Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Эquivariantные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 6, 101–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/im97>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 06:04:10

УДК 513.6+517.6

В. А. Краснов

Эквивариантные когомологии вещественной алгебраической поверхности и их приложения

Для эквивариантных когомологий вещественной алгебраической поверхности строятся точные последовательности, доказывается достаточное условие для вырождения второй спектральной последовательности. Рассматриваются приложения этих когомологий для топологии поверхности и для вычисления группы Брауэра.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Пусть X – неособое вещественное алгебраическое многообразие, $G = \{e, g\}$ – группа второго порядка, порожденная инволюцией комплексного сопряжения $g: X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$. Тогда определены эквивариантные когомологии $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$, $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, где действие G на пучках $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{Z}$ тривиальное, а пучок $\mathbb{Z}_-$ равен $\mathbb{Z}$, где g действует умножением на -1 . Эти когомологии изучались и применялись в ряде моих работ, но случай, когда X – поверхность, является исключительным, так как тогда факторпространство $Y = X(\mathbb{C})/G$ будет дифференцируемым многообразием. Поэтому должны быть результаты, справедливые только для поверхности. В предыдущих моих работах некоторые такие результаты изложены; здесь мы их дополняем новыми результатами, обобщаем старые и улучшаем их доказательство.

Первая задача, которой в этой статье мы занимаемся, состоит в следующем. Пусть $f: X(\mathbb{C}) \rightarrow Y$ – проекция, $\mathcal{A}$ – один из G -пучков на $X(\mathbb{C})$. Тогда имеет место точная последовательность из пяти членов

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathcal{A}^G) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(Y, \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A})) \\ \xrightarrow{d_2^{0,1}} H^2(Y, \mathcal{A}^G) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}), \end{aligned} \quad (0.1)$$

где $\mathcal{A}^G = f_*^G(\mathcal{A})$, $\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A}) = R^q f_*^G(\mathcal{A})$ (см. [1]). Эта точная последовательность получается из первой спектральной последовательности:

$$I^{p,q}(\mathcal{A}) = H^p(Y, \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}).$$

Гомоморфизм $d_2^{0,1}$ – это дифференциал:

$$d_2^{0,1}: I_2^{0,1}(\mathcal{A}) \rightarrow I_2^{2,0}(\mathcal{A}),$$

а остальные гомоморфизмы являются каноническими краевыми гомоморфизмами. В данной статье мы продолжаем точную последовательность (0.1) для пучков $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_-$ в общем случае, но когда X – поверхность, дается подробное описание. Это продолжение формулируется более просто для ориентируемой поверхности $X(\mathbb{R})$; во введении мы ограничимся этим случаем, а общий случай изложен в § 1.

Итак, предположим, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность. Тогда справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 01. *Имеет место точная последовательность когомологий*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{J_1} H^2(Y, \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_2} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{J_2} H^3(Y, \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_3} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{J_3} H^4(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где i_q^* – краевой гомоморфизм, β_q – композиция гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^q H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$$

и проекции

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow \bigoplus_{k=0}^{q-1} H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

гомоморфизм J_q на составляющей $H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ является гомоморфизмом Гизина

$$j_{q-1}^*: H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(Y, \mathbb{F}_2),$$

а на остальных слагаемых J_q равен нулю.

ТЕОРЕМА 02. *Имеют место точные последовательности*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^2(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_2} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_3} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^4(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_4^*} H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_4} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где i_q^* – краевой гомоморфизм, а β_q – композиция гомоморфизма ограничения

$$\beta: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) = H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus \dots$$

и проекции

$$H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^{q-4}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus \dots$$

ТЕОРЕМА 03. *Имеет место точная последовательность*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}') &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{J'_1} H^2(Y, \mathbb{Z}') \\ &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{J'_2} H^3(Y, \mathbb{Z}') \\ &\xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{J'_3} H^4(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $\mathbb{Z}' = f_*^G(\mathbb{Z}_-)$, i_q^* – краевой гомоморфизм, β – гомоморфизм ограничения

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus \dots,$$

J'_q – аналог гомоморфизма J_q в теореме 01. Здесь аналог гомоморфизма Гизина

$$H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(Y, \mathbb{Z}')$$

определяется с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{j_{q-1}^*} & H^{q+1}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \\ \downarrow R^* & & \downarrow \mu^* \\ H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^{q+1}(Y, \mathbb{Z}'), \end{array}$$

в которой j_{q-1}^* – обычный гомоморфизм Гизина, R^* – гомоморфизм редукции по $\text{mod } 2$, μ^* – гомоморфизм, называемый трансфером.

Теоремы 01, 02 мы применяем к исследованию гомоморфизмов

$$f^*: H^q(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z});$$

соответствующие результаты изложены в п. 3.1, а здесь они не формулируются.

Теорема 03 применяется для вычисления группы Брауэра поверхности X , а именно доказана

ТЕОРЕМА 04. *Пусть X – поверхность, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда выполняется неравенство*

$$\dim {}_2\text{Br}(X) \geq 2s + \rho_0(X) - \log_2 s_a - 1,$$

где ${}_2\text{Br}(X)$ – подгруппа $\text{Br}(X)$, состоящая из элементов второго порядка, s – число компонент связности в $X(\mathbb{R})$, s_a – число компонент связности множества вещественных точек многообразия Альбанезе, $\rho_0(X)$ – число Лефшеца.

Эта теорема дополняет результаты о группе Брауэра поверхности, изложенные в [2]. В данной работе мы продолжаем также исследование второй спектральной последовательности для эквивариантных когомологий поверхности, начатое еще в [3]. В связи с этим доказана

ТЕОРЕМА 05. Пусть X – поверхность, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, гомоморфизм гомологий $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{F}_2)$ является эпиморфизмом. Тогда спектральная последовательность

$$H_2^{p,q}(\mathbb{F}_2) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \quad (0.2)$$

вырождается, т.е. X является ГМ-поверхностью.

Заметим, что в [4] доказана теорема, согласно которой спектральная последовательность (0.2) вырождается, если $H_1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$. Этот результат доказывается в [4] более сложно, чем доказывается здесь теорема 05. Кроме спектральной последовательности (0.2) рассмотрим соответствующую спектральную последовательность для пучка $\mathbb{Z}$

$$H_2^{p,q}(\mathbb{Z}) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}). \quad (0.3)$$

В случае ее вырождения поверхность X называется ГМ $\mathbb{Z}$ -поверхностью (см. [3]). Если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то в [3] показано, что спектральная последовательность (0.3) вырождается тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (0.2). Если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ имеет кручение, то оказывается, что такое утверждение неверно. Это показывает пример поверхности, приведенный в данной работе.

§ 1. Точные последовательности

1.1. Когомологии с произвольными коэффициентами. Далее применяются обозначения из введения, причем сначала не предполагается, что X – поверхность. Если $\mathcal{A}$ – G -пучок на $X(\mathbb{C})$, то вложение $X(\mathbb{R}) \subset X(\mathbb{C})$ определяет точную последовательность эквивариантных когомологий

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\delta} H^q(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \\ &\xrightarrow{\beta} H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \rightarrow \dots, \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где β – гомоморфизм ограничения, δ – кограничный гомоморфизм. Из спектральной последовательности

$$H_2^{p,q} = H^p(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})$$

следует, что краевой гомоморфизм

$$i_q^*: H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})$$

является изоморфизмом, так как пучок $\mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})$ при $q > 0$ сосредоточен на $X(\mathbb{R})$. Следовательно, точную последовательность (1.1.1) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\delta} H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \\ &\xrightarrow{\beta} H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.1.1')$$

Вложение $X(\mathbb{R}) \subset Y$ определяет точную последовательность обычных когомологий

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\delta} H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) &\rightarrow H^q(Y, \mathcal{A}^G) \\ &\xrightarrow{\beta} H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \xrightarrow{\delta} H^{q+1}(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Краевой гомоморфизм i^* задает отображение последовательности (1.1.2) в последовательность (1.1.1):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) & \longrightarrow & H^q(Y, \mathcal{A}^G) & \xrightarrow{\beta} & H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \downarrow i_q^* & & \downarrow i_q^* & & \downarrow i_q^* \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H^q(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) & \longrightarrow & H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\beta} & H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \dots \end{array} \quad (1.1.3)$$

