Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Рабинович, Алгебры сингулярных интегральных операторов на сложных контурах с узлами, являющимися точками логарифмического завихрения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1996, том 60, выпуск 6, 169–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/im99>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:53:59

УДК 517.95

В. С. Рабинович

Алгебры сингулярных интегральных операторов на сложных контурах с узлами, являющимися точками логарифмического завихрения

Рассматривается банахова алгебра $\mathcal{M}_p(\Gamma, \omega)$, порожденная сингулярными интегральными операторами, действующими в пространствах $L_p(\Gamma, \omega)$, где ω – степенной вес, Γ – составной контур с узлами, являющимися точками завихрения логарифмического или более слабого характера, и операторами умножения на ограниченные функции, допускающие разрывы второго рода. Описана алгебра символов, и в терминах символов даны условия фредгольмовости операторов из алгебры $\mathcal{M}_p(\Gamma, \omega)$. Существенную роль в работе играют теоремы о локальной обратимости псевдодифференциальных операторов и оценки их локальных норм.

Библиография: 23 наименования.

Введение

К настоящему времени теория банаховых алгебр, порожденных сингулярными интегральными операторами (СИО) на сложных кусочно-ляпуновских контурах с коэффициентами, имеющими разрывы первого рода, в основном построена (см., например, монографии [1]–[5] и статьи [6]–[8]). Отметим работу [9], посвященную СИО на сложных контурах с каспами, а также работу [10], в которой исследовались СИО со сдвигом на сложных контурах.

Основным аппаратом исследования операторов из указанных выше классов является локальный принцип в одной из его форм и анализ локальной алгебры, порожденной операторами умножения на кусочно-постоянные функции и СИО на системе лучей, выходящих из одной точки. При этом вычисление локальных представителей с точностью до замены переменных проводилось методом “замораживания”, а сами локальные представители являлись операторами меллиновской свертки.

Алгебры, порожденные СИО на кривых Карлесона и операторами умножения на ограниченные функции, имеющие разрывы второго рода, изучены только в некоторых частных ситуациях. Банаховы алгебры, порожденные операторами Теплица и Ханкеля на прямой или окружности и операторами умножения на кусочно-квазинепрерывные функции, рассматривались в работах [11]–[14]. В работе [15] рассматривалась задача Римана на негладких открытых кривых с точками логарифмического завихрения, а в работе [16] изучена банахова алгебра операторов, порожденная СИО и операторами умножения на кусочно-непрерывные функции, действующими в пространствах $L_p(\Gamma, \omega)$, $1 < p < \infty$, где ω – вес Макенхаупта,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №96-01-01195.

Γ – спрямляемый замкнутый контур, имеющий точки завихрения логарифмического характера.

В настоящей статье рассматриваются алгебры операторов $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, действующих в пространствах $L_p(\Gamma, \omega)$ со степенными весами ω , порожденные СИО на сложных контурах Γ с узлами, являющимися точками логарифмического завихрения более общего характера, чем в работе [16], и операторами умножения на функции, имеющие разрывы второго рода, из класса, являющегося замыканием по $\sup$ -норме на Γ множества непрерывно дифференцируемых на Γ/F (F – множество узлов) функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\Gamma \ni x \rightarrow z} |x - z| a'(z) = 0, \quad z \in F.$$

Кривые $\{\gamma_j\}_{j=1}^N$, составляющие контур в окрестности узла z , имеют параметризацию:

$$\gamma_j = \{x \in \mathbb{C} : x = z + \varphi_j(s), \quad \varphi_j(s) = s \exp i\omega_j(s), \quad s \in [0, s_j]\}, \quad (*)$$

где $\omega_j(s) = \delta \ln s + \theta_j(s)$, $\delta \in \mathbb{R}$, $\theta_j(s) \in C^1((0, s_j])$, $\lim_{s \rightarrow +0} s\theta'_j(s) = 0$.

Продвижение в расширении класса контуров и кривых, для которых удается построить законченную теорию фредгольмовости, стало возможным благодаря привлечению для локального анализа СИО из указанных выше классов техники псевдодифференциальных операторов (ПДО). Сочетание локального принципа и техники ПДО позволяет построить символическое исчисление и дать условия фредгольмовости операторов из алгебры $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$.

Отметим, что впервые техника ПДО для исследования СИО на контурах с точками завихрения была предложена в заметке автора [17], где рассматривался случай $p = 2$, а кривые, составляющие узел, имели параметризацию (*), в которой $\delta = 0$.

Данная работа состоит из четырех параграфов. В § 1 рассмотрены ПДО, действующие в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, с медленно меняющимися на бесконечности символами. Даны критерии локальной обратимости в бесконечно удаленных точках и фредгольмовости, а также приведены оценки локальных норм; § 2 посвящен переносу этих результатов на ПДО Меллина. (Результаты этих параграфов, на наш взгляд, имеют самостоятельное значение и могут быть использованы во многих ситуациях.) В § 3 строятся и исследуются банаховы алгебры, порожденные СИО и операторами умножения на функции, имеющие разрывы второго рода. В § 4 рассмотрен случай замкнутого контура с точками завихрения и дана формула индекса, доказательство которой основано на формуле Федосова (см. [18], [19]) для ПДО на $\mathbb{R}$.

§ 1. Псевдодифференциальные операторы на $\mathbb{R}$ нулевого порядка

1. Псевдодифференциальные операторы. Будем использовать следующие обозначения: если $\mathfrak{B}$ – комплексное банахово пространство, то $\mathfrak{L}(\mathfrak{B})$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{K}(\mathfrak{B})$ – двусторонний идеал компактных операторов в $\mathfrak{B}$. Через $L_p^N = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$, обозначим банахово пространство измеримых на $\mathbb{R}$ вектор-функций с нормой

$$\|u\|_{L_p^N} = \left(\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^N |u_j(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Через $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^2)$ обозначим класс таких C^∞ -функций на $\mathbb{R}^2$, что для любых α, β найдутся константы $C_{\alpha,\beta} > 0$ такие, что выполнены неравенства

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{m-\alpha}, \quad \langle \xi \rangle = (1 + \xi^2)^{1/2}. \quad (1.1)$$

Через $S_{1,0}^m(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$ обозначим класс матриц-функций

$$a(x, \xi) = (a_{ij}(x, \xi))_{i,j=1}^n, \quad a_{ij}(x, \xi) \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^2).$$

Матрице-функции $a(x, \xi) \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$, называемой *символом*, сопоставим ПДО $A = a(x, D)$ по формуле

$$Au = a(x, D)u = (2\pi)^{-1} \iint a(x, \xi) u(y) \exp(i(x - y)\xi) dy d\xi, \quad (1.2)$$

где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$; интегрирование в (1.2) ведется по всему пространству $\mathbb{R}^2$. Интеграл в формуле (1.2) понимается либо как повторный, либо как осциллирующий [19], [20].

Через $OPS_{1,0}^m(N)$ обозначим класс ПДО с символами $a(x, \xi) \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $a(x, y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$ и выполнены оценки

$$|\partial_x^\beta \partial_y^\gamma \partial_\xi^\alpha a_{ij}(x, y, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \langle \xi \rangle^{m-\alpha}, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

для любых α, β, γ . В этом случае будем говорить, что $a(x, y, \xi) \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$.

Сопоставим $a(x, y, \xi) \in S_{1,0}^m(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$ оператор

$$Au = (2\pi)^{-1} \iint a(x, y, \xi) u(y) \exp(i(x - y)\xi) dy d\xi, \quad (1.3)$$

где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, который называется *ПДО с двойным символом*. (В случае, когда не пишутся пределы интегрирования, это означает, что интегрирование ведется по $\mathbb{R}^2$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [20]. (a) Если $A, B \in OPS_{1,0}^0(N)$, то $AB \in OPS_{1,0}^0(N)$ и символ $\sigma_{AB}(x, \xi)$ оператора AB вычисляется по формуле

$$\sigma_{AB}(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint a(x, \xi + \eta) b(x + y, \xi) \exp(-i(y, \eta)) dy d\eta. \quad (1.4)$$

(b) Если $A \in OPS_{1,0}^0(N)$, то формально сопряженный оператор A^* принадлежит $OPS_{1,0}^0(N)$ и

$$\sigma_{A^*}(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \iint a^*(x + y, \xi + \eta) \exp(-i(y, \xi)) dy d\xi. \quad (1.5)$$

(c) Если $a(x, y, \xi) \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$, то оператор (1.3) принадлежит $OPS_{1,0}^0(N)$ и его символ $\sigma_A(x, \xi)$ вычисляется по формуле

$$\sigma_A(x, \xi) = (2\pi)^{-1} \iint a(x, x + y, \xi + \eta) \exp(-i(y, \eta)) dy d\eta, \quad (1.6)$$

где интегралы в (1.4)–(1.6) понимаются как осциллирующие.

(d) Оператор $A \in OPS_{1,0}^0(N)$ ограничен в $L_p^N = L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ и $\|A\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq M$, где

$$M = \max_{1 \leq i, j \leq N} \max_{\alpha \leq 2, \beta \leq 1} \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_{i,j}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^\alpha$$

для операторов вида (1.2) и

$$M = \max_{1 \leq i, j \leq N} \max_{\alpha \leq 2, \beta \leq 1, \gamma \leq 1} \sup_{(x, y, \xi) \in \mathbb{R}^3} \|\partial_x^\beta \partial_y^\gamma \partial_\xi^\alpha a_{i,j}(x, y, \xi)\| \langle \xi \rangle^\alpha$$

для операторов вида (1.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 (см. [23]). Пусть $A \in OPS_{1,0}^0(N)$ и обратим в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$; тогда $A^{-1} \in OPS_{1,0}^0(N)$.

2. ПДО с медленно меняющимся при $x \rightarrow \infty$ символом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $a(x, \xi) \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$. Будем говорить, что символ $a(x, \xi)$ медленно меняется при $x \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_{i,j}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^\alpha = 0 \quad \forall \alpha, \forall \beta \neq 0.$$

Будем говорить, что двойной символ $a(x, y, \xi) \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$ медленно меняется при $x, y \rightarrow \infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, y \in K} |\partial_x^\beta \partial_y^\gamma \partial_\xi^\alpha a(x, x + y, \xi)| \langle \xi \rangle^\alpha = 0 \quad \forall \alpha, \beta, \gamma : \beta + \gamma \neq 0,$$

где K – произвольный компакт в $\mathbb{R}$.

Отметим, что класс ПДО с медленно меняющимися символами впервые был введен в работе [21] (см. также [22]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Обозначим через $\tilde{S}_{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$ класс медленно меняющихся при $x \rightarrow \infty$ символов, а класс символов, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_{i,j}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^\alpha = 0 \quad \forall \alpha, \forall \beta,$$

обозначим через $\mathcal{T}_{1,0}^\pm(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$.

Положим $\mathcal{T}_{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N}) = \mathcal{T}_{1,0}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap \mathcal{T}_{1,0}^-(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$. Соответствующие классы ПДО обозначим $OPS_{1,0}(\tilde{S}_{1,0}(N))$, $OPT_{1,0}^\pm(N)$, $OPT_{1,0}(N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. (a) Если $A, B \in OPS_{1,0}(\tilde{S}_{1,0}(N))$, то $AB \in OPS_{1,0}(\tilde{S}_{1,0}(N))$ и символ $\sigma_{AB}(x, \xi)$ оператора AB вычисляется по формуле

$$\sigma_{AB}(x, \xi) = a(x, \xi)b(x, \xi) + t(x, \xi), \quad (1.7)$$

где $t(x, \xi) \in \mathcal{T}_{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$.

(b) Если $A \in OPS_{1,0}(\tilde{S}_{1,0}(N))$, то формально сопряженный оператор A^* принадлежит $OPS_{1,0}(\tilde{S}_{1,0}(N))$ и его символ вычисляется по формуле

$$\sigma_{A^*}(x, \xi) = a^*(x, \xi) + t(x, \xi), \quad (1.8)$$

где $t(x, \xi) \in \mathcal{T}_{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$.

(с) Если $a(x, y, \xi) \in \tilde{S}_{1,0}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{N \times N})$ и A – соответствующий ПДО с двойным символом, то

$$\sigma_A(x, \xi) = a(x, x, \xi) + t(x, \xi),$$

где $t(x, \xi) \in \mathcal{T}_{1,0}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap S_{1,0}^{-1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})$.

(d) Операторы класса $OPT_{1,0}(N) \cap OPS_{1,0}^{-1}(N)$ компактны в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$.

Доказательство проводится точно так же, как и доказательство предложения 2.1 работы [22].

3. Алгебры $M_p(N)$, $\mathcal{M}_p^\pm(N)$, $\mathcal{M}_p(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Через $M_p(N)$ обозначается множество мультипликаторов в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, т.е. таких измеримых на $\mathbb{R}$ матриц-функций, что оператор

$$a(D)u = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} a(\xi) \hat{u}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N),$$

где $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i(x, \xi)} dx$ – преобразование Фурье $u(x)$, продолжается до ограниченного оператора в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$.

Норма в $M_p(N)$ вводится по формуле $\|a\|_{M_p(N)} = \|a(D)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)}$.

Через $\mathcal{M}_p(N)$ обозначим банахову алгебру ограниченных, непрерывных на $\mathbb{R}$ матриц-функций $a(y, \cdot)$ со значениями в $M_p(N)$, нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}_p(N)} = \sup_{y \in \mathbb{R}} \|a(y, \cdot)\|_{M_p(N)}$$

и естественной операцией умножения матриц-функций.

Через $\mathcal{M}_p^{0\pm}(N)$ обозначим подалгебру $\mathcal{M}_p(N)$, состоящую из таких матриц-функций $a \in \mathcal{M}_p(N)$, что

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \|a(y, \cdot)\|_{M_p(N)} = 0,$$

а через $\mathcal{M}_p^0(N)$ обозначим $\mathcal{M}_p^{0+}(N) \cap \mathcal{M}_p^{0-}(N)$.

Будем обозначать через $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N) = \mathcal{M}_p(N) / \mathcal{M}_p^{0+}(N)$ фактор-алгебру с естественной нормой

$$\|\hat{a}\|_{\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \sup_{y \in (R, +\infty)} \|a(y, \cdot)\|_{M_p(N)}, \quad (1.9)$$

где $a \in \mathcal{M}_p(N)$ – произвольный представитель факторкласса $\hat{a} \in \tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$.

