В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко, А. А. Бабайцев, Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка,
Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2019, том 173, 116–125

https://www.mathnet.ru/into560

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 173 (2019). С. 116–125
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-173-116-125

УДК 517.956

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. **В. В. ПАНКОВ, А. Д. БАЕВ, В. Д. ХАРЧЕНКО, А. А. БАБАЙЦЕВ**

Аннотация. Доказаны коэрцитивные априорные оценки решений краевой задачи типа задачи Дирихле в полосе для одного вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, содержащего весовые производные специального вида до порядка $2m$ и обычные частные производные до порядка $2k-1$ при условии $2m > 2k-1$. На границе полосы наложены условия типа Дирихле. Получена коэрцитивная априорная оценка решения рассматриваемой задачи. Оценка получена в специальных весовых пространствах типа пространств Соболева.

***Ключевые слова*:** априорная оценка, вырождающееся эллиптическое уравнение, весовое пространство Соболева.

A PRIORI ESTIMATE OF SOLUTIONS OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A HIGHER-ORDER DEGENERATE ELLIPTIC EQUATION

© 2019 **V. V. PANKOV, A. D. BAEV, V. D. KHARCHENKO, A. A. BABAITSEV**

Abstract. Coercive a priori estimates of solutions of a Dirichlet-type boundary-value problem in a strip for a certain higher-order degenerate elliptic equation containing weighted derivatives of a special form up to the order $2m$ and ordinary partial derivatives up to the order $2k-1$ under the condition $2m > 2k-1$ are proved. At the boundary of the strip, Dirichlet-type conditions are imposed. A coercive a priori estimate for solutions of the problem considered in special weighted Sobolev-type spaces is obtained.

***Keywords and phrases*:** a priori estimate, degenerate elliptic equation, Sobolev weight space.

***AMS Subject Classification*:** 35S05, 35S11

Введение. Теория краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Краевые задачи для таких уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0037).

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при «степенном» характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина (см. [7,8]). В работе В. П. Глушко [9] были доказаны априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [1–3] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые задачи в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [4,5] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка. В [10] были получены коэрцитивные априорные оценки для одного эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе $t=0$ в уравнение нечетного порядка.

В настоящей работе получены априорные оценки решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение нечетного порядка по одной из переменных. Таким образом, работа является естественным продолжением исследований, начатых в [4, 5, 10]. Формулировка полученных результатов содержится в [6].

1. Основные определения и результаты. В полосе $\mathbb{R}^n_d=\left\{x\in\mathbb{R}^{n-1},\ 0<t<d\right\}$, где $d>0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A\big(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\big)v(x,t)=F(x,t), \tag{1}$$

где

$$A\big(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\big)v=L_{2m}\big(D_x,D_{\alpha,t}\big)v-b(-1)^k\partial_t^{2k-1}v,\quad L_{2m}\big(D_x,D_{\alpha,t}\big)=\sum_{|\tau|+j\leqslant 2m}a_{\tau j}D_x^\tau D_{\alpha,t}^j,$$

$a_{\tau j}$ — комплексные числа, $\operatorname{Im}\bar{b}a_{0,2m}=0$. Здесь

$$D_{\alpha,t}=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\quad \partial_t=\frac{\partial}{\partial t},\quad D_x^\tau=i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\dots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}.$$

На границе $t=0$ полосы $\mathbb{R}^n_d$ задаются условия

$$B_j(D_x)v\big|_{t=0}=\sum_{|\tau|\leqslant m_j}b_{\tau j}D_x^\tau\partial_t^{j-1}v\big|_{t=0}=G_j(x),\quad j=1,2,\dots,k, \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$. На границе $t=d$ полосы $\mathbb{R}^n_d$ заданы условия вида

$$v\big|_{t=d}=\partial_t v\big|_{t=d}=\dots=\partial_t^{m-1}v\big|_{t=d}=0. \tag{3}$$

Уравнение вида

$$A\big(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\big)v(x,t)=F(x,t),$$

где

$$A\big(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t\big)v=L_{2m}\big(D_x,D_{\alpha,t}\big)v+b(-1)^k\partial_t^{2k-1}v,$$

было исследовано в [10]; п ри этом на границе $t=0$ надо было ставить на одно условие меньше.

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta)\geqslant c\big(1+|\xi|^2+|\eta|^2\big)^m,$$

где постоянная $c>0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s\geqslant 2m+\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0)=\alpha'(0)=0$, $\alpha(t)>0$ при $t>0$.