Если использовать точную последовательность (1.1.1), то диаграмму (1.1.3) можно переписать следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta} & H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) & \longrightarrow & H^q(Y, \mathcal{A}^G) & \xrightarrow{\beta} & H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \xrightarrow{\delta} \dots \\ & & \parallel & & \downarrow i_q^* & & \downarrow i_q^* \\ \dots & \xrightarrow{\delta} & H^q(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) & \longrightarrow & H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) & \xrightarrow{\beta} & H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\delta} \dots \end{array} \quad (1.1.3')$$

Просматривая диаграмму (1.1.3), можно получить из нее следующую последовательность гомоморфизмов:

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\delta_{q-1}} H^q(Y, \mathcal{A}^G) \xrightarrow{i_q^*} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \\ &\xrightarrow{\beta_q} H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) / i_q^*(H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G)) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(Y, \mathcal{A}^G) \xrightarrow{i_{q-1}^*} \dots, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где β_q – композиция гомоморфизма ограничения β и проекции, δ_q индуцируется композицией кограничного гомоморфизма

$$\delta: H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^{q+1}(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) = H^{q+1}(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G)$$

с гомоморфизмом

$$H^{q+1}(Y, X(\mathbb{R}); \mathcal{A}^G) \rightarrow H^{q+1}(Y, \mathcal{A}^G).$$

Последовательность (1.1.4) является комплексом и точна везде, за исключением, быть может, членов $H^q(Y, \mathcal{A}^G)$, причем дефект точности в этом члене $\text{Ker } i_q^* / \text{Im } \delta_{q-1}$ равен ядру гомоморфизма

$$i_q^*: H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}). \quad (1.1.5)$$

Это утверждение вытекает из диаграммы (1.1.3') (см. [1, п. 5.4]). Если спектральная последовательность

$$I_2^{p,q}(X(\mathbb{R})) = H^p(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^q(G, \mathcal{A})) \Rightarrow H^{p+q}(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})$$

вырождается, то гомоморфизм (1.1.5) будет мономорфизмом. Эта спектральная последовательность вырождается, например, в следующих случаях:

- 1) $\mathcal{A}|_{X(\mathbb{R})}$ – пучок векторных пространств над $\mathbb{F}_2$ и действие G на этом пучке тривиально;
- 2) $\mathcal{A}|_{X(\mathbb{R})}$ – пучок свободных абелевых групп и действие G на этом пучке тривиально;
- 3) $\mathcal{A}|_{X(\mathbb{R})}$ – пучок свободных абелевых групп, а инволюция g действует на нем умножением на -1 .

Доказательство данных утверждений изложено в [5] (см. также [1], [3]). Следовательно, в этих случаях последовательность (1.1.4) точна. Отметим также, что в третьем случае $\mathcal{A}^G|_{X(\mathbb{R})} = 0$, поэтому сразу видно, что тогда гомоморфизм (1.1.5) имеет нулевое ядро. Далее будем предполагать, что гомоморфизм (1.1.5) является мономорфизмом при каждом q , тогда последовательность (1.1.4) точная. Так как имеем равенства

$$\begin{aligned} H^0(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) &= i_0^*(H^0(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G)), \\ H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})/i_1^*(H^1(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G)) &= H^0(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A})), \end{aligned}$$

то последовательность (1.1.4) лучше начинать с одномерных когомологий, и ее начало имеет вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathcal{A}^G) &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A})) \xrightarrow{\delta_1} H^2(Y, \mathcal{A}^G) \\ &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \xrightarrow{\beta_2} H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})/i_2^*(H^2(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G)) \xrightarrow{\delta_2} \dots \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Заметим также, что выполняется равенство

$$H^0(Y, \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A})) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathcal{A})). \quad (1.1.7)$$

ТЕОРЕМА 1.1.1. *Последовательность (1.1.6) является продолжением до бесконечности последовательности (0.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если использовать равенство (1.1.7), то получим, что гомоморфизм β_1 в последовательности (1.1.6) является краевым гомоморфизмом. Следовательно, нужно только показать, что гомоморфизм δ_1 в последовательности (1.1.6) совпадает с дифференциалом $d_2^{0,1}$. Для проверки совпадения этих гомоморфизмов применим следующее конструктивное определение эквивариантных когомологий. Пусть

$$0 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{\partial} \dots$$

– каноническая резольвента Годамана пучка $\mathcal{A}$. Тогда все пучки $\mathcal{A}^q$ являются G -пучками и дифференциалы сохраняют G -структуру. Образует бикомплекс из

сечений $A^q = \Gamma(X(\mathbb{C}), \mathcal{A}^q)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow e-g & & \uparrow e-g & & \uparrow e-g & \\
 0 \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{\partial} & A^1 & \xrightarrow{\partial} & A^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow e+g & & \uparrow e+g & & \uparrow e+g & \\
 0 \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{\partial} & A^1 & \xrightarrow{\partial} & A^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow e-g & & \uparrow e-g & & \uparrow e-g & \\
 0 \longrightarrow & A^0 & \xrightarrow{\partial} & A^1 & \xrightarrow{\partial} & A^2 & \xrightarrow{\partial} \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 &
 \end{array} \tag{1.1.8}$$

Тогда эквивариантные когомологии пучка $\mathcal{A}$ совпадают с полными когомологиями бикомплекса (1.1.8), т.е. имеет место равенство

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) = \frac{\text{Ker}[d: A^q \oplus A^{q-1} \oplus \dots \oplus A^0 \rightarrow A^{q+1} \oplus A^q \oplus \dots \oplus A^0]}{\text{Im}[d: A^{q-1} \oplus A^{q-2} \oplus \dots \oplus A^0 \rightarrow A^q \oplus A^{q-1} \oplus \dots \oplus A^0]}.$$

Спектральные последовательности бикомплекса – это спектральные последовательности эквивариантных когомологий; в частности, имеем равенство

$$I_2^{p,q}(\mathcal{A}) = \frac{\text{Ker}[\partial: H^q(G, A^p) \rightarrow H^q(G, A^{p+1})]}{\text{Im}[\partial: H^q(G, A^{p-1}) \rightarrow H^q(G, A^p)]},$$

так как столбцы в бикомплексе (1.1.8) – это комплексы, с помощью которых вычисляются когомологии группы второго порядка $H^q(g, A^p)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 I_2^{0,1}(\mathcal{A}) &= \text{Ker}[\partial: H^1(G, A^0) \rightarrow H^1(G, A^1)], \\
 I_2^{0,2}(\mathcal{A}) &= \frac{\text{Ker}[\partial: (A^2)^G \rightarrow (A^3)^G]}{\text{Im}[\partial: (A^1)^G \rightarrow (A^2)^G]}.
 \end{aligned}$$

Дифференциал $d_2^{0,1}$ устроен следующим образом. Пусть $\mathbf{a} \in I_2^{0,1}(\mathcal{A}) \subset H^1(G, A^0)$, $a \in A^0$ – элемент, определяющий $\mathbf{a}$, т.е. $a \pmod{(e-g)A^0} = \mathbf{a}$. Тогда существует $b \in A^1$ такой, что $\partial(a) = b - g(b)$, $g(\partial b) = \partial b$, поэтому элемент ∂b определяет факторкласс из $I_2^{2,0}(\mathcal{A})$, который равен $d_2^{0,1}(\mathbf{a})$.