Аналогично вводятся факторалгебры

$$\tilde{\mathcal{M}}_p^-(N) = \mathcal{M}_p(N) / \mathcal{M}_p^{0-}(N) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathcal{M}}_p(N) = \mathcal{M}_p(N) / \mathcal{M}_p^0(N).$$

Отметим некоторые свойства банаховой алгебры $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$. (Аналогичными свойствами обладают алгебры $\tilde{\mathcal{M}}_p^-(N)$, $\tilde{\mathcal{M}}_p(N)$.) Это алгебра с единицей, $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N) = \tilde{\mathcal{M}}_q^+(N)$ ($p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$), $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N) \subset \tilde{\mathcal{M}}_2^+(N)$ и это вложение

топологическое, причем алгебра $\tilde{\mathcal{M}}_2^+(N)$ изометрически изоморфна факторалгебре

$$C_b(\mathbb{R}, L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})) / C_0^+(\mathbb{R}, L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})),$$

где $C_b(\mathbb{R}, L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N}))$ – замыкание алгебраического тензорного произведения $C_b(\mathbb{R}) \otimes L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N})$ по норме

$$\|a\| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \|a(y, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{C}^{N \times N})},$$

$C_0^+(\mathbb{R}, L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N}))$ – двухсторонний идеал в $C_b(\mathbb{R}, L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^{N \times N}))$, состоящий из таких функций, что

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \|a(y, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{C}^{N \times N})} = 0.$$

Алгебра $\mathcal{M}_p(N)$ ($1 < p < \infty$) является алгеброй с инволюцией: $a(y, \xi) \rightarrow a^*(y, \xi)$, где $a^*(y, \xi)$ – символ оператора $a^*(y, D_x)$; следовательно, таковыми являются и алгебры $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$, $\tilde{\mathcal{M}}_p^-(N)$, $\tilde{\mathcal{M}}_p(N)$.

Введенная таким образом инволюция обладает всеми свойствами, перечисленными в [5, с. 44]. Отсюда следует наполненность алгебры $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$ в $\tilde{\mathcal{M}}_2^+(N)$ при $1 < p < \infty$, т.е. если элемент $a \in \tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$ обратим в $\tilde{\mathcal{M}}_2^+(N)$, то $a^{-1} \in \tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$.

Таким образом, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Факторкласс $\hat{a} \in \tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$, $1 < p < \infty$, обратим в $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$ тогда и только тогда, когда

$$d_+(a) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(x, \xi) \in (R, +\infty) \times \mathbb{R}} |\det a(x, \xi)| > 0,$$

где a – произвольный представитель факторкласса $\hat{a}$. (Аналогичным образом формулируется условие обратимости факторкласса $\hat{a} \in \tilde{\mathcal{M}}_p^-(N)$.)

Необходимое и достаточное условия обратимости факторкласса $\hat{a} \in \mathcal{M}_p(N)$ состоят в том, что

$$d(a) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{|x| > R, \xi \in \mathbb{R}} |\det a(x, \xi)| > 0,$$

где a – произвольный представитель факторкласса $\hat{a}$.

4. Локальная обратимость ПДО в бесконечно удаленной точке. Пусть функция $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ равна 1 при $x \geq 2$ и равна 0 при $x \leq 1$, $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi_R(x) = \varphi(x/R)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Будем говорить, что оператор $A \in \mathfrak{L}(L_p^N)$ локально обратим слева (справа) в точке $+\infty$, если найдутся такое число $R > 0$ и такие операторы $B', B'' \in \mathfrak{L}(L_p^N)$, что $B'_R A \varphi_R = \varphi_R$ ($\varphi_R A B''_R = \varphi_R$).

Оператор называется локально обратимым в точке $+\infty$, если он локально обратим в этой точке слева и справа.

Аналогично определяется локальная обратимость в точках $-\infty$, $+\infty$.

Положим

$$d_+(A) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(y, \xi) \in (R, +\infty) \times \mathbb{R}, \|h\|=1} \|a(y, D_x)h\|_{L_p^N}. \quad (1.10)$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $A \in OPS_{1,0}^+(N)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) $A: L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N) \rightarrow L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ локально обратим в точке $+\infty$;
- (б) $d_+(A) > 0$;
- (с) существуют левый и правый локально обратные в точке $+\infty$ операторы, принадлежащие классу $OPS_{1,0}^+(N)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как следует из предложения 1.5, условие (б) равносильно условию

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(x, \xi) \in (R, +\infty) \times \mathbb{R}} |\det a(x, \xi)| > 0. \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Из локальной обратимости оператора A в точке $+\infty$ следует существование таких чисел $R_0 > 0$, $C > 0$, что для всех $R > R_0$

$$\|A\varphi_R u\|_{L_p^N} \geq C \|\varphi_R u\|_{L_p^N} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N). \quad (1.12)$$

Пусть последовательность $y_n \rightarrow +\infty$; тогда для достаточно больших номеров $n > n_0$ $\varphi_R(\tau_{y_n} u) = \tau_{y_n} u$ (где $(\tau_h u)(x) = u(x - h)$ – оператор сдвига). Таким образом, из (1.12) и изометричности в L_p^N оператора сдвига следует, что

$$\|\tau_{-y_n} A \tau_{y_n} u\|_{L_p^N} \geq C \|u\|_{L_p^N} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N). \quad (1.13)$$

Заметим, что $\tau_{-y_n} A \tau_{y_n} = a(x + y_n, D_x)$. Используя то, что $a(x, D) \in OPS_{1,0}^+(N)$, и предложение 1.2, (б), нетрудно показать, что последовательность операторов

$$q_n(x, D) = a(x + y_n, D_x) - a(y_n, D_x)$$

сильно сходится к нулю в L_p^N . Таким образом, из формулы (1.13) следует, что для любой последовательности $y_n \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|a(y_n, D_x)u\|_{L_p^N} \geq C \|u\|_{L_p^N} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N). \quad (1.14)$$

Из формулы (1.14) находим, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \inf_{y > R} \|a(y, D_x)u\|_{L_p^N} \geq C \|u\|_{L_p^N} \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N),$$

т.е. $d_+(A) > 0$.

(б) $\Rightarrow$ (с). Пусть выполнено условие (б), а следовательно, условие (1.11), из которого следует существование такого числа $R_0 > 0$, что для $\forall R(> R_0)$ существует $a^{-1}(x, \xi)$, $x > R$. Положим

$$r_R(x, \xi) = \varphi_R(x) a^{-1}(x, \xi) \quad (\in \tilde{S}_{1,0}^+(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^{N \times N})), \quad R > R_0.$$

Тогда

$$r_R(x, D) a(x, D) = \varphi_R(x) + t(x, D), \quad (1.15)$$

где $t(x, D) \in OPT_{1,0}^+(N)$ в силу предложения 1.4, (а).

Выберем теперь $R' > R$ настолько большим, чтобы $\varphi_R(x)\varphi_{R'}(x) = \varphi_{R'}(x)$. Тогда

$$r_R(x, D)a(x, D) = (I + t(x, D)\varphi_R(x))\varphi_{R'}(x).$$

Так как $t(x, D) \in OPT_{1,0}^+(N)$, то из предложения 1.2,(b) следует существование такого $R > R_0$, что $\|t(x, D)\varphi_R(x)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} < 1$. Оператор $(I + t(x, D)\varphi_R(x))$ обратим в L_p^N для достаточно большого R и $(I + t(x, D)\varphi_R(x))^{-1} \in OPS_{1,0}^0(N)$ в силу предложения 1.3.

Таким образом, A локально обратим слева в точке $+\infty$, и левый локально обратный оператор $B_l = (I + t(x, D)\varphi_R(x))^{-1}r_R(x, D) \in OPS_{1,0}(N)$.

Теорема, аналогичная теореме 1.1, дает условия локальной обратимости и в точках $-\infty, +\infty$.

5. Фредгольмовость и индекс ПДО класса $OPS_{1,0}(N)$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Оператор $A = a(x, D) \in OPS_{1,0}(N)$, действующий в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $1 < p < \infty$, фредгольмов тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{|x|+|\xi| \geq R} |\det a(x, \xi)| > 0. \quad (1.16)$$

Если условие (1.16) выполнено, то индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\text{ind } A = -(2\pi)^{-1} [\arg \det a(x, \xi)]_{\Gamma_{R', R''}}, \quad (1.17)$$

где приращение аргумента $[\cdot]$ берется вдоль контура

$$\Gamma_{R', R''} = \partial\Pi(R', R''), \quad \Pi(R', R'') = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R', \quad |\xi| \leq R''\},$$

причем контур $\Gamma_{R', R''}$ ориентирован положительным образом, т.е. при его обходе против часовой стрелки $\Pi(R', R'')$ остается слева; числа R', R'' таковы, что при $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Pi(R', R'')$ существует $a^{-1}(x, \xi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость и достаточность условия фредгольмовости (1.16) доказывается так же, как доказываются в теореме 1.1 необходимые и достаточные условия локальной обратимости. Заметим, что при $p = 2$ это условие получено в [21].

Докажем формулу индекса (1.17). Пусть компоненты $a_{ij}(x, \xi)$ символа $a(x, \xi)$ удовлетворяют оценкам

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a_{ij}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{-\alpha} \langle x \rangle^{-\beta} \quad (1.18)$$

для любых мультииндексов α, β ; $i, j = 1, \dots, N$. В этом случае для вычисления индекса ПДО применима формула Федосова [18], [19], согласно которой

$$\text{ind } A = -(2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_{R', R''}} \text{Sp}(a^{-1} da) = -(2\pi)^{-1} [\arg \det a(x, \xi)]_{\Gamma_{R', R''}}. \quad (1.19)$$

Формула (1.19) получена в [19] для операторов, действующих в L_2^N , однако, поскольку регуляризатор оператора $a(x, D)$ один и тот же во всех пространствах

L_p^N , $1 < p < \infty$, эта формула справедлива и для оператора $a(x, D)$, действующего в L_p^N .

Нетрудно показать, используя предложение 1.2,(d), что любой оператор $A \in OPS_{1,0}(N)$ можно аппроксимировать в $\mathfrak{L}(L_p^N)$ последовательностью A_n ПДО с символами, удовлетворяющими оценкам (1.18). Переход к пределу в (1.19) позволяет заключить, что эта формула верна для ПДО класса $OPS_{1,0}(N)$.

Пусть $\chi_r^+(x)$ – характеристическая функция луча $\mathbb{L}_r = \{x \in \mathbb{R} : x > r\}$, $\chi_r^-(x) = 1 - \chi_r^+(x)$.

В дальнейшем полезным является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть $a(x, D) \in OPS_{1,0}(N)$ и его символ $a(x, \xi)$ тождественно равен 1 при $x \leq r + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).

Оператор $\chi_r^+ a(x, D) \chi_r^+$ фредгольмов в $L_p(\mathbb{L}_r, \mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда оператор $a(x, D)$ фредгольмов в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, причем индексы этих операторов совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $\chi_r^+ a(x, D) \chi_r^+$ фредгольмов в $L_p(\mathbb{T}_r, \mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда фредгольмов в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$ оператор $A_1 = \chi_r^+ a(x, D) \chi_r^+ + \chi_r^-(x)$. Покажем, что $\tilde{a}(x, D) - A_1$ есть компактный оператор. Действительно,

$$\tilde{a}(x, D) - A_1 = \chi_r^+ \tilde{a}(x, D) \chi_r^- + \chi_r^- \tilde{a}(x, D) \chi_r^+ + \chi_r^- \tilde{a}(x, D) \chi_r^- - \chi_r^-. \quad (1.20)$$

Очевидно, что $\chi_r^- \tilde{a}(x, D) \chi_r^- = \chi_r^-$; следовательно, из (1.20) следует, что

$$\tilde{a}(x, D) - A_1 = \chi_r^+ \tilde{a}(x, D) \chi_r^- = \chi_r^+ (\tilde{a}(x, D) - I) \chi_r^-.$$

Оператор $\tilde{a}(x, D) - I$ имеет символ, тождественно равный нулю на множестве $(-\infty, r + \varepsilon)$, поэтому

$$\chi_r^+ (\tilde{a}(x, D) - I) \chi_r^- = \psi (\tilde{a}(x, D) - I) \chi_r^-,$$

где ψ – некоторая функция, принадлежащая $C^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset \mathbb{L}_r$, $\psi(x) = 1$ при $x \geq r + \varepsilon$.

Из предложения 1.4 следует, что коммутатор $[\psi, \tilde{a}(x, D)]$ компактен в $L_p(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$, и, следовательно, оператор $\chi_r^+ \tilde{a}(x, D) \chi_r^-$ также компактен.

6. Оценки локальной и существенной норм оператора $A \in OPS_{1,0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $A \in OPS_{1,0}(N)$; тогда *локальной нормой оператора A в точке $\pm\infty$* назовем число

$$|||A|||_{p,\pm} = \inf_{T \in OPT_{1,0}^\pm} \|A - T\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)}.$$

Существенной нормой оператора $A \in \mathfrak{L}(L_p^N)$ называют число

$$|||A|||_p = \inf_{T \in \mathfrak{K}(L_p^N)} \|A - T\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)}.$$

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $A \in OP\tilde{S}_{1,0}(N)$, $1 < p < \infty$; тогда

$$\|\hat{a}\|_{\tilde{\mathcal{M}}_p^\pm} \leq \|A\|_{p,\pm} \leq C\|\hat{a}\|_{\tilde{\mathcal{M}}_p^\pm} \quad (1.21)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от A , p .