Условие 3. При всех $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$ выполняется неравенство

$$\sum_{|\tau|\leqslant m_j}b_{\tau j}\xi^\tau\neq 0,\quad j=1,2,\dots,k.$$

Определим пространства, в которых будет исследоваться задача (1)–(3). Введем в рассмотрение интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ записывается в виде

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp\left(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}\right) \frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}.$$

Это преобразование было введено в [1]. Там же было отмечено, что для преобразования F_α можно построить обратное преобразование:

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F_{\eta\to\tau}^{-1}\left[w(\eta)\right]\Big|_{\tau=\phi(t)},$$

где $F_{\eta\to\tau}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье. В [1] было доказано, что для преобразования F_α справедливо равенство, являющееся аналогом равенства Парсеваля. Это дает возможность рассмотреть его не только на функциях из $L_2(\mathbb{R}_+^1)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(\mathbb{R}_d^n)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(\mathbb{R}_d^n)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \left\{ \sum_{l=0}^{\left[\frac{(2k-1)s}{2m}\right]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1} \left[\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}\left(s - \frac{2m}{2k-1} l\right)} F_\alpha F_{x\to\xi}\left[\partial_t^l v(x,t)\right]\right] \right\|_{L_2(\mathbb{R}_d^n)}^2 \right\}^{1/2},$$

где $[\cdot]$ означает целую часть числа.

Если s — такое натуральное число, что $(2k-1)s/(2m)$ — целое число, то эта норма эквивалентна следующей норме:

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \left\{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l \leqslant s} \left\| D_x^\tau D_{\alpha,t}^j \partial_t^l v \right\|_{L_2(\mathbb{R}_d^n)}^2 \right\}^{1/2}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что*

$$s \geqslant \max\left\{2m, \max_{1\leqslant j\leqslant k}\left(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}\right) + \frac{m}{2k-1}\right\}$$

— целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1)–(3), *принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,2m/3}(\mathbb{R}_d^n)$, справедлива априорная оценка*

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c\left(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^k \left\| B_j v\big|_{t=0} \right\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}} \right),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева—Слободецкого $H_s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Формулировка теоремы 1 содержится в [6].

2. Схема доказательства теоремы 1. Если применить к обеим частям уравнения (1) и условий (2)–(3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$, то получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$A\big(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\big)u(\xi,t) = L_{2m}\big(\xi, D_{\alpha,t}\big)u(\xi,t) - b(-1)^k \partial_t^{2k-1} u(\xi,t) = f(\xi,t), \tag{4}$$

$$B_j(\xi)u\big|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \partial_t^{j-1} u\big|_{t=0} = g_j(\xi), \quad j = 1,2,\ldots,k, \tag{5}$$

$$u(\xi,t)\big|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)\big|_{t=d} = \cdots = \partial_t^{m-1} u(\xi,t)\big|_{t=d} = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$u(\xi,t)=F_{x\to\xi}\big[\nu(x,t)\big],\quad f(\xi,t)=F_{x\to\xi}\big[F(x,t)\big],\quad g(\xi)=F_{x\to\xi}\big[G(x)\big].$$

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ ($s\geqslant 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}=\left\{\sum_{k+\frac{2m}{2k-1}j\leqslant s}\left\|F_\alpha^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{k/2}F_\alpha\big[\partial_t^j u\big]\right]\right\|^2_{L_2(0;d)}\right\}^{1/2}.$$

Теорема 1 выводится из следующего утверждения.

Теорема 2. *Предположим, что*

$$s\geqslant\max\left\{2m,\ \max_{1\leqslant j\leqslant k}\left(m_j+\frac{2m(j-1)}{2k-1}\right)+\frac{m}{2k-1}\right\},$$

$m\geqslant 2k-1$, *причем* s, m — *целые числа. Пусть* $f(\xi,t)\in\widetilde{H}_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ *при всех* $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$ *и выполнены условия* 1–3. *Тогда для любого решения* $u(\xi,t)$ *задачи* (4)–(6), *принадлежащего при всех* $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$ *пространству* $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}\leqslant c\left(\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}+\sum_{j=1}^{k}\left(1+|\xi|^2\right)^{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}\big|g_j(\xi)\big|^2\right)\tag{7}$$

с константой $c>0$, *не зависящей от* $\xi\in\mathbb{R}^{n-1}$, u, f, g.