Вычислим теперь гомоморфизм

$$\delta_1: H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) / i_1^*(H^1(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G)) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{A}^G).$$

Ограничения пучков $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^q$ на $X(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_0^q$. Тогда последовательность гомоморфизмов

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_0 \rightarrow \mathcal{A}_0^0 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}_0^1 \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}_0^2 \xrightarrow{\partial} \dots$$

является канонической резольвентой пучка $\mathcal{A}_0$. Обозначим через A_0^q группу сечений пучка $\mathcal{A}_0^q$. Тогда эквивариантные когомологии $H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A})$ являются полными когомологиями бикомплекса, который составляется из групп A_0^q , т.е. дописываются нули в таблице (1.1.8). Опишем сначала изоморфизм

$$I_2^{0,1}(\mathcal{A}) \simeq H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) / i_1^* \left(H^1(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \right). \quad (1.1.9)$$

Если $\mathbf{a}$, a , b – верхние элементы, a_0 , b_0 – ограничения a , b на $X(\mathbb{R})$, то можно считать, что $\partial b_0 = 0$, изменив в противном случае значения b в точках из $X(\mathbb{R})$. Это можно сделать, так как элементы группы A^0 – это произвольные (не обязательно непрерывные) сечения пучка $\mathcal{A}$. Тогда сумма $a_0 + b_0$ определяет элемент

$$[a_0 + b_0] \in H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}) / i_1^* \left(H^1(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) \right).$$

Образ $\mathbf{a}$ при изоморфизме (1.1.9) равен классу $[a_0 + b_0]$. Класс когомологий

$$\delta_1([a_0 + b_0]) \in H^2(Y, \mathcal{A}^G)$$

тогда задается элементом $d(a + b) = \partial b$. Следовательно, $\delta_1([a_0 + b_0]) = d_2^{0,1}(\mathbf{a})$. Теорема доказана.

Сделаем теперь следующее

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1.2. Так как при $q > 2 \dim X$ имеем равенство $H^q(Y, \mathcal{A}^G) = 0$, то при $q > 2 \dim X$ гомоморфизм β_q является изоморфизмом, а при $q = 2 \dim X$ он будет эпиморфизмом. Отметим еще, что при $q > \dim X$ гомоморфизм β_q равен гомоморфизму ограничения

$$\beta: H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathcal{A}),$$

так как тогда $H^q(X(\mathbb{R}), \mathcal{A}^G) = 0$.

Далее в качестве пучка $\mathcal{A}$ мы будем последовательно брать пучки $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_-$, а X будет поверхностью. Наша ближайшая цель состоит в вычислении гомоморфизмов δ_q .

1.2. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$. Итак, теперь X – неособая проективная поверхность. Предполагаем, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

ЛЕММА 1.2.1. *Гомоморфизм ограничения*

$$\beta: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – образующая группы

$$H^1\left(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)\right) \subset H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2), \quad \tilde{\omega} = \beta(\omega).$$

Тогда класс $\tilde{\omega}$ устроен следующим образом. Если $X(\mathbb{R}) = X_1 \cup \dots \cup X_s$ – разложение на компоненты связности, $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_s$ – образующие группы $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \subset H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$, соответствующие компонентам $X_1, \dots, X_s$, то $\tilde{\omega} = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_s$. Рассмотрим теперь коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega & \cong \downarrow \cup \tilde{\omega} & \parallel \\ H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\sim} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{q=0}^2 H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{array}$$

Из нее следует, что достаточно проверить, что гомоморфизм

$$\cup \omega: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \quad (1.2.1)$$

является изоморфизмом. Для этого рассмотрим гомоморфизм спектральных последовательностей

$$\cup \omega: \Pi_r^{p,q} \rightarrow \Pi_r^{p+1,q}, \quad (1.2.2)$$

где $\Pi_2^{p,q} = H^p\left(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)\right)$. Пусть $p + q = 4$, а $r = 2, 3, \dots$. Тогда гомоморфизм (1.2.2) будет изоморфизмом, следовательно, гомоморфизм (1.2.1) является изоморфизмом. Лемма доказана.

В силу леммы 1.2.1 точная последовательность (1.1.6) для пучка $\mathbb{F}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta_1} H^2(Y, \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_2} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta_2} H^3(Y, \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_3} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{\delta_3} H^4(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

ЛЕММА 1.2.2. Ограничение гомоморфизма δ_q ($q = 1, 2, 3$) на слагаемое $H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом Гизина

$$j_{q-1}^*: H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{q+1}(Y, \mathbb{F}_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $q = 1$ утверждение леммы уже доказано. Действительно, гомоморфизм δ_1 совпадает с дифференциалом $d_2^{0,1}$, а в [6] показано, что он равен гомоморфизму Гизина. Пусть теперь $q = 2$. Если $a \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, то возьмем кривую $\Gamma \subset X(\mathbb{R})$ такую, что $a = [\Gamma]^*$. Кривую Γ можно рассматривать вложенной в Y ; тогда она определяет класс когомологий $A = [\Gamma]_Y^*$. Нам нужно доказать равенство $\delta_2(a) = A$.

Пусть U – трубчатая окрестность Γ в $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно инволюции g , $V = U/G$; тогда кривая определяет относительные классы когомологий

$$a_0 \in H^1(\bar{U}^G, \partial U^G; \mathbb{F}_2), \quad A_0 \in H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{F}_2).$$

Предыдущая теория справедлива и для относительных когомологий, в частности, имеет место аналог точной последовательности (1.2.3) для пары $(\bar{U}, \partial U)$. Отсюда следует, что достаточно доказать равенство $\delta_2(a_0) = A_0$. Так как $H^q(\bar{U}, \partial U; \mathbb{F}_2) = 0$ при $q < 3$, то из второй спектральной последовательности следует равенство $H^q(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{F}_2) = 0$ при $q < 3$. Поэтому аналог точной последовательности (1.2.3) для пары $(\bar{U}, \partial U)$ имеет вид

$$0 \rightarrow H^1(\bar{U}^G, \partial U^G; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta_2} H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_3^*} \dots$$

Осталось заметить, что a_0 – образующая группы $H^1(\bar{U}^G, \partial U^G; \mathbb{F}_2)$, A_0 – образующая группы $H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{F}_2)$. Итак, утверждение леммы при $q = 2$ доказано. При $q = 3$ нужно рассуждать аналогично, рассматривая вместо кривой точку из $X(\mathbb{R})$. Заметим, что и при $q = 1$ утверждение можно было доказывать так же, рассматривая вместо кривой компоненту связности $X(\mathbb{R})$. Лемма доказана.

Следующая лемма описывает образы гомоморфизмов β_2, β_3 .

ЛЕММА 1.2.3. *Справедливы утверждения:*

1) элементы из $\text{Ker } j_1^*$ вместе с суммами $\tilde{X}_k + w_1(X_k)$, $k = 1, \dots, s$, порождают $\text{Im } \beta_2$;

2) элементы из $\text{Ker } j_2^*$ вместе с элементами вида $a + a^2$, где $a \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, и элементами из $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ порождают $\text{Im } \beta_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.2.2 следует, что $\text{Ker } j_1^* \subset \text{Im } \beta_2$, $\text{Ker } j_2^* \subset \text{Im } \beta_3$. Покажем сначала, что $\tilde{X}_k + w_1(X_k) \in \text{Im } \beta_2$, $a + a^2 \in \text{Im } \beta_3$, $\tilde{X}_k \in \text{Im } \beta_3$. Компоненты X_k , $k = 1, \dots, s$, определяют эквивариантные классы когомологий $\mathbf{x}_k \in H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ такие, что $\beta(\mathbf{x}_k) = \tilde{X}_k + w_1(X_k) + w_2(X_k)$ (см. [5], [6]). Следовательно, элементы $\tilde{X}_k + w_1(X_k)$ принадлежат $\text{Im } \beta_2$.

Пусть $a \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ и Γ – замкнутая кривая на $X(\mathbb{R})$ такая, что $a = [\Gamma]^*$. Тогда кривая Γ определяет эквивариантный класс когомологий $\mathbb{A} = [\Gamma, g]^* \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ такой, что $\beta(\mathbb{A}) = a + w_1(X(\mathbb{R})) \cdot a$ (см. [7]). Так как $w_1(X(\mathbb{R})) \times a = a^2$, то получаем, что $a + a^2 \in \text{Im } \beta_3$.