ТЕОРЕМА 1.3'. Пусть $A = a(x, \xi) \in OP\tilde{S}_{1,0}(N)$, $1 < p < \infty$. Положим

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{|\xi| \geq r, x \in \mathbb{R}} \|a(x, \xi)\|_p = a_\infty,$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма $(N \times N)$ -матрицы $a(x, \xi)$, индуцированная l_p -нормой $\mathbb{C}^N$. Положим

$$\|\hat{a}\|_p = \max\{\|\hat{a}\|_{\tilde{\mathcal{M}}_p}, a_\infty\}.$$

Справедлива следующая двухсторонняя оценка:

$$\|\hat{a}\|_p \leq \|A\|_p \leq C\|\hat{a}\|_p. \quad (1.21')$$

Отметим, что $\|\hat{a}\|_p$ есть норма в факторалгебре $\mathcal{M}_p/(\mathcal{M}_p^0 \cap \mathcal{N}_p^0)$, где $\mathcal{N}_p^0$ — идеал в $\mathcal{M}_p$, состоящий из таких матриц-функций $a(x, \xi)$, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{|\xi| \geq r, x \in \mathbb{R}} \|a(x, \xi)\|_p = 0.$$

Проведем доказательство теоремы 1.3 только для знака $+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала оценку снизу в (1.21). Зададимся $\varepsilon > 0$ и найдем оператор $T_0 \in OPT_{1,0}^+$ такой, что

$$\|A\|_{p,+} \geq \|A - T_0\| - \varepsilon \geq \|(A - T_0)u\| - \varepsilon \quad \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \|u\|_{L_p} = 1. \quad (1.22)$$

Заменяем в (1.18) функцию u на $\tau_{y_m} u$, где $y_m \rightarrow +\infty$; тогда в силу изометричности оператора сдвига в L_p^N имеем

$$\|(A - T_0)\tau_{y_m} u\| = \|\tau_{-y_m}(A - T_0)\tau_{y_m} u\|. \quad (1.23)$$

Операторные последовательности $Q_m = \tau_{-y_m} A \tau_{y_m} - a(y_m, D_x)$, $\tau_{-y_m} T_0 \tau_{y_m}$ сильно сходятся к нулю в L_p^N при $m \rightarrow \infty$. Таким образом, из (1.22) и (1.23) следует, что

$$\|A\|_{p,+} \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \|a(y_m, D_x)u\|_{L_p^N} \quad (1.24)$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $\|u\|_{L_p^N} = 1$, и любой последовательности $y_m \rightarrow +\infty$. Из (1.24) в силу произвольности $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}^N)$, $\|u\|_{L_p^N} = 1$, следует, что

$$\|A\|_{p,+} \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \|a(y_m, D_x)\|_{L_p^N},$$

откуда и вытекает оценка снизу в (1.21).

Для доказательства оценки сверху в (1.21) нам потребуется приведенная ниже лемма. Для ее формулировки введем следующие обозначения.

Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}$; положим $V_\alpha^k = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha| < k\}$. Интервалы V_α^k , $\alpha \in \mathbb{Z}$, образуют открытое покрытие $\mathbb{R}$ кратности $k + 1$. Пусть $\varphi^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi^k(x) \in V_0^k$, $0 \leq \varphi^k(x) \leq 1$, $\varphi_\alpha^k = \varphi(x - \alpha)$, $\varphi^k(x)\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x)$ и $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varphi_\alpha^k(x) = 1$. Положим $\varphi_{\alpha,R}^k(x) = \varphi_\alpha^k(x/R)$.

ЛЕММА 1.1 [5]. Пусть A_α , $a \in \mathbb{Z}$, – равномерно ограниченное семейство операторов, действующих в L_p^N , $1 < p < \infty$. Тогда ряд $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varphi_{\alpha,R}^k(x) A_\alpha \times \varphi_{\alpha,R}^r(x)$ сильно сходится в L_p^N и

$$\left\| \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varphi_{\alpha,R}^k(x) A_\alpha \varphi_{\alpha,R}^r(x) \right\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq (k+1)(r+1) \sup \|A_\alpha\|_{\mathcal{L}(L_p^N)}.$$

Проведем доказательство оценки сверху в (1.21). Для заданного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $R_0 > 0$, что

$$\sup_{y \in (R, +\infty)} \|a(y, D_x)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq \|\hat{a}\|_{\widetilde{\mathcal{M}}_p^+} + \varepsilon \quad \forall R > R_0. \quad (1.25)$$

Оператор A представим в виде

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}} \varphi_{\alpha,R}^1(x) A \varphi_{\beta,R}^1(x) = \sum_{|\alpha-\beta| \leq L} \varphi_{\alpha,R}^1(x) A \varphi_{\beta,R}^1(x) \\ &\quad + \sum_{|\alpha-\beta| > L} \varphi_{\alpha,R}^1(x) A \varphi_{\beta,R}^1(x). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (1.26) (обозначим его через $T(L, R)$):

$$T(L, R) = \sum_{|\alpha-\beta| > L} \varphi_{\alpha,R}^1(x) \varphi_{\alpha,R}^2(x) A \varphi_{\beta,R}^2(x) \varphi_{\beta,R}^1(x). \quad (1.27)$$

Выберем L так, чтобы $\text{supp } \varphi_{\alpha,R}^2(x) \cap \text{supp } \varphi_{\beta,R}^2(x) = \emptyset$ при $|\alpha - \beta| > L$. Тогда, используя предложение 1.2, (а), нетрудно показать, что

$$\|\varphi_{\alpha,R}^2(x) A \varphi_{\beta,R}^2(x)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq C R^{-1}, \quad (1.28)$$

где константа $C > 0$ не зависит от α, β, R .

Из леммы 1.1 следует, что

$$\|T(R)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq C R^{-1} \quad (1.29)$$

с константой $C > 0$, не зависящей от α, β, R .

Из условия, что $A \in OP\widetilde{S}_{1,0}^+$, и предложения 1.2, (d) следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \|\varphi_{\alpha,R}^2(x) (a(x, D_x) - a(\alpha, D_x)) \varphi_{\beta,R}^2(x)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} = 0 \quad (1.30)$$

для любого $R > 0$.

Таким образом, из (1.29) и (1.30) следует, что $\forall \varepsilon > 0$ найдутся числа $R' > 0$ и $m' \in \mathbb{N}$ такие, что $\forall R > R', \forall m > m'$

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} \leq \sum_{|\alpha-\beta| \leq L, \alpha \leq m} \|\varphi_{\alpha,R}^1(x) A \varphi_{\beta,R}^1(x)\| + C \sup_{\alpha > m} \|a(\alpha, D_x)\|_{\mathcal{L}(L_p^N)} + 2\varepsilon. \quad (1.31)$$

Пусть $\Psi_N(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ равна 1 при $x > 2N > 0$ и равна 0 при $x < N$. Выберем N настолько большим, чтобы $\varphi_{\alpha,R}^1(x)\Psi_N(x) = 0$, когда $R > R'$, $m > m'$. Тогда из оценки (1.31) следует, что

$$\begin{aligned} |||A|||_{p,+} &\leq \|\Psi_N(x)A\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)} \leq C \sup_{\alpha > m} \|\Psi_N(\alpha)a(\alpha, D_x)\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)} + 2\varepsilon \\ &\leq C \sup_{y > m} \|\Psi_N(y)a(y, D_x)\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)} + 2\varepsilon \leq C\|\hat{a}\|_{\mathcal{M}_p^+} + 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Число m в оценке (1.32) можно выбрать так, чтобы $\Psi_N(y) = 1$ при $y \geq m$ и

$$\sup_{y > m} \|\Psi_N(y)a(y, D_x)\|_{\mathfrak{L}(L_p^N)} < \|\hat{a}\|_{\mathcal{M}_p^+} + \varepsilon/C. \quad (1.33)$$

Из (1.32) и (1.33) следует, что $|||A|||_{p,+} \leq C\|\hat{a}\|_{\mathcal{M}_p^+} + 3\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда и следует оценка сверху в (1.21).

7. Банахова алгебра $\mathfrak{U}_p(N)$ и некоторые ее факторалгебры. Через $\mathfrak{U}_p(N)$ обозначим банахову алгебру операторов, действующих в пространстве L_p^N , $p \in (1, \infty)$, полученную замыканием в $\mathfrak{L}(L_p^N)$ множества псевдодифференциальных операторов $a(x, D) \in OPS(N)$. Через $\mathfrak{U}_{0,p}^\pm(N)$, $\mathfrak{U}_{0,p}(N)$ обозначим двухсторонние идеалы в $\mathfrak{U}_p(N)$, порожденные ПДО класса $OPT_{1,0}^\pm(N)$, $OPT_{1,0}(N) \cap OPS_{1,0}^{-1}(N)$. Положим

$$\hat{\mathfrak{U}}_p^\pm(N) = \mathfrak{U}_p(N) \setminus \mathfrak{U}_{0,p}^\pm(N), \quad \tilde{\mathfrak{U}}_p(N) = \mathfrak{U}_p(N) \setminus \mathfrak{U}_{0,p}(N).$$

Заметим, что $\mathfrak{U}_{0,p}(N) = \mathfrak{K}(L_p^N)$.

Пусть $A \in \mathfrak{U}_p^\pm(N)$ ($A \in \mathfrak{U}_p(N)$) и $OPS(N) \ni A_n \rightarrow A$ в $\mathfrak{L}(L_p^N)$. Тогда в силу оценки (1.21) ((1.21')) последовательность $a_n(x, \xi)$ фундаментальна по норме $\|\cdot\|_{\tilde{\mathcal{M}}_p^\pm}$ ($|||\cdot|||_p$) и, следовательно, факторпоследовательность $\hat{a}_n(x, \xi)$ сходится в $\tilde{\mathcal{M}}_p^\pm(\mathcal{M}_p/(\mathcal{M}_p^0 \cap \mathcal{N}_p^0))$ к некоторому пределу $\hat{\sigma}^\pm(A)$ ($\hat{\sigma}(A)$), который будем называть *локальным символом* $A \in \mathfrak{U}_p^\pm$ в точке $\pm\infty$ (главным символом $A \in \mathfrak{U}_p(N)$).

Из теоремы 1.3 вытекают следующие оценки:

$$\|\hat{\sigma}^\pm(A)\|_{\mathcal{M}_p^\pm} \leq \|\hat{A}\|_{\hat{\mathfrak{U}}_p^\pm} \leq C\|\hat{\sigma}^\pm(A)\|_{\mathcal{M}_p^\pm}, \quad (1.34)$$

$$|||\hat{\sigma}(A)|||_p \leq \|\hat{A}\|_{\tilde{\mathfrak{U}}_p} \leq C|||\hat{\sigma}(A)|||_p, \quad (1.34')$$

где $\hat{A}$ – факторкласс, отвечающий A .

Пусть $m_p^\pm(N)$ ($m_p(N)$) – замыкание в $\mathcal{M}_p^\pm(N)$ ($\mathcal{M}_p(N)/(\mathcal{M}_p^0(N) \cap \mathcal{N}_p^0(N))$) класса символов $OPS(N)$. Тогда очевидно, что отображение $\Sigma_\pm: \mathfrak{U}_p^\pm(N) \rightarrow m_p^\pm(N)$ ($\Sigma: \mathfrak{U}_p \rightarrow m_p$), действующее по формуле $\Sigma_\pm(A) = \hat{\sigma}^\pm(A)$ ($\Sigma(A) = \hat{\sigma}(A)$), есть изоморфизм банаховых алгебр.

Следствием теоремы 1.1 являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $A \in \mathfrak{U}_p(N)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (а) $A: L_p^N \rightarrow L_p^N$ локально обратим в точке $+\infty$;
- (б) локальный символ $\hat{\sigma}_A^+(x, \xi)$ оператора A обратим в факторалгебре $\tilde{\mathcal{M}}_p^+(N)$, что равносильно тому, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(y, \xi) \in (R, +\infty) \times \mathbb{R}} |\det \sigma_A^+(x, \xi)| > 0, \quad (1.35)$$

где $\sigma_A^+(x, \xi)$ – некоторый представитель факторкласса $\hat{\sigma}_A^+(x, \xi)$.

Аналогичным образом формулируется утверждение о локальной обратимости в точке $-\infty$ для оператора из банаховой алгебры $\mathfrak{U}_p^-(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Если $A: L_p^N \rightarrow L_p^N$ локально обратим слева в точке $+\infty$, то верна априорная оценка (1.12), из которой так же, как и при доказательстве теоремы 1.1, вытекает условие (б). Из (б) следует, что факторкласс $\hat{A} \in \hat{\mathfrak{U}}_p^+(N)$, отвечающий A , обратим в $\hat{\mathfrak{U}}_p^+(N)$, т.е. существуют операторы $B', B'' \in \mathfrak{U}_p^+(N)$ такие, что

$$B'A = I + T', \quad AB'' = I + T'', \quad \text{где } T', T'' \in \mathfrak{U}_{0,p}^+(N). \quad (1.36)$$

Пусть $\varphi_R(x)$ и $\psi_R(x)$ – срезающие функции окрестности точки $+\infty$ такие, что $\varphi_R(x)\psi_R(x) = \psi_R(x)$. Выберем $R > 0$ так, чтобы $\|T'\varphi_R\| < 1/2$, $\|\varphi_R T''\| < 1/2$; тогда $\mathfrak{B}' = (I + T'\varphi_R)^{-1}B'$, $\mathfrak{B}'' = B''(I + \varphi_R T'')^{-1} \in \mathfrak{U}_p^+$ и являются левыми и правыми обратными операторами $A \in \mathfrak{U}_p^+(N)$.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть $A \in \mathfrak{U}_p(N)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (а) $A: L_p^N \rightarrow L_p^N$ фредгольмов;
- (б) главный символ $\hat{\sigma}_A(x, \xi)$ оператора A обратим в факторалгебре $\mathcal{M}_p(N)/(\mathcal{M}_p^0(N) \cap \mathcal{N}_p^0(N))$, что равносильно тому, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{|x|+|\xi|>R} |\det \sigma_A(x, \xi)| > 0, \quad (1.37)$$

где $\sigma_A(x, \xi)$ – некоторый представитель факторкласса $\hat{\sigma}_A(x, \xi)$.

Индекс фредгольмова оператора $A \in \mathfrak{U}_p(N)$ вычисляется по формуле (1.19), в которой $a(x, \xi)$ следует заменить на $\sigma_A(x, \xi)$.

Предложение 1.6 так же очевидным образом переносится на операторы из алгебры $\mathfrak{U}_p(N)$.