Из определения преобразования F_α получим, что для любых $u(t)\in L_2(0;d)$, $w(t)\in L_2(0;d)$ справедливо равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_\alpha[u](\eta)\cdot\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta=2\pi(u,w);\tag{8}$$

здесь и в дальнейшем через $(\cdot,\cdot)$ обозначается скалярное произведение в $L_2(0;d)$.

Кроме того, из определения преобразования F_α следует, что если $u(t)\in C^s[0;d]$ удовлетворяет условиям

$$u(d)=\partial_t u(d)=\cdots=\partial_t^{s-1}(d)=0,\tag{9}$$

то справедливо равенство

$$F_\alpha\big[D^j_{\alpha,t}u\big](\eta)=\eta^jF_\alpha[u](\eta)\quad\forall j=0,1,2,\ldots,s.\tag{10}$$

Из (10) следует, что если $u(t)\in C^s[0;d]$, $w(t)\in C^s[0;d]$ и эти функции удовлетворяют условиям (9), то справедливо равенство

$$\left(D^j_{\alpha,t}u(t),w(t)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta^jF_\alpha[u](\eta)\overline{F_\alpha[w](\eta)}d\eta.\tag{11}$$

В дальнейшем нам понадобятся аналоги неравенства Эрлинга—Ниренберга для весовых производных, которые в нашем случае можно сформулировать следующим образом.

Лемма 1. *Если* $u(t)\in\tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ (s — *натуральное число*), *то при любых* $\varepsilon>0$ *и* $j=0,1,2,\ldots,s-1$ *справедливо неравенство*

$$\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2\leqslant\varepsilon^{2(s-j)}\left\|D^s_{\alpha,t}u\right\|^2+\left(c\varepsilon^{-2j}+\varepsilon^{2(s-j)}\right)\|u\|^2\tag{12}$$

с константой $c>0$, *не зависящей от* u.

Здесь и в дальнейшем через $\|\cdot\|$ обозначается норма в пространстве $L_2(0;d)$.

Следствие 1. *Если $u(t) \in \tilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, то для любых $\varepsilon > 0$, $j = 0,1,2,\dots,2m-1$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ справедливо неравенство*

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon^{2(2m-j)}\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 \tag{13}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от u, ξ.

Теорема 2 получается из доказанных ниже лемм, где константы $c > 0$, $\varepsilon > 0$ во всех оценках не зависят от u, ξ.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия 1 и 2, а также $m \geqslant 2k-1$. Тогда для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка*

$$\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant c\Bigg(\left\|A\big(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\big)u(t)\right\|^2 + \\ + \left(1+|\xi|^2\right)^m\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-1}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)} + \left|\partial_t^{k-1}u(0)\right|^2\Bigg) \tag{14}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от ξ, u.

Доказательство. Так как пространство $C^{2m}[0;d]$ плотно в пространстве $\tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$, то неравенство (14) достаточно доказать для функций из пространства $C^{2m}[0;d]$. Умножив скалярно в $L_2(0,d)$ обе части уравнения (4) на функцию $bu(t)$, получим

$$\operatorname{Re}\Big(L_{2m}\big(\xi,D_{\alpha,t}\big)u,bu\Big) - |b|^2(-1)^k\operatorname{Re}\Big(\partial_t^{2k-1}u,u\Big) = \operatorname{Re}\Big(A\big(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\big)u,bu\Big). \tag{15}$$

Используя равенство (10) и условие 1, получим оценку

$$\operatorname{Re}\Big(L_{2m}\big(\xi,D_{\alpha,t}\big)u,bu\Big) \geqslant c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|, \tag{16}$$

где $c_1 > 0$ — некоторая константа, не зависящая от $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, u.

С использованием условия (3) получим равенство

$$(-1)^k\int_0^d \partial_t^{2k-1}u\cdot\bar{u}\,dt = \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-1}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)} + \frac{1}{2}\left|\partial_t^{k-1}u(0)\right|^2. \tag{17}$$

Применяя (16), (17) в (15) и используя неравенство Коши—Буняковского, получим для любого $\varepsilon > 0$ оценку

$$c_1\sum_{j=0}^{m}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-j}\left\|D^j_{\alpha,t}u\right\|^2 - \frac{1}{2}|b|^2\left|\partial_t^{k-1}u(0)\right|^2\left(1+|\xi|^2\right)^m \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\left\|A\big(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\big)u(t)\right\|^2 + \varepsilon\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^m|b|^2\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j-2}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}.$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (14). □