Построим теперь классы когомологий $\mathbf{x}'_k \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$, $k = 1, \dots, s$, такие, что $\beta(\mathbf{x}'_k) = \tilde{X}_k$. Пусть Γ_k – замкнутая кривая на X_k такая, что $a_k = [\Gamma_k]^* = w_1(X_k)$ и $\mathbb{A}_k = [\Gamma_k, g]^* \in H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$. Тогда $\mathbf{x}'_k = \omega \cup \mathbf{x}_k + \mathbb{A}_k$, где $\omega \in H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$ – класс из доказательства леммы 1.2.1. Действительно,

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x}'_k) &= \beta(\omega) \cup \beta(\mathbf{x}_k) + \beta(\mathbb{A}_k) \\ &= \omega \cup (\tilde{X}_k + w_1(X_k) + w_2(X_k)) + w_1(X_k) + w_1^2(X_k) = \tilde{X}_k. \end{aligned}$$

Для окончания доказательства леммы осталось установить равенства

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} \beta_2 &= \dim \operatorname{Ker} j_1^* + s, \\ \dim \operatorname{Im} \beta_3 &= \dim \operatorname{Ker} j_2^* + \dim H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) + s.\end{aligned}$$

Для этого рассмотрим гомоморфизм ограничения спектральных последовательностей $I(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow I(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$. Тогда эти равенства следуют из того, что спектральная последовательность для $X(\mathbb{R})$ вырождается, дифференциалы

$$\begin{aligned}d_2^{0,1}: H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^2(Y, \mathbb{F}_2), \\ d_2^{1,1}: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^3(Y, \mathbb{F}_2), \\ d_2^{2,1}: H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\rightarrow H^4(Y, \mathbb{F}_2)\end{aligned}$$

из спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ совпадают с гомоморфизмами Гизина, а остальные дифференциалы равны нулю. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.2.4. *Гомоморфизмы δ_q ($q = 1, 2, 3$) в точной последовательности (1.2.3) устроены следующим образом. Гомоморфизм δ_1 совпадает с гомоморфизмом Гизина. Гомоморфизм δ_2 на слагаемом $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом Гизина и*

$$\delta_2(\tilde{X}_k) = j_1^*(w_1(X_k)), \quad k = 1, \dots, s.$$

Гомоморфизм δ_3 на слагаемом $H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом Гизина, на слагаемом $H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ задается равенством $\delta_3(a) = j_2^(a^2)$, а на слагаемом $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ гомоморфизм δ_3 обращается в нуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании леммы 1.2.2 ограничение δ_q на $H^{q-1}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом Гизина. Из второго утверждения леммы 1.2.3 следует, что ограничение δ_3 на $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ равно нулю. Так как $\tilde{X}_k + w_1(X_k) \in \operatorname{Im} \beta_2$ в силу леммы 1.2.3, то

$$\delta_2(\tilde{X}_k + w_1(X_k)) = \delta_2(\tilde{X}_k) + \delta_2(w_1(X_k)) = \delta_2(\tilde{X}_k) + j_1^*(w_1(X_k)) = 0.$$

Следовательно, $\delta_2(\tilde{X}_k) = j_1^*(w_1(X_k))$. В силу леммы 1.2.3 $a + a^2 \in \operatorname{Im} \beta_3$, поэтому

$$\delta_3(a + a^2) = \delta_3(a) + \delta_3(a^2) = \delta_3(a) + j_2^*(a^2) = 0.$$

Следовательно, $\delta_3(a) = j_2^*(a^2)$. Теорема доказана.

1.3. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$.

ЛЕММА 1.3.1. *Гомоморфизм $i_4^*: H^4(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$ является вложением.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Композиция краевых гомоморфизмов

$$\begin{aligned} i_4^*: H^4(Y, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}), \\ \alpha: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) &\rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

совпадает с гомоморфизмом

$$f^*: H^4(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}),$$

который является мономорфизмом, следовательно, i_4^* также мономорфизм. Лемма доказана.

Благодаря равенству $\mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z}) = 0$, а также лемме 1.3.1 точная последовательность (1.1.6) для пучка $\mathbb{Z}$ распадается на следующие три точные последовательности:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^2(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_2} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{\delta_2} H^3(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_3} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow H^4(Y, \mathbb{Z}) &\xrightarrow{i_4^*} H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\beta_4} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

ТЕОРЕМА 1.3.2. Гомоморфизм δ_2 в точной последовательности (1.3.1) равен композиции гомоморфизма Гизина

$$j_0^*: H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^2(Y, \mathbb{F}_2)$$

и гомоморфизма Бокштейна

$$\delta: H^2(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U_k – трубчатая окрестность компоненты X_k в $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно инволюции g , $V_k = U_k/G$. Тогда можно рассмотреть пару $(\bar{U}_k, \partial U_k)$ и записать для нее аналог точной последовательности (1.3.1). Из этого получаем, что достаточно доказать утверждение теоремы для гомоморфизма

$$\delta_2: H^0(X_k, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(\bar{V}_k, \partial V_k; \mathbb{Z}). \quad (1.3.2)$$

Заметим, что $H^3(\bar{V}_k, \partial V_k; \mathbb{Z}) = H_1(X_k, \mathbb{Z})$. Если X_k – ориентируемая поверхность, то группа $H_1(X_k, \mathbb{Z})$ свободная, поэтому оба гомоморфизма δ_2 , $\delta \circ j_0^*$ равны нулю. Если X_k – неориентируемая поверхность, то элемент $\delta(j_0^*(\tilde{X}_k))$ является единственным элементом второго порядка в $H^3(\bar{V}_k, \partial V_k; \mathbb{Z})$, поэтому достаточно показать, что $\delta_2(\tilde{X}_k) \neq 0$. Так как $H^q(\bar{U}_k, \partial U_k; \mathbb{Z}) = H_{4-q}(X_k, \mathbb{Z}) = 0$ при $q \leq 2$, то из второй спектральной последовательности следует равенство $H^2(\bar{U}_k, \partial U_k; G, \mathbb{Z}) = 0$. Поэтому из аналога точной последовательности (1.3.1) для пары $(\bar{U}_k, \partial U_k)$ вытекает неравенство $\delta_2(\tilde{X}_k) \neq 0$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.3. Так же доказывается, что гомоморфизм δ_2 совпадает с дифференциалом $d_3^{0,2}$ в спектральной последовательности $I(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$. Если $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность, то $\delta_2 = 0$.

1.4. Когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}_-$.

ЛЕММА 1.4.1. *Гомоморфизм ограничения*

$$\beta: H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-)$$

является изоморфизмом.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.2.1. Отличие состоит только в том, что в качестве ω нужно взять образующую группы

$$H^2(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \subset H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

Подробности мы опускаем.

В силу леммы 1.4.1 из общей точной последовательности (1.1.6) получаем точную последовательность для пучка $\mathbb{Z}_-$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{Z}') &\xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{\delta_1} H^2(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i_2^*} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta_2} H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ &\xrightarrow{\delta_2} H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &\xrightarrow{\beta_3} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta_3} H^4(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

где $\mathbb{Z}' = (\mathbb{Z}_-)^G = f_*^G(\mathbb{Z}_-)$. Заметим еще, что гомоморфизм β_q , $q = 1, 2, 3$, совпадает с гомоморфизмом ограничения β , так как $\mathbb{Z}'|_{X(\mathbb{R})} = 0$; поэтому $H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}') = 0$. В действительности точная последовательность (1.4.1) совпадает с точной последовательностью эквивариантных когомологий пары $(X(\mathbb{C}), X(\mathbb{R}))$.