§ 2. Псевдодифференциальные операторы Меллина

1. Исчисление. Через $L_{p,\delta}^N = L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$, $\delta \in \mathbb{R}$, обозначается банахово пространство комплексных вектор-функций $u(r) = (u_1(r), \dots, u_N(r))$ с нормой

$$\|u\|_{L_{p,\delta}^N} = \left(\int_{\mathbb{R}_+} r^{p\delta} \sum_{j=1}^N |u_j(r)|^p dr \right)^{1/p}.$$

Положим $\mathbb{R}_\mu = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z = \mu\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что *матрица-функция* $a(r, \lambda)$ *принадлежит классу* $\mathcal{E}^m(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$, если $a(r, \lambda) = (a_{i,j}(r, \lambda))_{i,j=1}^N$, где функции $a_{i,j}(r, \lambda)$ бесконечно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu$ и удовлетворяют оценкам

$$\sup_{r \in \mathbb{R}_+, \lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \lambda)| \langle \lambda \rangle^{-m+\alpha} < \infty$$

для любых чисел $\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Будем говорить, что *матрица функция* $a(r, \lambda) \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$ *медленно меняется в 0, на $+\infty$* , если соответственно

$$\lim_{r \rightarrow +0} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha = 0, \quad (2.1)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha = 0 \quad (2.1')$$

$\forall \beta \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+$.

Класс медленно меняющихся как в 0, так и на $+\infty$ матриц-функций обозначим через $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$. Если соответственно

$$\lim_{r \rightarrow +0} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_\mu} |a_{i,j}(r, \lambda)| = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_\mu} |a_{i,j}(r, \lambda)| = 0,$$

то будем говорить, что $a(r, \lambda)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$ или $\mathcal{K}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$.

Положим $\mathcal{K}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N}) = \mathcal{K}_0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap \mathcal{K}_{+\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$. Матрице-функции $a(r, \lambda) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$, называемой *символом*, сопоставим ПДО Меллина

$$(Au)(x) = a(r, \mathcal{D}_r) = (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu} a(r, \lambda) (r\rho^{-1})^{i\lambda} u(\rho) \rho^{-1} d\rho d\lambda, \quad (2.2)$$

где $u(\rho) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$. Интеграл в формуле (2.2) будем понимать как повторный либо как осциллирующий при естественной модификации этого понятия. Через $OP\mathcal{E}_\mu(N)$, $OP\tilde{\mathcal{E}}_\mu(N)$, $OP\mathcal{K}_{0,\mu}(N)$, $OP\mathcal{K}_{+\infty,\mu}(N)$, $OP\mathcal{K}_\mu(N)$ будем обозначать соответствующие классы ПДО Меллина.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что *оператор-функция* $a(r, \rho, \lambda)$ *принадлежит классу* $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_\mu, \mathbb{C}^{N \times N})$, если $a(r, \rho, \lambda)$ – бесконечно дифференцируемая матрица-функция на $\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_\mu$ и ее компоненты $a_{i,j}(r, \rho, \lambda)$ удовлетворяют оценкам

$$\sup_{r \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta (\rho\partial_\rho)^\gamma \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \rho, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha < C_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.3)$$

для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+$, $i, j = 1, \dots, N$.

Будем говорить, что $a(r, \rho, \lambda)$ *медленно меняется*, если одновременно

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} \sup_{\rho \in K, \lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta (\rho\partial_\rho)^\gamma \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \rho, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} \sup_{\rho \in K, \lambda \in \mathbb{R}_\mu} |(r\partial_r)^\beta (\rho\partial_\rho)^\gamma \partial_\lambda^\alpha a_{i,j}(r, \rho, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha &= 0 \end{aligned}$$

при $\beta + \gamma \neq 0 \quad \forall \alpha, \quad \forall i, j$, где K – произвольный компакт в $\mathbb{R}_+$.

Оператор

$$(Au)(x) = (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_\mu} a(r, \rho, \lambda) (r\rho^{-1})^{i\lambda} u(\rho) \rho^{-1} d\rho d\lambda, \quad (2.4)$$

где $u(\rho) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, называется *ПДО Меллина с двойным символом*.

Интеграл в формулах (2.2), (2.4) понимается как осциллирующий при естественной модификации этого определения, состоящей в замене оператора $\langle D \rangle$ на $\langle \rho \partial_\rho \rangle$, а $\langle y \rangle$ на $\langle \ln \rho \rangle$.

С помощью стандартной замены переменных $r = e^{-x}$, $\rho = e^{-y}$ ПДО Меллина трансформируются в матричные ПДО на прямой, рассмотренные в предыдущем параграфе, причем точка $+\infty$ переходит в точку 0, а точка $-\infty$ в $-\infty$, поэтому результаты § 1 очевидным образом переносятся на ПДО Меллина.

Приведем необходимые в дальнейшем результаты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (а) Если $A \in OP\mathcal{E}_{\delta+1/p}^0(N)$, то A ограничен в $L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ и $\|Au\|_{L_{p,\delta}^N} \leq M\|u\|_{L_{p,\delta}^N}$ с константой M , определяемой, как и в предложении 1.3, с заменой операторов дифференцирования по x, y соответственно операторами дифференцирования $t\partial_t, \tau\partial_\tau$.

(б) Если оператор $A \in OP\mathcal{E}_{\delta+1/p}^0(N)$ обратим в $L_{p,\delta}^N$, то $A^{-1} \in OP\mathcal{E}_{\delta+1/p}^0(N)$.

(в) Если $A, B \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$, то $AB \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$ и символ $\sigma_{AB}(x, \xi)$ оператора AB вычисляется по формуле

$$\sigma_{AB}(r, \lambda) = b(r, \lambda)a(r, \lambda) + t(r, \lambda), \quad (2.5)$$

где $t(r, \lambda) \in \mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N})$.

(г) Если $A \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$ и действует в $L_{p,\delta}^N$, то $A^* \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$ и его символ вычисляется по формуле

$$\sigma_{A^*}(r, \lambda) = a^*(r, \lambda) + t(r, \lambda), \quad (2.6)$$

где $t(r, \lambda) \in \mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap \mathcal{K}/(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N})$.

(д) Если $a(r, \rho, \lambda) \in \tilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N})$ и A – соответствующий ПДО с двойным символом, то

$$\sigma_A(r, \lambda) = a(r, r, \lambda) + t(r, \lambda), \quad (2.7)$$

где $t(r, \lambda) \in \mathcal{E}^{-1}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N}) \cap \mathcal{K}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N})$.

2. Локальная обратимость. Пусть $A = a(r, \mathcal{D}_r) \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$. Введем числа

$$d_{p,\delta}^0(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{(0,\varepsilon) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det a(r, \lambda)|,$$

$$d_{p,\delta}^{+\infty}(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \inf_{(\varepsilon, +\infty) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det a(r, \lambda)|.$$

Если A – ПДО Меллина с двойным символом, то числа $d_{p,\delta}^0(a)$, $d_{p,\delta}^{+\infty}(a)$ определяются по символу $a(r, r, \lambda)$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $A = a(r, \mathcal{D}_r) \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$. Тогда следующие условия равносильны:

- (а) оператор $A: L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \rightarrow L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ локально обратим в точке нуль;
- (б) $d_{p,\delta}^0(a) > 0$;
- (с) существуют левый и правый локально обратные операторы в точке 0, принадлежащие $OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$.

Аналогичным образом формулируется условие локальной обратимости в точке $+\infty$.

3. Фредгольмовость и индекс.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $A = a(r, \mathcal{D}_r) \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$. Тогда $a(r, \mathcal{D}_r): L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \rightarrow L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда:

- (а) $d_{p,\delta}^0(a) > 0$;
 - (б) $d_{p,\delta}^{+\infty}(a) > 0$;
 - (с) $d'_{p,\delta}(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbb{R}_+ \times \{\mu: |\mu| > t\}} |\det a(r, \mu + i(\delta + 1/p))| > 0$.
- Если условия (а), (б) и (с) выполнены, то

$$\text{ind } a(r, \mathcal{D}_r) = -(2\pi)^{-1} [\arg \det a(r, \mu + i(\delta + 1/p))]_{\Gamma(R', R'')}, \quad (2.8)$$

где $\Gamma(R', R'')$ – положительно ориентированная граница прямоугольника $\Pi(R', R'') = \{(r, \mu) \in \mathbb{R}^2 : 1/R' < r < R', |\mu| < R''\}$, а числа R', R'' настолько велики, что в области $\mathbb{R}^2 \setminus \Pi(R', R'')$ существует $a^{-1}(r, \mu + i(\delta + 1/p))$.

Пусть $\chi_\alpha^+(r)$ – характеристическая функция интервала $\mathbb{L}_\alpha = (0, \alpha)$, $\chi_\alpha^-(r) = 1 - \chi_\alpha^+(r)$. Справедлив аналог предложения 1.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $A = a(r, \mathcal{D}_r) \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(N)$ и его символ $a(r, \lambda)$ тождественно равен 1 при $r \geq a - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$). Оператор $\chi_\alpha^+ A \chi_\alpha^+$ фредгольмов в $L_{p,\delta}(\mathbb{L}_\alpha, \mathbb{C}^N)$ тогда и только тогда, когда оператор A фредгольмов в $L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, причем индексы этих операторов совпадают.

4. Банаховы алгебры $\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)$, $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$, $r_{p,\delta}(N)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Через $\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)$ будем обозначать банахову алгебру $a(\lambda)$ меллиновских мультипликаторов в $L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, т.е. символов ПДО Меллина $a(\mathcal{D})$, инвариантных относительно мультипликативного сдвига и ограниченных в $L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$.

Норма в $\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)$ вводится по формуле

$$\|a(\cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)} = \|a(\mathcal{D})\|_{\mathcal{L}(L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N))}, \quad 1 < p < \infty.$$

Через $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$ обозначим банахову алгебру ограниченных, непрерывных на $\mathbb{R}_+$ матриц-функций $a(r, \lambda)$ со значениями в $\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)$, нормой

$$\|a\|_{\mathcal{R}_{p,\delta}} = \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|a(r, \cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)}$$

и естественной операцией умножения матриц-функций.

Через $r_{p,\delta}(N)$ обозначим замыкание в $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$ класса символов $\tilde{\mathcal{E}}(\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathbb{C}^{N \times N})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно показать, что алгебра $r_{p,\delta}(N)$ порождена инвариантными относительно подобия ПДО Меллина классами $OP\tilde{\mathcal{E}}_{\delta+1/p}(\mathbb{C}^N)$ и операторами умножения на матрицы-функции класса $SV(\mathbb{R}_+, N)$, где $SV(\mathbb{R}_+, N)$ состоит из матриц-функций, элементы которых есть замыкания в $C_b(\mathbb{R}_+)$ множества таких функций $a(r) \in C_b(\mathbb{R}_+)$, что

$$\lim_{r \rightarrow +0} r a'(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r a'(r) = 0.$$

Через $\mathfrak{I}_{p,\delta}^0(N)$, $\mathfrak{I}_{p,\delta}^{+\infty}(N)$ обозначим идеалы в $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$, состоящие из таких функций $a \in \mathcal{R}_{p,\delta}(N)$, что соответственно

$$\lim_{r \rightarrow +0} \|a(r, \cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \|a(r, \cdot)\|_{\mathfrak{N}_{p,\delta}(N)} = 0.$$

Положим $\mathfrak{I}_{p,\delta}(N) = \mathfrak{I}_{p,\delta}^0(N) \cap \mathfrak{I}_{p,\delta}^{+\infty}(N)$ и введем еще один идеал $\mathfrak{T}_{p,\delta}(N)$ в $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$, состоящий из таких функций, что

$$\lim_{\mathbb{R}_{\delta+1/p} \ni \lambda \rightarrow \infty} \sup_{r \in \mathbb{R}_+} \|a(r, \lambda)\|_p = 0.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{p,\delta}^{+0}(N) &= \mathcal{R}_{p,\delta}(N) / \mathfrak{I}_{p,\delta}^0(N), & \mathcal{R}_{p,\delta}^{+\infty}(N) &= \mathcal{R}_{p,\delta}(N) / \mathfrak{I}_{p,\delta}^{+\infty}(N), \\ \tilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N) &= \mathcal{R}_{p,\delta}(N) / \mathfrak{I}_{p,\delta}(N) \cap \mathfrak{T}_{p,\delta}(N) \end{aligned}$$

– соответствующие факторалгебры с естественной нормой.

Через $r_{p,\delta}^+(N)$, $\tilde{r}_{p,\delta}(N)$ обозначим соответственно образ $r_{p,\delta}(N)$ при естественном отображении $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$ в $\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)$ и $\mathcal{R}_{p,\delta}(N)$ в $\tilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)$.

Отметим некоторые свойства введенных выше банаховых алгебр:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{p,\delta}(N) &= \mathcal{R}_{q,\delta}(N), & p^{-1} + q^{-1} &= 1, & 1 < p < \infty, \\ \mathcal{R}_{p,\delta}(N) &\subset \mathcal{R}_{2,\delta}(N) \end{aligned}$$

и это вложение топологическое; причем алгебра $\mathcal{R}_{2,\delta}(N)$ изометрически изоморфна алгебре $C_b(\mathbb{R}_+, L_\infty(\mathbb{R}_{\delta+1/p}, \mathfrak{L}(\mathbb{C}^N)))$, где $C_b(\mathbb{R}_+, L_\infty(\mathbb{R}_\mu, \mathfrak{L}(\mathbb{C}^N)))$ – замыкание алгебраического тензорного произведения $C_b(\mathbb{R}_+) \otimes L_\infty(\mathbb{R}_\mu, \mathfrak{L}(\mathbb{C}^N))$ по норме

$$\|a\| = \sup_{r \in \mathbb{R}} \|a(r, \cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_\mu, \mathfrak{L}(\mathbb{C}^N))}$$

(в $\mathfrak{L}(\mathbb{C}^N)$ вводится евклидова норма).

Аналогичными свойствами обладают факторалгебры $\mathcal{R}_{p,\delta}^{+0}(N)$, $\mathcal{R}_{p,\delta}^{+\infty}(N)$, $\tilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)$, $r_{p,\delta}^{+0}(N)$, $\tilde{r}_{p,\delta}(N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Факторкласс $\hat{a} \in \mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)$ ($\hat{a} \in \widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)$), $1 < p < \infty$, обратим в $\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)$ ($\widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)$) тогда и только тогда, когда

$$d_{p,\delta}(a) = \lim_{R \rightarrow +0} \inf_{(r,\lambda) \in (0,R) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det a(r, \lambda)| > 0, \quad (2.10)$$

$$d'_{p,\delta}(a) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(r,\lambda) \in (1/R, R) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det a(r, \lambda)| > 0, \quad (2.10')$$

$$d''_{p,\delta}(a) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(r,\lambda) \in \mathbb{R}_+ \times (-R, R) + i(\delta+1/p)} |\det a(r, \lambda)| > 0, \quad (2.10'')$$

где a – произвольный представитель факторкласса $\hat{a}$.