Лемма 3. *При выполнении условий леммы 2 для любой функции $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ справедлива оценка*

$$\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 \leqslant \varepsilon\left(\left\|D^{2m}_{\alpha,t}u\right\|^2 + \left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2\right) + c(\varepsilon)\left(\left\|A\big(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\big)u\right\|^2 + \left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right) \tag{18}$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Умножив скалярно обе части равенства (4) на $a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u$, получим оценку

$$\bigl|a_{0,2m}\bigr|^{2m}\Bigl\|D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr\|^2-\operatorname{Re}\Bigl(b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,\ a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\leqslant 2m\\|\tau|\geqslant 1}}a_{\tau j}\xi^\tau\Bigl(D^j_{\alpha,t}u,\ a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\right|+\Bigl|\Bigl(A\bigl(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\bigr)u(t),\ a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\Bigr|. \quad (19)$$

Заметим, что

$$\Bigl|\Bigl(A\bigl(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\bigr)u(t),\ a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\Bigr|\leqslant\varepsilon\Bigl\|D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\Bigl\|A\bigl(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\bigr)u(t)\Bigr\|^2. \quad (20)$$

С помощью (13) и неравенства Коши–Буняковского получим для любого $\varepsilon>0$ оценку

$$\left|\sum_{\substack{|\tau|+j\leqslant 2m\\|\tau|\geqslant 1}}a_{\tau j}\xi^\tau a_{0,2m}\Bigl(D^j_{\alpha,t}u,D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\right|\leqslant\varepsilon\Bigl\|D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr\|^2+c_1(\varepsilon)\bigl(1+|\xi|^2\bigr)^{2m}\|u\|^2. \quad (21)$$

Используя (20) и (21) в правой части (19), получим оценку

$$\bigl|a_{0,2m}\bigr|^{2m}\Bigl\|D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr\|^2-\operatorname{Re}\Bigl(b(-1)^k\partial_t^{2k-1}u,\ a_{0,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)\leqslant$$
$$\leqslant\varepsilon\Bigl\|D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr\|^2+c_2(\varepsilon)\left(\Bigl\|A\bigl(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t\bigr)u\Bigr\|^2+\bigl(1+|\xi|^2\bigr)^{2m}\|u\|^2\right). \quad (22)$$

Заметим, что

$$\operatorname{Re}\Bigl(\partial_t^{2k-1}u,\ D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)=(-1)^{k-1}\operatorname{Re}\Bigl(\partial_t^k u,\ \partial_t D^{2m}_{\alpha,t}\partial_t^{k-2}u\Bigr)+\sum_{j=1}^{k-2}(-1)^j\operatorname{Re}K_j,$$

где операторы K_j определены формулой

$$K_j=I_{2m,1}\bigl(D_{\alpha,t},\partial_t\bigr)\partial_t^{j-1}u.$$

Здесь $I_{2m,1}(D_{\alpha,t},\partial_t)$ — коммутатор операторов $D^{2m}_{\alpha,t}$ и ∂_t. Интегрируя по частям, получим равенство

$$\operatorname{Re}\Bigl(\partial_t^{2k-1}u,\ D^{2m}_{\alpha,t}u\Bigr)=(-1)^k\Bigl(D^m_{\alpha,t}\partial_t^k u,\ D^m_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}u\Bigr)+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^jK_j+$$
$$+(-1)^k\sum_{j=0}^{m-1}i\alpha(t)D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u\cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d}.$$

Так как при $j\leqslant m-1-k$ выполняется неравенство $j+k\leqslant m-1$, то, учитывая граничные условия (6), имеем

$$\sum_{j=0}^{m-1}i\alpha(t)D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u\cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d}=\sum_{j=m-k}^{m-1}i\alpha(t)D^j_{\alpha,t}\partial_t^k u\cdot D^{2m-j-1}_{\alpha,t}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d}.$$

Таким образом, получаем

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^{2k-1}u, D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = (-1)^k \operatorname{Re}\left(D_{\alpha,t}^m\partial_t^k u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right) + \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \operatorname{Re} K_j +$$
$$+ (-1)^k \operatorname{Re}\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d} = (-1)^k \operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right) +$$
$$+\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \operatorname{Re} K_j + (-1)^k \operatorname{Re}\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d} +$$
$$+ (-1)^k \operatorname{Re}\left(I_{m,1}\big(D_{\alpha,t}^m,\partial_t\big)\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right). \quad (23)$$

Здесь $I_{m,1}\big(D_{\alpha,t}^m,\partial_t\big)$ — коммутатор операторов $D_{\alpha,t}^m$ и ∂_t. Так как