ТЕОРЕМА 1.4.2. *Справедливы следующие утверждения о гомоморфизмах δ_q в точной последовательности (1.4.1):*

1) *гомоморфизм δ_1 совпадает с дифференциалом*

$$d_2^{0,1}: H^0(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^2(Y, \mathcal{H}^0(G, \mathbb{Z}_-));$$

2) *гомоморфизм δ_2 совпадает с дифференциалом*

$$d_2^{1,1}: H^1(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^3(Y, \mathcal{H}^0(G, \mathbb{Z}_-));$$

3) *ограничение δ_3 на слагаемое $H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ совпадает с дифференциалом*

$$d_2^{2,1}: H^2(X(\mathbb{R}), \mathcal{H}^1(G, \mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^4(Y, \mathcal{H}^0(G, \mathbb{Z}_-)),$$

а ограничение δ_3 на слагаемое $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ равно нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение в общем случае доказывалось в п. 1.1; перейдем к доказательству второго утверждения. Пусть Γ – замкнутая кривая на $X(\mathbb{R})$, U – трубчатая окрестность Γ в $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно инволюции g , $V = U/G$. Вычислим группу $H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}')$. Для этого рассмотрим точную последовательность пучков на Y :

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow f_*(\mathbb{Z}) \xrightarrow{e-g} \mathbb{Z}' \rightarrow 0. \quad (1.4.2)$$

Из нее мы получаем равенство

$$H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}') = H^3(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z}) / f^*(H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_2.$$

Пусть $a = [\Gamma]^* \in H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$; тогда образующую группы $H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}')$ обозначим через A'_0 (напомним, что через A_0 обозначали образующую группы $H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{F}_2)$). Нам достаточно установить, что для пары $(\bar{U}, \partial U)$ выполняются равенства $\delta_2(a_0) = A'_0$, $d_2^{1,1}(a_0) = A'_0$, где a_0 – образующая группы $H^1(\bar{U}^G, \partial U^G; \mathbb{F}_2)$. Так как $H^q(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z}_-) = 0$ при $q < 3$, то из второй спектральной последовательности следует равенство $H^q(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{Z}_-) = 0$ при $q < 3$. Поэтому аналог точной последовательности (1.4.1) для пары $(\bar{U}, \partial U)$ имеет вид

$$0 \rightarrow H^1(\bar{U}^G, \partial U^G; \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\delta_2} H^3(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}') \xrightarrow{i_3^*} \dots;$$

следовательно, $\delta_2(a_0) = A'_0$. С другой стороны, так как $H^2(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{Z}_-) = 0$, то $d_2^{1,1}(a_0) \neq 0$, следовательно, $d_2^{1,1}(a_0) = A'_0$.

Итак, второе утверждение доказано, перейдем к доказательству третьего утверждения. Первая часть этого утверждения доказывается аналогично. Возьмем точку $P_k \in X_k$, $k = 1, \dots, s$. Пусть U_k – окрестность P_k в $X(\mathbb{C})$, $V_k = U_k/G$. Тогда из точной последовательности (1.4.2) следует равенство $H^4(\bar{V}_k, \partial V_k; \mathbb{Z}') = \mathbb{Z}_2$. Далее, рассуждая так же, как при доказательстве второго утверждения, получаем, что оба гомоморфизма, δ_3 и $d_2^{2,1}$, переводят образующую группы $H^2(\bar{U}_k^G, \partial U_k^G; \mathbb{F}_2) = H^2(X_k, \mathbb{F}_2)$ в образующую группы $H^4(\bar{V}_k, \partial V_k; \mathbb{Z}')$. Таким образом, первая часть третьего утверждения доказана, переходим к доказательству второй части. Для этого рассмотрим гомоморфизм редукции пучков по mod 2 $R: \mathbb{Z}_- \rightarrow \mathbb{F}_2$. Он индуцирует отображение точной последовательности (1.4.1) в точную последовательность (1.2.3), в частности имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\delta_3} & H^4(Y, \mathbb{Z}') \\ \downarrow R^* & & \cong \downarrow R^* \\ H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\delta_3} & H^4(Y, \mathbb{F}_2). \end{array} \quad (1.4.3)$$

Левый гомоморфизм в ней – это гомоморфизм редукции $H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$. Он является обычным вложением прямой суммы в прямую сумму, так как гомоморфизм Бокштейна $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ нулевой (см. [5]).

Правый гомоморфизм в диаграмме (1.4.3) является изоморфизмом, так как он разлагается в композицию гомоморфизмов

$$H^4(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^4(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^4(Y, \mathbb{F}_2),$$

первый из них входит в точную последовательность редукции по mod 2

$$\cdots \rightarrow H^4(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{\times 2} H^4(Y, \mathbb{Z}') \rightarrow H^4(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

и является изоморфизмом, а второй гомоморфизм входит в точную последовательность пары $(Y, X(\mathbb{R}))$

$$\cdots \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^4(Y, X(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) \rightarrow H^4(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow 0$$

и также является изоморфизмом. Осталось заметить, что ограничение нижнего гомоморфизма δ_3 на $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ в диаграмме (1.4.3) равно нулю в силу теоремы 1.2.4. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.3. Доказательство теоремы 1.4.2 приводит к гомоморфизму

$$j'_{q-2}: H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(Y, \mathbb{Z}'),$$

который является аналогом гомоморфизма Гизина. Он определяется следующим образом. Пусть $Z \subset X(\mathbb{R})$ – точка, или замкнутая кривая, или компонента $X(\mathbb{R})$, $a = [Z]^* \in H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$, где $q = 4 - \dim Z$. Если U – трубчатая окрестность Z в $X(\mathbb{C})$, $V = U/G$, то группа когомологий $H^q(\bar{V}, \partial V; \mathbb{Z}')$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Образ образующей этой группы в $H^q(Y, \mathbb{Z}')$ обозначим через A ; тогда $j'_{q-2}(a) = A$.

Доказательство теоремы 1.4.2 показывает также, что справедлива

ТЕОРЕМА 1.4.4. Гомоморфизм δ_q в точной последовательности (1.4.1) при $q = 1, 2$ совпадает с аналогом гомоморфизма Гизина j'_{q-1} , при $q = 3$ на слагаемом $H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ он равен j'_2 , а на слагаемом $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ нулевой.

Заметим, что для δ_1 соответствующие рассуждения в доказательстве теоремы 1.4.2 отсутствуют, но они аналогичны, поэтому их опускаем.

§ 2. Вторая спектральная последовательность

Для поверхности X выполняются следующие неравенства (см. [3]):

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2), \quad (2.0.1)$$

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)), \quad (2.0.2)$$

$$\begin{aligned} \dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) &\leq \dim H^1(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \\ &\quad + \dim H^2(G, H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})). \end{aligned} \quad (2.0.3)$$

Если неравенство (2.0.1) становится равенством, то X называется *M-поверхностью*. Если неравенство (2.0.2) становится равенством, то X называется *GM-поверхностью*. Если неравенство (2.0.3) становится равенством, то X называется *GM $\mathbb{Z}$ -поверхностью*. Заметим, что X будет *M-поверхностью* тогда и только тогда, когда X является *GM-поверхностью* и инволюция $g^*: H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow$

$H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ тривиальна. В [3] показано, что X является ГМ-поверхностью тогда и только тогда, когда вырождается вторая спектральная последовательность

$$H_2^{p,q}(\mathbb{F}_2) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2). \quad (2.0.4)$$

Аналогично, X является ГМ $\mathbb{Z}$ -поверхностью тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность

$$H_2^{p,q}(\mathbb{Z}) = H^p(G, H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}). \quad (2.0.5)$$

Если группа $H^*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ свободная, то последовательность (2.0.5) вырождается тогда и только тогда, когда вырождается спектральная последовательность (2.0.4). В п. 2.2 приведен пример, показывающий, что в общем случае это утверждение неверно.