Справедлива следующая теорема, вытекающая из теорем 1.3, 1.3'.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $A \in OP\mathcal{E}_{\delta+1/p}(N)$, $1 < p < \infty$. Тогда

$$\|\hat{a}\|_{\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)} \leq \inf_{T \in OP\mathcal{K}_{0,\delta+1/2}(N)} \|A - T\|_{\mathcal{L}(L_{p,\delta}^N)} \leq C \|\hat{a}\|_{\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)}, \quad (2.11)$$

$$\|\hat{a}\|_{\widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)} \leq \inf_{T \in \mathfrak{K}(L_{p,\delta}^N)} \|A - T\|_{\mathcal{L}(L_{p,\delta}^N)} \leq C \|\hat{a}\|_{\widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)} \quad (2.11')$$

с константой $C > 0$, не зависящей от A , p , δ . При $p = 2$ константа C равна 1.

5. Банахова алгебра $\mathcal{V}_{p,\delta}(N)$. Через $\mathcal{V}_{p,\delta}(N)$ обозначим банахову алгебру операторов, действующих в пространстве $L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, $p \in (1, \infty)$, полученную замыканием в $\mathcal{L}(L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N))$ множества псевдодифференциальных операторов $a(r, \mathcal{D}) \in OP\mathcal{E}_{\delta+1/p}$. Через $\mathcal{V}_{p,\delta}^0(N)$ обозначим двухсторонний идеал в $\mathcal{V}_{p,\delta}(N)$, порожденный псевдодифференциальными операторами класса

$$OP\mathcal{K}_{0,\delta+1/p}(N), \quad \widehat{\mathcal{V}}_{p,\delta}^0(N) = \mathcal{V}_{p,\delta}(N) / \mathcal{V}_{p,\delta}^0(N), \quad \widehat{\mathcal{V}}_{p,\delta}(N) = \mathcal{V}_{p,\delta}(N) / \mathfrak{K}(L_{p,\delta}^N).$$

Как и в предыдущем параграфе, предельный переход и теорема 2.2 позволяют сопоставить каждому оператору $A \in \mathcal{V}_{p,\delta}(N)$ его локальный символ $\hat{\sigma}^0(A)$ в точке 0 как элемент факторалгебры $r_{p,\delta}^{+0}(N)$ и глобальный символ $\hat{\sigma}(A)$ как элемент факторалгебры $\tilde{r}_{p,\delta}(N)$, причем справедливы оценки

$$\|\hat{\sigma}^0(A)\|_{\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)} \leq \|\hat{A}\|_{\widehat{\mathcal{V}}_{p,\delta}} \leq C \|\hat{\sigma}^0(A)\|_{\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)}, \quad (2.12)$$

$$\|\hat{\sigma}(A)\|_{\widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)} \leq \|\hat{A}\|_{\mathcal{L}(L_{p,\delta}^N) / \mathfrak{K}(L_{p,\delta}^N)} \leq C \|\hat{\sigma}(A)\|_{\widetilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)}, \quad (2.12')$$

где $\hat{A}$ – факторкласс, отвечающий оператору A .

ТЕОРЕМА 2.4. Отображения

$$\Sigma_+ : \widehat{\mathcal{V}}_{p,\delta}(N) \rightarrow r_{p,\delta}^+(N), \quad \Sigma : \widehat{\mathcal{V}}_{p,\delta}(N) \rightarrow \tilde{r}_{p,\delta}(N),$$

действующие по формулам

$$\Sigma_+(\hat{A}) = \hat{\sigma}^0(A), \quad \Sigma(\hat{A}) = \hat{\sigma}(A),$$

являются изоморфизмами банаховых алгебр, изометрическими в случае $p = 2$.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть $A \in \mathcal{V}_{p,\delta}(N)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (а) $A: L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \rightarrow L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ локально обратим в точке нуля;
- (б) локальный символ $\hat{\sigma}_A^0(x, \xi)$ оператора A обратим в факторалгебре $\mathcal{R}_{p,\delta}^+(N)$, что равносильно тому, что

$$\lim_{R \rightarrow +0} \inf_{(r, \lambda) \in (0, R) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det \sigma^0(A)(r, \lambda)| > 0, \quad (2.13)$$

где $\sigma^0(A)(r, \lambda)$ – некоторый представитель факторкласса $\hat{\sigma}^0(A)(r, \lambda)$.

ТЕОРЕМА 2.5'. Пусть $A \in \mathcal{V}_{p,\delta}(N)$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (а) $A: L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N) \rightarrow L_{p,\delta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$ фредгольмов;
- (б) главный символ $\sigma(A)(x, \xi)$ оператора A обратим в факторалгебре $\tilde{\mathcal{R}}_{p,\delta}(N)$, что равносильно тому, что одновременно

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \inf_{(r, \lambda) \in (1/R, R) \times \mathbb{R}_{\delta+1/p}} |\det \sigma(A)(r, \lambda)| > 0, \quad (2.13')$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbb{R}_+ \times \{\mu: |\mu| > t\}} |\det \sigma(A)(r, \mu + i(\delta + 1/p))| > 0, \quad (2.13'')$$

где $\sigma(A)(r, \lambda)$ – некоторый представитель факторкласса $\hat{\sigma}(A)(r, \lambda)$.

Для вычисления индекса фредгольмова оператора $A \in \mathcal{V}_{p,\delta}(N)$ справедлива формула (2.8), в которой $a(r, \lambda)$ заменено на $\sigma(A)(r, \lambda)$. Предложение 2.2 очевидным образом переносится на операторы класса $\mathcal{V}_{p,\delta}(N)$.

§ 3. Банаховы алгебры сингулярных интегральных операторов на контурах с особенностями

1. Контур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Будем говорить, что простая (гомеоморфная сегменту) спрямляемая незамкнутая дуга $\gamma \subset \mathbb{C}$ с концами x_1, x_2 принадлежит классу $\mathfrak{R}_\delta$, если:

- 1) $\gamma \setminus \{x_1, x_2\}$ – локально-ляпуновская дуга;
- 2) пусть

$$x - x_j = \varphi_j(s) = s \exp i\omega_j(s), \quad s \in [0, s_j],$$

– параметризация γ в окрестности конца x_j .

Будем предполагать, что $\omega_j(s) = \delta_j \ln s + \theta_j(s)$, где $\delta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j(s) \in C^\infty((0, s_j])$, и $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{s \rightarrow +0} (s \partial / \partial s)^k \theta_j(s) = 0. \quad (3.1)$$

Типичными примерами функции $\theta(s)$, удовлетворяющей условию (3.1), являются

$$|\ln s|^\alpha, \quad a + b \sin |\ln s|^\alpha, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что кривые $\gamma \in \mathfrak{R}_\delta$ имеют касательные в каждой точке открытой дуги, но при приближении к концам они могут вращаться и осциллировать так, что в концах x_1, x_2 не существует односторонних касательных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\gamma \in \mathfrak{R}_\delta$ и

$$x - x_0 = \varphi(s) = s \exp i(\delta \ln s + \theta(s)) = s^{1+i\delta} \exp(i\theta(s))$$

– параметризация γ в некоторой окрестности конца x_0 кривой

$$\gamma \in \mathfrak{R}_\delta, \quad \psi(s) = \exp(i\theta(s)).$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \lim_{s \rightarrow +0} (s\partial/\partial s)^k \psi(s) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}; \\ (b) \quad & (1 + \delta^2)^{-1/2} |t^{1+i\delta} - \tau^{1+i\delta}| \leq |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq m |t^{1+i\delta} - \tau^{1+i\delta}| \\ & \quad \forall t, \tau \in (0, s_0], \quad m > 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$(c) \quad |t - \tau| \leq |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq m |t - \tau| \quad \forall t, \tau \in (0, s_0]. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) очевидно. Докажем оценку снизу в (3.3). Положим

$$\varphi(t) = t \exp i\theta_1, \quad \varphi(\tau) = \tau \exp i\theta_2, \quad t > 0, \quad \tau > 0.$$

Тогда

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| = ((t - \tau)^2 + 2t\tau(1 - \cos(\theta_1 - \theta_2)))^{1/2} \geq |t - \tau|. \quad (3.4)$$

Оценка сверху в неравенстве (3.3), где $m = \sup_{t \in (0, s_0)} |\varphi'(t)|$, очевидна. Докажем оценку сверху в (3.2). Используя (3.4), получаем

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| / |t^{1+i\delta} - \tau^{1+i\delta}| \leq |\varphi(t) - \varphi(\tau)| / |t - \tau| \leq m.$$

Докажем теперь оценку снизу в (3.2). Так как

$$|t^{1+i\delta} - \tau^{1+i\delta}| \leq (1 + \delta^2)^{1/2} |t - \tau|,$$

то

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| / |t^{1+i\delta} - \tau^{1+i\delta}| \geq (1 + \delta^2)^{-1/2} |\varphi(t) - \varphi(\tau)| / |t - \tau| \geq (1 + \delta^2)^{-1/2}.$$

Пусть Γ – ориентированный контур в плоскости $\mathbb{C}$, состоящий из конечного числа дуг класса $\mathfrak{R}_\delta$. Предполагается, что любые две дуги могут пересекаться только в концевых точках, и пусть $F \subset \Gamma$ – множество концевых точек этих дуг. Точки множества F будем называть *узлами*. Пусть $z \in F$, $N(z)$ – число дуг, составляющих узел z , и

$$x - z = \varphi_j(s) = s \exp i\omega_j(s), \quad s \in [0, s_j], \quad j = 1, 2, \dots, N(z), \quad (3.5)$$

где $\omega_j(s) = \delta \ln s + \kappa(s) + \theta_j(s)$, $\delta \in \mathbb{R}$, а $\kappa(s)$, $\theta_j(s)$ ($j = 1, \dots, N(z)$) удовлетворяют условию (3.1).

Будем предполагать, что существует $s_0 > 0$ такое, что $\theta_j(s) \in [\alpha_j, \beta_j]$, $s \in (0, s_0]$, где

$$0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_N < \beta_N < 2\pi. \quad (3.6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Через $PSV(\Gamma, F)$ обозначим C^* -алгебру, полученную замыканием по $\sup$ -норме на Γ множества ограниченных, непрерывно дифференцируемых на $\Gamma \setminus F$ функций таких, что для любой точки $x_j \in F$

$$\lim_{\Gamma \ni x \rightarrow x_j} |x - x_j| a'(x) = 0. \quad (3.7)$$

Функции класса $PSV(\Gamma, F)$ могут иметь ограниченные разрывы второго рода в окрестности узлов, и условие (3.7) есть условие медленной осцилляции в точках разрыва.

Пусть

$$\omega(x) = \prod_{m=1}^L |x - x_m|^{\beta_m}, \quad x_m \in F, \quad \beta_m \in (-1/p, 1 - 1/p),$$

– вес Хвеледидзе на контуре Γ . Введем банахово пространство $L_p(\Gamma, \omega)$, $1 < p < \infty$, с нормой

$$\|u\|_{L_p(\Gamma, \omega)} = \left(\int_{\Gamma} (\omega(x) |u(x)|)^p |dx| \right)^{1/p}. \quad (3.8)$$

Пусть

$$S_{\Gamma} = (\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} u(y)(y - x)^{-1} dy, \quad x \in \Gamma,$$

– сингулярный интеграл на контуре Γ , ограниченный в $L_p(\Gamma, \omega)$, так как дуги γ_j , составляющие контур, удовлетворяют условию Карлесона [4]. Пусть $z \in F$. Реализуем $L_p(\Gamma, \omega)$ в окрестности узла z как прямую сумму пространств $L_p(\gamma_j, \omega)$, $j = 1, \dots, N$, где $N = N(z)$, $\gamma_j = \gamma_j(z)$, а оператор S_{Γ} – как матричный оператор $(S_{jk})_{j,k=1}^N$,

$$(S_{jk}u)(x) = (\pi i)^{-1} \int_{\gamma_k} u(y)(y - x)^{-1} dy, \quad x \in \gamma_j, \quad (3.9)$$

где $u \in C_0^{\infty}(\Gamma \setminus z)$.