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right) = 0,$$

то справедливо равенство

$$\operatorname{Re}\left(\partial_t^{2k-1}u,\ D_{\alpha,t}^{2m}u\right) = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j \operatorname{Re} K_j + (-1)^k \operatorname{Re}\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d} +$$
$$+ (-1)^k \operatorname{Re}\left(I_{m,1}\big(D_{\alpha,t}^m,\partial_t\big)\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right).$$

Используя это равенство в (22), получим оценку

$$\big|a_{0,2m}\big|^{2m}\Big\|D_{\alpha,t}^{2m}u\Big\|^2 \leqslant \varepsilon\Big\|D_{\alpha,t}^{2m}u\Big\|^2 + c_2(\varepsilon)\left(\Big\|A\big(\xi, D_{\alpha,t},\partial_t\big)u\Big\|^2 + \big(1+|\xi|^2\big)^{2m}\|u\|^2\right) +$$
$$+\left(\sum_{j=1}^{k-1}|\operatorname{Re}K_j| + \left|\operatorname{Re}\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d}\right| +\right.$$
$$\left.+\left|\operatorname{Re}\left(I_{m,1}\big(D_{\alpha,t}^m,\partial_t\big)\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right)\right|\right). \quad (24)$$

С помощью неравенства Коши—Буняковского и (13) получим

$$\sum_{j=1}^{k-1}|\operatorname{Re}K_j| + \left|\operatorname{Re}\left(I_{m,1}\big(D_{\alpha,t}^m,\partial_t\big)\partial_t^{k-1}u,\ D_{\alpha,t}^m\partial_t^{k-1}u\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon\left(\big\|\partial_t^{2k-1}u\big\|^2 + \big\|D_{\alpha,t}^{2m}u\big\|^2\right) + c_3(\varepsilon)\big(1+|\varepsilon|^2\big)^{2m}\|u\|^2. \quad (25)$$

Учитывая известную теорему «о следах», имеем

$$\left|\operatorname{Re}\sum_{j=m-k}^{m-1} i\alpha(t)D_{\alpha,t}^j\partial_t^k u\cdot D_{\alpha,t}^{2m-j-1}\partial_t^{k-1}\bar u\big|_{t=d}\right| \leqslant c\sum_{j=1}^{2m-1}\big|\partial_t^j u(d)\big|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\int_{d/2}^{d}\big|\partial_t^{2m}u\big|^2dt + c_4(\varepsilon_1)\int_{d/2}^{d}|u(t)|^2dt \leqslant \varepsilon\Big\|D_{\alpha,t}^{2m}u\Big\|^2 + c_5(\varepsilon)\cdot\big(1+|\xi|^2\big)^{2m}\|u\|^2. \quad (26)$$

Используя (25), (26) в правой части неравенства (23), получим, выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, оценку (18). □

Лемма 4. *При выполнении условий леммы 2 для любой функции* $u(t) \in \tilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ *справедлива оценка*

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leqslant c\left(\left\|A\big(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\big)u\right\|^2 + \big(1+|\xi|^2\big)^{2m}\|u\|^2\right). \tag{27}$$

Доказательство. Из уравнения (4) получим с помощью неравенства (13):

$$\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2 \leqslant \left\|A\big(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\big)u\right\|^2 + \left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + \varepsilon\left\|D_{\alpha,t}^{2m}u\right\|^2 + c(\varepsilon)\big(1+|\xi|^2\big)^{2m}\|u\|^2$$

при любом $\varepsilon > 0$. Применяя (18) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (27). $\square$

Доказательство теоремы 2. Используя леммы 2–4, получим

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} \leqslant c\Bigg(&\|f\|^2_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} + \\ &+ \big(1+|\xi|^2\big)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)} + \big(1+|\xi|^2\big)^m\left|\partial_t^{k-1}u(0)\right|^2\Bigg).\end{aligned} \tag{28}$$

Используя неравенство Коши, получим оценку

$$\begin{aligned}&\left|\big(1+|\xi|^2\big)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}\right| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \big(1+|\xi|^2\big)^m \sum_{j=0}^{k-2}\left(\varepsilon\left|\partial_t^{2k-2-j}u(\xi,0)\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\right)\end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{-m+qj+q/2}$, где $q = 2m/(2k-1)$, имеем

$$\begin{aligned}&\left|\big(1+|\xi|^2\big)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}\right| \leqslant \\ &\qquad\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q/2}\left|\partial_t^{2k-2-j}u(\xi,0)\right|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-q/2}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\right),\end{aligned}$$