2.1. ГМ-поверхности. Пусть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда дифференциалы $d_r^{p,r-1}$, $d_r^{p,4}$ в спектральных последовательностях (2.0.4), (2.0.5) равны нулю (см. [3]). Поэтому если $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$, то $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ и все дифференциалы в спектральной последовательности (2.0.4) равны нулю, следовательно, X является ГМ-поверхностью (см. [3]). Так как гомоморфизм $f_*: H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{F}_2)$ эпиморфен, то из равенства $H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = 0$ следует равенство $H_1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$. В работе [4] показано, что равенства $H_1(Y, \mathbb{F}_2)$ достаточно для того, чтобы поверхность X была ГМ-поверхностью. В этом пункте будет доказан результат, обобщающий это утверждение, а именно справедлива

ТЕОРЕМА 2.1.1. *Если гомоморфизм*

$$H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(Y, \mathbb{F}_2) \quad (2.1.1)$$

эпиморфен, то X является ГМ-поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму, строки в которой точны:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(Y, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta_1} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ & & \downarrow & & \downarrow \beta & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta_1} & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2). \end{array}$$

Так как гомоморфизм (2.1.1) эпиморфен, то гомоморфизм $H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2)$ мономорфен. Тогда из диаграммы получаем, что гомоморфизм

$$\beta: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2)$$

также мономорфен. Пусть теперь ω_q – образующая группы

$$H^q(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)) \subset H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2).$$

Тогда рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^1 H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega_q & & \downarrow \cup \tilde{\omega}_q \\ H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow[\sim]{} & H^{q+1}(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) = \bigoplus_{k=0}^2 H^k(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \end{array}$$

где $q \geq 3$, $\tilde{\omega}_q = \beta(\omega_q) = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_s$. Из нее следует, что гомоморфизм

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_q} H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

является мономорфизмом, поэтому гомоморфизм

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) / \mathbb{F}_2 \cdot \omega_1 \xrightarrow{\cup \omega_q} H^{q+1}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) / \mathbb{F}_2 \cdot \omega_{q+1}$$

также мономорфен. Следовательно, гомоморфизм

$$\Pi_{\infty}^{0,1}(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_q} \Pi_{\infty}^{q,1}(\mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом. Так как $\Pi_{\infty}^{0,1}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{0,1}(\mathbb{F}_2)$, то также имеем равенство

$$\Pi_{\infty}^{q,1}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{q,1}(\mathbb{F}_2),$$

следовательно, дифференциалы $d_2^{q-2,2}$, $d_2^{q-3,3}$ равны нулю при $q \geq 3$. Дифференциал $d_2^{0,2}$ также равен нулю, это следует из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2^{0,2}(\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & \Pi_2^{2,1}(\mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega_1 & & \cong \downarrow \cup \omega_1 \\ \Pi_2^{1,2}(\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{d_2^{1,2}} & \Pi_2^{3,1}(\mathbb{F}_2), \end{array}$$

так как правый вертикальный гомоморфизм в ней является изоморфизмом. Покажем теперь, что гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \quad (2.1.2)$$

является мономорфизмом; для этого рассмотрим точную последовательность (1.2.3). Так как гомоморфизм Гизина $j_1^*: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{F}_2)$ является эпиморфизмом, то δ_2 также эпиморфизм, следовательно, гомоморфизм (2.1.2) мономорфен. Тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow{\beta} & H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega_1 & & \downarrow \cup \tilde{\omega}_1 \\ H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \xrightarrow[\sim]{} & H^4(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \end{array}$$

получаем, что гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_1} H^4(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$$

мономорфен. Следовательно, отображение

$$\Pi_{\infty}^{1,2}(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_1} \Pi_{\infty}^{2,2}(\mathbb{F}_2)$$

является изоморфизмом, так как отображения

$$\Pi_{\infty}^{3,0}(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_1} \Pi_{\infty}^{4,0}(\mathbb{F}_2), \quad \Pi_{\infty}^{2,1}(\mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cup \omega_1} \Pi_{\infty}^{3,1}(\mathbb{F}_2)$$

– изоморфизмы. Так как $\Pi_{\infty}^{1,2}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{1,2}(\mathbb{F}_2)$, то получаем равенство $\Pi_{\infty}^{2,2}(\mathbb{F}_2) = \Pi_2^{2,2}(\mathbb{F}_2)$, поэтому дифференциал $d_2^{0,3}$ равен нулю. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Pi_2^{0,3}(\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & \Pi_2^{2,2}(\mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega_q & & \downarrow \cup \omega_q \\ \Pi_2^{q,3}(\mathbb{F}_2) & \xrightarrow{d_2^{q,3}} & \Pi_2^{q+2,2}(\mathbb{F}_2), \end{array}$$

в которой левый гомоморфизм эпиморфен, следует, что дифференциалы $d_2^{q,3}$ нулевые при $q \geq 0$. В итоге мы получаем, что дифференциалы $d_r^{p,r-1}$, $d_r^{p,4}$, $d_2^{p,2}$, $d_2^{p,3}$, $d_3^{p,3}$ равны нулю. Осталось заметить, что остальные дифференциалы для поверхности всегда равны нулю. Теорема доказана.

2.2. Пример поверхности. Построим теперь GM-поверхность, которая не будет GMZ-поверхностью.

Пусть $S \subset P^3(\mathbb{C})$ – комплексно-аналитическая поверхность, заданная уравнением

$$z_0^8 - z_1^8 + z_2^8 - z_3^8 = 0,$$

$T: S \rightarrow S$ – преобразование четвертого порядка, заданное равенством

$$T(z_0, z_1, z_2, z_3) = (z_0, iz_1, -z_2, -iz_3).$$

Рассмотрим факторповерхность $S/\{T^n\}$; она имеет восемь простейших особых точек, которые получаются из шестнадцати неподвижных точек инволюции $T^2: S \rightarrow S$. Разрешим эти особенности; тогда получим неособую комплексную алгебраическую поверхность X . Вещественная структура $\tau(z) = \bar{z}$ на S индуцирует вещественную структуру на X , так как выполняется равенство $\tau = T\tau T$.

ЛЕММА 2.2.1. *Имеет место равенство $\pi_1(X(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция $S \rightarrow S/\{T^{2n}\}$ является двухлистным накрытием с ветвлением в шестнадцати особых точках поверхности $S/\{T^{2n}\}$. Так как S – односвязная поверхность, то $S/\{T^{2n}\}$ также будет односвязной поверхностью. Проекция $S/\{T^{2n}\} \rightarrow S/\{T^n\}$ является двухлистным универсальным накрытием, поэтому $\pi_1(S/\{T^n\}) = \mathbb{Z}_2$. Осталось заметить, что разрешение особенностей фундаментальную группу не изменит. Лемма доказана.

Найдем теперь множество вещественных точек $X(\mathbb{R})$. Пусть $S_k \subset S$ – топологическая поверхность, заданная уравнением $\tau(z) = T^k(z)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Она гомеоморфна тору, причем $T(S_0) = S_2$, $T(S_1) = S_3$, $T^2(S_k) = S_k$, а инволюция $T^2: S_k \rightarrow S_k$ сохраняет ориентацию и не имеет неподвижных точек; тогда факторповерхность $S_k/\{T^{2n}\}$ будет опять тором. Проверку этих фактов мы опускаем. Из них следует, что множество $X(\mathbb{R})$ состоит из двух торов; обозначим их через X_1, X_2 .

ЛЕММА 2.2.2. *Классы гомологий $[X_1], [X_2] \in H_2(Y, \mathbb{F}_2)$ равны нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W – поверхность, полученная из $S/\{T^{2n}\}$ с помощью разрешения особенностей. Тогда проекция $W \rightarrow X(\mathbb{C})$ является универсальным накрытием. Отображение T индуцирует инволюцию на W ; обозначим ее также через T . Вещественная структура $\tau: S \rightarrow S$ опускается до вещественной структуры $g': S/\{T^{2n}\} \rightarrow S/\{T^{2n}\}$, так как $T^2: S \rightarrow S$ – вещественная инволюция. Вещественная структура поднимается с $S/\{T^{2n}\}$ на W , эту структуру также будем обозначать через g' . Инволюция $g'' = g' \circ T: W \rightarrow W$ будет второй вещественной структурой на W . Множество $W^{g'}$ состоит из торов $S_0/\{T^{2n}\}, S_2/\{T^{2n}\}$, а множество $W^{g''}$ состоит из торов $S_1/\{T^{2n}\}, S_3/\{T^{2n}\}$. Проекция $W/g' \rightarrow X(\mathbb{C})/G$, $W/g'' \rightarrow X(\mathbb{C})/G$ являются двухлистными накрытиями Y с ветвлением вдоль X_2 , X_1 соответственно, поэтому классы коомологий $[X_1], [X_2]$ равны нулю. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2.3. *Выполняется равенство $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_1^*} H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\beta_1} H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \xrightarrow{j_0^*} H^2(Y, \mathbb{F}_2).$$

