В. Л. Хацкевич, Об условии, обеспечивающем гидродинамическую устойчивость и единственность стационарного и периодического течений жидкости,
Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2021, том 190, 122–129

https://www.mathnet.ru/into757

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 190 (2021). С. 122–129
DOI: 10.36535/0233-6723-2021-190-122-129

УДК 532.5

ОБ УСЛОВИИ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО И ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. **В. Л. ХАЦКЕВИЧ**

Аннотация. Предложено условие, обеспечивающее применение первого метода Ляпунова к обоснованию устойчивости стационарных и периодических течений жидкости в ограниченной области, а также единственность решений соответствующих задач.

Ключевые слова: эволюционные уравнения Навье—Стокса, гидродинамическая устойчивость, линеаризованная задача, свойство равномерной диссипативности.

ON A CONDITION THAT ENSURES HYDRODYNAMIC STABILITY AND UNIQUENESS OF STATIONARY AND PERIODIC FLUID FLOWS

© 2021 **V. L. KHATSKEVICH**

Abstract. In this paper, we propose a condition that ensures the applicability of the first Lyapunov method to justifying stability of stationary and periodic fluid flows in a bounded region and the uniqueness of solutions of the corresponding problems.

Keywords and phrases: evolutionary Navier–Stokes equations, hydrodynamic stability, linearized problem, property of uniform dissipativity.

AMS Subject Classification: 35B35, 35Q30

1. Введение. Одним из основных методов изучения устойчивости течения жидкости в настоящее время является метод линеаризации с последующим исследованием спектра линеаризованной задачи (см., напр., [1, 2, 6, 12]). В настоящей работе предлагается использовать условие равномерной диссипативности для оператора линеаризованной задачи. Это условие обеспечивает расположение спектра линеаризованной задачи, гарантирующее устойчивость рассматриваемых стационарных и периодических течений в соответствующих пространствах.

Кроме того, в работе установлена единственность решений стационарной и периодической задач для системы уравнений Навье—Стокса в случае, если соответствующая линеаризованная задача обладает свойством равномерной диссипативности. Это придает новый качественный смысл утверждениям о гидродинамической устойчивости. Также в данной работе приведены условия, обеспечивающие равномерную диссипативность для оператора линеаризованной задачи. В последней части статьи показывается применение условия равномерной диссипативности линеаризованного оператора в обосновании принципа усреднения в задаче Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой.

2. Устойчивость стационарных течений. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$ рассматривается эволюционная система уравнений

Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \nu\Delta \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega\times\mathbb{R}} = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v}(x,0) = a(x) \tag{4}$$

Здесь $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости, $\nu > 0$ характеризует вязкость, p — давление, $\boldsymbol{F}$ — массовая сила. Ниже в этом пункте будем предполагать, что массовая сила $\boldsymbol{F}$ задана, не зависит от времени и квадратично суммируема на Ω.

Пусть система (1)–(4) имеет стационарное решение $(\boldsymbol{v}^0(x), p^0(x))$, т.е. $(\boldsymbol{v}^0(x), p^0(x))$ является решением стационарной задачи:

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F} \quad \text{в } \Omega, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{v} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \tag{7}$$

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса, линеаризованные в окрестности этого решения:

$$-\nu\Delta \boldsymbol{v} + \sum_{i=1}^{n} v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \boldsymbol{v}^0}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} q + \boldsymbol{F}, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{10}$$

Отметим, что разрешимость задач (1)–(4), (5)–(7), (8), (9), а также встречающейся ниже периодической задачи хорошо изучена (см., напр, книги О. А. Ладыженской [3], Ж. Л. Лионса [7], Р. Темама [9]).

Введем необходимые обозначения. Пусть $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ — гильбертово пространство векторных квадратично суммируемых функций со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$:

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j v_j^* dx, \quad \|\boldsymbol{u}\| = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})^{1/2},$$

где знак $*$ означает комплексное сопряжение. Для гладких функций определим скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_1$ и норму $\|\cdot\|_1$ формулами

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_1 = \sum_{k,j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j^*}{\partial x_k} dx, \quad \|\boldsymbol{u}\|_1 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})_1^{1/2}.$$

Через H и H_1 обозначим замыкание пространства гладких, финитных в Ω соленоидальных векторных полей по нормам $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$, соответственно.