2. Узел, составленный из логарифмических спиралей. Проанализируем сначала структуру операторов S_{jk} в каноническом случае, когда кривые γ_j являются логарифмическими спиралью с началом в нуле и задаются уравнениями

$$\gamma_j = \{x \in \mathbb{C} : x = \varphi_j(s) = s \exp(i(\delta \ln s + \theta_j)), s \in \mathbb{R}_+\}, \quad j = 1, \dots, N, \quad \theta_j - \text{const}, \\ 0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < 2\pi.$$

Сделав в (3.9) замену переменных $y = \varphi_k(\tau)$, $x = \varphi_j(t)$, $t, \tau \in \mathbb{R}_+$, получим, что оператор S_{jk} перейдет в оператор меллиновской свертки

$$(\tilde{S}_{jk}v_k)(t) = \pm(\pi i)^{-1}(1 + i\delta) \exp(i(\theta_k - \theta_j)) \\ \times \int_0^{\infty} (\exp(i(\theta_k - \theta_j)) - (t\tau^{-1})^{1+i\delta})^{-1} v_k(\tau) \tau^{-1} d\tau, \quad (3.10) \\ t \in \mathbb{R}_+, \quad v_k(\tau) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}_+).$$

Оператор $\tilde{S}_{jk}$ является оператором свертки на мультипликативной группе $\mathbb{R}_+$ с инвариантной мерой $d\mu = t^{-1}dt$ и действует в пространстве $L_{p,\beta+1/p}(\mathbb{R}_+, d\mu)$, $\beta = \beta(z)$. Его будем обозначать $\hat{S}_{jk}(\lambda)$, причем $\hat{S}_{jk}(\lambda)$ с точностью до знака равен интегралу

$$I(\lambda, \zeta, a) = (\pi i)^{-1} \zeta a \int_0^\infty (a - \exp(\zeta \ln t))^{-1} t^{-i\lambda-1} dt, \quad (3.11)$$

где $a = \exp(i(\theta_k - \theta_j))$, $\zeta = 1 + i\delta$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}$. При $a = 1$ интеграл (3.11) понимается в смысле главного значения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $0 < \operatorname{Im} \lambda < 1$, $\operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Im} \lambda$. Тогда

$$I(\lambda, \zeta, a) = 2a \exp[(-i\lambda\zeta^{-1} - 1) \ln a] (\exp 2\pi\lambda\zeta^{-1} - 1)^{-1}, \quad (3.12)$$

если $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$I(\lambda, \zeta, 1) = \operatorname{cth}(\pi\lambda\zeta^{-1}). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_+$; тогда при условиях предложения 3.2 $I(\lambda, \zeta)$ есть аналитическая функция параметра ζ в области $\operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Im} \lambda$. Найдем интеграл (3.11) в случае, когда $\operatorname{Im} \zeta = 0$. Сделаем в (3.11) замену переменных $\tau = \exp(\zeta \ln t) = t^\zeta$; тогда

$$I(\lambda, \zeta) = (\pi i)^{-1} a \int_0^\infty (a - \tau)^{-1} \tau^{-i(\lambda/\zeta)-1} d\tau. \quad (3.14)$$

Интеграл (3.14) равен правой части в (3.12) при вещественных $\zeta > \operatorname{Im} \lambda$, и, следовательно, в силу принципа аналитического продолжения верна формула (3.12) в области $\operatorname{Re} \zeta > \operatorname{Im} \lambda$. Формула (3.14) получается из формулы (3.13) и предельных свойств особого интеграла типа Коши.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jk}(\lambda) &= \exp[\lambda\zeta^{-1}(\theta_k - \theta_j - \pi)] (\operatorname{sh} \pi(\lambda\zeta^{-1}))^{-1}, \\ k > j, \quad \lambda &\in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \quad \zeta = 1 + i\delta, \\ \hat{S}_{jk}(\lambda) &= \exp[\lambda\zeta^{-1}(\theta_k - \theta_j + \pi)] (\operatorname{sh} \pi(\lambda\zeta^{-1}))^{-1}, \\ k < j, \quad \lambda &\in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \quad \zeta = 1 + i\delta, \\ \hat{S}_{jj}(\lambda) &= \operatorname{cth}(\pi\lambda\zeta^{-1}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \quad \zeta = 1 + i\delta. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Это предложение следует из предложения 3.2.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\mathcal{L}_{\delta,\beta+1/p} = \{\lambda = \nu + i\mu : \delta\nu + \mu = \beta + 1/p\}$ — прямая в комплексной плоскости; тогда формулы (3.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \hat{S}_{jk}(\lambda) &= \exp[\lambda(\theta_k - \theta_j - \pi)] (\operatorname{sh} \pi\lambda)^{-1}, \quad k > j, \quad \lambda \in \mathcal{L}_{\delta,\beta+1/p}, \\ \hat{S}_{jk}(\lambda) &= \exp[\lambda\zeta^{-1}(\theta_k - \theta_j + \pi)] (\operatorname{sh} \pi\lambda)^{-1}, \quad k < j, \quad \lambda \in \mathcal{L}_{\delta,\beta+1/p}, \\ \hat{S}_{jj}(\lambda) &= \operatorname{cth} \pi\lambda, \quad \lambda \in \mathcal{L}_{\delta,\beta+1/p}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, формулы для символа СИО на системе логарифмических спиралей имеют близкий вид к формулам для СИО на системе лучей. Отличие заключается в том, что для системы лучей символ определен на прямой $\mathbb{R}_{\beta+1/p}$, параллельной вещественной оси, а для системы логарифмических спиралей символ определен на прямой $\mathcal{L}_{\delta,\beta+1/p}$ с угловым коэффициентом $k = -\delta$, проходящей через точку $(0, \beta + 1/p)$.

При $\delta = 0$ формулы (3.16) переходят в известные формулы для символа СИО на системе лучей (см., например, [3], [7]).

3. Общий случай. Рассмотрим теперь общий случай кривых вида (3.5), составляющих узел $z \in F$. Сделаем замену переменных $y = \varphi_k(\tau)$, $x = \varphi_j(t)$; тогда оператор S_{jk} перейдет в оператор

$$(\tilde{S}_{jk}v_k)(t) = \pm(\pi i)^{-1}\chi_j(t) \int_0^\infty \chi_k(\tau)v_k(\tau)\varphi'_k(\tau)(\varphi_k(\tau) - \varphi_j(t))^{-1} d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$v_k(\tau) = u|_{\gamma_k}(z + \varphi_k(\tau)), \quad \chi_k(t) = \chi|_{\gamma_k}(z + \varphi_k(\tau)), \quad (3.17)$$

где $\chi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ равна 1 в малой окрестности точки z и имеет носитель в окрестности узла z . Знак “+” берется в том случае, когда контур Γ ориентирован так, что γ_k выходит из узла z , а знак “−”, когда γ_k входит в узел z .

В силу оценки $|\varphi_j(t)| \geq t$, вытекающей из предложения 3.1, пространство $L_p(\Gamma, \omega)$ локально изоморфно в окрестности узла z пространству $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^N)$, $\beta = \beta(z)$, поэтому оператор $\tilde{S}_{jk}$ будем рассматривать как оператор, действующий в $L_{p,\beta}(\mathbb{R}_+)$. В случае $k = j$ интеграл в выражении для $\tilde{S}_{jj}$ будем понимать в смысле главного значения.

Пусть $j \neq k$; тогда $\tilde{S}_{jk}$ есть интегральный оператор

$$(\tilde{S}_{jk}u)(t) = (\pi i)^{-1} \int_0^\infty k_{jk}(t, \tau)u(\tau)\tau^{-1} d\tau,$$

где

$$k_{jk}(t, \tau) = \pm\chi_j(t)\chi_k(\tau)a_{kj}(t, \tau)(1 + i\delta + i\tau\theta'_k(\tau))(a_{kj}(t, \tau) - (t\tau^{-1})^{1+i\delta})^{-1},$$

$$a_{kj}(t, \tau) = \exp i(\theta_k(t) - \theta_j(\tau)).$$

Используя формулу (3.12), запишем оператор $\tilde{S}_{jk}$ формально как ПДО Меллина

$$(\tilde{S}_{jk}u)(t) = (2\pi)^{-1} \iint_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_{\beta+1/p}} s_{jk}(t, \tau, \lambda)(t\tau^{-1})^{i\lambda}u(\tau)\tau^{-1} d\tau d\lambda, \quad (3.18)$$

с двойным символом

$$s_{jk}(t, \tau, \lambda) = \pm 2a_{kj}(t, \tau)[(1 + i\tau\zeta^{-1}\theta'_k(\tau))]\chi_j(t)\chi_k(\tau)$$

$$\times \exp[(-i\lambda\zeta^{-1} - 1)\ln a_{kj}(t, \tau)][\exp(2\pi\lambda\zeta^{-1} - 1)]^{-1}, \quad \zeta = 1 + i\delta.$$

Из условия (3.6) следует, что

$$\ln a_{kj}(t, \tau) = i(\theta_k(t) - \theta_j(\tau)), \quad k > j,$$

$$\ln a_{kj}(t, \tau) = i(2\pi - (\theta_k(t) - \theta_j(\tau))), \quad k < j.$$

Несложная проверка, использующая условия (3.1) и (3.6), показывает, что $s_{jk}(t, \tau, \lambda)$ ($j \neq k$) удовлетворяет условиям определения 2.3, т.е. $\tilde{S}_{jk}$ есть ПДО Меллина с двойным символом, медленно меняющимся в точке нуль.

Заметим, что для любых целых неотрицательных α, β, γ

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{\rho, r \in \mathbb{R}_+} |(r\partial_r)^\beta(\rho\partial_\rho)^\gamma \partial^\alpha s_{jk}(r, \rho r, \lambda)| \langle \lambda \rangle^\alpha = 0.$$

Пусть теперь $j = k$; тогда

$$(\tilde{S}_{jj}u)(t) = (\pi i)^{-1} \int_0^\infty k_{jj}(t, \tau) u(\tau) \tau^{-1} d\tau,$$

где

$$\begin{aligned} k_{jj}(t, \tau) &= \pm \chi_j(t) \chi_j(\tau) (1 + i\delta + i\tau \theta'_k(\tau)) b_j^{-1}(t, \tau) [1 - (t\tau^{-1})^{1+i\delta}]^{-1}, \\ b_j(t, \tau) &= \exp(i\theta_j(\tau)) + \frac{(\exp(i\theta_j(\tau)) - \exp(i\theta_j(t))) t^{1+i\delta}}{\tau^{1+i\delta} - t^{1+i\delta}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из предложения 3.1 следует, что существуют такие константы $c, C > 0$, что $c < |b_j(t, \tau)| < C$ для достаточно малых t, τ .

Рассмотрим теперь второе слагаемое в правой части формулы (3.19), которое мы обозначим через $d_j(t, \tau)$. Воспользовавшись теоремой о среднем, запишем $d_j(t, \tau)$ в виде

$$d_j(t, \tau) = \frac{t^{1+i\delta} \int_0^1 i\theta'(ts + (1-s)\tau) \exp i\theta(ts + (1-s)\tau) ds}{\int_0^1 (1+i\delta)(ts + (1-s)\tau)^{i\delta} ds} = \frac{d_{j1}(t, \tau)}{d_{j2}(t, \tau)}.$$

Покажем, что $\lim_{t \rightarrow +0} d_j(t, t\tau) = 0$ равномерно по $\tau \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$. Действительно, $s + (1-s)\tau \geq \tau \geq \varepsilon$, если $0 < \tau \leq 1$, и $s + (1-s)\tau \geq 1$, если $\tau \geq 1$. Таким образом, если $M = \max\{1/\varepsilon, 1\}$, то

$$|d_{j1}(t, t\tau)| \leq M |t(s + (1-s)\tau)| |\theta'(t(s + (1-s)\tau))|,$$

следовательно, $\lim_{t \rightarrow +0} d_{j1}(t, t\tau) = 0$ равномерно по $s \in [0, 1]$, $\tau \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$ в силу условий (3.1). Из предложения 3.1 следует, что $\inf_{t, \tau \in \mathbb{R}_+} |d_{j2}(t, \tau)| \geq c > 0$, следовательно, сформулированное выше утверждение справедливо.

Нетрудно проверить, что для любых α, β

$$|(td/dt)^\alpha (\tau d/d\tau)^\beta d_j(t, t\tau)| \leq C_{\alpha\beta}, \quad (3.20)$$

когда t и $t\tau$ меняются в малой окрестности нуля, более того, для любых α, β

$$\lim_{t \rightarrow +0} (td/dt)^\alpha (\tau d/d\tau)^\beta d_j(t, t\tau) = 0 \quad (3.21)$$

равномерно по $\tau \in [\varepsilon, 1/\varepsilon]$.

Запишем теперь $\tilde{S}_{jj}$ в виде ПДО Меллина (3.18) с двойным символом

$$s_{jj}(t, \tau, \lambda) = \pm \chi_j(t) \chi_j(\tau) (1 + i\delta + i\tau \theta'_k(\tau)) b_j^{-1}(t, \tau) (1 + i\delta)^{-1} \operatorname{cth} \pi(1 + i\delta)^{-1} \lambda.$$

Из (3.20) и (3.21) следует, что $s_{jj}(t, \tau, \lambda)$ удовлетворяет оценкам (2.3) и медленно меняется в нуле.

Из предложения 2.1 теперь следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Матричный оператор $\tilde{S}_z = (\tilde{S}_{jk})_{j,k=1}^N \in OP_{\beta+1/p}^{\mathcal{E}}(N)$, $N = N(z)$, $\beta = \beta(z)$. Его локальный символ в точке нуль есть

$$\Omega^z(t, \lambda) = (\Omega_{jk}^z(t, \lambda))_{j,k=1}^{N(z)},$$

где $\Omega_{jk}^z(t, \lambda)$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\Omega_{jk}^z(t, \lambda) &= \pm \exp[\lambda \zeta^{-1}(\theta_k(t) - \theta_j(t) - \pi)] (\operatorname{sh} \pi(\lambda \zeta^{-1}))^{-1}, \quad k > j, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \\ \Omega_{jk}^z(t, \lambda) &= \pm \exp[\lambda \zeta^{-1}(\theta_k(t) - \theta_j(t) + \pi)] (\operatorname{sh} \pi(\lambda \zeta^{-1}))^{-1}, \quad k < j, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \\ \Omega_{jj}^z(\lambda) &= \pm \operatorname{cth}(\pi \lambda \zeta^{-1}), \quad \zeta = 1 + i\delta.\end{aligned}$$

Здесь $t \in (0, s)$, где s достаточно мало, $\lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}$, знак “+” берется, если контур Γ ориентирован так, что кривая γ_k выходит из узла, и знак “−”, если кривая γ_k входит в узел.

Положим

$$\sigma_{\Gamma}^z(t, \mu) = \Omega^z(t, \mu \zeta), \quad \mu \in \mathcal{L}_{\delta, \beta+1/p}.$$

Тогда формулы для локального символа СИО становятся похожими на формулы для локального символа СИО на системе лучей [3], [7] с тем отличием, что $\theta_j = \theta_j(t)$ и параметр μ меняется на прямой $\mathcal{L}_{\delta, \beta+1/p}$ в комплексной плоскости, имеющей угловой коэффициент $k = -\delta$.

Сопоставим теперь СИО S_{Γ} в точке $x \in \Gamma/F$, как обычно, символ $\sigma_{\Gamma}^x(\xi) = \operatorname{sgn} \xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. Пусть теперь $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$; сопоставим этой функции в узле $z \in F$ оператор умножения на диагональную матрицу

$$a^z(t) = \operatorname{diag}(a_1^z(t), \dots, a_{N(z)}^z(t)),$$

где $a_k^z(t) = a|_{\gamma_k}(z + \varphi_k(\tau)) \in SV(\mathbb{R}_+)$, действующий в $L_{p, \beta}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{N(z)})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Обозначим через $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ банахову алгебру операторов, действующих в $L_p(\Gamma, \omega)$, порожденную операторами вида

$$A = \sum_k \prod_l A^{kl}, \quad (3.22)$$

где A^{kl} – либо СИО S_{Γ} , либо оператор умножения на функцию $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$, k, l пробегает конечное множество индексов.

