y_4 , а x_5 – в нуль (именно с этим связан тот факт, что группа $H^5(S^5)$ одномерна). Элемент y_2 – это и есть образ характеристического класса борелевского расслоения (см. выше). Тем самым дифференциал в алгебре Картана–Лосика в рассматриваемом случае описан (по модулю дифференциала на базе расслоения). Если база натурального расслоения не очень сложна, то приведенные рассуждения позволят полностью вычислить дифференциал алгебры Картана–Лосика при $M_c = S^5$. Это даст нам не только когомологии однородного многообразия M , но и его минимальную модель.

Отметим, что если M полупросто, то слой натурального расслоения для него не может быть диффеоморфен S^5 (см. [7, следствие 2.2]). Для разрешимых многообразий M слой S^5 вполне возможен, а натуральное расслоение нетривиально.

Точно такие же явные описания допускает алгебра Картана–Лосика для двух других возможных пятимерных слоев.

Список литературы

1. В. В. Горбацевич, “О плезикокомпактных однородных пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **30**:2 (1989), 61–72; “О плезикокомпактных однородных пространствах. II”, **32**:2 (1991), 13–25; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Plesiocompact homogeneous spaces”, *Siberian Math. J.*, **30**:2 (1989), 217–226; “On plesiocompact homogeneous spaces. II”, **32**:2 (1991), 186–196.
2. В. В. Горбацевич, А. Л. Онищик, “Группы Ли преобразований”, *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления*, **20**, ВИНТИ, М., 1988, 103–240; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, A. L. Onishchik, “Lie transformation groups”, *Lie groups and Lie algebras I. Foundations of Lie theory. Lie transformation groups*, *Encycl. Math. Sci.*, **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 95–229.
3. В. В. Горбацевич, “Об одном расслоении компактного однородного пространства”, *Тр. ММО*, **43** (1981), 116–141; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On a fibration of compact homogeneous spaces”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **1** (1983), 129–157.
4. В. В. Горбацевич, “Расслоение Зейферта для плезикокомпактного однородного пространства”, *Сиб. матем. журн.*, **37**:2 (1996), 301–313; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “A Seifert bundle for a plesiocompact homogeneous space”, *Siberian Math. J.*, **37**:2 (1996), 258–267.
5. А. Л. Онищик, *Топология транзитивных групп преобразований*, Наука, М., 1995; A. L. Onishchik, *Topology of transitive transformation groups*, Johann Ambrosius Barth, Leipzig, 1994.
6. В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. I”, *Геометрические методы в задачах анализа и алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 71–87; “О компактных однородных пространствах с разрешимой фундаментальной группой. II–IV”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1982, 13–28; 1985, 93–103; 1991, 88–98.
7. В. В. Горбацевич, “О компактных однородных пространствах с полупростой фундаментальной группой”, *Сиб. матем. журн.*, **22**:1 (1981), 47–67; “О компактных однородных пространствах с полупростой фундаментальной группой. II”, *Сиб. матем. журн.*, **27**:5 (1986), 38–49; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Compact homogeneous spaces with semisimple fundamental group”, *Siberian Math. J.*, **22**:1 (1981), 34–49; “Compact homogeneous spaces with a semisimple fundamental group. II”, *Siberian Math. J.*, **27**:5 (1986), 660–669.
8. В. В. Горбацевич, “Два расслоения компактного однородного пространства и некоторые приложения”, *Изв. вузов. Математика*, 1981, № 6, 73–75; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “Two stratifications of a compact homogeneous space and applications”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **25**:6 (1981), 88–91.
9. А. Borel, *Seminar on transformation groups*, *Ann. of Math. Stud.*, **46**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1960.
10. М. V. Losik, “The cohomology of the complex of G -invariant forms on G -manifolds”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **13**:4 (1995), 323–338; “The cohomology of the complex of G -invariant forms on G -manifolds. II”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **15**:2 (1997), 141–152.
11. А. Борель, “О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли”, *Расслоенные пространства и их приложения*, Сб. переводов, ИЛ, М., 1958, 163–345; пер. с франц.: А. Borel, “Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts”, *Ann. Math.*, **57** (1953), 115–207.
12. Д. Хьюзмоллер, *Расслоенные пространства*, Мир, М., 1970; пер. с англ.: D. Husemoller, *Fibre bundles*, McGraw-Hill Book Co., New York–London–Sydney, 1966.

13. В. В. Горбацевич, “Стабильные когомологии компактных однородных пространств”, *Матем. заметки*, 2007 (в печати).
14. K. Hasegawa, “Minimal models of nilmanifolds”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **106**:1 (1989), 65–71.
15. В. В. Горбацевич, “О двойном нормализаторе стационарной подалгебры компактного однородного пространства”, *Сиб. матем. журн.*, **34**:3 (1993), 62–69; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On the double normalizer of the stable subalgebra of a plesioscompact homogeneous space”, *Siberian Math. J.*, **34**:3 (1993), 451–456.
16. А. Л. Онищик, “О транзитивных компактных группах преобразований”, *Матем. сб.*, **60(120)**:4 (1963), 447–485.
17. В. В. Горбацевич, “Модификации транзитивных действий групп Ли на компактных многообразиях и их применения”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1981, 131–145.
18. В. В. Горбацевич, “Об одном классе компактных однородных пространств”, *Изв. вузов. Математика*, 1983, №9, 18–21; англ. пер.: V. V. Gorbatsevich, “On a class of compact homogeneous spaces”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **27**:9 (1983), 18–22.
19. А. Н. Щетинин, “О группах Ли, транзитивных на одном классе многообразий”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1982, 13–28.
20. В. В. Горбацевич, “О когомологиях компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1990, 107–123; “О когомологиях компактных однородных пространств с дискретной стационарной подгруппой. II”, *Вопросы теории групп и гомологической алгебры*, ЯрГУ, Ярославль, 1998, 37–44.

В. В. ГОРБАЦЕВИЧ (V. V. GORBATSEVICH)
 Российский государственный технологический
 университет им. К. Э. Циолковского

Поступило в редакцию
 10.12.2004