Определим в H оператор L, полагая в качестве его области определения $D(L)$ множество соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторах из $\boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$:

$$L\boldsymbol{u} \equiv \Pi\left[-\nu\Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} v_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \boldsymbol{v}^0}{\partial x_i}\right], \quad \boldsymbol{u} \in D(L), \tag{11}$$

где Π — оператор ортогонального проектирования в $\boldsymbol{L}^2(\Omega)$ на подпространство H.

Отметим, что между нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_1$ имеет место взаимосвязь

$$\|\boldsymbol{u}\|_1^2 \geqslant \lambda_1 \|\boldsymbol{u}\|^2, \quad \boldsymbol{u} \in H_1.$$

Здесь λ_1 — первое собственное значение оператора Стокса, действующего в H по формуле $A\boldsymbol{u} = -\Pi\Delta\boldsymbol{u}$ на области определения $D(A) = H_1 \cap \boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$.

Ниже будем использовать следующее утверждение (см., например, [12, гл. I, § 5]).

Утверждение 1. *Оператор L замкнут, спектр у него чисто точечный: состоит из бесконечной последовательности чисел $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$ При этом* $\operatorname{Re}\sigma_k \to \infty$ $(k \to \infty)$.

В [12, гл. 2, § 2] установлена следующая теорема.

Утверждение 2. *Пусть спектр оператора L расположен внутри правой полуплоскости:*

$$\operatorname{Re}\sigma(L) \geqslant \sigma_0 > 0. \tag{12}$$

Если область Ω двумерна, то стационарное решение $\boldsymbol{v}^0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в H. Если область Ω — трехмерная, то стационарное решение $\boldsymbol{v}^0$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в H.

Отметим, что для трехмерной области Ω справедлив близкий результат (см. [12]) по устойчивости в пространстве S_p $(p \geqslant 3)$, являющимся замыканием гладких соленоидальных, исчезающих на $\partial\Omega$ векторов по норме $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$.

Нас заинтересовало требование на оператор L, которое может обеспечить выполнение условий утверждения 2. Оказалось, что его можно формулировать в терминах диссипативности оператора L (по поводу диссипативных операторов см., например, [8, гл. 1, § 6]). В связи с этим введем следующее определение.

Рассматриваемый в гильбертовом пространстве H оператор $L\colon D(L) \to H$ называется *равномерно κ-диссипативным*, если выполнено условие

$$\operatorname{Re}(L\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant \kappa\|\boldsymbol{u}\|^2, \quad u \in D(L), \tag{13}$$

где $\kappa > 0$ — фиксированная постоянная.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Если для линеаризованного оператора L, определяемого формулой* (11)*, выполнено условие равномерной κ-диссипативности* (13) *в H, то спектр оператора L удовлетворяет соотношению* (12) *при $\sigma_0 = \kappa$.*

Доказательство. Действительно, пусть σ — собственное значение оператора L и ψ — отвечающая ему собственная функция. Тогда согласно (13)

$$\operatorname{Re}(L\psi, \psi) = \operatorname{Re}(\sigma\psi, \psi) = \operatorname{Re}\sigma\|\psi\|^2 \geqslant \kappa\|\psi\|^2.$$

Отсюда следует (12) при $\sigma_0 = \kappa$. □

Таким образом, в силу утверждения 2, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть линеаризованный на $\boldsymbol{v}^0$ оператор L равномерно диссипативен. Тогда стационарное решение $\boldsymbol{v}^0$ асимптотически устойчиво в пространстве H в случае двумерной области Ω.*

Оказывается, диссипативность оператора L обеспечивается малостью нормы $\|\boldsymbol{v}^0\|_1$ стационарного решения. Покажем это. Рассмотрим трилинейную форму

$$b(u, v, w) \coloneqq \sum_{k,j=1}^{n} \int_\Omega u_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) w_j^* dx, \quad u, v \in H_1.$$

Мы будем использовать модификацию известного свойства трилинейной формы [9, гл. 2, § 11], а именно, для комплекснозначных функций u, v справедливо равенство

$$\operatorname{Re} b(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in H_1. \tag{14}$$

Кроме того, известно соотношение

$$|b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \leqslant C\|\boldsymbol{v}\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1\|\boldsymbol{w}\|_1, \quad \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in H_1 \tag{15}$$

(см. [9, гл. 2, § 11]), где постоянная C зависит от области Ω.