Можно показать (см., например, [3], [6]), что $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ неприводима и содержит двухсторонний идеал $\mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))$. Операторы из алгебры $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ локального типа на Γ .

Положим

$$\sigma^x(A) = \sum_p \prod_q \sigma^x(A^{pq}), \quad (3.23)$$

где: $\sigma^x(A^{kl}) = \sigma_{\Gamma}^x(t, \mu)$, $t \in (0, s_x)$, $\mu \in \mathcal{L}_{\delta, \beta(x)+1/p}$, если $A^{kl} = S_{\Gamma}$ и $x \in F$; $\sigma^x(A^{kl}) = \operatorname{sgn} \xi$, если $x \in \Gamma \setminus F$ и $A^{kl} = S_{\Gamma}$; $\sigma^x(A^{kl})$ есть оператор умножения на $a^x(t)$, если A^{kl} – оператор умножения на $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$ и $x \in F$; $\sigma^x(A^{kl}) = a(x)$, если A^{kl} – оператор умножения на $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$.

Таким образом, $\sigma^x(A) \in \mathcal{R}_{p, \beta(x)}(N(x))$, если $x \in F$, и $\sigma^x(A) = (\sigma_+^x(A), \sigma_-^x(A)) \in \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, если $x \in \Gamma/F$.

ТЕОРЕМА 3.1. Оператор A вида (3.22) локально обратим:

(а) в точке $x \in \Gamma/F$ тогда и только тогда, когда

$$\sigma_{\pm}^x(A) \neq 0; \quad (3.24)$$

(б) в точке $x \in F$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{s \rightarrow 0} \inf_{t \in (0, s), \lambda \in \mathcal{L}_{\delta, \beta(x)+1/p}} |\det \sigma^x(A)(t, \lambda)| > 0. \quad (3.25)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (3.25) равносильно условию обратимости факторкласса $\hat{\sigma}^x(A)$ в $\mathcal{R}_{p, \beta(x)}^+(N(x))$.

Утверждение теоремы 3.1 для точек $x \in \Gamma/F$ хорошо известно (см. [1], [5]), а для точек $x \in F$ оно следует из теоремы 2.1.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть A – оператор вида (3.21). Тогда следующие условия равносильны:

(а) $A: L_p(\Gamma, \omega) \rightarrow L_p(\Gamma, \omega)$ – фредгольмов оператор;

(б) $\forall x \in \Gamma/F$ выполнено условие (3.24), а в любой точке $x \in F$ выполнено условие (3.25).

Теорема 3.2 следует стандартным образом из локального принципа и теоремы 3.1.

Через $\mathcal{T}_{p,z}(\Gamma, \omega)$ обозначим двухсторонний идеал в $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, полученный замыканием в $\mathcal{L}(L_p(\Gamma, \omega))$ множества операторов вида (3.20), где $\forall k \exists l$ такое, что A^{kl} есть оператор умножения на такую функцию $a(x) \in PSV(\Gamma, F)$, что $\lim_{\Gamma \ni x \rightarrow z} a(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть A – оператор вида (3.22). Тогда

$$\|\hat{\sigma}^x(A)\| \leq \|A\|_x = \inf_{T \in \mathcal{T}_x(\Gamma, \omega)} \|A - T\| \leq c \|\hat{\sigma}^x(A)\|,$$

где $\|\hat{\sigma}^x(A)\| = \max(|\sigma_+^x(A)|, |\sigma_-^x(A)|)$, если $x \in \Gamma/F$, и $\|\hat{\sigma}^x(A)\| = \|\hat{\sigma}^x(A)\|_{\mathcal{R}_{p, \beta(x)}^+}$, если $x \in F$.

Доказательство теоремы 3.3 заменой переменных сводится к теореме 2.2.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть A – оператор вида (3.22) и

$$\|A\| = \inf_{T \in \mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))} \|A - T\|_{\mathcal{L}(L_p(\Gamma, \omega))}.$$

Тогда

$$\sup_{x \in \Gamma} \|\hat{\sigma}_x(A)\| \leq \|A\| \leq c \sup_{x \in \Gamma} \|\hat{\sigma}_x(A)\|. \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка снизу в (3.25) следует из теоремы 3.3, а оценка сверху – из теоремы об огибающей [5].

Теоремы 3.3, 3.4 и предельный переход позволяют определить локальный $\hat{\sigma}_x(A)$, $x \in \Gamma$, и глобальный $\sigma(A) = \{\hat{\sigma}_x(A)\}_{x \in \Gamma}$ символы оператора $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Через $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ будем обозначать банахову алгебру символов $\sigma(A)$ операторов из $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ с поточечными операциями и нормой

$$\|\sigma(A)\| = \sup_{x \in \Gamma} \|\hat{\sigma}_x(A)\|.$$

ТЕОРЕМА 3.5. (а) *Отображение $\Sigma_p: \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega) \rightarrow \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, сопоставляющее оператору его символ, есть мономорфизм банаховых алгебр $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ и $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, ядром которого является двухсторонний идеал $\mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega))$.*

(б) *$A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$ тогда и только тогда, когда его символ обратим в $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, что равносильно тому, что $\sigma_x^\pm(A) \neq 0$, когда $x \in \Gamma \setminus F$, и выполнено условие (3.25), когда $x \in F$.*

(с) *Если $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$, то его регуляризатор R принадлежит алгебре $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ и $\sigma(R) = \sigma(A)^{-1}$.*

Теорема 3.5 вытекает из локального принципа и теоремы 3.2.

4. Банахова алгебра $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$. Пусть $\theta(t)$ – бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}_+$ вещественная функция, равная нулю вне некоторой окрестности точки нуль и такая, что $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t\partial/\partial t)^k \theta(t) = 0. \quad (3.27)$$

Пусть $0 < \theta_1 \leq \theta(t) \leq \theta_2 < 2\pi$; положим

$$(N_{\delta, \theta(t)} f)(t) = (\pi i)^{-1} (1 + i\delta) \int_{\mathbb{R}_+} f(s) (s^{1+i\delta} - (\exp i\theta(t)) t^{1+i\delta})^{-1} s^{i\delta} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(S_{\delta, +} f)(t) = (\pi i)^{-1} (1 + i\delta) \int_{\mathbb{R}_+} f(s) (s^{1+i\delta} - t^{1+i\delta})^{-1} s^{i\delta} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Операторы $N_{\delta, \theta(t)}, S_{\delta, +} \in OP\tilde{\mathcal{E}}_{\beta+1/p}$ и их символы есть соответственно

$$\exp \lambda \zeta^{-1} (\theta(t) - \pi) / \operatorname{sh} \pi \lambda \zeta^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \quad \zeta = 1 + i\delta,$$

$$\operatorname{cth} \pi \lambda \zeta^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_{\beta+1/p}, \quad \zeta = 1 + i\delta.$$

Заметим, что $N_{\delta, \theta(t)} N_{\delta, 2\pi - \theta(t)} = S_{\delta, +}^2 - I + T$, где $T \in \mathcal{R}_{p, \beta}^0$.

Через $\Omega(p, \beta, \delta)$ обозначим банахову алгебру операторов, действующих в $L_{p, \beta}(\mathbb{R}_+)$, $-1/p < \beta < 1 - 1/p$, порожденную оператором $S_{\delta, +}$, всеми операторами $N_{\delta, \theta(t)}$, где $\theta(t)$ удовлетворяют оценкам (3.27), и операторами умножения на функции из $SV(\mathbb{R}_+)$, а через $W(p, \beta, \delta)$ соответственно банахову алгебру операторов, действующих в $L_{p, \beta}(\mathbb{R}_+)$, порожденную всеми операторами $N_{\delta, \theta(t)}$, где $\theta(t)$ удовлетворяет оценкам (3.27), и операторами умножения на функции из $SV(\mathbb{R}_+)$.

Заметим, что $\Omega(p, \beta, \delta)$, $W(p, \beta, \delta)$ являются подалгебрами банаховой алгебры $\mathcal{R}_{p, \beta} = \mathcal{R}_{p, \beta}(1)$ для любого $\delta \in \mathbb{R}$ и $W(p, \beta, \delta)$ – двухсторонний идеал в $\Omega(p, \beta, \delta)$.

Пусть $\mathfrak{D}^N(p, \beta, \delta) \subset \mathcal{R}_{p, \beta}(N)$ – банахова алгебра матричных операторов $A = (A_{ij})_{i, j=1}^N$, где $A_{ii} \in \Omega(p, \beta, \delta)$, $A_{ij} \in W(p, \beta, \delta)$, $i \neq j$, а $\tilde{\mathfrak{D}}^N(p, \beta, \delta)$ – соответствующая алгебра локальных в точке нуль матричных символов. Положим $\mathcal{T}^N(p, \beta, \delta) = \mathfrak{D}^N(p, \beta, \delta) \cap \mathcal{R}_{p, \beta}^0(N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $x \in F$, факторалгебра $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)/\mathcal{T}_{p,x}(\Gamma, \omega)$ изометрически изоморфна факторалгебре

$$\mathfrak{D}^{N(x)}(p, \beta(x), \delta(x))/\mathcal{T}^{N(x)}(p, \beta(x), \delta(x)).$$

Изоморфизм порождается отображением, сопоставляющим оператору $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ его локальный операторный символ в точке $x \in F$.

Предложение 3.5 следует из теоремы 3.3.

Отметим, что локальные матричные символы $\hat{a} \in \tilde{\mathfrak{D}}^N(p, \beta, \delta)$ таковы, что если $a = (a_{ij}(t, \lambda))_{i,j=1}^N$ ($t \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathcal{L}_{\delta, \beta+1/p}$) – представитель факторкласса $\hat{a}$, то существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} a_{ii}(t, \nu + i(-\delta\nu + \beta + 1/p)) &= a_{ii}(t, \pm), \\ \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} a_{ij}(t, \nu + i(-\delta\nu + \beta + 1/p)) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$ множество, элементами которого являются семейства $a = \{a_x\}_{x \in \Gamma}$, где $a_x = (a_x^\pm)$, если $x \in \Gamma/F$ и $a_x^\pm$ – непрерывные функции на $\Gamma \setminus F$, и $a_x = (a_x^{ij}(t, \lambda))_{i,j=1}^{N(x)} \in \tilde{\mathfrak{D}}^{N(x)}(p, \beta(x), \delta(x))$, если $x \in F$.

Положим

$$a_x^{ii}(t, \pm) = \lim_{\nu \rightarrow \pm\infty} a_x^{ii}(t, \nu + i(-\delta\nu + \beta + 1/p)).$$

Между a_x в регулярных точках $x \in \Gamma \setminus F$ и узлах $x \in F$ устанавливается следующая связь.

Пусть $x \in F$ и $\gamma_i(x)$ ($i = 1, \dots, N(x)$) – кривые, концами которых служит точка x , $z = x + \varphi_i(t)$ – их параметризация в окрестности конца $x \in F$; тогда будем предполагать, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} (a_{x+\varphi_i(t)}^\pm - a_x^{ii}(t, \pm)) = 0, \quad i = 1, \dots, N(x), \quad (3.28)$$

если контур Γ ориентирован так, что $\gamma_i(x)$ выходит из узла x , и

$$\lim_{t \rightarrow +0} (a_{x+\varphi_i(t)}^\pm - a_x^{ii}(t, \mp)) = 0, \quad i = 1, \dots, N(x), \quad (3.29)$$

если контур Γ ориентирован так, что $\gamma_i(x)$ входит в узел x .

Введем естественные поточечные операции сложения, умножения, инволюции во множестве $\mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$ и норму, как и в определении 3.4; тогда $\mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$ превращается в банахову алгебру.

ТЕОРЕМА 3.6. Банаховы алгебры $\mathfrak{N}_p(\Gamma, \omega)$ и $\mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$ изометрически изоморфны.

Доказательство теоремы 3.6 основано на тех же соображениях, что и доказательство аналогичного результата для банаховой алгебры, порожденной СИО с кусочно-непрерывными коэффициентами на кусочно-ляпуновских контурах (см. [3], [5]), и проводится следующим образом. Легко проверить, что $\mathfrak{N}_p(\Gamma, \omega)$ естественно вложена в $\mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$. Более того, это вложение есть эпиморфизм. Действительно, если $a = (a_x)_{x \in \Gamma} \in \mathfrak{A}_p(\Gamma, \omega)$, то для любого $x \in \Gamma$ найдется оператор $A_x \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$ такой, что $\sigma_x(A_x) = a_x$. Из непрерывности семейств $a_x^\pm$ в точках Γ/F и условий (3.28), (3.29) следует, что семейство операторов $\{A_x\}_{x \in \Gamma}$ непрерывно в точках Γ/F и локально полунепрерывно в каждой точке $x \in F$. В силу теоремы об огибающей (см. [5, с. 26]) существует оператор $A \in \mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$, локально эквивалентный в каждой точке контура Γ оператору A_x , где $\sigma_x(A_x) = a_x$. Таким образом, $\sigma(A) = (a_x)_{x \in \Gamma}$, т.е. $\sigma(A) \in \mathfrak{N}_p(\Gamma, \omega)$.

§ 4. Сингулярные интегральные операторы на замкнутом контуре с точками завихрения

Пусть Γ – замкнутый контур на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, разделяющий ее на две связные компоненты: ограниченную D^+ и неограниченную D^- . Контур Γ ориентирован таким образом, что при его положительном обходе D^+ остается слева. Будем предполагать, что $\Gamma = \bigcup_{j=1}^L \gamma_j$, где $\gamma_j \in \mathfrak{R}_0$ и могут пересекаться только в концевых точках. Множество таких точек, как и выше, обозначим через F .

Пусть $x = x_j + \varphi_j^\pm(t)$, $t \in (0, s_j)$, – параметризация контура Γ в окрестности узла x_j , где $\varphi_j^\pm(t) = t \exp i(\delta_j \ln t + \kappa_j(t) + \theta_j^\pm(t))$, а $\kappa_j(t)$, $\theta_j^\pm(t)$ удовлетворяют условиям (3.1) в окрестности точки нуль. Будем считать, что $x_j + \varphi_j^\pm(t)$ лежит соответственно в правой (левой) окрестности узла x_j . Положим $\alpha_j(t) = \theta_j^+(t) - \theta_j^-(t)$ и будем считать, что $0 < \alpha_{j0} \leq \alpha_j(t) \leq \alpha_{j1} < 2\pi$, $t \in (0, s_j)$.