Так как $H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$, то $H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. С другой стороны, $H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$, а из леммы 2.2.2 следует, что гомоморфизм j_0^* нулевой. Следовательно, $H^1(Y, \mathbb{F}_2) = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2.4. *Гомоморфизм $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как преобразование монодромии $T: W \rightarrow W$ универсального накрытия $W \rightarrow X(\mathbb{C})$ переставляет компоненты множеств $W^{g'}$, $W^{g''}$, то гомоморфизм $\pi_1(X(\mathbb{R})) \rightarrow \pi_1(X(\mathbb{C}))$ нулевой, следовательно, гомоморфизм $H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H_1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ нулевой. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.2.5. *Поверхность X является ГМ-поверхностью, но не будет ГМЗ-поверхностью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2.1.1 и леммы 2.2.3 следует, что X – GM-поверхность. Покажем, что X не является GM $\mathbb{Z}$ -поверхностью; для этого проверим, что дифференциал

$$d_2^{0,3}: H^0\left(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) \rightarrow H^2\left(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) \quad (2.2.1)$$

ненулевой. Пусть ω_1 – образующая группы

$$H^1\left(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)\right) \subset H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-);$$

тогда из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^0\left(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & H^2\left(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) \\ \cong \downarrow \cup \omega_1 & & \cong \downarrow \cup \omega_1 \\ H^1\left(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)\right) & \xrightarrow{d_2^{1,3}} & H^3\left(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)\right) \end{array}$$

получаем, что гомоморфизм (2.2.1) ненулевой тогда и только тогда, когда гомоморфизм

$$d_2^{1,3}: H^1\left(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)\right) \rightarrow H^3\left(G, H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)\right) \quad (2.2.2)$$

ненулевой. Пусть теперь ω_2 – образующая группы

$$H^2\left(G, H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})\right) \subset H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z});$$

тогда гомоморфизм (2.2.2) будет ненулевым, если и только если гомоморфизм

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\cup \omega_2} H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \quad (2.2.3)$$

имеет ненулевое ядро. Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow{\beta} & H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = \bigoplus_{k=0}^1 H^{2k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \\ \downarrow \cup \omega_2 & & \cong \downarrow \cup \tilde{\omega}_2 \\ H^5(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) & \xrightarrow[\sim]{\beta} & H^5(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = \bigoplus_{k=0}^1 H^{2k}(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2), \end{array}$$

где $\tilde{\omega}_2 = \beta(\omega_2) = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2$. Из нее следует, что гомоморфизм (2.2.3) будет иметь ненулевое ядро тогда и только тогда, когда гомоморфизм ограничения

$$H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) \quad (2.2.4)$$

имеет ненулевое ядро. Итак, нам достаточно проверить, что гомоморфизм (2.2.4) немонотонен. Для проверки этого факта рассмотрим точную последовательность (1.4.1). Согласно этой последовательности нужно показать, что гомоморфизм

$$\delta_2: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}') \quad (2.2.5)$$

имеет ненулевое коядро. Для проверки этого факта заметим прежде всего, что из точной последовательности пучков (1.4.2) вытекают равенства

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) = H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2.$$

Если отождествлять $H^3(Y, \mathbb{Z}')$ с $H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, то гомоморфизм (2.2.5) совпадает с гомоморфизмом Гизина $j_1^*: H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$. Этот факт вытекает из описания гомоморфизма (2.2.5) в теореме 1.4.4. Но из леммы 2.2.4 следует, что гомоморфизм Гизина равен нулю, следовательно, гомоморфизм (2.2.5) имеет ненулевое коядро. Теорема доказана.

§ 3. Приложения

3.1. Гомоморфизмы $f^*: H^q(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$, $f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$. Далее X – произвольная поверхность, только предполагается, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 3.1.1. *Имеет место включение*

$$\text{Ker } [f^*: H^q(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)] \supset \text{Im } j_{q-2}^*, \quad (3.1.1)$$

где j_{q-2}^* – гомоморфизм Гизина, причем для ГМ-поверхности это включение становится равенством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм $f^*: H^q(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ разлагается в композицию краевых гомоморфизмов

$$H^q(Y, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{i_q^*} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\alpha} H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2).$$

Следовательно, имеем включение

$$\text{Ker } f^* \supset \text{Ker } i_q^*, \quad (3.1.2)$$

которое будет равенством, если

$$\text{Im } i_q^* \cap \text{Ker } \alpha = 0. \quad (3.1.3)$$

Из точной последовательности (1.2.3) получаем равенство $\text{Ker } i_q^* = \text{Im } j_{q-2}^*$, поэтому включение (3.1.2) совпадает с включением (3.1.1). Осталось показать, что для ГМ-поверхности выполняется равенство (3.1.3). Заметим, что имеет место равенство

$$\text{Ker } \alpha = F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2),$$

где $\{F^k H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)\}$ – возрастающая фильтрация, которую дает вторая спектральная последовательность. В [8] показано, что для ГМ-многообразия гомоморфизм

$$\beta: F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) \rightarrow F^{q-1} H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \quad (3.1.4)$$

является мономорфизмом. Ограничение гомоморфизма β_q на $F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2)$ совпадает с гомоморфизмом (3.1.4), поэтому равенство (3.1.3) для ГМ-поверхности следует из точности последовательности (1.2.3). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.2. Гомоморфизм $f^*: H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2)$ всегда мономорфен, если $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, так как гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \beta: F^0 H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{F}_2) & \longrightarrow & F^0 H^1(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{F}_2) \\ \parallel & & \parallel \\ H^0(X(\mathbb{C}), \mathbb{F}_2) & & H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \end{array}$$

мономорфен. Отметим еще, что утверждение теоремы при $q = 2$ было доказано в [6].

ТЕОРЕМА 3.1.3. Пусть $X(\mathbb{R})$ – ориентируемая поверхность, а X – GMZ-поверхность; тогда справедливы утверждения:

- 1) гомоморфизм $f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ мономорфен при $q = 0, 1, \dots, 4$;
- 2) выполняется равенство

$$H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G = f^*(H^q(Y, \mathbb{Z})) + j^*(H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})),$$

где j^* – гомоморфизм Гизина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм

$$f^*: H^q(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \quad (3.1.5)$$

разлагается в композицию краевых гомоморфизмов

$$H^q(Y, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_q^*} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha} H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

В п. 1.3 показано, что гомоморфизм i_q^* при $q \neq 3$ всегда является мономорфизмом, а для ориентируемой поверхности он будет мономорфизмом и при $q = 3$. Если X является GMZ-поверхностью, то гомоморфизм ограничения

$$\beta: F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow F^{q-1} H^q(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z})$$

будет мономорфизмом. Это утверждение доказывается так же, как соответствующее утверждение для когомологий с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$, поэтому его доказательство опускаем. Из этого утверждения следует, что пересечение $i_q^*(H^q(Y, \mathbb{Z}))$ с $\text{Ker } \alpha = F^{q-1} H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$ нулевое для GMZ-поверхности. Следовательно, гомоморфизм (3.1.5) мономорфен.

Итак, первое утверждение теоремы доказано. Чтобы доказать второе утверждение, сначала построим эквивариантный гомоморфизм Гизина

$$j_q^*: H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})$$

при $q = 0, 1$. Пусть U – трубчатая окрестность $X(\mathbb{R})$ в $X(\mathbb{C})$, инвариантная относительно инволюции g ; тогда имеем изоморфизм Тома

$$H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{q+2}(\tilde{U}, \partial U; \mathbb{Z}).$$

Спектральная последовательность

$$\Pi_2^{p,q} = H^p(G, H^q(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z})) \implies H^{p+q}(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{Z})$$

вырождается, так как выполняется равенство

$$\dim H^*(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = \dim H^1(G, H^*(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z})) + \dim H^2(G, H^*(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z})),$$

поэтому краевой гомоморфизм

$$\alpha: H^{q+2}(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2}(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом при $q = 0, 1$. Эквивариантный гомоморфизм Гизина $\mathbf{j}_q^*$ при $q = 0, 1$ определяется как композиция отображений

$$H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^{q+2}(\bar{U}, \partial U; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\alpha^{-1}} H^{q+2}(\bar{U}, \partial U; G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{q+2}(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}).$$

Из определения $\mathbf{j}_q^*$ видно, что выполняется равенство $\alpha \circ \mathbf{j}_q^* = j_q^*$. Заметим еще, что композиция $\beta_{q+2} \circ \mathbf{j}_q^*$ равна гомоморфизму редукции по mod 2

$$R^*: H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}) \rightarrow H^q(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2).$$

Это утверждение следует из того, что для коомологий с коэффициентами в $\mathbb{F}_2$ композиция $\beta_{q+2} \circ \mathbf{j}_q^*$ в случае ориентируемой $X(\mathbb{R})$ является тождественным отображением (см. [7]).