Заметим, что для стационарного решения $\boldsymbol{v}^0$ задачи (2)–(7) справедливо соотношение

$$\nu(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{v})_1 + b(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{F},\boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v}\in H_1, \tag{16}$$

т.е. $\boldsymbol{v}^0$ — слабое решение.

Из (16) при $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}^0$ в силу (14) следует оценка

$$\|\boldsymbol{v}^0\|_1 \leqslant \frac{1}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{F}\|. \tag{17}$$

Теорема 2. *Если выполнено соотношение*

$$\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{F}\| > 0, \tag{18}$$

то оператор L, линеаризованный на $\boldsymbol{v}^0$, равномерно диссипативен при

$$\kappa = \lambda_1\biggl(\nu - \frac{c}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{F}\|\biggr).$$

Доказательство. В силу определения оператора L и с учетом (14) имеем

$$\mathrm{Re}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = -\nu\|\boldsymbol{u}\|_1^2 + \mathrm{Re}\, b(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + \mathrm{Re}\, b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u}) = -\nu\|\boldsymbol{u}\|_1^2 + \mathrm{Re}\, b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u}).$$

При этом согласно (15), (17)

$$\mathrm{Re}\, b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u}) \leqslant |b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u})| \leqslant C\|\boldsymbol{v}^0\|_1\|\boldsymbol{u}\|_1^2 \leqslant C\frac{\|F\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\|\boldsymbol{u}\|_1^2.$$

Тогда

$$\mathrm{Re}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geqslant \biggl(\nu - \frac{\|F\|}{\nu\sqrt{\lambda_1}}\biggr)\|\boldsymbol{u}\|_1^2,$$

что и обеспечивает справедливость утверждения. □

Согласно (17) малость нормы $\|\boldsymbol{v}^0\|_1$ обеспечена, если вязкость $\nu > 0$ достаточно велика, либо массовая сила F мала по норме L_2.

Но при этом, как известно (см. [9, гл. II, § 1]), стационарное решение единственно. Это наводит на мысль, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\boldsymbol{v}^0$ — решение стационарной задачи* (5)–(7)*, а соответствующий ему линеаризованный оператор L, определяемый равенством* (11)*, обладает свойством равномерной диссипативности* (13)*. Тогда $\boldsymbol{v}^0$ является единственным решением стационарной задачи* (5)–(7)*.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v}^0$ — решение стационарной задачи (5)–(7). Тогда оно удовлетворяет соотношению (16). Пусть $\boldsymbol{u}^0$ — некоторое другое решение задачи (16). Положим $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}^0-\boldsymbol{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (16), соответствующие $\boldsymbol{v}^0$ и $\boldsymbol{u}^0$. Тогда получим соотношение

$$\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})_1 + b(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 0, \quad \boldsymbol{v}\in V. \tag{19}$$

Полагая в (19) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$ и используя свойство (14) для вещественнозначных функций, находим

$$\nu(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})_1 + b(\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}^0,\boldsymbol{u}) = 0.$$

С другой стороны, по определению оператора L левая часть этого равенства равна $(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})$. Тогда в силу предположения о равномерной диссипативности (13) оператора L и вещественнозначности функции $\boldsymbol{u}$ имеем $(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = \mathrm{Re}(L\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) \geqslant \kappa\|\boldsymbol{u}\|^2$. Следовательно, $0 \geqslant \kappa\|\boldsymbol{u}\|^2$, т.е. $\boldsymbol{u}=0$, что и требовалось доказать. □

Отметим, что на самом деле результат теоремы 3 справедлив, если предполагать, что $\boldsymbol{v}^0$ — только слабое решение, т.е. удовлетворяет (16).

Вообще, вопрос о единственности решений стационарной задачи открыт до настоящего времени. Известны случаи неединственности близких задач (результаты Юдовича, Рабиновича, Вельте и др., см., например, [9, гл. II, § 4]. Единственность решения стационарного уравнения Навье—

Стокса (5)–(7) установлена лишь в предположении, что ν достаточно велико или что заданные силы достаточно малы (см., например, [9, гл. II, § 1]).