где ε_1 — любое число. Заметим, что

$$\left|\partial_t^{2k-2-j}u(\xi,0)\right|^2 = -2\operatorname{Re}\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\ \partial_t^{2k-2-j}u\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\left|\big(1+|\xi|^2\big)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}\right| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\left(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q/2}\left|\operatorname{Re}\left(\partial_t^{2k-1-j}u,\ \partial_t^{2k-2-j}u\right)\right| + \frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-q/2}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\right).\end{aligned}$$

Применив для оценки первого слагаемого в правой части этого неравенства неравенство Коши, получим оценку

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\Bigg(2\varepsilon_1\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q/2}\left(\varepsilon_2\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon_2}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2\right)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-q/2}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\Bigg).$$

Выберем здесь $\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-q/2}$; тогда

$$\left|\left(1+|\xi|^2\right)^m \sum_{j=0}^{k-2}(-1)^{k-j}\operatorname{Re}\partial_t^{2k-2-j}u(0)\cdot\overline{\partial_t^j u(0)}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{k-2}\Bigg(2\varepsilon_1^{3/2}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj}\left\|\partial_t^{2k-1-j}u\right\|^2+$$
$$+2\sqrt{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{qj+q}\left\|\partial_t^{2k-2-j}u\right\|^2+\frac{1}{\varepsilon_1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-qj-q/2}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\Bigg).$$

Применив это неравенство и неравенство Эрлинга—Ниренберга в правой части (28), получим

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}\leqslant c\Bigg(\|Au\|^2+\varepsilon_2\left(\left\|\partial_t^{2k-1}u\right\|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^{2m}\|u\|^2\right)+$$
$$+c(\varepsilon_2)\sum_{j=0}^{k-2}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2+\left(1+|\xi|^2\right)^m\left|\partial_t^{k-1}u(\xi,0)\right|^2\Bigg).$$

Выбирая $\varepsilon_2>0$ достаточно малым, имеем

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|}\leqslant c_1\left(\|Au\|^2+\sum_{j=0}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\left|\partial_t^j u(\xi,0)\right|^2\right). \tag{29}$$

Заметим теперь, что в силу условия 3

$$\left|\partial_t^{j-1}u(\xi,0)\right|=\left|\frac{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j}b_{\tau j}\xi^\tau\partial_t^{j-1}u\big|_{t=0}}{\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j}b_{\tau j}\xi^\tau}\right|\leqslant c\left(1+|\xi|\right)^{-m_j}\left|B_j(\xi)u\big|_{t=0}\right|\leqslant c\big|g_j(\xi)\big|.$$

Применяя это неравенство в (29), получим оценку

$$\|u\|^2_{2m,\alpha,\frac{2m}{3},|\xi|}\leqslant c\left(\|f\|^2+\sum_{j=1}^{k-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{2m-m_j-\frac{2m}{2k-1}j-\frac{m}{2k-1}}\big|g_j(\xi)\big|^2\right).$$

Таким образом, доказана оценка (7) при $s=2m$. Справедливость оценки (7) при $s>2m$ доказывается методами, аналогичными методам работы [1]. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баев А. Д.* Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы// Докл. АН СССР. — 1982. — *265*, № 5. — С. 1044–1046.
2. *Баев А. Д.* Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2008.
3. *Баев А. Д.* Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// Докл. РАН. — 2008. — *422*, № 6. — С. 727–728.

4. *Баев А. Д., Бунеев С. С.* Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// Докл. РАН. — 2013. — *448*, № 1. — С. 7–8.
5. *Баев А. Д., Бунеев С. С.* Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2012. — № 1. — С. 81–92.
6. *Баев А. Д., Панков В. В.* О существовании решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка// Докл. РАН. — 2017. — *475*, № 5. — С. 1–3.
7. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — 1969. — *80 (112)*, № 4. — С. 455–491.
8. *Вишик М. И., Грушин В. В.* Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4. — С. 29–56.
9. *Глушко В. П.* Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка/ Деп. в ВИНИТИ 27.03.1979, № 1048. — Воронеж: ВГУ, 1979.
10. *Панков В. В., Баев А. Д., Харченко В. Д.* Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка// Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2018. — № 4. — С. 162–173.

Панков Владимир Владимирович
Воронежский государственный университет
E-mail: pankovfam@mail.ru

Баев Александр Дмитриевич
Воронежский государственный университет
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна
Воронежский государственный университет
E-mail: dmitrieva9696@gmail.com

Бабайцев Андрей Александрович
Воронежский государственный университет
E-mail: 259608@mail.ru