Теперь перейдем к непосредственному доказательству второго утверждения теоремы. При $q = 0, 4$ оно очевидно. При $q = 1$ это утверждение также всегда выполняется, потому что отображения

$$i_1^*: H^1(Y, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}), \quad \alpha: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G$$

являются изоморфизмами. При $q = 2, 3$ в силу точных последовательностей из п. 1.3 и замечаний об эквивариантном гомоморфизме Гизина имеем равенство

$$H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}) = i_q^*(H^q(Y, \mathbb{Z})) + \mathbf{j}_{q-2}^*(H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})).$$

Применим к этому равенству отображение α ; тогда получим равенство

$$\alpha(H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})) = f^*(H^q(Y, \mathbb{Z})) + j_{q-2}^*(H^{q-2}(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z})).$$

Осталось заметить, что для $\text{GM}\mathbb{Z}$ -поверхности выполняется равенство

$$\alpha(H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z})) = H^q(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^G.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1.4. При $q = 2$ второе утверждение теоремы было доказано в [6], но более сложным способом.

3.2. Группа Брауэра. Топологическая группа Брауэра $\mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})$ поверхности X равна группе кручения $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\mathrm{tors}}$ (см. [2]). Ядро краевого гомоморфизма

$$\alpha: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$$

состоит из элементов второго порядка (см. [2]), поэтому является подгруппой топологической группы Брауэра; она обозначается через $\mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})^0$. Тогда получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})^0 \rightarrow \mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}}) \xrightarrow{\alpha} \Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-)_{\mathrm{tors}} \rightarrow 0, \quad (3.2.1)$$

где группу $\Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-)$ дает вторая спектральная последовательность. Рассмотрим теперь композицию краевых гомоморфизмов

$$H^3(Y, \mathbb{Z}') \xrightarrow{i_3^*} H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\alpha} H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-).$$

ЛЕММА 3.2.1. *Образ гомоморфизма $\alpha \circ i_3^*$ равен $(e + g^*)H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм $\alpha \circ i_3^*$ индуцирован вложением пучка $\mathbb{Z}' = f_*^G(\mathbb{Z}_-) \hookrightarrow f_*(\mathbb{Z}_-)$. Гомоморфизм

$$e + g^*: H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \quad (3.2.2)$$

индуцирован гомоморфизмом пучков

$$f_*(\mathbb{Z}_-) \xrightarrow{e+g} f_*(\mathbb{Z}_-),$$

который разлагается в композицию гомоморфизмов пучков

$$f_*(\mathbb{Z}_-) \xrightarrow{e+g} \mathbb{Z}' \hookrightarrow f_*(\mathbb{Z}_-).$$

Из точной последовательности пучков на Y

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow f_*(\mathbb{Z}_-) \xrightarrow{e+g} \mathbb{Z}' \rightarrow 0$$

следует, что гомоморфизм когомологий

$$e + g^*: H^3(Y, f_*(\mathbb{Z}_-)) \rightarrow H^3(Y, \mathbb{Z}')$$

является эпиморфизмом. Следовательно, образ гомоморфизма $\alpha \circ i_3^*$ равен образу гомоморфизма (3.2.1). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3.2.2. *Пусть X – поверхность, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда выполняется неравенство*

$$\dim_2 \mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}}) \geq 2s - \log_2 s_a - 1, \quad (3.2.3)$$

где ${}_2\mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})$ – подгруппа $\mathrm{Br}(X^{\mathrm{top}})$, состоящая из элементов второго порядка, s – число компонент связности в $X(\mathbb{R})$, s_a – число компонент связности множества вещественных точек многообразия Альбанезе поверхности X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм ограничения

$$\beta: H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Так как

$$H^3(X(\mathbb{R}); G, \mathbb{Z}_-) = H^0(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) \oplus H^2(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2) = (\mathbb{F}_2)^{2s},$$

то из точной последовательности (1.4.1) получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow i_3^*(H^3(Y, \mathbb{Z}')) \rightarrow H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{\beta} (\mathbb{F}_2)^{2s-1} \rightarrow 0. \quad (3.2.4)$$

Мы будем доказывать, что коядро гомоморфизма

$$\beta: \text{Br}(X^{\text{top}}) \rightarrow (\mathbb{F}_2)^{2s-1}$$

имеет размерность не больше чем $\log_2 s_a$. Заметим, что из этого утверждения следует неравенство (3.2.3). Мы утверждаем, что имеют место следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / \text{Br}(X^{\text{top}}) + i^* H^3(Y, \mathbb{Z}') \\ & \xrightarrow{\cong} \Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-) / \Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} + (e + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

$$\begin{aligned} & H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / \text{Br}(X^{\text{top}}) + i^* H^3(Y, \mathbb{Z}') \\ & \xrightarrow{\beta} (\mathbb{F}_2)^{2s-1} / \beta(\text{Br}(X^{\text{top}})). \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Первый из этих изоморфизмов следует из точной последовательности (3.2.1), а второй изоморфизм следует из точной последовательности (3.2.4). Кроме этих изоморфизмов имеют место включения

$$\begin{aligned} & \Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-) / \Pi_{\infty}^{0,3}(\mathbb{Z}_-)_{\text{tors}} + (e + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \\ & \subset H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G / \left(H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G \right)_{\text{tors}} + (e + g^*) H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) \\ & \subset \left(H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / \text{Tors} \right)^G / (e + g^*) \left(H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / \text{Tors} \right) \\ & = H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / \text{Tors}). \end{aligned}$$

В силу этих включений и изоморфизмов (3.2.5), (3.2.6) получаем неравенство

$$\dim \text{Coker}[\beta: \text{Br}(X^{\text{top}}) \rightarrow (\mathbb{F}_2)^{2s-1}] \leq \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / \text{Tors}).$$

Осталось заметить, что (см. [9])

$$\begin{aligned} \dim H^2(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-) / \text{Tors}) &= \dim H^1(G, H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) / \text{Tors}) \\ &= \dim H^1(G, H^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z})) = \log_2 s_a. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $\rho_0(X)$ – число Лефшеца, т.е. размерность коядра отображения цикла

$$\text{cl}_{\mathbb{C}}: (\text{Pic } X) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-,$$

где $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_-$ – подпространство $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$, состоящее из классов когомологий, на которых инволюция g^* действует умножением на -1 ; тогда выполняется равенство (см. [2])

$$\dim_2 \text{Br}(X) = \rho_0(X) + \dim_2 \text{Br}(X^{\text{top}}).$$

Поэтому имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3.2.3. Пусть X – поверхность, $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$; тогда выполняется неравенство

$$\dim_2 \text{Br}(X) \geq 2s + \rho_0(X) - \log_2 s_a - 1.$$

Список литературы

1. Гротендик А. О некоторых вопросах гомологической алгебры. М.: ИЛ, 1961.
2. Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5.
3. Краснов В. А. Неравенства Гарнака–Тома для отображений вещественных алгебраических многообразий // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1983. Т. 47. № 2. С. 268–297.
4. Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Proceedings of the 8th Algebraic Geometry Conference. Yaroslavl', 1992. P. 113–136.
5. Краснов В. А. Об эквивариантных когомологиях Гротендика вещественного алгебраического многообразия и их приложениях // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 3. С. 36–52.
6. Краснов В. А. О классах когомологий, определенных вещественными точками вещественной алгебраической GM-поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 5. С. 210–221.
7. Краснов В. А. Эквивариантное отображение цикла на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
8. Краснов В. А. Алгебраические циклы на вещественном алгебраическом GM-многообразии и их приложения // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 4. С. 153–173.
9. Краснов В. А. Отображение Альбанезе для вещественных алгебраических многообразий // Матем. заметки. 1982. Т. 82. № 3. С. 365–374.

Ярославль

Поступило в редакцию
18.VII.1995