Поэтому вопрос, какие дополнительные условия обеспечивают единственность, весьма актуален. В нашем случае это условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора. Теорема 3 придает новый качественный смысл теореме 1 о гидродинамической устойчивости, поскольку в условиях теоремы 1 решение стационарной задачи единственно по теореме 3.

3. Устойчивость периодических течений. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях жидкости в ограниченной области с фиксированным периодом $T > 0$.

Пусть Ω — n-мерная ($n = 2, 3$) ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^2. В бесконечном цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о T-периодических решениях системы Навье—Стокса (1)–(3). Ниже предполагается, что массовая сила $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t, x)$ является T-периодической по t, а при каждом фиксированном t квадратично суммируема по $x \in \Omega$.

Пусть $\boldsymbol{v}^0(t)$ — некоторое T-периодическое решение задачи (1)–(3). Аналогично (11) на области определения $D(L) = H_1 \cap \boldsymbol{W}_2^2(\Omega)$ рассмотрим оператор $L(t)$, определяемый формулой

$$L(t)\boldsymbol{z} \equiv \Pi\biggl(-\nu\Delta\boldsymbol{z} + \sum_{i=1}^{n} v_i^0(t)\frac{\partial\boldsymbol{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} z_i\frac{\partial\boldsymbol{v}^0}{\partial x_i}\biggr). \tag{20}$$

Согласно [12, гл. III, § 3] в H рассматривается линеаризованное на $\boldsymbol{v}^0(t)$ однородное уравнение

$$\frac{d\boldsymbol{z}}{dt} + L(t)\boldsymbol{z} = 0. \tag{21}$$

Решение уравнения (21) ищется в виде

$$\boldsymbol{z}(t) = e^{\sigma t}\boldsymbol{w}(t) \tag{22}$$

с T-периодической по t вектор-функцией $\boldsymbol{w}(t)$.

Комплексные значения параметра σ, для которых уравнение (21) имеет ненулевые решения вида (22) ищут, решая спектральную задачу

$$\frac{d\boldsymbol{w}}{dt} + L(t)\boldsymbol{w} + \sigma\boldsymbol{w} = 0, \quad \boldsymbol{w}(t+T) = \boldsymbol{w}(t). \tag{23}$$

Совокупность всех таких σ называется спектром устойчивости основного течения $\boldsymbol{v}^0(t)$ и обозначается $\mathfrak{S}$.

Утверждение 3 (см. [12, гл. III, § 3]). *Спектр устойчивости $\mathfrak{S}$ состоит из конечнократных собственных значений.*

Утверждение 4 (см. [12, гл. III, § 3]). *Пусть спектр устойчивости периодического решения $\boldsymbol{v}^0(t)$ лежит внутри левой полуплоскости, т.е. для всех собственных значений задачи* (23) *справедливо неравенство* $\operatorname{Re}\sigma \leqslant -\sigma_0 < 0$. *Тогда течение $\boldsymbol{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1.*

Укажем условие, обеспечивающее выполнение предположений утверждения 4.

Лемма 2. *Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой* (20), *выполнено условие равномерной κ-диссипативности* (13). *Тогда спектр задачи* (23) *лежит внутри левой полуплоскости*; *более того* $\operatorname{Re}\sigma \leqslant -\kappa$ *для всех* $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть найдется такое $\sigma_0 \in \mathfrak{S}$, что $\operatorname{Re}\sigma_0 > -\kappa$. Положим $\gamma = \kappa + \operatorname{Re}\sigma_0$. По определению $\gamma > 0$. Рассмотрим оператор $B(t) = L(t) + \sigma_0 I$, где I — единичный оператор в H. Тогда согласно условию (13) и сделанному предположению имеем

$$\operatorname{Re}(B(t)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \operatorname{Re}(L(t)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) + \operatorname{Re}\sigma_0(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geqslant \gamma\|\boldsymbol{u}\|^2, \quad \boldsymbol{u} \in D(L). \tag{24}$$