Как и в предыдущем параграфе, вводятся пространства $L_p(\Gamma, \omega)$, где $1 < p < \infty$, $\omega(x) = \prod_{j=1}^L |x - x_j|^{\beta_j}$, $\beta_j \in (-1/p, 1 - 1/p)$, $x_j \in F$.

Через $P_\Gamma^+ = \frac{1}{2}(I + S_\Gamma)$ и $P_\Gamma^- = \frac{1}{2}(I - S_\Gamma)$ будем, как обычно, обозначать сингулярные проекторы в пространстве $L_p(\Gamma, \omega)$. Положим

$$A = a_+(x)P_\Gamma^+ + a_-(x)P_\Gamma^-, \quad a_+(x), a_-(x) \in PSV(\Gamma, F). \quad (4.1)$$

Согласно формулам предыдущего параграфа символ $\sigma(A)$ оператора A определяется следующим образом:

- 1) если $x \in \Gamma \setminus F$, то $\sigma_x(A)$ есть пара числе $(a_+(x), a_-(x))$;
- 2) если $x = x_j \in F$, то

$$\sigma_{x_j}(a_\pm)(t) = \begin{pmatrix} a_\pm(x_j + \varphi_j^+(t)) & 0 \\ 0 & a_\pm(x_j + \varphi_j^-(t)) \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{x_j}(P_\Gamma^\pm)(t, \lambda) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 \pm \operatorname{cth} \pi \Lambda_j) & \mp \exp[\Lambda_j(\alpha_j(t) - \pi)] / \operatorname{sh} \pi \Lambda_j \\ \pm \exp[\Lambda_j(\pi - \alpha_j(t))] / \operatorname{sh} \pi \Lambda_j & (1 \pm \operatorname{cth} \pi \Lambda_j) \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_j = \lambda + i(-\delta_j + \beta_j + 1/p)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\sigma_{x_j}(A)(t, \lambda) = \sigma_{x_j}(a_+)(t)\sigma_{x_j}(P_\Gamma^+)(t, \lambda) + \sigma_{x_j}(a_-)(t)\sigma_{x_j}(P_\Gamma^-)(t, \lambda),$$

где t меняется в достаточно малой окрестности нуля.

ТЕОРЕМА 4.1. *Оператор A фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$ тогда и только тогда, когда:*

- (a) $\inf_\Gamma |a_+(x)| > 0$, $\inf_\Gamma |a_-(x)| > 0$;
- (b) для любого узла $x_j \in F$, $j = 1, \dots, L$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(t, \lambda) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{R}} |\det \sigma_{x_j}(A)(t, \lambda)| > 0.$$

При условиях (a), (b) индекс оператора A вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind} A = & - \sum_{j=1}^L (2\pi)^{-1} [\arg a_+(x) a_-^{-1}(x)]_{\gamma_j(z'_j, z''_j)} \\ & - \sum_{j=1}^L (2\pi)^{-1} [\arg \det \sigma_{x_j}(A)(t_j, \lambda)]_{\lambda=-\infty}^{\infty}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\gamma_j(z'_j, z''_j)$ – часть дуги γ_j , лежащая между точками z'_j, z''_j , t_j – такая произвольная точка, принадлежащая $\mathbb{R}_+$, что

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} |\det \sigma_{x_j}(A)(t, \lambda)| > 0, \quad j = 1, \dots, L, \quad \forall t \in (0, t_j],$$

а точки z'_j, z''_j определяются формулами

$$\begin{aligned} z'_1 &= x_1 + \varphi_1^+(t_1), & z''_1 &= x_2 + \varphi_2^-(t_2), & z'_2 &= x_2 + \varphi_2^+(t_2), \\ z''_2 &= x_3 + \varphi_3^-(t_3), & \dots, & & z'_L &= x_L + \varphi_L^+(t_L), & z''_L &= x_1 + \varphi_1^-(t_1). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимые и достаточные условия фредгольмовости (а), (b) оператора A вытекают из теоремы 3.2.

Докажем формулу индекса оператора A . Для ее доказательства воспользуемся хорошо известным методом разделения особенностей. Выберем малые окрестности $\Gamma'_j \subset \Gamma_j \subset \Gamma'_j$ узла x_j , $j = 1, \dots, L$, где каждая включает внутренность следующей и они не пересекаются, $\Gamma'_j \cap \Gamma'_k = \emptyset$, $j \neq k$. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \bigcup_{j=1}^L \Gamma'_j$, $\Gamma'_0 = \Gamma \setminus \bigcup_{j=1}^L \Gamma_j$. Очевидно, $\Gamma_0 \subset \Gamma'_0$ и оба семейства $\{\Gamma_j\}_0^N$, $\{\Gamma'_j\}_0^N$ покрывают Γ .

Пусть $\{\chi_j\}_0^L$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{\Gamma'_j\}_0^N$: $\text{supp } \chi_j \subset \Gamma'_j$, $\sum_0^L \chi_j(x) = 1$, $t \in \Gamma$ и $\chi_j(x) = 1$ для $x \in \Gamma_j$, $j = 0, 1, \dots, L$, $\chi_j(x)\chi_k(x) = 0$ при $j \neq k$ ($j, k = 2, \dots, L$), $\prod_1^L (1 - \chi_j(x)) = \chi_0(x)$.

Согласно условию (а) существуют обратимые функции $a_0^\pm(x)$ такие, что $a_0^\pm(x) = a^\pm(x)$, когда $x \in \Gamma'_0$, и $a_0^\pm(x) = 1$, когда $x \in \bigcup_{j=1}^L \Gamma''_j$.

Положим

$$A_0 = a_0^+(x)P_\Gamma^+ + a_0^-(x)P_\Gamma^-, \quad A_j = b_{0j}^+(x)P_\Gamma^+ + b_{0j}^-(x)P_\Gamma^- + (1 - \chi_j)I,$$

где $b_{0j}^\pm(x) = \chi_j(a_0^\pm(x))^{-1}a_0^\pm(x)$, $b_j^\pm(x) = b_{0j}^\pm(x) + 1 - \chi_j$.

Ясно, что $b_j^\pm(x) = a^\pm(x)$, когда $x \in \Gamma''_j$, и $b_j^\pm(x) = 1$, когда $x \in \Gamma \setminus \Gamma'_j$, $j = 1, \dots, L$. Нетрудно убедиться, что

$$A = A_0 A_1 \dots A_N + T, \quad \text{где} \quad T \in \mathfrak{K}(L_p(\Gamma, \omega)). \quad (4.3)$$

Таким образом, из формулы (4.3) следует, что

$$\text{Ind } A = \sum_{j=0}^N \text{Ind } A_j.$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{Ind } A_0 = - \sum_{j=1}^L (2\pi)^{-1} [\arg a_+(x) a_-^{-1}(x)]_{\gamma_j(\zeta'_j, \zeta''_j)}. \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) точки ζ'_j, ζ''_j произвольны и лежат в области, где $a_\pm(x) = 1$.

Рассмотрим теперь вопрос об индексе оператора A_j . Оператор A_j , очевидно, фредгольмов в $L_p(\Gamma, \omega)$ тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $A'_j =$

$A_j|_{L_p(\Gamma'_j, |x-x_j|^{\beta_j})}$, так как ограничение $A_j|_{L_p(\Gamma \setminus \Gamma'_j, |x-x_j|^{\beta_j})} = I$ есть единичный оператор. При этом

$$\text{Ind } A_j = \text{Ind } A'_j.$$

Пространство $L_p(\Gamma'_j, |x-x_j|^{\beta_j})$ реализуем как прямую сумму:

$$L_p(\Gamma'_j, |x-x_j|^{\beta_j}) = L_p(\gamma_j^+, |x-x_j|^{\beta_j}) \oplus L_p(\gamma_j^-, |x-x_j|^{\beta_j}),$$

где γ_j^+ и γ_j^- – правая и левая части дуги Γ'_j . В соответствии с таким представлением оператор A'_j реализуется как матричный оператор в $L_p(\gamma_j^+, |x-x_j|^{\beta_j}) \oplus L_p(\gamma_j^-, |x-x_j|^{\beta_j})$. После замены переменных, распрямляющей дуги $\gamma_j^\pm$, оператор A'_j переходит в оператор $\hat{A}_j: L_{p, \beta_j}^2((0, h_j)) \rightarrow L_{p, \beta_j}^2((0, h_j))$. Оператор $\hat{A}_j$ является сужением на $L_{p, \beta_j}^2((0, h_j))$ оператора $\mathcal{A}_j \in \mathfrak{D}^2(p, \beta_j, \delta_j)$ с символом, равным $\sigma_{x_j}(A)(t, \lambda)$, когда $(t, \lambda) \in (0, h'_j) \times \mathbb{R}$, $h'_j < h_j$, и равным 1 на множестве $[h_j, +\infty) \times \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.2 $\text{Ind } \hat{A}_j = \text{Ind } \mathcal{A}_j$.

Вычисляя $\text{Ind } \mathcal{A}_j$ по формуле (2.8), получаем равенство

$$\begin{aligned} \text{Ind } \mathcal{A}_j &= -(2\pi)^{-1} [\arg \det \sigma_{x_j}(A)(t_j, \lambda)]_{\lambda=-\infty}^{\infty} \\ &\quad - (2\pi)^{-1} [\arg \det \sigma_{x_j}(A)(t, +\infty) \sigma_{x_j}^{-1}(A)(t, -\infty)]_{t=t_j}^{h_j}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Положим теперь в формуле (4.4) $\zeta'_j = x_j + \varphi_j^+(h_j)$, $\zeta''_j = x_{j+1} + \varphi_{j+1}^-(h_j)$. Так как

$$\sigma_{x_j}(A)(t, \pm\infty) = \begin{vmatrix} a_\pm(x_j + \varphi_j^+(t)) & 0 \\ 0 & a_\pm(x_j + \varphi_j^-(t)) \end{vmatrix},$$

то из формул (4.4), (4.5) следует формула индекса (4.2).

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула индекса, аналогичная формуле (4.2), справедлива и для оператора (4.1) на сложном незамкнутом контуре с узлами, являющимися точками завихрения.

Аналогичная формула индекса справедлива и для операторов из банаховой алгебры $\mathfrak{M}_p(\Gamma, \omega)$.

Список литературы

1. Gohberg I. C., Krupnik N. J. Einführung in die Theorie der eindimensionalen Singulären Integral Operatoren. Basel: Birkhauser, 1979.
2. Krupnik N. Banach algebras with symbol and singular integral operators. Basel: Birkhauser, 1987.
3. Roch S., Silberman B. Algebras of convolution operators and their image in the Calkin algebras. Report Math. 90-05. Karl-Weierstrass-Ins. Math. Berlin: Akad. Wiss. DDr, 1990.
4. Bottcher A., Silberman B. Analysis of Toeplitz operators. Berlin: Springer-Verlag, 1990.
5. Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь. Локальный принцип в теории одномерных сингулярных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Ростов-на-Дону: Рост. госуд. ун-т, 1986.
6. Roch S., Silberman B. The structure of algebras of singular integral operators // J. Integral Equat. and Appl. 1992. V. 4. № 3. P. 421–442.
7. Пламеневский Б. А., Сеничкин В. Н. О C^* -алгебрах сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами на сложном контуре // Изв. ВУЗов. Матем. 1984. № 1. С. 25–33; 1984. № 4. P. 37–46.

8. Gohberg I., Krupnik N., Spitkovskiy I. Banach algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients. General contour and weight // J. Integral. Equat. and Appl. 1993. V. 17. P. 322–337.
9. Дудучава Р. В., Лоцабидзе Т., Сагинашвили А. Сингулярные интегральные операторы на кривых с каспами // Сообщения АН ГрузССР. 1992. Т. 146. № 1. С. 21–24.
10. Шапиро М. В. Алгебра сингулярных операторов с карлемановским сдвигом на составном контуре // Сиб. матем. журн. 1978. Т. 19. № 1. С. 201–216.
11. Power S. C. Hankel operators with PQC symbols and singular integral operators // Proc. London. Math. Soc. 1980. V. 41. P. 45–65.
12. Sarason D. Toeplitz operator with piecewise quasicontinuous symbols // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. № 5. P. 817–838.
13. Bottcher A., Spitkovskiy T. Toeplitz Operators with PQC symbols and weighted Hardy spaces // J. Funct. Anal. 1991. V. 97. № 1. P. 194–214.
14. Silberman B. The C^* -algebra generated by Toeplitz and Hankel operators with piecewise quasicontinuous symbols // Integral Equation and Operator Theory. 1987. V. 10. P. 730–738.
15. Суйфулаев Р. К. Краевая задача Римана на негладких открытых кривых // Матем. сб. 1980. Т. 112. С. 147–161.
16. Bottcher A., Karlovich Yu. I. Toeplitz and singular integral operators on Carleson curves with logarithmic whirl points // Integral Equations and Operator Theory. 1995. V. 22. P. 127–161.
17. Рабинович В. С. Псевдодифференциальные операторы Меллина и сингулярные интегральные операторы на сложных контурах с осциллирующей касательной // ДАН СССР. 1991. Т. 321. № 5. С. 692–696.
18. Федосов Б. В. Аналитические формулы индекса эллиптических операторов // Тр. моск. матем. об-ва. 1974. Т. 30. С. 159–241.
19. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
20. Taylor M. E. Pseudodifferential Operators. Princeton, New Jersey: PUP, 1981.
21. Грушин В. В. Псевдодифференциальные операторы на $\mathbb{R}^n$ с ограниченными символами // Функц. анализ и его прилож. 1970. № 4. С. 202–212.
22. Рабинович В. С. Нётеровость псевдодифференциальных операторов с символами класса $S_{\rho, \delta}^m$ ($0 \leq \delta = \rho < 1$) // Матем. заметки. 1980. Т. 27. С. 226–231.
23. Beals R. Characterization of pseudo-differential operators and applications // Duke Math. J. 1977. V. 44. P. 45–57.