Как известно (см., например, [10, гл. II, § 2.1]), условие (24) обеспечивает единственность T-периодического решения уравнения (23). Следовательно, $\boldsymbol{w}(t) \equiv 0$. Таким образом, σ_0 не входит в спектральное множество $\mathfrak{S}$. Полученное противоречие доказывает лемму 2. $\square$

Из утверждения 4 и леммы 2 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть при каждом t для линеаризованного оператора $L(t)$, определяемого формулой* (20)*, выполнено условие равномерной κ-диссипативности* (13)*. Тогда периодическое течение $\boldsymbol{v}^0(t)$ асимптотически устойчиво по Ляпунову в пространстве H_1.*

Кроме того, условие (13) на $L(t)$ обеспечивает единственность T-периодического решения задачи (1)–(3).

Вопрос о единственности в общей ситуации, по-видимому, до сих пор остается открытым. Единственность решения задачи (19), (20) установлена в предположении «малости» неоднородности $\boldsymbol{F}$, в частности, при достаточной малости $\|\boldsymbol{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ (см. [6, с. 498]). В нашей ситуации имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $\boldsymbol{v}^0(t)$ есть T-периодическое решение задачи* (1)–(3)*. Пусть при каждом t для линеаризованного на $\boldsymbol{v}^0(t)$ оператора $L(t)$ выполнено условие равномерной κ-диссипативности* (13)*. Тогда $\boldsymbol{v}^0(t)$ является единственным T-периодическим решением задачи* (1)–(3)*.*

Доказательство. Заметим, что $\boldsymbol{v}^0(t)$ удовлетворяет соотношению (слабое решение)

$$\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}\right) + \nu(\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v})_1 + b(\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{v}), \quad \boldsymbol{v} \in H_1. \tag{25}$$

Пусть $\boldsymbol{u}^0$ — некоторое другое T-периодическое решение задачи (1)–(3). Положим $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}^0 - \boldsymbol{u}^0$. Вычтем друг из друга уравнения (25), соответствующие $\boldsymbol{v}^0$ и $\boldsymbol{u}^0$. Тогда получим соотношение

$$\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right) + \nu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_1 + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0, \quad \boldsymbol{v} \in H_1.$$

Полагая здесь $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ и используя (14) для вещественнозначных функций, получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + \nu\|\boldsymbol{u}(t)\|_1^2 + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^0, \boldsymbol{u}) = 0.$$

Согласно определению оператора $L(t)$ и (14) это равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 + (L(t)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0.$$

Отсюда в силу равномерной κ-диссипативности оператора $L(t)$ (13) и вещественнозначности функции $u(t)$ получим

$$\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \leqslant -2\kappa\|\boldsymbol{u}(t)\|^2.$$

Тогда при всех $\tau \in \mathbb{R}$ имеем

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \leqslant e^{-2\kappa(t-\tau)}\|\boldsymbol{u}(\tau)\|^2, \quad t \geqslant \tau. \tag{26}$$

Устремляя в (26) $\tau \to -\infty$ и используя периодичность (а значит, ограниченность функции $\boldsymbol{u}(\tau)$), убедимся, что $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$. □

Следствие. *Для разности решений $\boldsymbol{v}^0$ и $\boldsymbol{v}$ задачи* (1)–(3) *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{v}^0(t) - \boldsymbol{v}(t)\| \leqslant e^{-\kappa t}\|\boldsymbol{v}^0(0) - \boldsymbol{v}(0)\|, \quad t \geqslant 0. \tag{27}$$

Оценка (27) гарантирует экспоненциальную асимптотическую устойчивость (конвергентность) T-периодического решения $\boldsymbol{v}^0(t)$.

Отметим, что аналогично теореме 2 справедливо утверждение об условиях, обеспечивающих равномерную κ-диссипативность оператора $L(t)$. При этом используются оценки периодических решений задачи (1)–(3) (см., например, [11]). Можно показать, что (в частности) условие малости $\|\boldsymbol{F}\|_{L^\infty(0,T;H)}$ обеспечивает равномерную диссипативность оператора $L(t)$.

4. О принципе усреднения в периодической задаче для системы уравнений Навье—Стокса. Условие равномерной диссипативности линеаризованного оператора полезно также и при обосновании метода усреднения в задачах с быстро осциллирующей массовой силой. Опишем этот класс задач (см. [2, 4, 5, 11]).

В бесконечном цилиндре $\Omega \times R$ рассматривается задача о T/ω-периодическом решении

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \boldsymbol{f}(x, \omega t), \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0, \tag{28}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \tag{29}$$

$$\boldsymbol{u}(x, 0) = \boldsymbol{u}(x, T/\omega). \tag{30}$$

Здесь $T > 0$ — фиксированное число, $\omega > 0$ — «большой» параметр осцилляции. При этом предполагается, что функция $\boldsymbol{f}(x, \tau)$ — T-периодична по второму аргументу.

Наряду с (28)–(30) в Ω рассматривается усредненная стационарная задача

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} = \bar{\boldsymbol{f}} - \operatorname{grad} q, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{31}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\partial\Omega \times \mathbb{R}} = 0, \tag{32}$$

где в правой части фигурирует среднее значение $\bar{f}$ функции $\boldsymbol{f}(x, \tau)$, задаваемое формулой

$$\bar{\boldsymbol{f}}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{f}(x, \tau) d\tau.$$

Пусть $\boldsymbol{u}^0$ — некоторое решение задачи (31), (32). Рассмотрим линеаризованную на $\boldsymbol{u}^0$ задачу

$$-\nu \Delta \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{n} u_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_i} + \operatorname{grad} q = \bar{\boldsymbol{f}}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{33}$$

$$\int_\Omega q dx = 0, \quad \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{34}$$

Определим в пространстве H линейный оператор A_0, соответствующий задаче (33), (34):

$$A_0 \boldsymbol{z} \equiv \Pi \left[-\nu \Delta \boldsymbol{z} + \sum_{i=1}^{n} u_i^0 \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} z_i \frac{\partial \boldsymbol{u}^0}{\partial x_i} \right] \boldsymbol{z} \in H_1 \cap \boldsymbol{W}_2^2(\Omega), \tag{35}$$

где Π — проектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство H соленоидальных векторных полей.

Сформулируем в удобном для нас виде результат из [5, гл. XI, § 5] (см. также [2, 4, 5, 11]).

Утверждение 5. *Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, граница $\partial\Omega$ области класса C^2, неоднородность $\boldsymbol{f}(x, \tau)$ принадлежит классу $C(0, T; H)$. Пусть $\boldsymbol{u}^0$ — некоторое решение задачи (31), (32) и спектр линейного оператора (35) не содержит точек мнимой оси. Тогда найдутся такие значение параметра осцилляции $\omega_0 > 0$ и положительное число r, что при $\omega > \omega_0$ задача (28)–(30) имеет единственное в шаре $\|\boldsymbol{u}^0 - \boldsymbol{u}\|_1 \leqslant r$ (возможно, обобщенное) решение $\boldsymbol{u}^\omega$. При этом $\|\boldsymbol{u}^\omega - \boldsymbol{u}^0\|_1 \to 0$ при $\omega \to +\infty$.*

В силу леммы 1 и теоремы5 имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть оператор A_0, определяемый формулой (35), равномерно диссипативен. Тогда справедливо заключение утверждения 5. При этом решение $\boldsymbol{u}^0$ задачи (31), (32) единственно.*

Отметим, что единственность $\boldsymbol{u}^0$ придает новый качественный смысл обоснованию метода усреднения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. — М., 1981.
2. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
3. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
4. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование системы Навье—Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Диффер. уравн. — 2001. — *37*, № 5. — С. 696–705.
5. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
6. *Линь Цзя-цзяо* Теория гидродинамической устойчивости. — М., 1958.
7. *Лионс Ж. Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
8. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1989.
9. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
10. *Трубников Ю. А., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. — Наука и техника, 1986.
11. *Хацкевич В. Л.* О принципе усреднения в периодической по времени задаче для уравнений Навье—-Стокса с быстро осциллирующей массовой силой// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 5. — С. 764–777.
12. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. — Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1984.
13. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями// Усп. мех. — 2006. — *4*, № 3. — С. 26–129.

Хацкевич Владимир Львович
Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж
E-mail: `vlkhats@mail.ru`